Problemas de práctica

Revista Tzaloa, año 4, número 3

Problema P4-51. Si a, b y c son las raíces de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$, determina el valor de $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.

Problema P4-52. El siguiente cuadrado es un cuadrado mágico donde el producto de cada renglón, columna o diagonal es igual al número de cuatro dígitos $ABCD$. Cada letra representa un dígito distinto y cada casilla contiene un número entero. Completa el cuadrado encontrando los números que van en cada una de las nueve casillas. (Nota: AC es el número con dígitos A y C.)

		4
	AC	
	C	24

Problema P4-53. ¿Existirá un número entero n tal que el dígito de más a la izquierda en la representación decimal de 2^n sea 5, mientras que el dígito de más a la izquierda de 5^n sea 2?

Problema P4-54. Cantinflas aterrizó en un planeta habitado por gatos morados que siempre dicen la verdad y gatos amarillos, que siempre mienten. En la oscura noche se encuentra con 5 gatos. El primero dice: "Soy morado". El segundo dice: "Al menos 3 de nosotros son morados". El tercer gato dice: "el primer gato es amarillo". El cuarto gato dice: "al menos 3 de nosotros son amarillos". El quinto gato dice: "todos somos amarillos". ¿Cuántos de los 5 gatos son morados?

Problema P4-55. Si cierto entero positivo n tiene exactamente 8 divisores positivos, ¿cuántos divisores positivos puede tener, a lo más, n^2?

Problema P4-56. Sea ABC un triángulo. Sean D y E los puntos medios de BC y CA, respectivamente. Sean F y G puntos sobre el lado AB tales que $DEFG$ es un cuadrado con área 1. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

Problema P4-57. Encuentra todos los números reales x que satisfacen la ecuación,

$$\sqrt{17 + 8x - 2x^2} + \sqrt{4 + 12x - 3x^2} = x^2 - 4x + 13.$$

Problema P4-58. Un tablero rectangular de 2011×2012 se rellena con los números 0, 1 y 2, de tal forma que la suma de los números de cada columna y de cada renglón es siempre divisible entre 3. ¿Cuál es el máximo número de unos que puede haber?

Problema P4-59. ¿Cuántos números primos pueden ser escritos en la forma $n^{n+1}+1$ donde n es un entero positivo?

Problema P4-60. Sea ABC un triángulo acutángulo y $\mathcal{C}$ su circuncírculo. El punto T está fuera de $\mathcal{C}$ tal que las rectas TA y TB son tangentes a $\mathcal{C}$. La recta por T paralela a AC intersecta a BC en D. Demuestra que $AD = CD$.

Problema P4-61. Un número ha sido borrado de entre los números del 1 al n. Si el promedio de los restantes de 40.75, ¿qué número se borró?

Problema P4-62. En base 10 si anotamos el primer entero de dos dígitos (10) seguido, en orden ascendente, de los dos números anteriores a la base de un dígito (8 y 9), formamos un número de cuatro dígitos (1089) que es un cuadrado perfecto (33^2). ¿Qué otras bases tienen esta propiedad?

Problema P4-63. Los 2012 caballeros se sentaron en la mesa redonda para celebrar con un banquete su reciente conquista, misma en la que cada uno de ellos obtuvo un botín diferente. Se sabe que la diferencia entre los botines obtenidos por cualesquiera dos caballeros sentados uno al lado del otro es de 2 o 3 libras esterlinas. Encuentra la máxima diferencia entre los bontines obtenidos por dos de los caballeros.

Problema P4-64. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea O el punto de intersección de sus diagonales. Si P y Q son los centros de los circuncírculos de los triángulos AOB y COD respectivamente, demuestra que $PQ \geq \frac{AB+CD}{4}$.

Problema P4-65. Los habitantes del planeta X, utilizan los mismos algoritmos para sumar, restar, multiplicar y dividir que en el planeta Tierra. Sin embargo, ellos utilizan una base diferente a la nuestra, su base es mayor a 2 y menor que 10. La siguiente operación fue realizada en el planeta X, y las letras representan dígitos distintos. ¿Cuál es la base que se utiliza en dicho planeta?

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad BC \\ \cline{2-2}
AB & CBC \\
 & \underline{AB} \\
 & BDC \\
 & \underline{BDC} \\
 & \ \cdots
\end{array}
$$

Problema P4-66. Se tienen n focos en una hilera, algunos de los cuales se encuentran encendidos. Cada minuto, todos los focos que estaban encendidos se apagan. Al mismo tiempo se encienden todos aquellos focos que estaban apagados y tales que se encontraban al lado de exactamente un foco que estaba encendido. Para cada n dada, ¿se podrá encontrar una configuración inicial de focos encendidos tal que siempre haya al menos un foco encendido?

Problema P4-67. En una sucesión infinita creciente de enteros positivos, tenemos que a partir del 2012-ésimo término, cada término divide a la suma de todos los términos anteriores. Demuestra que existe un término a partir del cual cada término es exactamente igual a la suma de todos los términos anteriores.

Problema P4-68. Cortamos un triángulo acutángulo a través de una recta en dos piezas que no nesariamente sean triángulos. Luego, nuevamente cortamos una de las piezas resultantes a través de una recta en dos piezas y así sucesivamente. Después de efectuar varios de estos cortes resulta que todas las piezas son triángulos, ¿es posible que todos ellos sean obtusángulos?

Problema P4-69. Se tiene un gran mazo de cartas. En cada una de las cartas está escrito uno de los números $1, 2, \ldots, n$. Sabemos que la suma de todos los números escritos en las cartas es igual a $k \cdot n!$, para algún entero k. Demuestra que es posible acomodar las cartas en k montones de forma que, en cada uno de ellos, la suma de los números escritos sea igual a $n!$.

Problema P4-70. Dividimos un n-ágono convexo en triángulos a través de diagonales que no se intersectan al interior del polígono. Pintamos los triángulos de negro y blanco de forma que si dos triángulos tienen un lado en común, entonces reciben colores diferentes. Para cada n determina la máxima diferencia entre el número de triángulos pintados de uno y otro color.

Soluciones de los problemas

Solución P4-51. Si $f(x) = x^3 - x - 1$ tiene raíces a, b y c, entonces,

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc,$$

de donde,

$$\begin{aligned} a+b+c &= 0, \\ ab+ac+bc &= -1, \\ abc &= 1. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} &= \frac{3-(a+b+c)-(ab+bc+ac)+3abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\ &= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\ &= \frac{7}{f(1)} \\ &= -7. \end{aligned}$$

Solución P4-52. Escribamos al número de dos dígitos AC en la forma $AC = 10A + C$ y denotemos por x, y y z a los números de las siguientes casillas:

z	y	4
	AC	
x	C	24

Entonces, $24(C)(x) = 4(10A + C)(x)$, de donde, $C = 2A$, de aquí que $AC = 12A$. Además, $4yz = 24(AC)z = (24)(12A)z$, luego $y = 72A$.
Ahora bien, el producto de los enteros de las casillas de la columna central es igual a $(72A)(12A)(2A)$ $= 1728A^3$, que debe ser un número de 4 dígitos. Entonces, $A = 1$ y completando el cuadrado obtenemos,

6	72	4
8	12	18
36	2	24

Solución P4-53. No existe tal entero. Observamos que $2^n \cdot 5^n = 10^n$. Ahora, si en las representaciones decimales de 2^n y 5^n cambiamos por ceros todos los dígitos con excepción del primero, los nuevos números decrecen pero quedan mayores que la mitad de los originales. Entonces, el producto de estos nuevos números será menor que 10^n, pero mayor que su cuarta parte y por lo tanto dicho producto no puede ser de la forma $10\ldots0$. Sin embargo, si se hicieran dichos cambios en números cuyos primeros dígitos fueran 2 y 5, entonces el producto sería de la forma $(50\ldots0)\cdot(20\ldots0) = 10\ldots0$. Lo anterior es una contradicción y por lo tanto no existe un entero n que tenga la propiedad pedida.

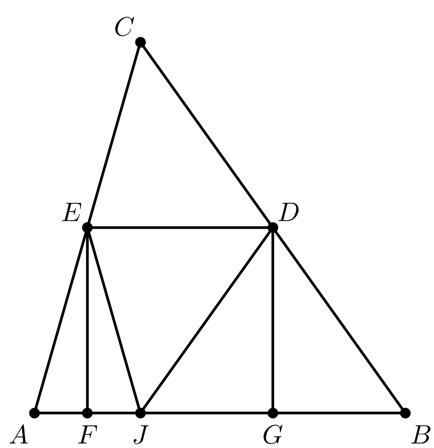
Solución P4-54. Primero notamos que el quinto gato es amarillo, pues si fuera morado todos deberían ser amarillos, lo cual no es posible.
Si el cuarto gato es amarillo su frase "al menos 3 de nosotros somos amarillos" es falsa, por lo que él y el quinto gato deberían ser los únicos amarillos, pero entonces el tercer gato habría mentido y sería amarillo. Luego, el cuarto gato es morado y debe haber al menos 3 gatos amarillos.
Como hay al menos 3 gatos amarillos, no puede haber al menos 3 gatos morados, por lo que el segundo es amarillo.
Falta conocer el color del primer y del tercer gato. Si el primero fuera morado el tercero habría mentido y sería amarillo. Si el primero fuera amarillo, el tercero habría dicho la verdad y sería morado. Luego, entre estos dos gatos hay uno morado y uno amarillo.
Por lo tanto, hay exactamente 2 gatos morados.

Solución P4-55. Recordemos que si la descomposición en primos de n es $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ el número de divisores positivos de n es igual a $(a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$. Como $8 = 2\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 2$ tenemos que n puede ser de tres formas (en estos casos p, q y r denotan primos diferentes).

- $n = p^7$. En este caso $n^2 = p^{14}$ tendría $14 + 1 = 15$ divisores positivos.
- $n = pq^3$. En este caso $n^2 = p^2q^6$ tendría $(2 + 1)(6 + 1) = 21$ divisores positivos.
- $n = pqr$. En este caso $n^2 = p^2q^2r^2$ tendría $(2 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 27$ divisores positivos.

Luego, n^2 tiene a lo más 27 divisores positivos.

Solución P4-56. Sea J el pie de la altura desde C.



Como EF y CJ son paralelas y $AE = EC$, por Thales tenemos que $AF = FJ$ y los triángulos AFE y JFE son congruentes. Análogamente los triángulos BGD y JGD son congruentes. Además, $EJ = EA = EC$ y $DJ = DB = DC$, de donde los triángulos EDC y EDJ son congruentes. Considerando estas tres congruencias, tenemos que el área del triángulo ABC es el doble que la del cuadrado $DEFG$. Luego, el área buscada es 2.

Solución P4-57. Observemos que, $17+8x-2x^2 = 25-2(x-2)^2$ y $4+12x-3x^2 = 16-3(x-2)^2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sqrt{17+8x-2x^2}+\sqrt{4+12x-3x^2} &= \sqrt{25-2(x-2)^2}+\sqrt{16-3(x-2)^2} \\
&\leq \sqrt{25}+\sqrt{16} \\
&\leq 9+(x-2)^2 \\
&= x^2-4x+13.
\end{aligned}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $x-2=0$, luego $x=2$ es el único número real que satisface la ecuación.

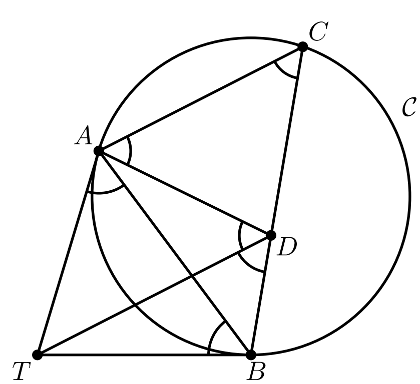
Solución P4-58. Sea n el número de ceros y d el número de doses que hay en la tabla. Tenemos 2011 renglones de longitud 2012 y 2012 columnas de longitud 2011. Dado que la suma de los números de cualquier renglón es divisible entre 3, debe haber al menos un dos o al menos dos ceros en cada renglón. Por lo tanto $d+\frac{n}{2}\geq 2011$. De forma análoga se obtiene que debe haber al menos un cero o al menos dos doses en cada columna, por lo que $n+\frac{d}{2}\geq 2012$. Sumando ambas desigualdades y dividiendo por $\frac{3}{2}$ obtenemos que $n+d\geq 2682$. Es decir, el número de unos no es mayor que $2011\cdot 2012-2682$.
Ahora mostraremos una configuración donde se alcanza esta cota. Sean $n=1342$ y $d=1340$. Coloquemos los 1342 ceros en parejas horizontales comenzando en la esquina superior izquierda del tablero (estos ceros se ubicarán en los primeros 671 renglones y 1342 columnas) y los 1340 doses en parejas verticales comenzando en la esquina inferior derecha del tablero (quedando distribuidos en las últimas 670 columnas y 1340 renglones del tablero). Rellenamos el resto del tablero con unos. Dado que $671+1340=2011$ y $670+1342=2012$, tenemos que en cada columna y renglón hay ceros ó doses en las cantidades correctas para que (con el relleno de unos), en cada caso, la suma sea divisible entre 3. El número máximo de unos es entonces $2011\cdot 2012-2682=4043450$.

Solución P4-59. Para $n=1$ obtenemos $1^2+1=2$ que es primo. Supongamos que $n\geq 2$. Como todo primo mayor que 2 es impar, necesitamos que n sea par. Como $n+1$ es impar, podemos factorizar,

$$n^{n+1}+1=(n+1)(n^n-n^{n-1}+\cdots-n+1).$$

Como ambos factores son mayores que 1, tenemos que el número no es primo y la única solución es el primo 2.

Solución P4-60. Sea $\alpha=\angle BCA$. Como TA y TB son tangentes a $\mathcal{C}$ tenemos que $\angle BAT=\angle TBA=\angle BCA=\alpha$. Además, como TD es paralela a AC tenemos que $\angle BDT=\angle BCA=\alpha$.



Como $\angle BDT = \angle BAT$ se tiene que el cuadrilátero $BDAT$ es cíclico. De aquí, $\angle TDA = \angle TBA = \alpha$. Como AC y TD son paralelas, $\angle CAD = \angle ADT = \alpha$. Por lo tanto, el triángulo ADC es isósceles con $AD = CD$.

Solución P4-61. Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ el número borrado. Tenemos que,

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n - k}{n - 1} = 40.75 = \frac{163}{4}.$$

Luego, $n - 1$ es múltiplo de 4. Si $n \leq 79$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \cdots + n - k}{n - 1} &\leq \frac{1 + 2 + \cdots + n - 1}{n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{n - 1} \\ &= \frac{n^2 + n - 2}{2(n - 1)} = \frac{n + 2}{2} \leq \frac{79 + 2}{2} = 40.5 < 40.75, \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Luego, $n \geq 80$. Ahora, si $n \geq 82$, entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2 + \cdots + n - k}{n - 1} &\geq \frac{1 + 2 + \cdots + n - n}{n - 1} = \frac{(\frac{n(n-1)}{2})}{n - 1} \\ &= \frac{n}{2} \geq \frac{82}{2} = 41 > 40.75, \end{aligned}$$

lo cual vuelve a ser una contradicción. De aquí, $n \leq 81$. Como $n - 1$ es múltiplo de 4, n tiene que ser 81. Finalmente, tenemos que,

$$40.75 = \frac{1 + 2 + \cdots + 81 - k}{80} = \frac{3321 - k}{80},$$

de donde $k = 61$.

Solución P4-62. En la base $b \geq 2$, N_b es el número de cuatro dígitos $10(b - 2)(b - 1)$, luego,

$$N_b = 1(b^3) + 0(b^2) + (b - 2)b + (b - 1) = (b - 1)(b + 1)^2,$$

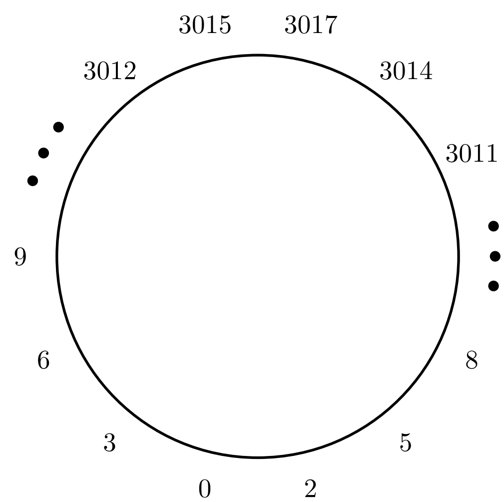
lo que muestra que N_b es un cuadrado perfecto si y sólo si $b - 1$ lo es.
Por ejemplo, en base 2 tenemos que,

$$1001_2 = 9_{10} = (3_{10})^2 = (11_2)^2$$

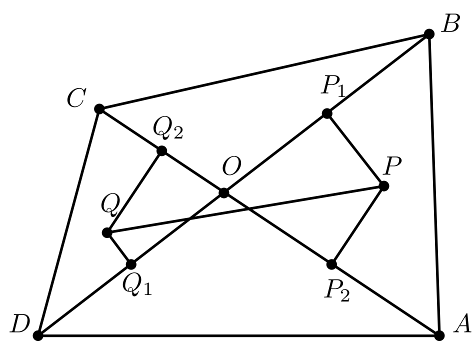
y en base 5 tenemos que,

$$1034_5 = 144_{10} = (12_{10})^2 = (22_5)^2.$$

Solución P4-63. La respuesta es 3017 libras. Primero, veamos que la diferencia máxima d entre dos de los botines no puede ser mayor que 3018. Numeremos a los caballeros en sentido a favor de las manecillas del reloj, comenzando por el caballero menos afortunado (el del botín más pobre). Sea n el caballero más afortunado (el del botín más jugoso). Entonces 1 y n están separados por $n - 2$ caballeros en el sentido de las manecillas del reloj y por $2012 - n$ caballeros en el otro sentido. Entonces $d \leq 3(n - 1)$ y $d \leq 3(2013 - n)$. Por lo que $d \leq \frac{3(n-1+2013-n)}{2} = 3018$. Nótese que $d = 3018$ se da únicamente si la diferencia entre cualesquiera dos vecinos es exactamente 3, lo cual contradice la hipótesis de que todos los caballeros obtuvieron diferentes botines (en este caso los caballeros 2 y 2012 tendrían ambos 3 libras más que el caballero 1). La siguiente figura muestra un ejemplo con $d = 3017$.



Solución P4-64. Sean P_1, Q_1, P_2, Q_2 los puntos medios de OB, OD, OA y OC, respectivamente.



Entonces, $PQ \geq P_1Q_1$, luego $PQ \geq \frac{1}{2}BD$ y $PQ \geq P_2Q_2$, y de aquí $PQ \geq \frac{1}{2}AC$.
Entonces, tenemos que,

$$\begin{aligned} PQ &\geq \frac{1}{4}(BD + AC) \\ &\geq \frac{1}{4}(OB + OD + OA + OC) \\ &\geq \frac{1}{4}((OB + OA) + (OC + OD)). \end{aligned}$$

Pero, $OB + OA > AB$ y $OC + OD > CD$. Por lo tanto, $PQ \geq \frac{1}{4}(AB + CD)$.

Solución P4-65. Observemos que $B \times AB = AB$, luego B debe ser 1. Además $CB - AB = BD$, luego D debe ser 0. Como en la resta anterior no se le pidió prestado a C, entonces $C = A + 1$. Considerando que, $C \times AB = BDC$ junto con las tres condiciones anteriores tenemos que $(A + 1) \times A = 10$ (nota que esta operación no es en base 10). Entonces la base debe ser el producto de dos números consecutivos. Como la base del planeta X es mayor que 2 y menor que 10, debe ser 6, luego $A = 2$ y $C = 3$.

Solución P4-66. Primero veamos que si $n = 1$ o $n = 3$ ninguna configuración permite obtener luz perpetua. Denotemos con 1 a los focos encendidos y con 0 a los focos apagados.

- Caso ($n = 1$).- Sólo hay dos configuraciones iniciales posibles. Si el foco está apagado, continuará apagado. Si el foco está encendido se apagará al primer minuto y permanecerá apagado el resto del tiempo.
- Caso ($n = 3$).- Es fácil verificar que partiendo de cualquiera de las 8 posibles configuraciones iniciales eventualmente (a lo más en 4 minutos) se llega al estado en que los tres focos quedan apagados perpetuamente (000).

Ahora, si n es par, la configuración inicial $1001100110\ldots$ funciona pues esta se alternará cada minuto con la configuración $0110011001\ldots$. Por último, si $n > 3$ es impar, añadimos 010 al inicio las configuraciones anteriores (pares). Este prefijo para la configuración alternará con el prefijo 100, dado que el tercer foco no encenderá por culpa del cuarto. De esta forma los tres primeros focos alternan con independencia del resto de la configuración. En conclusión, sólo si $n \neq 1$ y $n \neq 3$ existen configuraciones iniciales que brindan luz perpetua.

Solución P4-67. Sea $\{a_n\}$ dicha sucesión y denotemos con S_n a la suma de términos desde a_1 hasta a_{n-1}. Para $n \geq 2012$, a_n es un divisor de S_n. Por lo tanto, existe un entero positivo d_n tal que $a_n = \frac{S_n}{d_n}$. Entonces, $S_{n+1} = S_n + a_n = \frac{(d_n+1)S_n}{d_n}$. Si $d_{n+1} \geq d_n + 1$, entonces $a_{n+1} \leq \frac{S_n}{d_n} = a_n$, lo cual contradice la hipótesis de que $\{a_n\}$ es estrictamente creciente. Por lo tanto, $\{d_n\}$ es no creciente para $n \geq 2012$. Sin embargo, esta sucesión no puede mantener indefinidamente un valor $k > 1$, pues en ese caso $\{S_n\}$, a partir de cierto término se convertiría en una sucesión geométrica con razón $\frac{k+1}{k}$. Como k y $k+1$ son primos relativos, sólo es posible dividir al primer término de la progresión geométrica entre k un número finito de veces. De aquí es claro que existe un n a partir del cual $d_n = 1$ y $a_n = S_n$.

Solución P4-68. La respuesta es no. Decimos que un n-ágono convexo cualquiera es potencialmente $n-2$ triángulos (pensando en cortarlo a través de sus diagonales trazadas desde uno de sus vértices). Supongamos que cortamos un n-agono en un a-ágono y un b-ágono. Ahora el número potencial de triángulos es $a-2+b-2$. Notemos que escencialmente hay 3 formas de trazar la recta para cortar al n-ágono: pasando por dos vértices, pasando por un sólo vértice o sin tocar ninguno de los vértices.

- En el primer caso, tenemos que $a+b = n+2$ y por lo tanto el número potencial de triángulos es $n-2$, como al principio. Además, nótese que no se crean ángulos obtusos nuevos, pues ningún ángulo del n-ágono puede dividirse en dos ángulos obtusos.
- En el segundo caso, tenemos que $a+b = n+3$, por lo que el número potencial de triángulos es $n-1$, es decir, un incremento de 1. Como en el caso anterior, en el extremo del corte que pasa a través del vértice no se crean ángulos obtusos nuevos, pero en el otro extremo (al cortar uno de los lados) se puede crear uno, pero no más de un ángulo obtuso nuevo.
- En el tercer caso, tenemos que $a+b = n+4$, y el número potencial de triángulos es n, lo que significa un incremento de 2. En esta situación, en cada extremo del corte se puede crear uno, pero no más de un ángulo obtuso nuevo. En total, al cortar el incremeto en el número de ángulos obtusos es menor o igual que 2.

En cualquier caso, el incremento en el número potencial de triángulos siempre es mayor o igual que el incremento en el número de nuevos ángulos obtusos. Dado que el triángulo incial es acutángulo, si en algún punto tenemos que todas las figuras son triángulos, por lo menos uno de ellos debe ser acutángulo y no es posible que todos ellos sean obtusángulos.

Solución P4-69. Comenzamos probando el siguiente resultado.
Lema. *Dado un conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n enteros, siempre es posible escoger algunos de ellos de tal forma que su suma sea divisible entre n.*
Demostración. Supongamos que ninguno de los números es divisible entre n. Consideremos las sumas $b_1 = a_1, b_2 = a_1 + a_2, \ldots, b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Si ninguna es divisible entre n, entonces al menos dos de ellas, digamos b_j y b_k $(j < k)$ dejan los mismos residuos al dividirse entre n. Entonces su diferencia $a_{j+1} + \cdots + a_k$ es divisible entre n.
Ahora demostraremos el resultado del problema por inducción sobre n.
Si $n = 1$, entonces en todas las cartas está escrito 1 y cada carta es en sí misma un montón cuya suma es $1! = 1$.
Supongamos que el resultado es válido para $n - 1$, lo que significa que si la suma de los números de todas las cartas es $k \cdot (n-1)!$, entonces las cartas pueden ser acomodadas en k montones tales que en cada uno de ellos la suma de los valores de las cartas que lo componen es $(n-1)!$.
Llamaremos *supracarta* a cualquier montón de cartas cuya suma sea $l \cdot n$, con $l = 1, \ldots, n-1$. En este caso diremos que l es su *supravalor*. Cualquier carta con el número n escrito en ella es una *supracarta* con *supravalor* igual a 1. Con el resto de las cartas (con los números $1, 2, \ldots, n-1$), formaremos supracartas con el siguiete procedimiento. Escogemos n cartas cualesquiera y debido al lema podemos tomar algunas de ellas (cuya suma sea divisible entre n) para formar una supracarta. Aplicamos el procedimeto hasta que queden menos de n cartas. Nótese que estas cartas sobrantes juntas forman a su vez una supracarta (pues tanto la suma total como la de las cartas agrupadas es divisble entre n) cuyo supravalor no excede a $(n-1)n$.
Ahora, tenemos un montón de supracartas con supravalores $1, \ldots, n-1$ y la suma total de esos supravalores es igual a $\frac{k \cdot n!}{n} = k \cdot (n-1)!$. Entonces, por la hipótesis de inducción podemos distribuir las supracartas en k montones, cada uno con *suprasuma* igual a $(n-1)!$. Entonces la suma (normal) de los valores de las cartas de cada uno de los k montones es igual a $(n-1)! \cdot n = n!$.

Solución P4-70. Dado que en un n-ágono la suma de sus ángulos interiores es $(n-2) \cdot 180°$, entonces el n-ágono ha sido dividido en $n-2$ triángulos a través de $n-3$ diagonales que no se intersectan en el interior del n-ágono. Pintamos los lados de los triángulos blancos (negros) llamándolos blancos (negros). De esta forma, toda diagonal es al mismo tiempo blanca y negra.
Entonces, hay al menos $n-3$ lados blancos (negros), por lo tanto hay al menos $\frac{1}{3}(n-3)$ triángulos de cada color. Sea $D(n)$ la diferencia buscada y consideremos 3 casos:

- Caso 1 $(n = 3k)$. En este caso tenemos que hay al menos $k-1$ triángulos negros y cuando más $2k-1$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k$.
- Caso 2 $(n = 3k+1)$. En este caso hay al menos k triángulos negros y cuando más $2k-1$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k-1$.
- Caso 3 $(n = 3k+2)$. En este caso hay al menos k triángulos negros y cuando más $2k$ triángulos blancos, entonces $D(n) \leq k$.

Ahora veremos que en cada caso la igualdad puede ser alcanzada y por lo tanto las cotas anteriores corresponden a las máximas diferencias para cada n.
Para $n = 3, 4, 5$ $(k = 1)$ el resultado es trivial y puede ser fácilmente verificado por inspección. Para valores de n más grandes construimos el ejemplo por recursión sobre k.
Supongamos que para algún k tenemos el n-ágono correspondiente con la diferencia requerida (s.p.g.

con mayoría de triángulos blancos). Entonces añadimos un pentágono (con 2 triángulos blancos y 1 negro) al n-ágono, empalmando el lado negro del pentágono con un lado blanco del n-ágono. De esta forma n se incrementa en 3, k en 1 y $D(n)$ en 1, manteniéndose para el $(n+1)$-ágono la diferencia máxima.