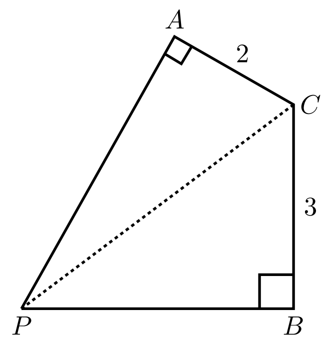
Problemas de entrenamiento

Revista Tzaloa, año 1, número 3

Problema E1-11. (Principiante) Si $CA = 2$, $CB = 3$, $\angle CAP = 90^\circ$, $\angle PBC = 90^\circ$ y $\angle APB = 60^\circ$, ¿cuánto mide PC?



Problema E1-12. (Intermedio) Demuestra que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} i x_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i$$

se cumple para todo entero $n \geq 2$ y todos los números reales no negativos $x_1, \ldots, x_n$.

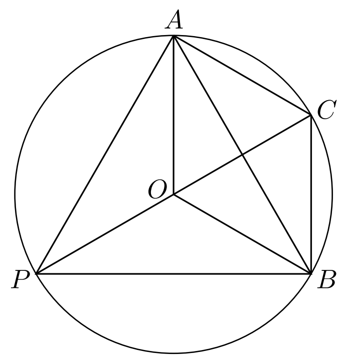
Problema E1-13. (Intermedio) En un paralelogramo están marcados el centro y los puntos medios de los lados. Considera todos los triángulos cuyos vértices están en estos puntos marcados. Ahora, en cada triángulo marca los puntos medios de los lados y los puntos medios de la medianas. ¿Cuántos puntos marcados habrá en total?

Problema E1-14. (Avanzado) Con un plano, ¿cuál es el máximo número de caras de un cubo, un octaedro y un dodecaedro que puedes cortar?

Problema E1-15. (Avanzado) Determina el número de enteros $n > 1$ que cumplen que $a^{13} - a$ es divisible entre n para todo entero a.

Soluciones de los problemas

Solución E1-1. (Irving Daniel Calderón Camacho, Estado de México). Como $\angle CAP + \angle PBC = 180°$, el cuadrilátero $PACB$ es cíclico. Como $\angle CAP = 90°$, entonces $PACB$ está inscrito en la circunferencia de diámetro PC.



Sea O el centro de la circunferencia, punto medio de PC, entonces tenemos que $\angle AOB = 2(\angle APB) = 120°$. Sea r el radio de la circunferencia circunscrita a $PACB$. Aplicando la ley de cosenos al triángulo AOB, obtenemos

$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(120°) = 3r^2.$$

Por otro lado, aplicando la ley de cosenos al triángulo ABC, obtenemos

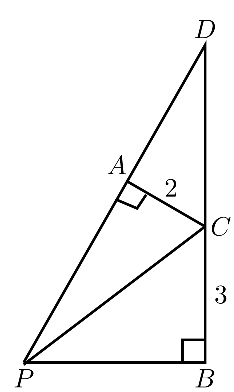
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2(CA)(CB)\cos(120°).$$

De las dos ecuaciones anteriores se sigue que

$$3r^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \tfrac{1}{2} = 19,$$

por lo que concluimos que $r = \sqrt{\frac{19}{3}}$. Finalmente, como $PC = 2r$, obtenemos $PC = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$.

Segunda Solución. Sea D la intersección de PA y BC. Como el triángulo DPB es rectángulo y $\angle DPB = 60°$, entonces $\angle BDP = 30°$. Luego, el triángulo BPD es la mitad de un triángulo equilátero de lado $2PB$, de donde $PB = \frac{1}{\sqrt{3}}DB$.



Ahora bien, como los ángulos del triángulo DCA miden $30°$, $60°$ y $90°$, tenemos que $CD = 2CA = 4$ y $DB = 7$, luego $PB = \frac{7}{\sqrt{3}}$. Entonces,

$$PC^2 = PB^2 + BC^2 = \frac{49}{3} + 9 = \frac{76}{3},$$

de donde $PC = \sqrt{\frac{76}{3}} = 2\sqrt{\frac{19}{3}}$.

Solución E1-2. (Irving Daniel Calderón Camacho, Estado de México). Se hará una demostración por inducción sobre n, pero antes demostraremos por casos la siguiente desigualdad, la cual se cumple para cualquier número real x no negativo y para todo entero $n \geq 2$.

$$(n+1)x \leq n + x^{n+1} \tag{1}$$

Comencemos transformando la desigualdad (1) mediante las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}(n+1)x \leq n + x^{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n - nx + x^{n+1} - x \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq n(1-x) - (1-x)(x^n + x^{n-1} + \cdots + x) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq (1-x)\big(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\big).\end{aligned}$$

Para $x = 1$, se cumple la igualdad. Si $x < 1$, tenemos que $0 < 1 - x$ y

$$n > x^n + x^{n-1} + \cdots + x \Leftrightarrow 0 < n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x),$$

por lo que concluimos

$$0 < (1-x)\big(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\big).$$

Si $x > 1$, tenemos que $0 > 1 - x$ y

$$n < x^n + x^{n-1} + \cdots + x \Leftrightarrow 0 > n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x),$$

por lo que concluimos

$$0 < (1-x)\big(n - (x^n + x^{n-1} + \cdots + x)\big).$$

Con esto terminamos la demostración de (1). Ahora, comenzamos nuestra prueba por inducción. Para $n = 2$, tenemos que

$$x_1 + 2x_2 \leq \binom{2}{2} + x_1 + x_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_2^2 - 2x_2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x_2 - 1)^2,$$

donde la última desigualdad es evidente. Ahora, supongamos que la desigualdad se cumple para algún entero $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

Usando la fórmula de Pascal, tenemos

$$\binom{n+1}{2} = \binom{n}{2} + \binom{n}{1} = \binom{n}{2} + n\ .$$

Sea x_{n+1} un número real no negativo cualquiera, usando (1) tenemos

$$(n+1)x_{n+1} \leq n + x_{n+1}^{n+1} \ .$$

Finalmente, sumando las dos últimas desigualdades obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} ix_i \leq \binom{n}{2} + n + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} ix_i \leq \binom{n+1}{2} + \sum_{i=1}^{n+1} x_i^i.$$

Eso completa nuestra prueba por inducción y la demostración de la desigualdad.
Segunda Solución. Para cada número real no negativo x y para cada entero positivo k tenemos, por la desigualdad media aritmética-media geométrica, que

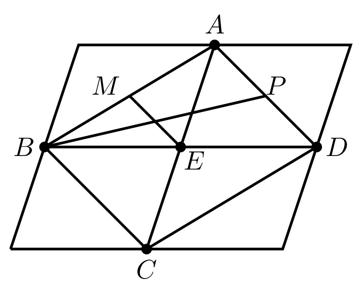
$$x^k + k - 1 = x^k + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k-1} \geq k\sqrt[k]{x^k \times 1 \times \cdots \times 1} = kx.$$

La igualdad se da, para $k \geq 2$, si y sólo si $x = 1$.
Luego, utilizando lo anterior para cada x_i y sumando, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i \leq \sum_{i=1}^{n}((i-1) + x_i^i) = \binom{n}{2} + \sum_{i=1}^{n} x_i^i.$$

La igualdad se da si y sólo si $x_2 = \cdots = x_n = 1$ y $x_1 \geq 0$ es arbitraria.

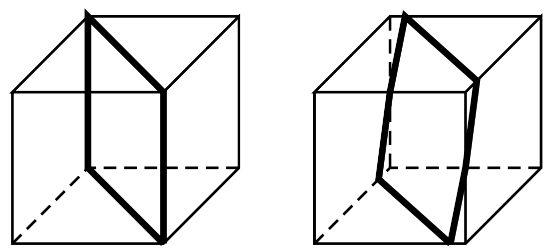
Solución E1-3. Denotemos por A, B, C, D y E, a los puntos medios de los lados del paralelogramo y a su centro respectivamente, como se muestra en la figura. Hay 8 triángulos cuyos vértices están en estos puntos, cuatro que tienen un vértice en E y cuatro para los cuales E es punto medio de uno de sus lados.



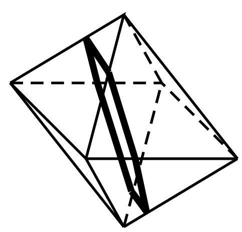
Consideremos los triángulos que tienen un vértice en E y marquemos los puntos medios de los lados y las medianas. Al marcar los puntos medios de los lados AB, BC, CD, AD, AE, BE, CE y DE, obtenemos 8 puntos. Si marcamos ahora los puntos medios de las medianas, obtenemos 12 puntos más, pues cada triángulo tiene 3 medianas.
Ahora consideremos los triángulos para los cuales E es punto medio de uno de sus lados. Por ejemplo, en el triángulo ABD los puntos medios de los lados ya están marcados. Llamemos M al punto medio del lado AB, entonces el punto medio de la recta EM está marcado, ya que EM es mediana del triángulo ABE. Observemos que como E es punto medio de BD, la recta EM es paralela a AD. Esto implica que el punto medio de la mediana BP del triángulo ABD está en EM. Además, como P es punto medio de AD, el punto de intersección de EM y BP es el punto medio de EM. Esto implica que los puntos medios de las medianas del triángulo ABD que pasan por B y D ya están marcados. La tercera mediana del triángulo ABD es AE, cuyo punto medio ya está marcado. Es decir, con el triángulo ABD no marcamos ningún nuevo punto y lo mismo pasa con los otros tres triángulos para los cuales E es el punto medio de uno de sus lados.

Por lo tanto, al final habrá $5+8+12=25$ puntos marcados.

Solución E1-4. Un plano está definido por tres puntos, es decir, dados tres puntos en el espacio hay un sólo plano que los contiene. Entonces, al cortar un poliedro con un plano, el plano no puede cortar más de dos aristas de cada cara (ya que si no el plano sería la cara). Además, si queremos maximizar el número de caras cortadas, no debe de cortar todas las aristas que salen de un mismo vértice. Analicemos los tres poliedros.
Por los argumentos anteriores, el plano no puede cortar más de $\frac{2(6)}{2}=6$ aristas, ya que un cubo tiene 6 caras. Por lo tanto, no puede cortar más de 6 caras. En la figura, presentamos un tal corte del cubo: empezamos con un plano que contiene una diagonal y lo rotamos un poco para cortar las 6 caras.



Como las caras del octaedro son triángulos, si una cara es cortada por el plano, de las otras tres caras que pasan por cada uno de sus vértices hay al menos una que no es cortada por el plano. Por lo tanto, se pueden cortar a lo más 6 caras, una manera de hacerlo es la siguiente.



Por los argumentos anteriores, el máximo número de aristas que se pueden cortar es $\frac{2(12)}{2}=12$. Si colocamos el dodecaedro en un plano y cortamos con un plano paralelo, es fácil ver que el máximo número de caras cortadas es 10. Veamos que este es el mejor corte. Tomemos una cara que es cortada con el plano. Si el plano corta las cinco caras adyacentes a ella, corta sólo estas 6 caras. Entonces, por cada cara cortada, al menos una de las caras adyacentes no es cortada. Esto implica que el máximo número de caras cortadas es 10.

Solución E1-5. (María del Rosario Soler Zapata y Martín Velasco Hernández, Chiapas). Supongamos que $n>1$ cumple la condición. Entonces, $n|2^{13}-2$ y $n|3^{13}-3$, por lo que $n|3^{13}-3-2^{13}+2$, esto es, $n|3^{13}-2^{13}-1$. Como $2^{13}-2=8,190=2\times3^2\times5\times7\times13$ y $3^{13}-2^{13}-1=1,594,323-8,192-1=1,586,130=2\times3\times5\times7^2\times13\times83$, entonces los números primos que aparecen en la descomposición en primos de n pertenecen al conjunto $A=\{2,3,5,7,13\}$ y tienen exponente a lo más 1.
Ahora, si a es par (o impar), entonces a^{13} es par (o impar), por lo que $a^{13}-a$ es par. Luego, $2|a^{13}-a$ para todo entero a, y por lo tanto, $n=2$ cumple la condición.

Por otra parte, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que para todo entero a se cumple que

$$\begin{aligned} a^3 &\equiv a \pmod 3, & (2)\\ a^5 &\equiv a \pmod 5, & (3)\\ a^7 &\equiv a \pmod 7, & (4)\\ a^{13} &\equiv a \pmod{13}. & (5) \end{aligned}$$

Veamos que si $n \neq 2$ está en A, entonces n cumple la condición, es decir, $a^{13} \equiv a \pmod n$ para todo entero a.

1. De (2) se sigue que $a^{12} \equiv a^4 \pmod 3$, luego $a^{13} \equiv a^5 \equiv a^3 \equiv a \pmod 3$, por lo que $a^{13} \equiv a \pmod 3$.
2. De (3) se sigue que $a^{10} \equiv a^2 \pmod 5$, luego $a^{13} \equiv a^5 \equiv a \pmod 5$, por lo que $a^{13} \equiv a \pmod 5$.
3. De (4) se sigue que $a^{13} \equiv a^7 \pmod 7$, luego $a^{13} \equiv a \pmod 7$.
4. De (5) se sigue que $n = 13$ cumple la condición.

De lo anterior, se sigue que todos los elementos de A satisfacen la condición. Como cualesquiera dos elementos de A son primos relativos, entonces todo entero de la forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 13^e$ (con a, b, c, d, e enteros mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1) también será divisor de $a^{13} - a$ para todo entero a. Luego, los enteros $n > 1$ que cumplen el problema son precisamente los divisores positivos distintos de 1 del número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por lo tanto, la respuesta es $2^5 - 1 = 31$ enteros.

Segunda Solución. Sea $n > 1$ un entero tal que $a^{13} - a$ es divisible entre n para todo entero a. Tenemos que p^2, con p primo, no divide a n, ya que p^2 no divide a $p^{13} - p$. Luego, n es producto de primos distintos. Como n debe dividir al número $a^{13} - a$ para todo entero a, en particular n debe dividir al número $2^{13} - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Ahora, es claro que para todo entero a se cumple que $a^2 \equiv a \pmod 2$, ya que $a^2 - a = a(a-1)$ es producto de dos enteros consecutivos. Luego,

$$a^{13} = (a^2)^6 \cdot a \equiv a^6 \cdot a \equiv (a^2)^3 \cdot a \equiv a^3 \cdot a \equiv a^4 \equiv (a^2)^2 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2.$$

Análogamente, tenemos que $a^3 \equiv a \pmod 3$ para todo entero a, pues $a^3 - a = a(a-1)(a+1)$ es producto de tres enteros consecutivos. Luego,

$$a^{13} = (a^3)^4 \cdot a \equiv a^4 \cdot a = a^3 \cdot a^2 \equiv a \cdot a^2 = a^3 \equiv a \pmod 3.$$

Usando congruencias módulo 5, 7 y 13 es fácil demostrar (se deja al lector) que para todo entero a,

$$a^5 \equiv a \pmod 5,\ a^7 \equiv a \pmod 7 \text{ y } a^{13} \equiv a \pmod{13},$$

y como en los dos casos anteriores se sigue que $a^{13} \equiv a \pmod 5$ y $a^{13} \equiv a \pmod 7$.
Luego, $a^{13} \equiv a \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13}$ para todo entero a, y por lo tanto los enteros $n > 1$ que cumplen el problema son precisamente los divisores positivos distintos de 1 del número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por lo tanto, la respuesta es $2^5 - 1 = 31$ enteros.