Problemas de entrenamiento

Revista Tzaloa, año 1, número 2

Problema E1-6. (Principiante) Considera 50 puntos en el plano tales que no hay tres colineales. Cada uno de estos puntos se pinta usando uno de cuatro colores disponibles. Demuestra que hay al menos 130 triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

Problema E1-7. (Intermedio) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB = AD$ y $CB = CD$. Si la bisectriz del ángulo BDC corta a BC en L, AL corta a BD en M y $BL = BM$, determina el valor de $2\angle A + 3\angle C$.

Problema E1-8. (Intermedio) Demuestra que para cada entero positivo n existe un entero positivo k tal que la suma de los dígitos de k es n y la suma de los dígitos de k^2 es n^2.

Problema E1-9. (Intermedio) Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que los números $a^2 - 4b$ y $b^2 - 4a$ sean cuadrados perfectos.

Problema E1-10. (Avanzado) Sean H y O, respectivamente, el ortocentro y el circuncentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. La prolongación de la mediana AM del triángulo ABC, corta a Γ en el punto N y la circunferencia de diámetro AM corta a Γ en los puntos A y P. Demuestra que las rectas AP, BC y OH son concurrentes si y sólo si $AH = HN$.

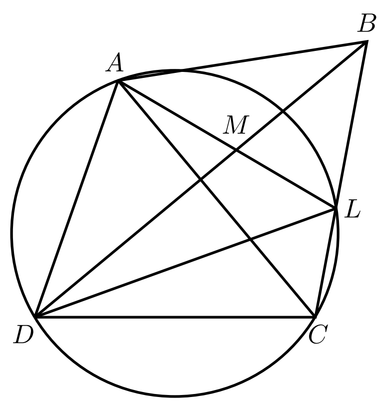
Soluciones de los problemas

Solución E1-1. Ya que $50 = 4(12) + 2$, entonces por el principio de las casillas hay al menos 13 puntos pintados del mismo color. Usando estos 13 puntos, se pueden construir $\binom{13}{3} = \frac{13!}{10!\cdot 3!} = 286$ triángulos distintos, ya que no hay tres puntos que sean colineales. Además, tenemos $\binom{13}{2} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = 78$ segmentos de recta que son lados de los 286 triángulos. Si consideramos uno de estos segmentos, digamos l, hay 11 puntos más que están pintados del mismo color que los extremos del segmento l. Un triángulo isósceles que tiene a l como lado desigual, tiene su tercer vértice en la mediatriz de l. Luego, como no hay tres puntos que sean colineales, hay a lo más dos de estos triángulos. Por lo tanto, hay a lo más $2 \cdot 78 = 156$ triángulos isósceles cuyos vértices están pintados del mismo color, y al menos $286 - 156 = 130$ triángulos escalenos cuyos vértices están pintados del mismo color.

Solución E1-2. Como $AB = AD$ y $CB = CD$, tenemos que AC y BD son perpendiculares, pues los triángulos ABD y BCD son isósceles y el punto medio de BD es el pie de las alturas trazadas desde A y desde C. Sean $\alpha = \angle BDL$ y $\beta = \angle ALB$. Como DL es bisectriz del ángulo $\angle BDC$, tenemos que $\angle BDC = 2\alpha$, y como el triángulo BCD es isósceles con $CB = CD$, tenemos que $\angle DBL = 2\alpha$. Como el triángulo LBM es isósceles con $BL = BM$, tenemos que $\angle BML = \beta$. Además, $\angle DLC = \angle BDL + \angle DBL = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$ por ser ángulo exterior del triángulo BDL. Por otro lado, $\beta = \angle BML = \angle DLA + \alpha$ ya que $\angle BML$ es un ángulo exterior del triángulo LMD. Luego, $\angle DLA = \beta - \alpha$. Por lo tanto,

$$180^\circ = \angle ALB + \angle DLA + \angle DLC = \beta + (\beta - \alpha) + 3\alpha = 2(\beta + \alpha),$$

de donde se sigue que $\alpha + \beta = 90^\circ$. Pero ya que $\angle AMD = \angle BML = \beta$ por ser opuestos por el vértice, y AC y BD son perpendiculares, tenemos que $\angle LAC = \alpha$. Luego, $\angle LAC = \angle LDC = \alpha$ y así el cuadrilátero $ALCD$ es cíclico.



Luego, $\angle DAC = \angle DLC = 3\alpha$ y $\angle DCA = \angle DLA = \beta - \alpha$. Como el triángulo BAD es isósceles y AC es perpendicular a BD, tenemos que $\angle BAC = \angle DAC = 3\alpha$, de donde $\angle A = 6\alpha$. Análogamente, como el triángulo BCD es isósceles, tenemos que $\angle BCA = \angle DCA = \beta - \alpha$, de donde $\angle C = 2(\beta - \alpha)$. Por lo tanto, $2\angle A + 3\angle C = 12\alpha + 6(\beta - \alpha) = 6(\alpha + \beta) = 6(90^\circ) = 540^\circ$.

Solución E1-3. Sea n un entero positivo y sea $s(n)$ la suma de los dígitos de n. Definimos

$$k(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i - 1}.$$

Claramente, $s(k(n)) = n$ ya que cada uno de los n sumandos de $k(n)$ son distintos y cada sumando aporta un dígito 1.
Demostraremos que $s((k(n))^2) = n^2$.
Tenemos que

$$\begin{aligned}
(k(n))^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^i-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} 10^{2^j-1}\right) \\
&= \sum_{0\le i,j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} \\
&= \sum_{i=j=0}^{n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} + \sum_{0\le i<j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} + \\
&\quad + \sum_{0\le j<i\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(10^{2^i-1})^2 + 2\left(\sum_{0\le i<j\le n-1} 10^{2^i-1}\cdot 10^{2^j-1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 10^{2^{i+1}-2} + \sum_{0\le i<j\le n-1} 2\cdot 10^{2^i+2^j-2}.
\end{aligned}$$

En la última igualdad, la primera suma tiene n dígitos 1, y la segunda suma tiene $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ dígitos 2. Como $j > i$, tenemos que $2^i + 2^j - 2 > 2^i + 2^i - 2 = 2^{i+1} - 2$, y por lo tanto, al sumar los resultados de las dos sumas, los dígitos del número que se obtiene son precisamente los dígitos de cada una de las dos sumas. Por lo tanto

$$s((k(n))^2) = n + 2\binom{n}{2} = n + n(n-1) = n + n^2 - n = n^2,$$

como queríamos.

Solución E1-4. Si $a^2 - 4b$ y $b^2 - 4a$ son cuadrados perfectos, entonces $a^2 - 4b \ge 0$ y $b^2 - 4a \ge 0$, de donde $4a \le b^2 \le \frac{a^4}{16}$ y por lo tanto $a \ge 4$. De manera análoga se tiene que $b \ge 4$. Si $a = 4$, entonces $16 \le b^2 \le \frac{4^4}{16} = 16$, de donde $b = 4$.
Supongamos que $a = b$. De la ecuación $a^2 - 4a = x^2$ tenemos que $(a-2)^2 - x^2 = 4$, la cual se puede escribir en la forma $(a-2-x)(a-2+x) = 4$. Como los dos factores del lado izquierdo de esta ecuación tienen la misma paridad, es decir, son ambos pares o ambos impares, y el número $a - 2 + x$ es positivo, tenemos que $a - 2 - x = a - 2 + x = 2$ y de aquí obtenemos que $a = 4$. Por lo tanto, si $a = b$, entonces $a = b = 4$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b \ge 5$. Entonces tenemos que

$$x^2 = a^2 - 4b > a^2 - 4a = (a-3)^2 + 2a - 9 > (a-3)^2 + 2(5) - 9 > (a-3)^2,$$

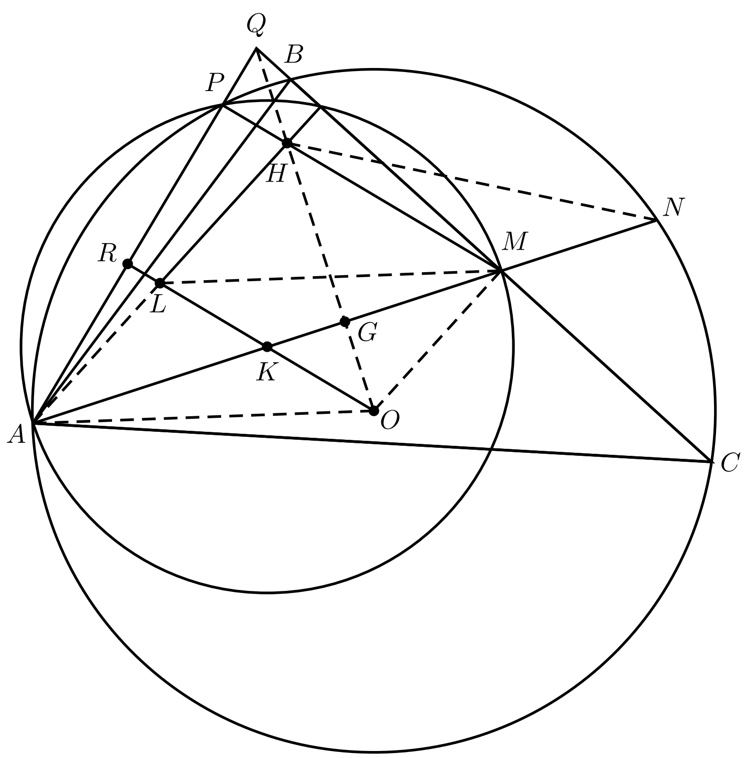
y en consecuencia $a^2 > x^2 > (a-3)^2$. Luego, $x^2 = (a-2)^2$ ó $x^2 = (a-1)^2$.
Si $x^2 = (a-2)^2$, entonces $a^2 - 4b = (a-2)^2$ y por lo tanto $b = a - 1$. Se sigue que

$$y^2 = b^2 - 4a = (a-1)^2 - 4a = a^2 - 6a + 1 = (a-3)^2 - 8,$$

y así $(a-3-y)(a-3+y) = 8$. Como los dos factores del lado izquierdo de esta ecuación tienen la misma paridad, uno de ellos es 4 y el otro es 2. En ambos casos, se obtiene que $a = 6$ y $b = 5$.

Consideremos ahora el caso $x^2 = (a-1)^2$. Tenemos que $a^2 - 4b = (a-1)^2$, de donde se sigue que $4b = 2a - 1$. Pero esto no es posible, pues $4b$ es par y $2a-1$ es impar.
Por lo tanto, las parejas (a, b) son $(4, 4)$, $(5, 6)$ y $(6, 5)$.

Solución E1-5. Primero demostraremos que P, H y M son colineales.
Sea L el punto medio de AH y sea K el punto de intersección de LO y AM.



Es un resultado conocido que $AH = 2OM$ (ver por ejemplo, capítulo 2 de [?]). Luego, $AL = OM$ y como AL y OM son perpendiculares a BC, se sigue que $ALMO$ es un paralelogramo. De aquí que K es el punto medio de AM. Luego, K es el centro de la circunferencia de diámetro AM. Por otro lado, AP es la cuerda común de la circunferencia circunscrita del triángulo ABC y de la circunferencia de diámetro AM. Entonces, OK es perpendicular a AP en su punto medio, al que llamaremos R. Como LK es paralela a HM (por ser L y K puntos medios de AH y AM), PH es paralela a RL (por ser R y L puntos medios de AP y AH) y los puntos R, L y K son colineales, tenemos que P, H y M son colineales.
Sea Q el punto de intersección de AP con BC. Como P está en la circunferencia de diámetro AM, tenemos que MP y AQ son perpendiculares. También tenemos que AH es perpendicular a QM. Luego, H es el ortocentro del triángulo AQM, de modo que QH es perpendicular a AM. Por lo tanto, Q, H y O son colineales si y sólo si HO es perpendicular a AN.
Sea G el punto medio de AN. Claramente $AH = HN$ si y sólo si HG es perpendicular a la cuerda AN. Como $AB \neq AC$, el punto O no está en la recta AN. Luego, OG es perpendicular a AN. Por

lo tanto, $AH = HN$ si y sólo si HO es perpendicular a AN.
De lo anterior concluimos que $AH = HN$ si y sólo si Q, H y O son colineales, es decir, si y sólo si AP, BC y OH son concurrentes.