# Problemas de entrenamiento

Revista Tzaloa, año 1, número 1

**Problema E1-1.** (Principiante) Determina el menor entero positivo que no se puede escribir en la forma:

$$\frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$$

para algunos enteros positivos $a$, $b$, $c$ y $d$.

**Problema E1-2.** (Principiante) Determina todos los enteros positivos $n$ que cumplan, para alguna elección adecuada de los signos, la igualdad:

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2. \tag{1}$$

Por ejemplo, $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$ cumple. Pero 3 no, pues no hay manera de elegir los signos en $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm 3^2$ para obtener 3.

**Problema E1-3.** (Principiante) Sea $ABC$ un triángulo con incentro $I$. La recta $AI$ corta a $BC$ en $L$ y al circuncírculo del triángulo $ABC$ en $L'$. Demuestra que los triángulos $BLI$ y $L'IB$ son semejantes si y sólo si $AC = AB + BL$.

**Problema E1-4.** (Intermedio) Determina todos los enteros positivos $t$, $x$, $y$, $z$ que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} z + t &= xy, \\ zt &= x + y. \end{aligned}$$

**Problema E1-5.** (Intermedio) Considera un conjunto finito de $n$ puntos en el plano tales que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es al menos 1. Demuestra que hay a lo más $3n$ parejas de puntos a distancia 1.

## Soluciones de los problemas

**Solución E1-1.** Veamos primero que los números impares del 1 al 9, sí se pueden escribir en la forma indicada:

$$1 = \frac{2^2 - 2}{2^2 - 2}, \;\; 3 = \frac{2^3 - 2}{2^2 - 2}, \;\; 5 = \frac{16 - 1}{4 - 1} = \frac{2^5 - 2}{2^3 - 2},$$
$$7 = \frac{2^4 - 2}{2^2 - 2}, \;\; 9 = 2^3 + 1 = \frac{(2^3 + 1)(2^3 - 1)}{2^3 - 1} = \frac{2^6 - 1}{2^3 - 1}.$$

Ahora, los números pares del 2 al 10 los podemos obtener como sigue:

$$2 = 2 \cdot 1 = \frac{2^3 - 2^2}{2^2 - 2}, \;\; 4 = 2 \cdot 2 = \frac{2^4 - 2^3}{2^2 - 2}, \;\; 6 = 2 \cdot 3 = \frac{2^4 - 2^2}{2^2 - 2},$$
$$8 = 2 \cdot 4 = \frac{2^5 - 2^4}{2^2 - 2}, \;\; 10 = 2 \cdot 5 = \frac{2^6 - 2^2}{2^3 - 2}.$$

Demostraremos que 11 no se puede escribir en la forma indicada. Supongamos que $11 = \frac{2^a - 2^b}{2^c - 2^d}$ para algunos enteros positivos $a$, $b$, $c$ y $d$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b$ y $c > d$. Sean $m = a - b$, $n = c - d$ y $k = b - d$. La igualdad anterior es equivalente a la igualdad:

$$11(2^n - 1) = 2^k(2^m - 1).$$

Si $k > 0$, entonces el lado derecho de la ecuación anterior es un número par, mientras que el lado izquierdo es un número impar. Luego, $k = 0$. Por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a la ecuación:

$$11(2^n - 1) = 2^m - 1,$$

de donde es claro que $m > n$.
Si $m$ es impar, entonces $2^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod 3$. Luego,

$$11(2^n - 1) \equiv 2(2^n - 1) \equiv -2 \pmod 3,$$

de donde $2^n - 1 \equiv -1 \pmod 3$, es decir, $2^n \equiv 0 \pmod 3$ lo cual no es posible. Por lo tanto, $m$ es par. En este caso, $2^m \equiv (-1)^m \equiv 1 \pmod 3$ y en consecuencia, $11(2^n - 1) \equiv 0 \pmod 3$. Luego, $2^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$ o bien $2^n \equiv 1 \pmod 3$. De aquí que $n$ es par. Supongamos que $m = 2i$ y $n = 2j$ para algunos enteros positivos $i$ y $j$. Tenemos que $i > j$, pues $m > n$. Sustituyendo obtenemos que:

$$\begin{aligned} 11(2^{2j} - 1) &= 2^{2i} - 1 \\ 2^{2j}(2^{2(i-j)} - 11) &= -10 \\ 2^{2j-1}(11 - 2^{2(i-j)}) &= 5. \end{aligned}$$

Como $j \geq 1$, tenemos que $2^{2j-1} \geq 2$ y por lo tanto 2 divide a 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, el menor entero positivo que no se puede escribir en la forma indicada es el número 11.

**Solución E1-2.** Es fácil ver que para todo entero $m$ se tiene que:

$$4 = (m + 1)^2 - (m + 2)^2 - (m + 3)^2 + (m + 4)^2. \tag{2}$$

Luego, si $m = 0$ tenemos la expresión $4 = 1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2$, y si $m = 1$ tenemos que $5 = 1 + 4 = 1^2 + 2^2 - 3^2 - 4^2 + 5^2$. Demostraremos que todo entero positivo de la forma $4k$ y de la forma $4k + 1$, admite una expresión como (1). La demostración la haremos por inducción en $k$ . Si $k = 1$ no hay nada que hacer, pues ya vimos que 4 y 5 cumplen. Supongamos que para algún entero $k > 1$, los números $4k$ y $4k+1$ cumplen (1). Consideremos a los números $4(k+1)$ y $4(k+1)+1$. Tenemos que:

$$4(k+1) = 4k+4 = 4k + (4k+1)^2 - (4k+2)^2 - (4k+3)^2 + (4k+4)^2$$

y

$$4(k+1)+1 = (4k+1)+4 = 4k+1+(4k+2)^2 - (4k+3)^2 - (4k+4)^2 + (4k+5)^2.$$

La primera igualdad se obtiene haciendo $m = 4k$ en (2) y la segunda igualdad se obtiene haciendo $m = 4k+1$ en (2). Por lo tanto, los números $4(k+1)$ y $4(k+1)+1$ se pueden escribir en la forma dada en (1). Esto completa la inducción.

Demostraremos ahora que ningún entero positivo de la forma $4k+2$ ó $4k+3$ se puede escribir como en (1). En efecto, si $n = 4k+2$ entonces $n \equiv 0 \pmod 2$ y $\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2 \equiv \underbrace{\pm 1^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm (n-1)^2}_{\frac{n}{2}=2k+1 \text{ sumandos}} \equiv \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1 \pmod 2$. De aquí que si $n = 4k+2$ se pudiera escribir en la forma indicada, entonces la suma $\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+1 \text{ sumandos}}$ sería par para alguna elección adecuada de los signos. Pero esto no puede ser, pues esta suma tiene un número impar de sumandos impares. Luego, no es posible escribir a $n$ en la forma indicada.

Supongamos ahora que $n = 4k+3$. Entonces $n \equiv 1 \pmod 2$ y

$$\pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm n^2 \equiv \underbrace{\pm 1^2 \pm 3^2 \pm \cdots \pm n^2}_{\frac{n+1}{2}=2k+2 \text{ sumandos}} \equiv \pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1 \pmod 2.$$

Luego, si $n = 4k+3$ se pudiera escribir como en (1), entonces

$$\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+2 \text{ sumandos}} \equiv 1 \pmod 2$$

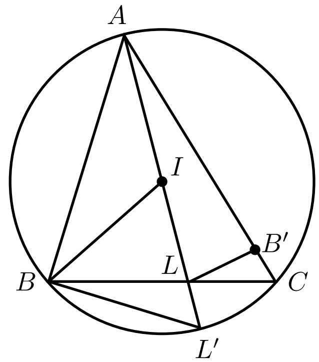
para alguna elección adecuada de los signos, es decir, $\underbrace{\pm 1 \pm 1 \pm \cdots \pm 1}_{2k+2 \text{ sumandos}}$ sería impar, para alguna elección adecuada de los signos. Pero esto no es posible, pues esta suma tiene un número par de sumandos impares. Por lo tanto, no es posible escribir a $n$ en la forma indicada.

En consecuencia, los números que se pueden escribir como en (1), son todos los de la foma $4k$ y los de la forma $4k+1$.

**Solución E1-3.** Sean $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ y $\gamma = \angle ACB$. Como $I$ es incentro del triángulo $ABC$, tenemos que $\angle IBL = \frac{\beta}{2}$ y $\angle CAL' = \frac{\alpha}{2}$. Pero $\angle CAL' = \angle CBL'$ por subtender el mismo arco. Luego, $\angle CBL' = \frac{\alpha}{2}$, de modo que

$$\angle IBL' = \angle IBL + \angle CBL' = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Por otra parte, el ángulo $BIL'$ es un ángulo exterior del triángulo $AIB$, de donde $\angle BIL' = \angle BAI + \angle ABI = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. De aquí que $\angle IBL' = \angle BIL'$ y el triángulo $L'BI$ es isósceles. Además, $\angle AL'B = \gamma$ por subtender el mismo arco.




Sea $u = \angle ILB$. Tenemos que los triángulos $BLI$ y $L'IB$ son semejantes si y sólo si $\angle IBL = \angle AL'B$ y $\angle BIL' = \angle ILB$, es decir, si y sólo si $\frac{\beta}{2} = \gamma$ y $\frac{\alpha+\beta}{2} = u$. Sea $B'$ el punto sobre $AC$ tal que $AB' = AB$ y sea $v = \angle CLB'$. Entonces, los triángulos $ABL$ y $AB'L$ son congruentes según el criterio LAL, de donde $B'L = BL$ y $\angle AB'L = \beta$. Luego, $\beta = \angle AB'L = v + \gamma$ ya que el ángulo $AB'L$ es exterior al triángulo $CB'L$. Sustituyendo la igualdad $\beta = v + \gamma$ en la igualdad $\frac{\beta}{2} = \gamma$, obtenemos que $v = \gamma$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\triangle BLI \sim \triangle L'IB \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{2} = \gamma \text{ y } \frac{\alpha+\beta}{2} = u \\
&\Leftrightarrow \quad v = \gamma \\
&\Leftrightarrow \quad B'L = B'C \\
&\Leftrightarrow \quad BL = B'C \\
&\Leftrightarrow \quad AB' + B'C = AB + BL \\
&\Leftrightarrow \quad AC = AB + BL.
\end{aligned}$$

**Solución E1-4.** Despejando $z$ de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, tenemos que $(xy - t)t = x + y$, de donde $y = \frac{t^2+x}{xt-1}$. Luego, $z = \frac{x^2+t}{xt-1}$.
Si $xt - 1 = 1$, entonces $xt = 2$, de donde $t = 1$, $x = 2$ ó $t = 2$, $x = 1$. En el primer caso, $y = 3$, $z = 5$ y en el segundo caso, $y = 5$, $z = 3$.
Supongamos que $xt - 1 \geq 2$, es decir, $xt \geq 3$. Si $2 \leq t \leq x$, entonces:

$$y = \frac{t^2+x}{xt-1} = 1 + \frac{(t^2+x)-(xt-1)}{xt-1} \leq 1 + \frac{x+1}{xt-1} \leq 1 + \frac{x+1}{2x-1}.$$

Si $x = 2$, entonces $t = x$ y $y = z = 2$.
Si $x \geq 3$, entonces $y \leq 1 + \frac{4}{5} < 2$, de donde $y = 1$. Luego, $1 = \frac{t^2+x}{xt-1}$. Despejando $x$ tenemos $x = \frac{t^2+1}{t-1} = t + 1 + \frac{2}{t-1}$. De aquí que $x$ es entero sólo si $t = 2$. Así, $x = 5$, $z = 3$. Análogamente, si $2 \leq x \leq t$, obtenemos la solución $t = 5$, $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$.
Por lo tanto, las soluciones son:

$$(t, x, y, z) = (1, 2, 3, 5), (2, 1, 5, 3), (2, 2, 2, 2), (2, 5, 1, 3), (5, 2, 3, 1).$$

**Solución E1-5.** Construyamos una gráfica con $n$ vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de la siguiente manera. Dos vértices serán unidos por una arista si y sólo si la distancia entre ellos es exactamente 1. Denotaremos por $d(v_i, v_j)$ a la distancia entre los vértices $v_i$ y $v_j$ medida en la gráfica, por $d(v_i)$ a la valencia del vértice $v_i$, y por $m$ a la mayor de todas las valencias. Afirmamos que $m \leq 6$.

En efecto, supongamos que $m \geq 7$ y sea $v$ un vértice con valencia $m$. Sean $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vértices adyacentes con $v$. Como $d(v, v_i) = 1$ y $d(v_i, v_{i+1}) \geq 1$ para $i = 1, \ldots, m$, con $v_{m+1} = v_1$, tenemos que $\angle v_i v v_{i+1} \geq 60°$ para $i = 1, \ldots, m$. Luego:

$$360° = \sum_{i=1}^{m} \angle v_i v v_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{m} 60° = 60° \cdot m \geq 7(60°) = 420° > 360°,$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $m \leq 6$. De aquí que $d(v_i) \leq 6$ para $i = 1, \ldots, n$.
Por otra parte, si $N$ denota el número total de aristas, tenemos que $2N = \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$, pues una arista del vértice $v_i$ al vértice $v_j$ contribuye en 1 a la valencia del vértice $v_i$ y en 1 a la valencia del vértice $v_j$, y por lo tanto en 2 a la suma de todas las valencias. Luego:

$$2N = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \leq \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n,$$

de donde $N \leq \frac{6n}{2} = 3n$. Es decir, hay a lo más $3n$ parejas de vértices a distancia 1, como queríamos.