Algunas maneras de usar la potencia

José Antonio Gómez Ortega

Revista Tzaloa, año 1, número 4

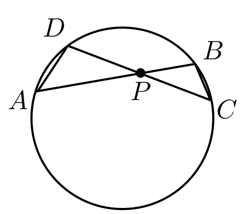
Hay en las matemáticas trucos que resaltan por la variedad de situaciones en las que se aplican. Para estas notas se eligió uno muy útil que sirve para decidir si algunos puntos están sobre una circunferencia. Recuerde que tres puntos determinan una única circunferencia (el circuncírculo del triángulo de vértices los tres puntos); cuando encontramos condiciones para que cuatro o más puntos esten sobre una circunferencia, estamos ante una situación que resulta, por lo menos, sorprendente. Pero bien podría ser tal situación un teorema, un problema o un ejercicio. Aquí se verán resultados que han surgido en diferentes contextos que tienen en común que para justificarlos o resolverlos es suficiente encontrar la *potencia* de algunos puntos.

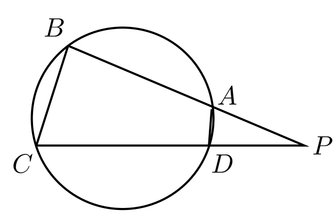
La potencia de un punto

Iniciemos con unas observaciones sobre la geometría de la circunferencia.

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

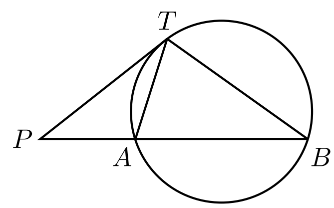
   El punto de intersección P se podrá encontrar sobre, dentro o fuera de la circunferencia. En el primer caso ambos miembros de la ecuación son cero (ya que P coincidiría con A ó B y con C ó D) y en tal caso la igualdad es inmediata. Si P se encuentra en el interior de la circunferencia o en el exterior (como se muestra en las figuras), los triángulos PAD y PCB son semejantes ya que los ángulos $\angle PAD$ y $\angle PCB$ son iguales (por abrir el mismo arco en el primer caso y, en el segundo por ser cíclico el cuadrilátero $ABCD$); y por la misma razón los ángulos $\angle PDA$ y $\angle PBC$ son iguales. Luego, la semejanza garantiza que $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ y entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.





2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y si la tangente en T, interseca en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

   Como el ángulo semiinscrito es igual al ángulo inscrito que abre el mismo arco, esto es $\angle ATP = \angle TBP$ y como $\angle TPA = \angle BPT$, resulta que los triángulos PTA y PBT son semejantes, por tanto $\frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT}$, luego $PT^2 = PA \cdot PB$.



Las dos observaciones son propiedades métricas útiles de la circunferencia, pero de mayor utilidad es que las condiciones algebraicas garantizan el hecho geométrico del cual se obtuvieron, es decir:

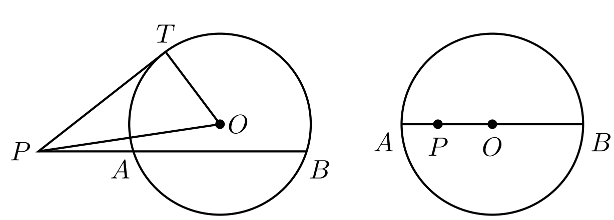
Proposición 1.

(a) *Si AB, CD son dos segmentos que se intersecan en P de manera que, como segmentos dirigidos, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ entonces A, B, C y D se encuentran sobre una circunferencia.*

(b) *Si A, B, T y P son puntos de manera que P, A, B están alineados y $PT^2 = PA \cdot PB$, entonces PT es tangente en T al circuncírculo del triángulo ABT.*

Demostremos estas afirmaciones. Para (a), sea D' la intersección de PC con $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABC. Por la primera observación, $PA \cdot PB = PC \cdot PD'$ y como por hipótesis $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, se tiene que $PD' = PD$, por lo que $D' = D$. Luego A, B, C y D se encuentran sobre la circunferencia $\mathcal{C}$.
Para (b), sea C la intersección de PT con $\mathcal{C}$ el circuncírculo del triángulo ABT. Por la primera observación, $PA \cdot PB = PC \cdot PT$ y como por hipótesis $PA \cdot PB = PT^2$, se tiene que $PT = PC$ luego $T = C$, por lo que PT es tangente en T a la circunferencia $\mathcal{C}$.

En resumen, para un punto P, una circunferencia $\mathcal{C}$, y cualquier recta por P que corte a $\mathcal{C}$ en puntos A y B (con la posibilidad de $A = B$) siempre ocurre que: $PA \cdot PB$ es igual a una constante. Esta cantidad constante se conoce como la **potencia de P respecto a $\mathcal{C}$.**
Si la circunferencia $\mathcal{C}$ tiene centro O y radio r y si PT es la tangente a $\mathcal{C}$ en T que pasa por P resulta que la potencia de P es PT^2, y por el Teorema de Pitágoras sucede que: $PT^2 = PO^2 - r^2$.



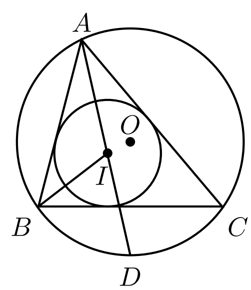
Si el punto P está dentro de la circunferencia $\mathcal{C}$ y si AB es una cuerda por P, entonces la potencia de P es $PA \cdot PB$. Si se trabaja con segmentos dirigidos, los segmentos PA y PB tienen signos opuestos, por lo que la potencia es negativa y su magnitud se puede calcular al trazar el diámetro

por P, la magnitud de la potencia es: $(r - PO)(r + PO) = r^2 - PO^2$. Así, para este caso, también la potencia resulta ser $PO^2 - r^2$.
Finalmente, para un punto P sobre la circunferencia se ha señalado que la potencia es cero, esto también coincide con $PO^2 - r^2$. Ahora se puede afirmar que la potencia de P con respecto a la circunferencia $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$; y será positiva, cero o negativa dependiendo si P se encuentra fuera, sobre o dentro de la circunferencia.

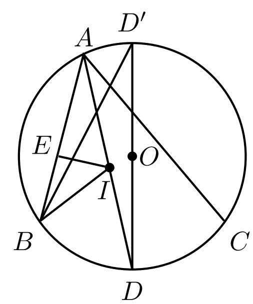
Como una primera ilustración del uso de la potencia se presenta una demostración del siguiente resultado que se atribuye a Euler, donde se dan condiciones necesarias y suficientes para asegurar que dadas dos circunferencias estas sean el circuncírculo e incírculo de un triángulo.

Fórmula de Euler.
Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo con circuncírculo (O, R) *e incírculo* (I, r) *es la igualdad:* $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Demostración. Sea A un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C} = (O, R)$, sean B y C los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con las tangentes desde A a la circunferencia $\mathcal{C}' = (I, r)$. El triángulo ABC admite a $\mathcal{C}'$ como incírculo si y sólo si BC es tangente a $\mathcal{C}'$. Pero como AB es tangente a $\mathcal{C}'$, la recta BC es tangente a $\mathcal{C}'$ si y sólo si BI es bisectriz del $\angle ABC$. Luego, si y sólo si $\angle ABI = \angle IBC$.



Sea D el punto de intersección de la recta AI con $\mathcal{C}$, que es el circuncírculo del triángulo ABC. Como AI es bisectriz, se tiene que: $\angle IAB = \angle CAI$. Además, $\angle CAI = \angle CBD$, ya que ambos ángulos abren el mismo arco CD, luego $\angle IAB = \angle CBD$.
Como el ángulo $\angle BID$ es un ángulo exterior del triángulo ABI, tenemos que: $\angle IAB = \angle BID - \angle ABI$. Además, como $\angle CBD = \angle IBD - \angle IBC$, al substituir estos valores en la ecuación del párrafo anterior se obtiene: $\angle BID - \angle ABI = \angle IBD - \angle IBC$. Luego, la condición $\angle ABI = \angle IBC$ es verdadera si y sólo si $\angle BID = \angle IBD$. Pero estos dos ángulos, son los ángulos opuestos a los lados BD y DI del triángulo IBD. El problema se reformula así: $\mathcal{C}' = (I, r)$ es incírculo del triángulo ABC si y sólo si $BD = DI$.



Sea E el punto de tangencia de la circunferencia $\mathcal{C}'$ con AB y D' el punto diametralmente opuesto a D en $\mathcal{C}$. Como los triángulos rectángulos AIE y $D'DB$ tienen los ángulos $\angle IAE$ y $\angle DD'B$ iguales por abrir el mismo arco BD, resulta que son semejantes. Esta semejanza garantiza que $\frac{AI}{IE} = \frac{D'D}{DB}$, por lo que: $AI \cdot DB = 2Rr$. Como la potencia del punto I con respecto a $\mathcal{C}$ es $AI \cdot ID = (R - OI)(R + OI)$, de las dos últimas igualdades se concluye que:

$$\frac{DB}{ID} = \frac{2Rr}{(R - OI)(R + OI)}.$$

Luego, $DB = ID$ si y sólo si $R^2 - OI^2 = 2Rr$.

Eje radical de dos circunferencias

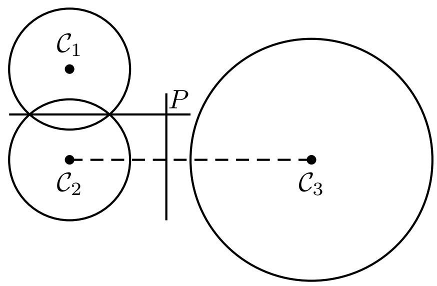
Dadas dos circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$ y $\mathcal{C}' = (Q, s)$, *¿para qué puntos P se cumple que la potencia a la circunferencia $\mathcal{C}$ es igual que la potencia a la circunferencia $\mathcal{C}'$?*
Se sabe que la potencia de P a $\mathcal{C} = (O, r)$ es $PO^2 - r^2$ y la potencia de P a $\mathcal{C}' = (Q, s)$ es $PQ^2 - s^2$, luego los puntos que se buscan son los que cumplan que $PO^2 - r^2 = PQ^2 - s^2$, o equivalentemente los puntos que satisfagan $PO^2 - PQ^2 = r^2 - s^2$.
Como $r^2 - s^2$ es una constante que no depende del punto P, se conoce que este conjunto de puntos o lugar geométrico es una recta perpendicula a OQ. Lo anterior se justifica de la siguiente manera: sean $d = r^2 - s^2$ la constante, P un punto del lugar geométrico y sea M el pie de la perpendicular desde P al segmento OQ. Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$PO^2 - OM^2 = MP^2 = PQ^2 - QM^2,$$

así $OM^2 - QM^2 = PO^2 - PQ^2 = d$, y entonces, $(OM + MQ)(OM - MQ) = d$. Por lo que, M cumple que $OM - MQ = \frac{d}{OQ}$. Ahora, veamos que solamente hay un punto M sobre la recta por O y Q que cumple esta ecuación; en efecto, si $ON - NQ = \frac{d}{OQ} = OM - MQ$, se tiene que $OM + MN - NQ = OM - MN - NQ$, por lo que $MN = 0$ y entonces $M = N$. Luego, todo punto del lugar geométrico está sobre la perpendicular a OQ por M. De la ecuación $OM^2 - QM^2 = PO^2 - PQ^2 = d$, se concluye que los puntos sobre la recta referida pertenecen al lugar geométrico. Este lugar geométrico se conoce como **el eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$**, y resulta ser perpendicular a la recta OQ.
Es útil señalar que cada punto P del eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ cumple que las longitudes de las tangentes desde P a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ son iguales, cuando existen.

Proposición 2.
*Para tres circunferencias (cuyos centros no son colineales), los tres ejes radicales de ellas tomadas por pares son concurrentes. El punto de concurrencia es llamado el **centro radical**.*

Demostración. Sea P el punto de intersección del eje radical de la primera y segunda circunferencias con el eje radical de la segunda y la tercera, luego P tendrá la misma potencia con respecto a las tres circunferencias; en particular, estará en el eje radical de la primera y tercera, por lo que este último eje pasará también por P.



Construcción del eje radical.

El eje radical de dos circunferencias no concéntricas, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, se puede construir con regla y compás de las siguientes maneras, que dependen de la posición de las circunferencias:
1. Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ se intersecan, como los puntos de intersección tienen potencia igual a cero para ambas circunferencias, se tiene que estos puntos forman parte del eje radical, y en este caso el eje radical pasa por tales puntos de intersección. Luego, se puede construir con regla y compás. En particular, cuando las dos circunferencias son tangentes, la tangente por el punto común es el eje radical, que es también construible.

2. Si las dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ no se cortan, se traza una tercera circunferencia $\mathcal{C}''$ que corte a las dos anteriores, cuyo centro no sea colineal con los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. La cuerda común de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}''$ cortará en P a la cuerda común de $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$, el punto P pertenece al eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, por lo que el eje radical será la recta por P perpendicular a la recta por los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, y ésta es construible.

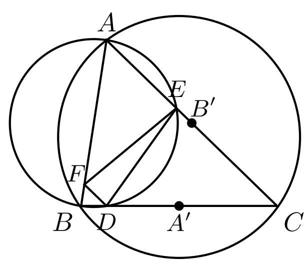
3. Si una de las circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$, $\mathcal{C}' = (Q, s)$ tiene radio cero, por ejemplo $r = 0$, se traza una circunferencia $\mathcal{C}'' = (R, t)$ que pase por O y corte a $\mathcal{C}'$, y cuyo centro no sea colineal con los centros de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. La tangente a $\mathcal{C}''$ por O intersecará a la cuerda común de $\mathcal{C}'$ y $\mathcal{C}''$ en un punto P, que pertenecerá al eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. Por lo que, el eje radical será la recta por P perpendicular a la recta por O y Q. Tal perpendicular es construible.

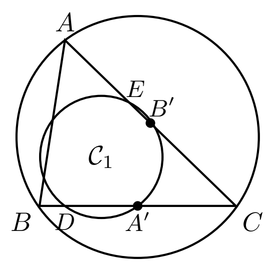
4. Si las circunferencias $\mathcal{C} = (O, r)$, $\mathcal{C}' = (Q, s)$ tienen radio cero, el eje radical es la mediatriz del segmento OQ, y la mediatriz es construible.

Ahora, se dará un ejemplo del uso de los ejes radicales, que servirá para demostrar uno de los resultados más sorprendentes de la geometría del triángulo donde se garantiza que sobre cierta circunferencia hay nueve puntos notables del triángulo.

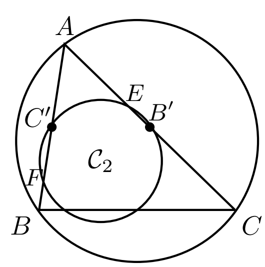
Ejemplo 1. *En un triángulo ABC, los puntos medios A', B', C' de los lados BC, CA, AB, los pies D, E, F, de las alturas AD, BE, CF, y los puntos medios K, L, M de los segmentos AH, BH, CH, donde H es el ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia, llamada* ***la circunferencia de los nueve puntos****.*

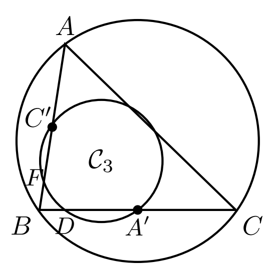
Como el cuadrilátero $ABDE$ está inscrito en la circunferencia de diámetro AB, se tiene que la potencia de C con respecto a tal circunferencia es $CD \cdot CB = CE \cdot CA$. Por ser A' y B' puntos medios de BC y CA se tiene que $CD \cdot CA' = CE \cdot CB'$, luego la Proposición 1 garantiza que D, A', E, B' se encuentran en una circunferencia, que se denotará por $\mathcal{C}_1$.





Análogamente, se demuestra que E, B', F, C' se encuentran en una circunferencia $\mathcal{C}_2$ y que F, C', D, A' sobre una circunferencia $\mathcal{C}_3$.



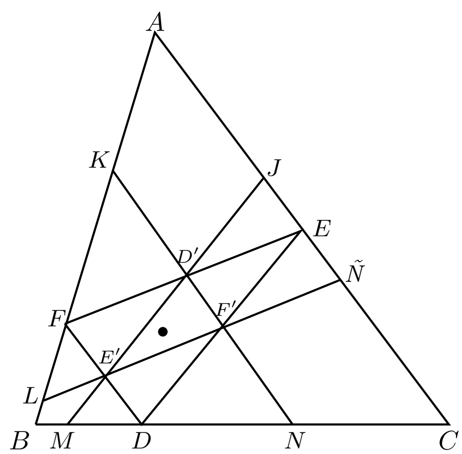


Claramente si dos de las tres circunferencias $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ coinciden entonces coinciden las tres. Por lo que D, E, F, A', B', C' se encuentran en una misma circunferencia $\mathcal{C}_1$. Ahora, las tres circunferencias deben coincidir ya que si, por ejemplo, $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$, entonces el eje radical de ellas es CA, si $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_3$ su eje radical es BC y si $\mathcal{C}_3 \neq \mathcal{C}_2$ su eje radical es AB, pero estos tres ejes radicales no son concurrentes, lo que es una contradicción a la existencia del centro radical.
Aplicando un razonamiento como el anterior en los triángulos HBC y HCA se demuestra que K, L, M también se encuentran en $\mathcal{C}_1$. Por lo que hay una circunferencia que pasa por los siguientes nueve puntos: A', B', C', D, E, F, K, L, M.

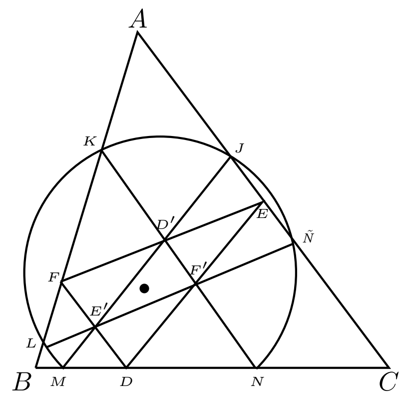
El uso de la potencia para asegurar que cuatro puntos son concíclicos y el hecho de que los tres ejes radicales que determinan tres circunferencias son concurrentes son trucos de uso recurrente, lo que convierte a estos trucos en una estrategia o un método. Si lo anterior aún no lo convence vea el siguiente ejemplo (y los cuatro ejercicios del final).

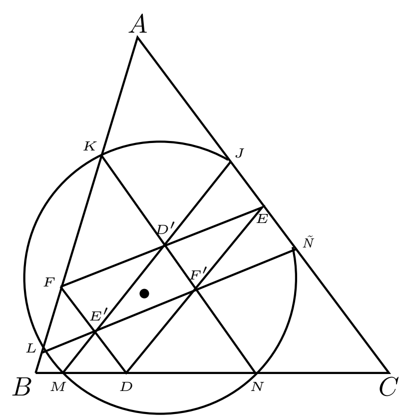
Ejemplo 2. *Sean ABC un triángulo y AD, BE, CF sus alturas. La circunferencia de diámetro EF corta a los lados CA y AB en J y K, respectivamente; la circunferencia de diámetro FD corta a AB y BC en L y M, respectivamente; y la circunferencia de diámetro DE corta a BC y CA en N y $\tilde{N}$, respectivamente. Entonces, los seis puntos J, K, L, $M, N, \tilde{N}$ están sobre una misma circunferencia, llamada* ***la circunferencia de Taylor****.*

Como el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico sucede que $\angle AEF = \angle ABC$ y $\angle AFE = \angle BCA$. Análogamente, se tiene que $\angle CED = \angle ABC$ y $\angle CDE = \angle CAB$ y que $\angle BFD = \angle BCA$ y $\angle CDF = \angle CAB$. La circunferencia de diámetro EF tiene centro en el punto medio D' de EF, luego $D'JE$ es isósceles, por lo que JD' es paralela a DE. Si E' y F' son los puntos medios de FD y DE respectivamente, se tiene también que $D'E'$ es paralela a DE y como $E'MD$ es isósceles $E'M$ es paralela a DE. Luego, J, D', E' y M son colineales. Análogamente K, D', F' y N son colineales y lo mismo L, E', F' y $\tilde{N}$.



Si las longitudes de DE, EF, FD se denotan por d, e, f, respectivamente, se tiene que $D'J = D'K = \frac{d}{2}$ y $MD' = ND' = \frac{e+f}{2}$. Por lo que, $D'K \cdot D'N = D'J \cdot D'M$. La Proposición 1, garantiza que M, N, J, K están en una circunferencia $\mathcal{C}_a$. Análogamente, $\tilde{N}, J, L, M$ están en una circunferencia $\mathcal{C}_b$ y $K, L, N, \tilde{N}$ están en una circunferencia $\mathcal{C}_c$. Claramente, si dos de las tres circunferencias $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_c$ coinciden, entonces coinciden las tres y asunto concluido. Ahora, las tres circunferencias deben coincidir, ya que si por ejemplo $\mathcal{C}_a \neq \mathcal{C}_b$, entonces el eje radical de ellas es MJ, si $\mathcal{C}_b \neq \mathcal{C}_c$ su eje radical es $L\tilde{N}$ y si $\mathcal{C}_c \neq \mathcal{C}_a$ su eje radical es NK, pero estos tres ejes radicales no son concurrentes, lo que es una contradicción a la existencia del centro radical.





Ejercicios

1. Sea ABC un triángulo con longitudes de sus lados a, b, c. Sean K, L, M, N, P, Q puntos sobre los lados BC, AB, CA, BC, AB, CA, respectivamente, de manera que $KB = BL = b$, $CM = CN = c$ y $AP = AQ = a$. Muestre que K, L, M, N, P y Q están sobre una misma circunferencia. Dicha circunferencia es llamada **circunferencia de Conway**.

   Sugerencia. Vea que $AP \cdot AL = AQ \cdot AM$, $BL \cdot BP = BK \cdot BN$ y $CN \cdot CK = CM \cdot CQ$, ahora termine como en el ejemplo de la circunferencia de Taylor.

2. Sea ABC un triángulo y A', B', C' los puntos medios de los lados BC, CA, AB, respectivamente. Tres circunferencias de un mismo radio se trazan, una con centro en A que corte a $B'C'$ en P y Q, otra con centro B que corte a $C'A'$ en R y S, y una más con centro en C que corte a $A'B'$ en T y U. Muestre que P, Q, R, S, T y U están sobre una misma circunferencia, llamada **primera circunferencia de Droz-Farny**.

   Sugerencia. El eje radical de las circunferencias centradas e B y C es la mediatriz de BC que pasa por A'. Luego, R, S, T, U están en una misma circunferencia $\mathcal{C}_a$. Análogamente, T, U, P, Q están en una circunferencia $\mathcal{C}_b$ y, P, Q, R, S están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_c$. Las tres circunferencias son la misma, en caso contrario sus ejes radicales no concurren.

3. (**IMO**, **2008/1**) Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia de centro en el punto medio de BC y que pasa por H corta a BC en A_1 y A_2. Análogamente,

se definen los puntos B_1 y B_2 sobre CA y los puntos C_1 y C_2 sobre AB. Muestra que los seis puntos A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, y C_2 están sobre una misma circunferencia. (Llamada **segunda circunferencia de Droz-Farny.)**

Sugerencia. Los ejes radicales de las circunferencias del problema harán ver que cada cuarteta de puntos (B_1, B_2, C_1, C_2), (C_1, C_2, A_1, A_2) y (A_1, A_2, B_1, B_2) es concíclica. Si estas tres circunferencias no son la misma hay un problema.

4. (**OMM**, **2008/6**). Las bisectrices internas de los ángulos CAB, ABC y BCA de un triángulo ABC concurren en I y cortan al circuncírculo de ABC en L, M y N, respectivamente. La circunferencia de diámetro IL corta al lado BC en D y E; la circunferencia de diámetro IM corta al lado CA en F y G; la circunferencia de diámetro IN corta al lado AB en H y J. Muestra que D, E, F, G, H, J están sobre una misma circunferencia. (Circunferencia cuyo nombre no he encontrado y a la cual por devoción olímpica le he puesto **circunferencia de San Carlos**.)

   Sugerencia. Los ejes radicales de las circunferencias del problema son las bisectrices internas del triángulo. Como en los problemas anteriores éstos ayudan a ver que cada cuarteta (F, G, H, J), (H, J, D, E) y (D, E, F, G) de puntos es concíclica. Las tres circunferencias son la misma, en caso contrario sus ejes radicales no concurren.

Bibliografía

1. R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.*
   Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

2. R. Johnson. *Advanced Euclidean Geometry.* Dover, 1960.