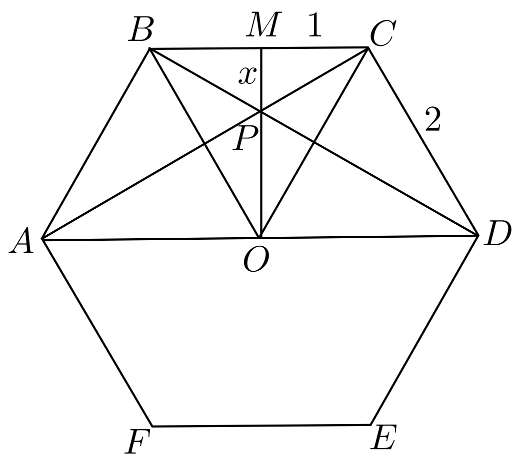
Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2013

1. Sea O el centro del hexágono. Unamos O con A, con B, con C y con D. Se forman tres triángulos equiláteros (y sus ángulos miden 60º). De aquí podemos proceder de varias formas:



Primera forma. Sea M el punto en que se intersectan OP con BC. Entonces OM es perpendicular a BC, M es el punto medio de BC y queremos encontrar la altura $x = PM$ de BPC. Por simetría, $\angle MOC$, $\angle BCA$, $\angle ACO$ y $\angle BDC$ miden todos 30º y $\angle ACD$ es recto. De aquí tenemos que los triángulos rectángulos MPC y CPD son semejantes en razón $1 : 2$, de donde $PC = 2x$. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo MPC para obtener: $1^2 + x^2 = (2x)^2$, de donde $3x^2 = 1$, así que $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y el área de BCP es $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Segunda forma. Los triángulos PCO, PCB y PBO son todos iguales. La altura de un triángulo equilátero de lado 2 mide $\sqrt{3}$ (por el teorema de Pitágoras, como arriba) así que el área de PBC es $\frac{1}{3}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Observemos que siempre queda un número par de casillas blancas; esto es porque al principio son 8 blancas, y las posibilidades en cada cambio son que se agreguen 2 blancas (si las casillas escogidas eran negras), que se conserve el número de blancas al hacer el cambio (cuando se escogen una negra y una blanca) y que se disminuya en número de blancas en 2 (si se escogieron dos blancas en el cambio). Por otro lado, podemos ver que podemos escoger el color en todas las casillas salvo una. Por ejemplo, numeremos las casillas como se indica en la figura.

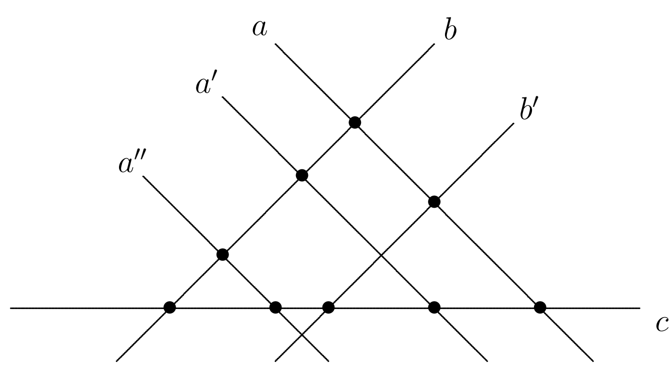
1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
16	15	14	13

Vamos modificando o no las casillas de acuerdo a su numeración, escogiendo o no la casilla que le sigue en número; por ejemplo, si queremos modificar el color de la casilla 1, la escogemos junto con la 2 (si no queremos modificarlo no escogemos esta pareja); después, si queremos modificar la 2, la escogemos junto con la 3, etc. En cada uno de estos pasos las casillas anteriores ya no vuelven a cambiar. La única que no podremos poner a nuestro gusto siguiendo este orden es la 16; de hecho, como vimos arriba, su color queda determinado de tal manera que el número de blancas sea par. Entonces el número de tableros distintos que se pueden obtener es 2^{15}.

3. Juntemos las fracciones que tienen el mismo denominador:

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\cdots+\frac{50^2-49^2}{99}-\frac{50^2}{101} \\ &= 1+\frac{(2-1)(2+1)}{3}+\frac{(3-2)(3+2)}{5}+\cdots+\frac{(50-49)(50+49)}{99}-\frac{50^2}{101} \\ &= \underbrace{1+1+\cdots+1}_{50}-\frac{2500}{101}\approx 50-25\approx 25. \end{aligned}$$

4. Como los números de intersecciones son todos distintos, tenemos que a, b y c son no paralelas entre sí. Por otro lado, el que el número de rectas que intersectan a b sea mayor que el de rectas que intesectan a a, alguna recta debe ser paralela a a; llamemos a' a esta recta. Si hubiera alguna otra recta no paralela a ninguna de a, b y c, entonces a y b completarían sus intersecciones pero c se intersectaría con exactamente 4 rectas, lo cual ya sabemos que no es cierto. Entonces las demás rectas son paralelas a alguna de a, b o c pero, por la misma razón no podría haber una recta paralela a c pues entonces c sólo tendría 3 intersecciones. Entonces se necesita una recta más paralela a a y otra paralela a b. En total son 6 rectas.



5. Tenemos que $(*)\ xy = 5(x+y)$.

Primera forma. Despejamos y de $(*)$: Factorizando tenemos $(x-5)y = 5x$ y de aquí vemos que $x \neq 5$ así que podemos dividir entre $x-5$:

$$(**)\ y = \frac{5x}{x-5}.$$

Pongamos distintos valores para x en $(**)$ que nos den una fracción entera. Como x y y son positivos, el primer valor que podría tomar x es 6 y en este caso $y = 30$. Para $x = 7, 8, 9$ la fracción no es entera; para $x = 10$ obtenemos $y = 10$. Como el papel de x y y es simétrico en la ecuación $(*)$, podemos sólo considerar los valores en que $x \leq y$. Veamos entonces que las parejas que tenemos hasta el momento son las únicas en que $x \leq y$. Escribamos

$$y = \frac{5x}{x-5} = 5\left(\frac{x}{x-5}\right) = 5\left(\frac{(x-5)-(x-5)+x}{x-5}\right) = 5\left(1 + \frac{5}{x-5}\right).$$

Para $x \geq 11$ tenemos que $\frac{5}{x-5} < 1$, de donde $y = 5\left(1 + \frac{5}{x-5}\right) < 5 \cdot 2 = 10 < x$ y esto termina la prueba.

Segunda forma. En $(*)$ vemos que el producto es múltiplo de 5 y así alguno de los dos (posiblemente ambos) es múltiplo de 5. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que x es múltiplo de 5: $x = 5a$. Sustituyendo en $(*)$ y cancelando 5 tenemos que $ay = 5a + y$ $(***)$, de donde $(a-1)y = 5a$. Como a y $a-1$ no tienen factores en común, entonces $a-1$ es divisor de 5, y así $a = 2$ (o sea $x = 10$) o $a = 6$ (o sea $x = 30$). Sustituyendo estos valores en $(***)$ tenemos, en el primer caso, $y = 10$ y, en el segundo, $y = 6$. Entonces la pareja (x, y) es $(10, 10)$ o $(30, 6)$ (o $(6, 30)$).

6. *Primera forma.* Hay 4 tipos de habitantes: Los VV que dicen la verdad y les preguntaron por alguien que dice la verdad (digamos que la cantidad de éstos es vv), los VM que dicen la verdad y les preguntaron por un mentiroso (y el número de éstos es vm), etc. Es claro que $vm + vv = mv + vv$ (pues ambos son la cantidad de V's), así que $vm = mv$.
En la primera instancia se salieron vm M's y mv V's. Entonces en la segunda instancia el número de habitantes que se salieron es $\frac{1}{5}mv$. Calculemos lo que nos pide el problema:

$$\frac{mv + \frac{1}{5}mv}{mv + mv + \frac{1}{5}mv} = \frac{1.2}{2.2} = \frac{6}{11}.$$

Segunda forma. Acomodemos a los habitantes en ciclos de manera que a cada uno le preguntaron sobre el que le sigue en el ciclo (esto es posible porque a cada quien le hicieron una pregunta y no preguntaron dos veces sobre la misma persona). Si en un ciclo todos son V o todos son M, ninguno de ellos se fue de la isla. Si hay de los dos tipos en un mismo ciclo, entonces se fueron exactamente el mismo número de V's que de M's en la primera instancia pues cada vez que se pasa en el ciclo de V a M o de M a V el segundo se va (en el primer caso porque V dice la verdad sobre M y, en el segundo, porque M dice mentira sobre V). Llamemos x al número de V's que se van en segunda instancia y y al número de V's que se fueron en primera instancia. Tenemos que $5x = y$. El número total de habitantes que se fueron es $5x + 5x + x = 11x$ y el número de V's que se fueron es $5x + x = 6x$ así que la proporción es $\frac{6}{11}$.