Problemas de entrenamiento

Revista Tzaloa, año 1, número 4

Problema E1-16. (Intermedio) Para cada entero positivo n, denotamos por $a(n)$ al producto de los dígitos de n.
(a) Demuestra que $a(n) \leq n$.
(b) Determina todas las soluciones de la ecuación $n^2 - 17n + 56 = a(n)$.

Problema E1-17. (Intermedio) Sea S un conjunto de 2010 puntos del plano tales que 3 cualesquiera de ellos no son colineales. Denotemos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las rectas (extendidas indefinidamente en ambas direcciones) que determinan dos puntos de S. Demuestra que es posible colorear los puntos de S con a lo más dos colores, de modo que para cualesquiera dos puntos, p y q de S, el número de rectas en $\mathcal{L}$ que *separan* a p de q es impar si y sólo si p y q tienen el mismo color.
Nota: Una recta l *separa* dos puntos p y q si p y q están en lados opuestos de l pero ninguno de los dos está en l.

Problema E1-18. (Intermedio) Si se ponen tres puntos en una circunferencia, ¿cuál es la probabilidad de que estén en una misma semicircunferencia?

Problema E1-19. (Avanzado) En un triángulo acutángulo ABC, los puntos E y F están en AC y BC, respectivamente. Las rectas BE y AF se cortan en un punto T, de manera que $\frac{AT}{TF} = 4$ y $\frac{BT}{TE} = 3$. Encuentra el valor de $\frac{CE}{EA}$.

Problema E1-20. (Avanzado) Sea $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2010})$ una sucesión de enteros no necesariamente distintos, cada uno de ellos tomados del intervalo $[-1005, 1005]$. Además, supongamos que la suma de todos los términos de A es igual a 1. Demuestra que existe una subsucesión de A tal que la suma de sus términos es igual a cero.

Soluciones de los problemas

Solución E1-1. (a) Supongamos que n tiene k dígitos $b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1$, con $k \geq 1$, de modo que $n = b_k b_{k-1} \cdots b_1$ es la representación decimal de n. Entonces

$$\begin{aligned} a(n) &= b_k \cdot b_{k-1} \cdot \ldots \cdot b_1 \\ &\leq b_k \cdot \underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{k-1} \quad (\text{ya que} \quad b_i \leq 9) \\ &= 9^{k-1} \cdot b_k. \end{aligned}$$

Sin embargo, $n = b_1 + 10b_2 + \cdots + 10^{k-1}b_k \geq 10^{k-1}b_k \geq 9^{k-1}b_k \geq a(n)$. Luego, $n \geq a(n)$.
(b) Primero consideremos el caso en que n es un número de un dígito. Entonces, $a(n) = n$. Resolviendo la ecuación $n^2 - 17n + 56 = n$ encontramos las soluciones $n = 4$ ó $n = 14$. Luego, $n = 4$ es la única solución de un dígito.
Ahora, buscaremos soluciones con más de un dígito. Aplicando la desigualdad del inciso anterior, tenemos que $n^2 - 17n + 56 \leq n$, es decir, $(n-4)(n-14) \leq 0$. Resolviendo esta desigualdad obtenemos que $4 \leq n \leq 14$. Como n tiene más de un dígito, los posibles valores para n son $10, 11, 12, 13$ y 14. Verificando cada uno de estos valores, vemos que ninguno es solución de la ecuación.
Por lo tanto, $n = 4$ es la única solución.
Solución alternativa para (b). Del inciso (a) tenemos que $a(n) \leq n$. Como todos los dígitos de n son no negativos, tenemos que $0 \leq a(n)$. Como $n^2 - 17n + 56 = a(n)$, entonces

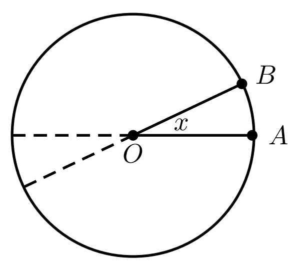
$$0 \leq n^2 - 17n + 56 \leq n.$$

Consideremos primero la restricción $n^2 - 17n + 56 \geq 0$. Resolviendo la ecuación $n^2 - 17n + 56 = 0$ encontramos que la expresión cuadrática $n^2 - 17n + 56$ se factoriza como $(n - \frac{1}{2}(17 - \sqrt{65}))(n - \frac{1}{2}(17 + \sqrt{65}))$. Como $n^2 - 17n + 56 \geq 0$, entonces $n \geq \frac{1}{2}(17 + \sqrt{65}) > \frac{1}{2}(17 + \sqrt{64}) = 12\frac{1}{2}$ ó $n \leq \frac{1}{2}(17 - \sqrt{65}) < \frac{1}{2}(17 - \sqrt{64}) = 4\frac{1}{2}$. Pero n es un entero, luego $n \geq 13$ ó $n \leq 4$.
Consideremos ahora la restricción $n^2 - 17n + 56 \leq n$. Entonces, $(n-4)(n-14) \leq 0$ y de aquí se sigue que $4 \leq n \leq 14$.
Combinando las dos restricciones sobre n, tenemos que los valores posibles de n son $n = 4$, $n = 13$ ó $n = 14$. Verificando cada uno de estos valores, vemos que sólo $n = 4$ es solución.

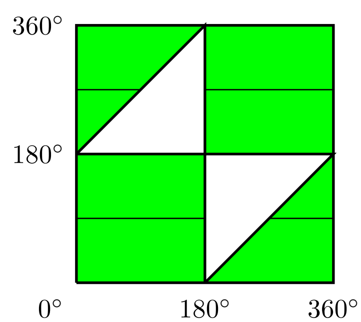
Solución E1-2. Supongamos primero que el conjunto de 2010 puntos forman un 2010-ágono convexo $\mathcal{P}$. Coloreamos sus vértices de manera alternada con rojo y azul. Si borramos dos vértices u y v, el resto del polígono se divide en dos piezas con i y j vértices respectivamente, donde $i + j = 2008$, luego i y j son de la misma paridad (posiblemente i ó j es 0). El número de rectas en $\mathcal{L}$ que *separan* a v de w es ij, que es par si v y w tienen diferente color e impar si v y w tienen el mismo color. Por lo tanto tenemos una "buena" coloración, es decir, una que satisfaga las condiciones del problema.
Ahora consideremos los 2010 puntos con una configuración arbitraria S y tales que 3 cualesquiera de ellos no sean colineales. Empezaremos con un polígono convexo $\mathcal{P}$ y moveremos cada punto de $\mathcal{P}$ a un punto de S teniendo sumo cuidado en que el punto movido cruce rectas en $\mathcal{L}$ una a la vez. Después de 2010 de estos movimientos, tendremos una "buena" coloración de S si se fue "manteniendo" la buena coloración durante los movimientos.
Para mantener la buena coloración, cuando un punto A es movido y cruza una recta definida por dos puntos B y C, invertimos los colores de A, B y C. Demostraremos que esto mantiene la buena coloración. Notemos que A termina del lado opuesto de la recta BC en el que estaba, así que después del movimiento BC separará a A de un punto P (distinto de A, B ó C) si y sólo si BC no separaba a A de P antes del movimiento. Dado que hemos cambiado el color de A pero no de P,

A y P aún están bien coloreados o correctamente coloreados respecto a la recta BC. Lo mismo se cumple para el punto B respecto a la recta AC, y el punto C respecto a la recta AB. Las posiciones relativas de otros puntos o rectas no son afectadas por el movimiento del punto A. Por lo tanto, la nueva coloración sigue siendo buena.

Solución E1-3. Llamemos a los tres puntos A, B y C, y sea O el centro de la circunferencia. Podemos poner el primer punto A en el extremo derecho de la circunferencia. Comencemos por poner el punto B en A y moverlo a lo largo de la circunferencia en sentido inverso a la manecillas del reloj. Para cada posición de B podemos definir la zona donde colocar C para que los tres puntos estén en una misma semicircunferencia.

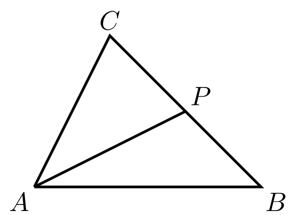


Cuando B está encima de A, el punto C puede estar en cualquier punto de la circunferencia. Al mover B a lo largo de la circunferencia, los radios OA y OB forman un ángulo de x grados que va creciendo. Supongamos que $x \leq 180°$. Entonces, para que los tres puntos estén en la misma semicircunferencia tenemos que alguno de los ángulos COA ó COB tiene que ser menor o igual a $180° - x$, es decir, si medimos a partir de A en sentido contrario a las manecillas del reloj, tenemos que $0 \leq \angle COA \leq 180°$ ó $180° + x \leq \angle COA \leq 360°$.
Observemos que cuando B está diametralmente opuesto a A, no importa dónde esté el punto C, los tres puntos están en la misma semicircunferencia. Cuando $x \geq 180°$, sea $y = x - 180°$ entonces tenemos que para que C esté en la misma semicircunferencia necesitamos que $0 \leq \angle COA \leq y$ ó $180° \leq \angle COA \leq 360°$.
Podemos representar esta situación en un cuadrado, donde en el lado horizontal ponemos la medida del ángulo BOA y en el vertical las medidas del ángulo COA, y el área sombreada representa los valores del ángulo COA para los cuales los tres puntos están en la misma semicircunferencia.



Por lo tanto, la probabilidad de que los tres puntos estén en la misma semicircunferencia es igual a la porción del área total que representa el área de la región sombreada, es decir, es igual a $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Solución E1-4. Observemos primero que para cualquier punto P en el lado BC de un triángulo ABC, se cumple que $\frac{BP}{PC} = \frac{(ABP)}{(APC)}$, ya que los triángulos ABP y APC tienen la misma altura desde A. (Los paréntesis denotan área).



Usaremos esta propiedad varias veces en la solución.
Sean x, y, números tales que $(BTF) = 3x$ y $(TFC) = 3y$.
Aplicando la propiedad en el triángulo ABF, obtenemos

$$4 = \frac{AT}{TF} = \frac{(ABT)}{(BTF)} = \frac{(ABT)}{3x},$$

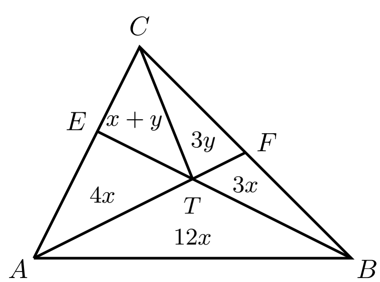
de donde $(ABT) = 12x$.
Aplicando ahora la propiedad en el triángulo ABE, tenemos

$$3 = \frac{BT}{TE} = \frac{(ABT)}{(ATE)} = \frac{12x}{(ATE)},$$

de donde $(ATE) = 4x$.
Si ahora aplicamos la propiedad en el triángulo BEC, tenemos

$$3 = \frac{BT}{TE} = \frac{(BTC)}{(TEC)} = \frac{3(x+y)}{(TEC)},$$

de donde $(TEC) = x + y$.



Aplicamos ahora la propiedad en el triángulo AFC y obtenemos

$$4 = \frac{AT}{TF} = \frac{(ATC)}{(TFC)} = \frac{(ATE) + (TEC)}{(TFC)} = \frac{5x + y}{3y},$$

de donde $12y = 5x + y$. Luego, $y = \frac{5x}{11}$.
Finalmente, aplicando la propiedad en el triángulo ATC, obtenemos

$$\frac{CE}{EA} = \frac{(TEC)}{(ATE)} = \frac{x + y}{4x} = \frac{\frac{16x}{11}}{4x} = \frac{4}{11}.$$

Solución E1-5. En primer, lugar observemos que si algún término de A es igual a cero (digamos a_k), entonces el resultado es trivial pues podemos tomar la subsucesión que contiene sólo a ese

término: (a_k).
Supondremos entonces que para todo $1 \leq k \leq 2010$, tenemos que $a_k \neq 0$. Reordenemos A en una nueva sucesión $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{2010})$ seleccionando los elementos de A de uno en uno mediante el siguiente procedimiento: comencemos tomando $b_1 > 0$. Después, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, 2010\}$ escogemos b_i como cualquiera de los elementos no seleccionados de A que tenga signo contrario al signo del resultado de la suma parcial $s_{i-1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$. Nótese que si en algún paso llegara a suceder que escogiéramos $b_i = -s_{i-1}$, entonces el resultado es trivial, por lo que a partir de este momento supondremos que $s_{i-1} \neq 0$.
Nótese que para cada paso del proceso de selección, la existencia de un candidato apropiado para b_i está garantizada, toda vez que la condición $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} = 1$ implica que la suma de los términos todavía no seleccionados de A tiene que ser cero o tiene que ser de signo contario que s_{i-1}.
Por la manera en que hemos ido seleccionando a los términos de B, cada una de las sumas parciales $s_1, s_2, \cdots, s_{2010}$ es alguno de los 2009 enteros distintos de cero del intervalo $[-1004, 1005]$. Por el *principio de las casillas*, existen enteros m y n tales que $s_m = s_n$, donde $1 \leq m \leq n \leq 2010$. Entonces es claro que $b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n = 0$.