TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2010, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Abril de 2010.

Contenido

Presentación

Tzaloa es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas como una disciplina dinámica y creativa. El diseño de las secciones y la cuidadosa selección de sus contenidos buscan apoyar de manera efectiva, con información y con materiales de calidad, a estudiantes y profesores de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los diferentes concursos de la Olimpiada de Matemáticas.

Esta revista, con orgullo, toma su nombre del náhuatl porque está hecha por y para los mexicanos. Tzaloa significa aprender y las páginas que la conforman buscan ayudar a satisfacer la necesidad de contar con espacios adecuados para profesores, estudiantes y, en general, para todas aquellas personas interesadas en desarrollar e incrementar sus capacidades para el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas.

Tzaloa, Año 2010, Número 2

El contenido para este segundo número del año 2010 se seleccionó pensando en estudiantes y profesores que actualmente se están preparando para participar en las diferentes etapas de los concursos estatales. De esta manera, las secciones *Problemas de Práctica* y *Problemas Propuestos*, están integradas con material clasificado con niveles introductorio e intermedio. Esperamos que, en su conjunto, los problemas que las conforman sean un apoyo efectivo para tu preparación.

Por otro lado, para el artículo de matemáticas de este número, a sugerencia de varios de nuestros lectores, hemos escogido tratar el *Principio de Casillas*, también conocido como *Principio del Palomar*. La amplia experiencia que tiene Pablo Soberón Bravo en concursos olímpicos se suma con su claridad para exponer, logrando así un material muy atractivo. El lector encontrará que detrás de la sencillez de este principio, se encierra un enorme poder para resolver problemas de gran complejidad. Los ejemplos escogidos ilustran la enorme cantidad de contextos en que esta herramienta puede ser aplicada. Asimismo, se debe destacar el tratamiento gradual del nivel de dificultad y la redacción concisa, lo anterior permite comprender el principio de forma didáctica y desde un punto de vista muy práctico.

Por último, cabe señalar que en este número también aparecen los problemas y soluciones del Concurso Nacional de 2009, en la sección correspondiente mencionamos los nombres de los ganadores y además presentamos algunas de las soluciones dadas por ellos. En el ámbito internacional hemos incluido los exámenes con soluciones de la *XXIV Olimpiada Iberoamericana* así como de la *XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe*, donde México participó el año pasado obteniendo el $5°$ y 1^{er} lugar respectivamente.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 23 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

24ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1991. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2010-2011 y, para el 1° de julio de 2011, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.omm.unam.mx

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 21 al 26 de noviembre de 2010 en Ensenada, Baja California. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2011: la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Amsterdam, Países Bajos, y la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Costa Rica.

El Principio de las Casillas

Por Pablo Soberón Bravo

Nivel Básico

El principio de las casillas es una de las ideas más importantes a la hora de atacar un problema de combinatoria. Lo que dice es realmente sencillo:

Siempre que se acomoden al menos $n+1$ *objetos en* n *lugares hay un lugar que tiene al menos* 2 *objetos.*

El primer uso del principio de las casillas tal cual se atribuye a Johann P. G. L. Dirichlet (1805 - 1859) en 1834. También es llamado el principio del Dirichlet o el principio del palomar (se enuncia frecuentemente con palomas y palomares en vez de objetos y lugares).
La demostración no podría ser más sencilla. Si hubiera a lo más un objeto por lugar, tendríamos a lo más n objetos, ¡lo cual no sucede! A pesar de que este principio parece completamente inocente, es sorprendente el número de aplicaciones que tiene y la dificultad de los problemas que se pueden resolver usándolo. Hay una versión un poco más fuerte de este principio, que dice lo siguiente:

Dados al menos $nk+1$ *objetos acomodados en* n *lugares, siempre hay un lugar con al menos* $k+1$ *objetos.*

Iremos viendo algunas formas de utilizarlo a lo largo de este artículo. Comencemos con el ejemplo más fácil:

Ejemplo 1 *De cualesquiera* 3 *personas siempre hay al menos* 2 *del mismo sexo.*

Aquí consideramos a las personas como los objetos y una casilla donde ponemos a los hombres y una casilla donde ponemos a las mujeres. A pesar de que la explicación parece exagerada para este ejemplo, hay que enfatizar que al resolver este tipo de problemas la estrategia siempre será tratar de decidir cuales son los objetos y las casillas para que se resuelva el problema. Veamos un ejemplo ligeramente más complicado, donde ya no es evidente.

Ejemplo 2 *Dados n números enteros, demuestra que hay algunos de ellos cuya suma es múltiplo de n. (La suma puede ser de un solo elemento)*

Para resolver este ejemplo consideremos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los n números y los números

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_1 + a_2, \\ &\vdots \\ b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

Si alguno de los b_i es múltiplo de n ya acabamos, por lo que podemos suponer que cada uno de ellos deja algún residuo al dividirlo por n, dicho residuo está entre 1 y $n-1$. Si consideramos a los b_i como los objetos y los acomodamos en $n-1$ lugares según su residuo al dividirlo por n, por el principio de las casillas hay dos de ellos que dejan el mismo residuo. Digamos que son b_i y b_j con $i < j$. Como dejan el mismo residuo al dividirlos por n, su diferencia debe ser múltiplo de n. Como $b_j - b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ hemos acabado.

Ejemplo 3 *Demuestra que dados 13 puntos en el plano cartesiano con coordenadas enteras siempre hay 4 cuyo gravicentro tiene coordenadas enteras.*

El gravicentro de 4 puntos es el punto cuyas coordenadas son los promedios de las coordenadas de los puntos. Por ejemplo, si tomas los puntos $(1,0)$, $(3,3)$, $(2,5)$ y $(0,4)$ su gravicentro es el punto $(\frac{1+3+2+0}{4}, \frac{0+3+5+4}{4}) = (\frac{3}{2}, 3)$.

Para resolver este problema hay que trabajar un poco más antes de aplicar el principio de las casillas. Vamos a ver primero que de 5 puntos con coordenadas enteras siempre hay 2 cuyo punto medio tiene coordenadas enteras. Para ver esto, consideremos 4 casillas donde cada una representa alguna de las parejas $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Vamos a colocar cada punto en la casilla cuya pareja tenga coordenadas con las mismas paridades que las coordenadas del punto (por ejemplo, el punto $(5,2)$ va a la casilla que contiene la pareja $(1,0)$). Como hay al menos 2 en la misma casilla, su punto medio también tiene coordenadas enteras, ¿podrías explicar por qué?
Ya que sabemos esto podemos atacar el problema. Como tenemos al menos 5 puntos podemos sacar 2 cuyo punto medio tenga coordenadas enteras. Como nos quedan 11 puntos podemos repetir este proceso y seguir sacando parejas hasta que quedan 3 puntos nada más. Entonces hemos sacado 5 parejas. Ahora veamos que como los 5 puntos medios de estas parejas tienen coordenadas enteras (por el principio de las casillas) hay 2 de ellos cuyo punto medio tiene coordenadas enteras. Es fácil ver que este punto

es realmente el gravicentro de los 4 puntos que generaban a estos últimos 2 puntos medios.
En este ejemplo, además de haber necesitado usar el principio de las casillas más de una vez, se puede apreciar la fuerza de este tipo de conteos. Resulta que al cambiar el número 13 por 12 el teorema deja de ser cierto, ¿puedes encontrar 12 puntos que no cumplan con el problema?
Una de las áreas de las matemáticas donde se encuentra casi siempre el principio de las casillas es la teoría de gráficas. Una gráfica es un conjunto de puntos en el plano (llamados vértices) y algunas líneas que unen parejas de estos puntos (llamadas aristas). Veamos un ejemplo de esto:

Ejemplo 4 *Entre cualesquiera* 6 *personas siempre hay* 3 *que se conocen dos a dos o hay* 3 *que dos a dos no se conocen. (Conocerse es una relación mutua.)*

Para resolver este ejemplo consideremos una gráfica con 6 vértices que representan a las personas y vamos a trazar una arista azul entre dos vértices si esas personas se conocen o una arista verde si no se conocen. Queremos ver que hay 3 vértices que forman un triángulo con los lados del mismo color.
Para hacer esto consideremos v_0 un vértice cualquiera. Como de él salen 5 aristas de dos colores posibles (¡por el principio de las casillas!) deben salir al menos 3 del mismo color (digamos que es azul). Llamemos v_1, v_2 y v_3 a los vértices que están unidos a v_0 por las tres aristas azules. Si dos de esos vértices están unidos por una arista azul, con v_0 forman el triángulo que buscabamos. Si no, están unidos por puras aristas verdes, con lo que también tenemos el triángulo que buscábamos.
Resulta que el ejemplo anterior se puede generalizar mucho más. De hecho para cualesquiera enteros positivos l y s hay un entero m tal que entre cualesquiera m personas siempre hay l que se conocen todos o s donde no hay dos que se conocen. Para probar esto se usa un argumento muy similar al que usamos para resolver el ejemplo. Resulta que si queremos encontrar el menor m que cumpla eso el problema ya se vuelve enormemente difícil. De hecho si l y s son mayores que 5 no se conoce ninguno de estos números m (¡pero se sabe que existen!).

Ahora ya estamos listos para un ejemplo bastante más complicado.

Ejemplo 5 (Rusia 2000) *En un tablero de* 100×100 *se colorean las casillas de* 4 *colores de tal manera que cada fila y cada columna tenga* 25 *casillas de cada color. Demuestra que hay* 2 *filas y* 2 *columnas tales que sus* 4 *intersecciones están pintadas de colores distintos.*

Para resolver este ejemplo primero vamos a contar el número P de parejas de casillas (a_1, a_2) tales que a_1 y a_2 están en la misma fila y tienen colores distintos. Como hay 4 colores hay $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ maneras de hacer parejas con dos colores distintos. En cada fila hay 25 casillas de cada color, por lo que debe haber $\binom{4}{2} 25 \cdot 25 = 6 \cdot 25 \cdot 25$ parejas en cada fila. Entonces, $P = 100 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25$. Sabemos que hay $\binom{100}{2}$ parejas de columnas, y cada pareja de P debe estar en alguna de esas parejas. Es decir, en este problema los lugares que vamos a utilizar son las parejas de columnas y los objetos las parejas de casillas en la misma fila de distintos colores. Entonces, por el principio de las casillas, hay una pareja de columnas que tiene al menos

$$\frac{P}{\binom{100}{2}} = \frac{100 \cdot 6 \cdot 25 \cdot 25}{\frac{100 \cdot 99}{2}} = \frac{12 \cdot 25 \cdot 25}{99} = \frac{100 \cdot 75}{99} > 75,$$

parejas de P. A partir de ahora sólo consideraremos las parejas de casillas en la misma fila, con colores distintos y que usan estas dos columnas. Veamos que estas dos columnas son las que estamos buscando. Si no nos sirven, entonces cualesquiera dos de las parejas que acabamos de contar deben compartir al menos un color. Consideremos una de estas parejas, la cual debe tener dos colores distintos (digamos negro y azul). Como hay más de 50 de estas parejas, debe haber alguna que no tenga color negro. Si no tuviera azul ya habríamos acabado por lo que debe tener otro color y azul (digamos verde y azul). Como hay más de 50 de estas parejas, debe haber alguna que no tenga color azul, por lo que debe ser negro y verde. Ya con estas 3 parejas, cualquier otra debe ser azul y negra o azul y verde o negra y verde. Cada pareja usa 2 de esos colores, por lo que estaríamos usando en total más de 150 veces estos colores (había más de 75 de estas parejas). Pero cada color aparece exactamente 25 veces en cada una de las 2 columnas, por lo que sólo se pueden usar 150 veces los colores. Entonces debe haber dos de las parejas que cumplan la condición que buscamos.

Además de usarse en problemas de combinatoria, el principio de las casillas también se usa en otras áreas. En teoría de números se puede usar para probar resultados muy fuertes, como que todo primo de la forma $4k + 1$ se puede escribir como suma de dos cuadrados, o que todo entero positivo se puede escribir como suma de 4 cuadrados. De otra manera para esto se necesita una prueba muy larga o saber mucha teoría. Normalmente las pruebas que salen usando el principio de las casillas suelen ser muy elegantes.
Otra área en la que se puede usar el principio de las casillas es en geometría. Veamos un par de ejemplos:

Ejemplo 6 *Demuestra que no hay una recta que corte los* 3 *lados de un triángulo.*

Para probar eso consideremos como las casillas las 2 partes en la que una recta divide al plano. Dado un triángulo cualquiera y una recta, dos de sus vértices deben quedar en la misma parte, por lo que el lado que forman no intersecta a la recta.

Ejemplo 7 *Dentro de un cuadrado de lado* 1 *hay varios círculos cuyos perímetros suman* 10*. Demuestra que hay una recta paralela a un lado del cuadrado que intersecta a al menos* 4 *de estos círculos.*

Para ver esto proyectemos a los círculos sobre un lado del cuadrado. Cada círculo se proyecta en un segmento de longitud igual a su diámetro. Entonces se proyectan sobre varios segmentos cuyas longitudes suman en total $\frac{10}{\pi}$. Como este número es mayor que 3 y el lado del cuadrado es 1, hay un punto que recibió al menos 4 proyecciones distintas. Si trazamos por ese punto la recta perpendicular al lado, intersecta a al menos 4 de los círculos.

A continuación proponemos una lista de ejercicios para que practiques usar este principio.

Ejercicio 1. Demuestra que en toda fiesta siempre hay dos personas que han dado el mismo número de saludos.

Ejercicio 2. En un zoologico hay animales de 3 especies distintas y hay 4 jaulas disponibles. Demuestra que si hay al menos 25 animales entonces en al menos una jaula hay al menos 2 animales de la misma especie y el mismo sexo.

Ejercicio 3. Demuestra que si se consideran $n+1$ números del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ siempre hay dos que son primos relativos.

Ejercicio 4. Demuestra que de 5 enteros positivos siempre hay 3 de ellos cuya suma es múltiplo de 3.

Ejercicio 5. (Olimpiada Iberoamericana, 1998)
En una reunión hay representantes de n países ($n \geq 2$) sentados en una mesa redonda. Se sabe que cualesquiera dos representantes del mismo país sus vecinos a la derecha son de países distintos. Encuentra el mayor número de representantes que puede haber.

Ejercicio 6. (Vietnam, 2007)
Dado un 2007-ágono regular encuentra el menor k tal que entre cualesquiera k vértices del polígono haya 4 tal que el cuadrilátero convexo que forman comparte 3 lados del polígono.

Bibliografía

1.- Engel, A. Problem - solving strategies. Springer, 1998.

2.- Pérez, M.L. Combinatoria. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM. 2000.

Problemas de práctica

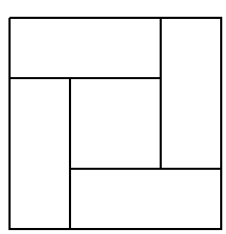
Para este número hemos escogido 20 problemas cuya dificultad está clasificada en los niveles introductorio e intermedio, aunque es probable que algunos de ellos te resulten difíciles de resolver. Destacamos que, además de incrementar la dificultad de los problemas, otra diferencia con respecto del número anterior, es que ahora abandonamos el formato de *opción múltiple, mismo que se acostumbra usar en la primera eliminatoria de los concursos estatales, para adoptar el formato de pregunta abierta* que caracteriza a las etapas más avanzadas de la olimpiada.

Te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y usar todos tus conocimientos para encontrar las soluciones de los 20 problemas de este número. En la siguiente sección encontrarás las respuestas de todos ellos, pero te recomendamos que no la consultes sino hasta después de que hayas llegado por ti mismo a tu propia solución.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que concoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. Si n es un entero positivo divisible entre 7, de los números $6, 14, 21, 28$ y 42, ¿cuál no es necesariamente un divisor de $n^3 - n$?

Problema 2. Un cuadrado grande es dividido en uno más pequeño rodeado por cuatro rectángulos congruentes como se muestra en la figura. Sabiendo que el perímetro de cada uno de los rectángulos congruentes mide $14\,cm$, determina el área del cuadrado grande.



Problema 3. En un rectángulo de lados $8\,cm$ y $9\,cm$ se dibujan dos circunferencias de igual radio tangentes entre sí y de forma que una de ellas sea tangente a dos lados consecutivos del rectángulo y la otra tangente a los otros dos. ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias?

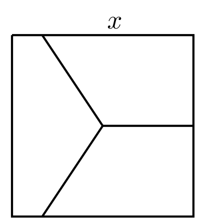
Problema 4. A una convención asisten 50 políticos. Se sabe que:

- Cada político es honesto o deshonesto (no hay otra posibilidad).
- Al menos uno de los políticos es deshonesto.
- Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos es honesto.

¿Cuántos políticos son deshonestos y cuántos son honestos?

Problema 5. Se ha encuestado a un grupo de 132 alumnos preguntando qué les gusta jugar: básquet o fútbol. A 16 alumnos les gustan ambos juegos; el número de alumnos a los que les gusta jugar fútbol es el doble del número de alumnos a los que les gusta jugar básquet y el número de alumnos a quienes no les gusta jugar ninguno de los dos juegos es la mitad de quienes sólo gustan de jugar fútbol. ¿A cuántos alumnos les gusta jugar fútbol?

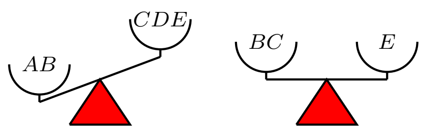
Problema 6. Un cuadrado con lados de longitud $1\,cm$ se divide en un pentágono y dos trapecios iguales por medio de segmentos que parten del centro del cuadrado y van a tres puntos en los lados del cuadrado como se muestra en la figura. Sabiendo que las áreas de las tres figuras son iguales, determina el valor de x, el lado más largo de cada trapecio.



Problema 7. Sean a, b, c y d números enteros tales que $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$ y $d < 40$. Determina el mayor valor posible de a.

Problema 8. Una semicircunferencia de diámetro AB se divide, mediante 29 puntos, en treinta arcos de igual longitud. Los 29 puntos están numerados en sentido horario con los enteros del 1 al 29. ¿Cuál es la longitud de la proyección, sobre dicho diámetro, del arco comprendido entre los puntos 5 y 10, sabiendo que la longitud de AB es $2 + 2\sqrt{3}\,cm$?

Problema 9. Luis tiene 5 pesas A, B, C, D, E que pesan $1\,kg, 2\,kg, 3\,kg, 4\,kg, 5\,kg$, en algún orden. Utilizando una balanza Luis observó lo siguiente,

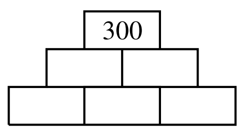


¿Cuánto pesa D?

Problema 10. El número de cinco dígitos $36aa3$ es múltiplo de 7. ¿Cuál es la suma de todos los valores posibles de a?

Problema 11. En un triángulo ABC, sea D un punto sobre el lado BC tal que $DB = 14\,cm$, $DA = 13\,cm$ y $DC = 4\,cm$. Si se sabe que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ADB es igual al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ADC, determina el área del triángulo ABC.

Problema 12. En la pirámide, el número en cada casilla es igual al producto de las dos casillas que están abajo. ¿De cuántas formas puedes llenar la pirámide? (Dos formas se consideran distintas si los números son distintos).



Problema 13. Carlos encontró una pirámide de madera con base cuadrada, que estaba un poco maltratada en los vértices. Decidió cortar los vértices con un serrucho. ¿Cuántas aristas tiene el nuevo sólido?

Problema 14. Tres cartas, con un número entero positivo en cada una, se ponen boca abajo en una mesa. Se les dice a Paco, Ana y Jacobo que los números de las tres cartas son todos diferentes, en total suman 13 y están acomodados en orden creciente de izquierda a derecha. En primer lugar, Paco mira el número de la carta situada en el extremo izquierdo y dice, *No tengo suficiente información para determinar los otros dos números.* Después, Ana mira el número de la carta del extremo derecho y dice, *No tengo suficiente información para determinar los otros dos números.* Finalmente, Jacobo mira el número de la carta de enmedio y dice *No tengo suficiente información para determinar los otros dos números.* Suponiendo que cada persona sabe que las otras razonan prefectamente bien y que todos han escuchado los comentarios, ¿tienes suficiente información para determinar alguno de los tres números?

Problema 15. Un número telefónico de 7 dígitos $d_1d_2d_3 - d_4d_5d_6d_7$ se llama *memorable* si la sucesión $d_1d_2d_3$ coincide exactamente con $d_4d_5d_6$ o con $d_5d_6d_7$ (o con ambas). Suponiendo que cada d_i puede ser cualquiera de los dígitos $0, 1, \ldots, 9$, determina la cantidad de números telefónicos memorables.

Problema 16. Juan tiene muchos cubos blancos idénticos. En cada cara de cada cubo traza una diagonal. ¿Cuál es el mayor número de cubos diferentes que puede obtener? (Dos cubos son iguales si difieren por una rotación.)

Problema 17. Determina todos los triángulos rectángulos que tienen lados de longitudes números enteros y tales que su área es igual a su perímetro.

Problema 18. Calcula el valor de la suma

$$\frac{1}{\log_2 100!} + \frac{1}{\log_3 100!} + \frac{1}{\log_4 100!} + \cdots + \frac{1}{\log_{100} 100!}.$$

(Nota: $n! = n(n-1)\cdots(2)(1)$).

Problema 19. En un pizarrón están escritos los números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2010^2$. Curro y Jacob juegan un juego donde borran alternadamente un número a la vez hasta que queden sólo dos números en el pizarrón. Si la diferencia entre estos dos números es un múltiplo de 2011, Jacob gana. En caso contrario, gana Curro. Si Curro empieza el juego, determina quién tiene una estrategia ganadora y explícala.

Problema 20. Cinco enteros positivos a, b, c, d y e mayores que 1 satisfacen las siguientes condiciones.

$$\begin{aligned}
a(b+c+d+e) &= 128,\\
b(a+c+d+e) &= 155,\\
c(a+b+d+e) &= 203,\\
d(a+b+c+e) &= 243,\\
e(a+b+c+d) &= 275.
\end{aligned}$$

Determina los valores de a, b, c, d y e.

Soluciones a los problemas de práctica

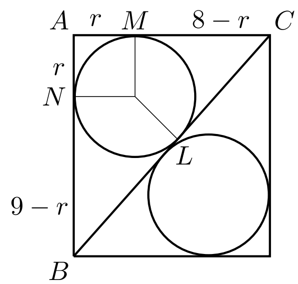
En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que para cada solución se incluye la explicación que justifica su validez. Observa que, en todos los casos, la argumentación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que para ningún problema la solución se presenta sin sustento.

Como siempre, las soluciones que presentamos no son únicas y probabalemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Podemos escribir $n = 7k$, para algún entero positivo k, y tenemos que $n^3 - n = 7k(49k^2 - 1)$. Si $k = 1$ es fácil verificar que todos los números $6, 14, 21, 28$ y 42 son divisores de $n^3 - n$. Si $k = 2$, tenemos que $n^3 - n = 14 \times 195 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ y el 28 no es divisor.

Solución del problema 2. Sabemos que cada uno de los rectángulos congruentes tiene perímetro igual a $14\,cm$. Denotemos por a y b a la base y la altura de los rectángulos. Como el perímetro $P = 2a + 2b = 2(a + b) = 14\,cm$, tenemos que $a + b = 7\,cm$. Ahora, como cada lado del cuadrado grande mide $a + b = 7\,cm$, tenemos que el área es $A = (7)(7) = 49\,cm^2$.

Solución del problema 3. Recordemos que las dos tangentes que podemos trazar a una circunferencia desde un punto exterior a ella, tienen la misma longitud (ver el teorema 15 del apéndice). Así, $BL = BN = 9 - r$, $CL = CM = 8 - r$ y $AM = AN = r$, donde r es el radio de las circunferencias.



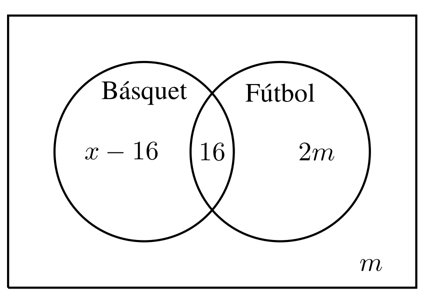
Por el teorema de Pitágoras (ver el teorema 8 del apéndice) tenemos que,

$$\begin{aligned}
(BL + LC)^2 &= 8^2 + 9^2 \\
((9 - r) + (8 - r))^2 &= 145 \\
(17 - 2r)^2 &= 145 \\
4r^2 - 68r + 144 &= 0 \\
r^2 - 17r + 36 &= 0 \\
r &= \frac{17 \pm \sqrt{145}}{2}.
\end{aligned}$$

Como el radio no puede ser mayor que el lado del rectángulo, entonces $r = \frac{17-\sqrt{145}}{2}\ cm$.

Solución del problema 4. Sea D el político deshonesto (sabemos que hay al menos uno). Para cada par formado por D y otro político, como al menos uno es honesto, el otro político necesariamente tiene que ser honesto, es decir, todos los políticos son honestos excepto D. Por lo tanto, hay un político deshonesto y 49 honestos.

Solución del problema 5. Denotemos por x al número de alumnos a los cuales les gusta jugar básquet, entonces a $2x$ alumnos les gusta el fútbol. Sea m el número de alumnos a los cuales no les gusta ninguno de los dos juegos, entonces a $2m$ alumnos les gusta sólo el fútbol. Sabemos que a x alumnos les gusta el básquet y a 16 de ellos les gusta también el fútbol, luego a $(x - 16)$ alumnos les gusta sólo el básquet. Con estos datos, podemos completar el siguiente diagrama.



Observemos que $2x = 2m + 16$ es el número de alumnos a los que les gusta el fútbol y que el total de alumnos es $x + 3m = 132$. Luego, resolviendo el sistema anterior de dos ecuaciones con dos incógnitas, tenemos que

$$x + 3m = (m + 8) + 3m = 4m + 8 = 132,$$

de donde $m = 31$ y $x = 39$. Por lo tanto, a $2x = 78$ alumnos les gusta el fútbol.

Solución del problema 6. Recordemos que el área de un trapecio puede calcularse mediante la fórmula $A = \frac{(B+b)h}{2}$, donde B es la longitud de la base mayor, b la base menor y h la altura. Observemos que $B = x$, $b = \frac{1}{2}$ y $h = \frac{1}{2}$, por lo tanto

$$A = \frac{(x + \frac{1}{2})\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{2x+1}{4}}{2} = \frac{2x+1}{8}\,cm^2.$$

Por otro lado, como el área del cuadrado es igual a $1\,cm^2$ y como las tres figuras (los dos trapecios y el pentágono) en que éste se divide tienen áreas iguales, podemos concluir que el área de cada trapecio es igual a $\frac{1}{3}\,cm^2$. Ahora es fácil calcular el valor de x, pues resolviendo la ecuación $\frac{2x+1}{8} = \frac{1}{3}$, obtenemos que $x = \frac{5}{6}\,cm$.

Solución del problema 7. Como a, b, c y d son enteros, tenemos que

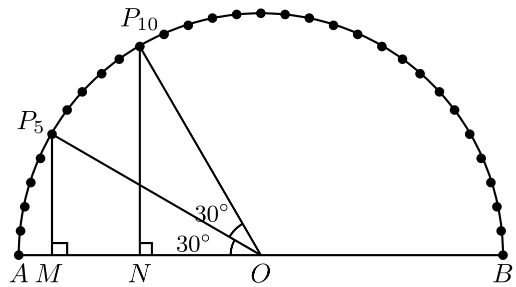
$$\begin{aligned} a < 2b &\;\Rightarrow\; a \leq 2b - 1, \\ b < 3c &\;\Rightarrow\; b \leq 3c - 1, \\ c < 4d &\;\Rightarrow\; c \leq 4d - 1, \\ d < 40 &\;\Rightarrow\; d \leq 39. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a &\leq 2b - 1 \leq 2(3c - 1) - 1 = 6c - 3 \\ &\leq 6(4d - 1) - 3 = 24d - 9 \\ &\leq 24(39) - 9 = 927. \end{aligned}$$

Tomando $d = 39$, $c = 4(39)-1 = 155$, $b = 3(155)-1 = 464$ y $a = 2(464)-1 = 927$, concluimos que el máximo valor de a es 927.

Solución del problema 8. Denotemos por $P_1, P_2, \ldots, P_{29}$ a los puntos $1, 2, \ldots, 29$. Como se ha dividido a la semicircuenferencia en 30 arcos de igual longitud, la medida de cada uno de ellos es de $\frac{180^\circ}{30} = 6^\circ$.
Sean O y R el centro de la circunferencia y la longitud de su radio, respectivamente. Entonces, $\angle AOP_5 = \angle P_5OP_{10} = 30^\circ$, pues cada uno de estos ángulos abarca 5 arcos pequeños de 6° cada uno.
Sean M y N las proyecciones de los puntos P_5 y P_{10} sobre el diámetro AB, y R el radio de la semicircunferencia.



Los triángulos OP_5M y $P_{10}ON$ son congruentes por el criterio ALA (ver el criterio 10 del apéndice) y son la mitad de un triángulo equilátero de lado $OP_5 = P_{10}O = R$. Entonces, $P_5M = ON = \frac{R}{2}$, y aplicando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 8 del apéndice) tenemos que

$$OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}.$$

Entonces, $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}R$ y en consecuencia,

$$MN = OM - ON = \frac{\sqrt{3}}{2}R - \frac{1}{2}R = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2},$$

pero $2R = 2 + 2\sqrt{3}$, luego $R = 1 + \sqrt{3}\,cm$. Entonces,

$$MN = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2} = 1\,cm,$$

que es la longitud de la proyección del arco que va de P_5 a P_{10} sobre el diámetro AB.

Solución del problema 9. Si escribimos las expresiones que corresponden tenemos que

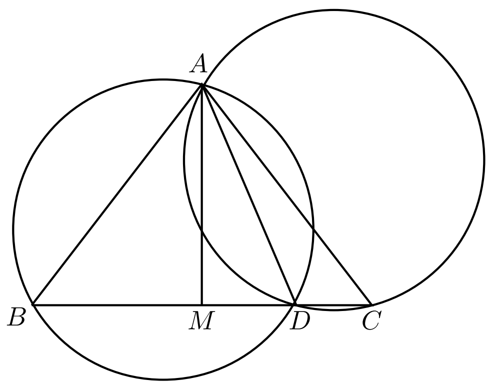
$$\begin{array}{rcl} A+B & > & C+D+E \\ B+C & = & E. \end{array}$$

Observemos que $B + C \leq 5$, es decir $B < 5$. Además, como la suma de todos los pesos es igual a 15 tenemos que $5+4 \geq A+B > 7$ lo que implica que $A+B$ es igual a 9 u 8. Si $A + B = 9$, tenemos que $A = 5$, $B = 4$ y $B + C = 4 + 1 = 5 = E$ lo que es una contradicción. Entonces, $A+B = 8$. Como $B < 5$, tenemos que $A = 5$, $B = 3$ y $B + C = 3 + 1 = 4$, es decir $C = 1$ y $E = 4$. Por lo tanto, D pesa $2\,kg$.

Solución del problema 10. Tenemos que 7 divide a $36aa3$ si y sólo si 7 divide a $(36003 + aa0)$. Como $36003 = 7(5143) + 2$ y $aa0 = 110 \cdot a = 7(15 \cdot a) + 5 \cdot a$, entonces 7 divide a $(36003 + aa0)$ si y sólo si 7 divide a $5 \cdot a + 2$, si y sólo si 7 divide a $5 \cdot a + 2 + 28 = 5(a + 6)$. Pero 7 y 5 son primos relativos, entonces 7 divide a $36aa3$

si y sólo si 7 divide a $a+6$. Luego, los únicos valores posibles de a son 1 y 8. Por lo tanto, la suma de todos los posibles valores de a es $1+8=9$.

Solución del problema 11. Como los radios de las circunferencias circunscritas son iguales, se sigue del teorema del ángulo inscrito (ver el teorema 16 del apéndice) que $\angle ACB = \angle ABC$, y en consecuencia $AB = AC$.



Sea AM la altura sobre el lado BC. Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos que AM también es mediana, es decir, M es punto medio de BC. Luego, $MC = \frac{BC}{2} = \frac{DB+DC}{2} = \frac{14+4}{2} = \frac{18}{2} = 9\,cm$ y $MD = MC - DC = 9 - 4 = 5\,cm$. Aplicando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 8 del apéndice) en el triángulo AMD, tenemos que

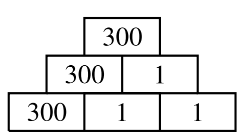
$$AM = \sqrt{DA^2 - MD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\,cm.$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} AM \cdot BC = \frac{1}{2}(12)(18) = 108\,cm^2$.

Solución del problema 12. Los dos números del segundo renglón tienen que ser divisores de 300. Como $300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$, tenemos que este número tiene $3 \times 2 \times 3 = 18$ divisores positivos (ver el teorema 2 del apéndice), los cuales acomodamos por parejas como sigue:

$$(300,1), (150,2), (100,3), (75,4), (60,5), (50,6), (30,10), (25,12), (20,15).$$

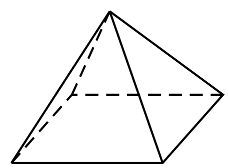
Para llenar el primer renglón de la pirámide necesitamos analizar cada uno de los 9 casos anteriores. Si ponemos los números $(300,1)$ en el segundo renglón tenemos una sola forma de llenar la pirámide.



Si tomamos ahora los números $(150,2)$ tenemos dos formas de llenar el primer renglón, ya sea con los números $(150,1,2)$ ó $(75,2,1)$. Análogamente tenemos que para $(100,3)$

hay una forma de llenar la pirámide, para $(75, 4)$ hay una, para $(60, 5)$ hay dos formas, para $(50, 6)$ hay dos, para $(30, 10)$ hay cuatro, para $(25, 12)$ hay una y para $(20, 15)$ hay dos.
Por lo tanto, en total hay $1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 1 + 2 = 16$ formas de llenar la pirámide.

Solución del problema 13. Como la pirámide tiene base cuadrada, tiene una cara que es un cuadrado y cuatro que son triángulos. En total tiene, $4 + 4 = 8$ aristas.



Al cortar los vértices se crean cuatro caras triangulares y una cuadrada, entonces se crean $4(3) + 4 = 16$ aristas. Por lo tanto, el nuevo sólido tiene $16 + 8 = 24$ aristas.

Solución del problema 14. La respuesta es sí. Veamos que bajo las condiciones dadas, el número de la carta de enmedio forzosamente tiene que ser 4.
Considerando las tres condiciones inciales es fácil ver que las únicas combinaciones de valores posibles para las cartas son:

$$(1, 2, 10), (1, 3, 9), (1, 4, 8), (1, 5, 7), (2, 3, 8), (2, 4, 7), (2, 5, 6) \text{ y } (3, 4, 6).$$

Después de que Paco mira la carta de la izquierda y declara que no tiene suficiente información para determinar los valores de las otras dos, sabemos que Paco no vio el número 3 y podemos descartar la terna $(3, 4, 6)$. La conclusión anterior se justifica con base en que Paco razona perfectamente y conoce las tres condiciones inciales, por tanto sabe que $(3, 4, 6)$ es la única combinación posible de valores que comienza con 3. De haber visto el número 3 hubiera podido determinar que los números de las otras cartas eran 4 y 6.
En segundo lugar, después de que Ana, quien concoce las condiciones iniciales y ha escuchado el comentario de Paco, mira el número de la derecha y declara que tampoco puede determinar el valor de las otras cartas, podemos descartar las ternas $(1, 2, 10)$, $(1, 3, 9)$ y $(2, 5, 6)$. Sabemos que Ana no pudo ver los números 9 ó 10, pues bajo las condiciones inciales estas ternas son únicas por lo que hubiera sido posible detreminar los valores de los otros dos números. Ana tampoco vio el número 6, pues aunque incialmente había dos ternas posibles de la forma $(a, b, 6)$, después del comentario de Paco, se ha descartado la posibilidad $(3, 4, 6)$. Si Ana hubiera visto el número 6, entonces con facilidad hubiera determinado que los otros números eran 2 y 5.
Para cuando llega el turno de Jacobo, ya se han descartado 4 de las 8 posibles ternas iniciales, por lo que antes de ver la carta de enmedio él sabe que las únicas posibles combinaciones de valores son: $(1, 4, 8)$, $(1, 5, 7)$, $(2, 3, 8)$ y $(2, 4, 7)$.
A partir de aquí, la declaración de Jacobo al ver el valor de la carta de enmedio, implica que él no vio los números 5 ó 3, pues al ser ternas únicas, en cualquiera de estos casos

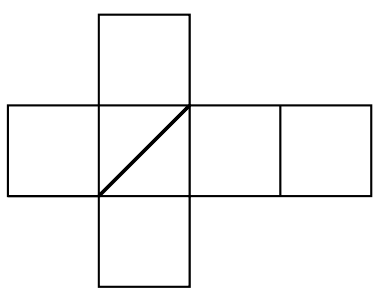
hubiera podido determinar con seguridad los valores de los otros dos números. Finalmente, considerando las condiciones iniciales y las declaraciones de Paco, Ana y Jacobo, tenemos que las únicas ternas posibles son $(1,4,8)$ y $(2,4,7)$. Es claro que la carta de enmedio tiene al número 4 y que no hay suficiente información para deteminar el valor de las otras dos.

Solución del problema 15. Comenzamos contando todos los valores posibles para la sucesión $d_1d_2d_3$. Como cada d_i tiene 10 valores posibles, tenemos que hay 10^3 combinaciones distintas para el inicio de un número memorable. Ahora contemos por casos según la terminación del número.

- Caso 1.- La sucesión $d_1d_2d_3$ coincide exactamente con $d_4d_5d_6$. En este caso, como d_7 puede tomar cualquier valor, tenemos un total de $10^3 \cdot 10 = 10^4$ números memorables.
- Caso 2.- La sucesión $d_1d_2d_3$ coincide con $d_5d_6d_7$. Análogamente, dado que d_4 puede tomar culaquier valor, nuevamente tenemos que la cantidad de combinaciones posibles es 10^4.
- Caso 3.- Números en los que $d_1d_2d_3$ coincide con ambas sucesiones ($d_4d_5d_6$ y $d_5d_6d_7$). En este caso debe cumplirse que $d_1 = d_4 = d_5$, $d_2 = d_5 = d_6$ y $d_3 = d_6 = d_7$; de donde se concluye que $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = d_7$ y por lo tanto sólo hay 10 de estos números.

Dado que los primeros dos casos contemplan el total de posibilidades y que, salvo por los números del caso 3, los números considerados en ellos son todos distintos, concluimos que la cantidad de números memorables es $10^4 + 10^4 - 10 = 19{,}990$.

Solución del problema 16. Vamos a considerar el desarrollo de un cubo, y para cada trazo de diagonales que haga Juan escogemos una cara de forma que el desarrollo quede como en la figura.



Ahora es muy fácil contar, pues en las otras 5 caras tenemos 2 diagonales posibles. Por lo tanto, hay $2^5 = 32$ cubos diferentes.

Solución del problema 17. Supongamos que los catetos miden a, b y la hipotenusa mide c. Como el área y el perímetro son iguales, tenemos que $\frac{1}{2}ab = a + b + c$, de donde $c = \frac{1}{2}ab - a - b$. Por otra parte, aplicando el teorema de Pitágoras (ver el teorema 8 del apéndice), tenemos que

$$a^2 + b^2 = \left(\frac{1}{2}ab - a - b\right)^2 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2b - b^2a + \frac{1}{4}a^2b^2,$$

es decir, $8ab - 4a^2b - 4b^2a + a^2b^2 = 0$. Dividiendo esta ecuación entre ab, obtenemos $(a-4)(b-4) = 8$. Como a y b son enteros, se sigue que $a - 4$ divide a 8. Luego, los valores posibles de a son 2, 3, 5, 6, 8 y 12. Determinando los valores de b y c, obtenemos los triángulos de lados $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$, y $a = 6$, $b = 8$ y $c = 10$.

Solución del problema 18. Usando la fórmula para cambio de base $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$, comenzamos rescribiendo la expresión con logaritmos base 10.

$$\frac{1}{\frac{\log 100!}{\log 2}} + \frac{1}{\frac{\log 100!}{\log 3}} + \frac{1}{\frac{\log 100!}{\log 4}} + \cdots + \frac{1}{\frac{\log 100!}{\log 100}}.$$

Resolviendo los cocientes y sumando obtenemos,

$$\frac{\log 2}{\log 100!} + \frac{\log 3}{\log 100!} + \frac{\log 4}{\log 100!} + \cdots + \frac{\log 100}{\log 100!} = \frac{\log 2 + \log 3 + \log 4 + \cdots + \log 100}{\log 100!}.$$

Finalmente, recordando que $\log A + \log B = \log(AB)$, concluimos que

$$\sum_{k=2}^{100} \left(\frac{1}{\log_k 100!}\right) = \frac{\log(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 100)}{\log 100!} = \frac{\log 100!}{\log 100!} = 1.$$

Solución del problema 19. Observemos que $(2011 - x)^2 - x^2 = 2011(2011 - 2x)$ es un múltiplo de 2011. Luego, siempre que Curro borre un número, digamos x^2, basta que Jacob borre el número $(2011 - x)^2$. De este modo, al final quedarán dos números cuya diferencia es múltiplo de 2011. Por lo tanto, Jacob gana.

Solución del problema 20. Como a, b, c, d y e son enteros mayores o iguales que 2, la suma de cualesquiera cuatro de ellos es por lo menos 8. Luego, ya que

$$b(a + c + d + e) = 155 = 5(31),$$

donde 5 y 31 son números primos, tenemos que $b = 5$ y $a + c + d + e = 31$. De manera análoga, la igualdad

$$c(a + b + d + e) = 203 = 7(29)$$

implica que $c = 7$ y $a + b + d + e = 29$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a + d + e &= 24, \\ a + b + c + d + e &= 36. \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} a(b+c+d+e) &= 128 \\ a(36-a) &= 2^7, \end{aligned}$$

para que a y $36-a$ sean potencias de 2 las únicas posbilidades son $a=4$ ó $a=32$. Si $a=32$, tenemos que

$$36 = a+b+c+d+e \geq 32+2+2+2+2 = 40,$$

lo cual no puede ser, de modo que

$$\begin{aligned} e(a+b+c+d) &= 275 \\ e(16+d) &= 275, \end{aligned}$$

con $d+e = 36-a-b-c = 20$. Como $275 = 11(25)$ y $16+d \geq 18$, tenemos que $e=11$ y $d = 25-16 = 9$. (Observemos que la factorización $275 = 5(55)$ daría $d=39$ y entonces $36 = a+b+c+d+e > 39$, lo cual es un absurdo). Por lo tanto, $a=4$, $b=5$, $c=7$, $d=9$ y $e=11$.

Problemas propuestos

Problemas propuestos.
Año 2010 No. 2.

Tzaloa se construye con la contribución de todos y esta sección está especialmente diseñada para que sus lectores tengan un espacio de participación. A continuación, te presentamos 5 problemas nuevos que te necesitan para encontrar su respuesta. En esta ocasión queremos agradecer a Irving Daniel Calderón Camacho, del Estado de México, quien nos propone el problema 4.

Para dar tiempo a que nos puedas enviar tus soluciones, las respuestas de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publican con dos números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 2, año 2010), aparecen las respuestas de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2009 y las respuestas de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 4, año 2010, por lo que aún tienes tiempo para enviarnos tus contribuciones.

Ponemos a tu disposición nuestra dirección electrónica `revistaomm@gmail.com` ya que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las soluciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

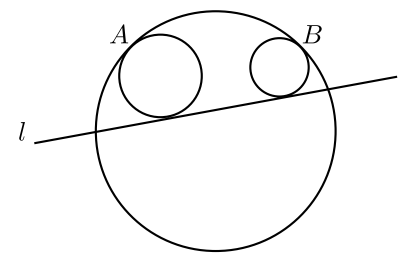
Problema 1. (Introductorio) Si se sabe que $\dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$, calcula el valor de

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 + \left(\frac{x}{y}\right)^{-4}.$$

Problema 2. (Introductorio) Los números $1, 2, 3, \ldots, 24, 25$, se han escrito en las casillas de un tablero cuadrado de 5×5, de tal forma que los números en cada renglón están ordenados en forma creciente de izquierda a derecha. Halla el máximo valor posible de la suma de los números que están en la tercera columna.

Problema 3. (Intermedio) Si x es un número real tal que $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, determina los valores posibles de la expresión $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Problema 4. (Intermedio) Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias que no se intersectan, tienen radios distintos y son tangentes interiormente a una circunferencia ω_3 en los puntos A y B, respectivamente. Se traza la recta l tangente común a ω_1 y ω_2, tal como se muestra en la figura. Demuestra que las rectas AB, l y la que pasa por los centros de ω_1 y ω_2, son concurrentes. (Problema sugerido por Irving Daniel Calderón Camacho).



Problema 5. (Avanzado) Un entero $n > 1$ tiene la siguiente propiedad: para cada divisor positivo d de n, $d + 1$ es un divisor de $n + 1$. Demuestra que n es un número primo.

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2009 No. 4.

Como se mencionó al principio de esta sección, a continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2009. Recuerda que esta revista necesita de ti y ten la seguridad que en el próximo número nos encantaría poder publicar tus soluciones.

Problema 1. (Intermedio) Para cada entero positivo n, denotamos por $a(n)$ al producto de los dígitos de n.
(a) Demuestra que $a(n) \leq n$.
(b) Determina todas las soluciones de la ecuación $n^2 - 17n + 56 = a(n)$.

Solución. (a) Supongamos que n tiene k dígitos $b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1$, con $k \geq 1$, de modo que $n = b_k b_{k-1} \cdots b_1$ es la representación decimal de n. Entonces

$$\begin{aligned} a(n) &= b_k \cdot b_{k-1} \cdot \ldots \cdot b_1 \\ &\leq b_k \cdot \underbrace{9 \cdot \ldots \cdot 9}_{k-1} \quad \text{(ya que} \quad b_i \leq 9) \\ &= 9^{k-1} \cdot b_k. \end{aligned}$$

Sin embargo, $n = b_1 + 10b_2 + \cdots + 10^{k-1}b_k \geq 10^{k-1}b_k \geq 9^{k-1}b_k \geq a(n)$. Luego, $n \geq a(n)$.
(b) Primero consideremos el caso en que n es un número de un dígito. Entonces, $a(n) = n$. Resolviendo la ecuación $n^2 - 17n + 56 = n$ encontramos las soluciones $n = 4$ ó $n = 14$. Luego, $n = 4$ es la única solución de un dígito.
Ahora, buscaremos soluciones con más de un dígito. Aplicando la desigualdad del inciso anterior, tenemos que $n^2 - 17n + 56 \leq n$, es decir, $(n-4)(n-14) \leq 0$. Resolviendo esta desigualdad obtenemos que $4 \leq n \leq 14$. Como n tiene más de un dígito, los posibles valores para n son $10, 11, 12, 13$ y 14. Verificando cada uno de estos valores, vemos que ninguno es solución de la ecuación.
Por lo tanto, $n = 4$ es la única solución.
Solución alternativa para (b). Del inciso (a) tenemos que $a(n) \leq n$. Como todos los dígitos de n son no negativos, tenemos que $0 \leq a(n)$. Como $n^2 - 17n + 56 = a(n)$, entonces

$$0 \leq n^2 - 17n + 56 \leq n.$$

Consideremos primero la restricción $n^2 - 17n + 56 \geq 0$. Resolviendo la ecuación $n^2 - 17n + 56 = 0$ encontramos que la expresión cuadrática $n^2 - 17n + 56$ se factoriza como $(n - \frac{1}{2}(17 - \sqrt{65}))(n - \frac{1}{2}(17 + \sqrt{65}))$. Como $n^2 - 17n + 56 \geq 0$, entonces $n \geq \frac{1}{2}(17 + \sqrt{65}) > \frac{1}{2}(17 + \sqrt{64}) = 12\frac{1}{2}$ ó $n \leq \frac{1}{2}(17 - \sqrt{65}) < \frac{1}{2}(17 - \sqrt{64}) = 4\frac{1}{2}$. Pero n es un entero, luego $n \geq 13$ ó $n \leq 4$.
Consideremos ahora la restricción $n^2 - 17n + 56 \leq n$. Entonces, $(n-4)(n-14) \leq 0$ y de aquí se sigue que $4 \leq n \leq 14$.
Combinando las dos restricciones sobre n, tenemos que los valores posibles de n son $n = 4$, $n = 13$ ó $n = 14$. Verificando cada uno de estos valores, vemos que sólo $n = 4$ es solución.

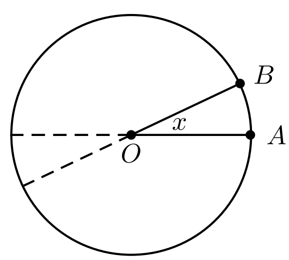
Problema 2. (Intermedio) Sea S un conjunto de 2010 puntos del plano tales que 3 cualesquiera de ellos no son colineales. Denotemos por $\mathcal{L}$ al conjunto de todas las rectas (extendidas indefinidamente en ambas direcciones) que determinan dos puntos de S. Demuestra que es posible colorear los puntos de S con a lo más dos colores, de modo que para cualesquiera dos puntos, p y q de S, el número de rectas en $\mathcal{L}$ que *separan* a p de q es impar si y sólo si p y q tienen el mismo color.
Nota: Una recta l *separa* dos puntos p y q si p y q están en lados opuestos de l pero ninguno de los dos está en l.

Solución. Supongamos primero que el conjunto de 2010 puntos forman un 2010-ágono convexo $\mathcal{P}$. Coloreamos sus vértices de manera alternada con rojo y azul. Si borramos dos vértices u y v, el resto del polígono se divide en dos piezas con i y j vértices respectivamente, donde $i + j = 2008$, luego i y j son de la misma paridad (posiblemente i ó j es 0). El número de rectas en $\mathcal{L}$ que *separan* a v de w es ij, que es par si v y w tienen diferente color e impar si v y w tienen el mismo color. Por lo tanto tenemos una "buena" coloración, es decir, una que satisfaga las condiciones del problema.
Ahora consideremos los 2010 puntos con una configuración arbitraria S y tales que 3 cualesquiera de ellos no sean colineales. Empezaremos con un polígono convexo $\mathcal{P}$ y moveremos cada punto de $\mathcal{P}$ a un punto de S teniendo sumo cuidado en que el

punto movido cruce rectas en $\mathcal{L}$ una a la vez. Después de 2010 de estos movimientos, tendremos una "buena" coloración de S si se fue "manteniendo" la buena coloración durante los movimientos.
Para mantener la buena coloración, cuando un punto A es movido y cruza una recta definida por dos puntos B y C, invertimos los colores de A, B y C. Demostraremos que esto mantiene la buena coloración. Notemos que A termina del lado opuesto de la recta BC en el que estaba, así que después del movimiento BC separará a A de un punto P (distinto de A, B ó C) si y sólo si BC no separaba a A de P antes del movimiento. Dado que hemos cambiado el color de A pero no de P, A y P aún están bien coloreados o correctamente coloreados respecto a la recta BC. Lo mismo se cumple para el punto B respecto a la recta AC, y el punto C respecto a la recta AB. Las posiciones relativas de otros puntos o rectas no son afectadas por el movimiento del punto A. Por lo tanto, la nueva coloración sigue siendo buena.

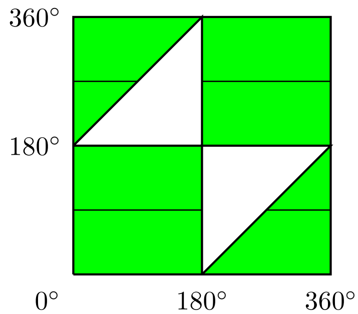
Problema 3. (Intermedio) Si se ponen tres puntos en una circunferencia, ¿cuál es la probabilidad de que estén en una misma semicircunferencia?

Solución. Llamemos a los tres puntos A, B y C, y sea O el centro de la circunferencia. Podemos poner el primer punto A en el extremo derecho de la circunferencia. Comencemos por poner el punto B en A y moverlo a lo largo de la circunferencia en sentido inverso a la manecillas del reloj. Para cada posición de B podemos definir la zona donde colocar C para que los tres puntos estén en una misma semicircunferencia.



Cuando B está encima de A, el punto C puede estar en cualquier punto de la circunferencia. Al mover B a lo largo de la circunferencia, los radios OA y OB forman un ángulo de x grados que va creciendo. Supongamos que $x \leq 180°$. Entonces, para que los tres puntos estén en la misma semicircunferencia tenemos que alguno de los ángulos COA ó COB tiene que ser menor o igual a $180° - x$, es decir, si medimos a partir de A en sentido contrario a las manecillas del reloj, tenemos que $0 \leq \angle COA \leq 180°$ ó $180° + x \leq \angle COA \leq 360°$.
Observemos que cuando B está diametralmente opuesto a A, no importa dónde esté el punto C, los tres puntos están en la misma semicircunferencia. Cuando $x \geq 180°$, sea $y = x - 180°$ entonces tenemos que para que C esté en la misma semicircunferencia necesitamos que $0 \leq \angle COA \leq y$ ó $180° \leq \angle COA \leq 360°$.
Podemos representar esta situación en un cuadrado, donde en el lado horizontal ponemos la medida del ángulo BOA y en el vertical las medidas del ángulo COA, y el área sombreada representa los valores del ángulo COA para los cuales los tres puntos están en

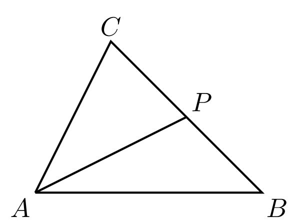
la misma semicircunferencia.



Por lo tanto, la probabilidad de que los tres puntos estén en la misma semicircunferencia es igual a la porción del área total que representa el área de la región sombreada, es decir, es igual a $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Problema 4. (Avanzado) En un triángulo acutángulo ABC, los puntos E y F están en AC y BC, respectivamente. Las rectas BE y AF se cortan en un punto T, de manera que $\frac{AT}{TF} = 4$ y $\frac{BT}{TE} = 3$. Encuentra el valor de $\frac{CE}{EA}$.

Solución. Observemos primero que para cualquier punto P en el lado BC de un triángulo ABC, se cumple que $\frac{BP}{PC} = \frac{(ABP)}{(APC)}$, ya que los triángulos ABP y APC tienen la misma altura desde A. (Los paréntesis denotan área).



Usaremos esta propiedad varias veces en la solución.
Sean x, y, números tales que $(BTF) = 3x$ y $(TFC) = 3y$.
Aplicando la propiedad en el triángulo ABF, obtenemos

$$4 = \frac{AT}{TF} = \frac{(ABT)}{(BTF)} = \frac{(ABT)}{3x},$$

de donde $(ABT) = 12x$.
Aplicando ahora la propiedad en el triángulo ABE, tenemos

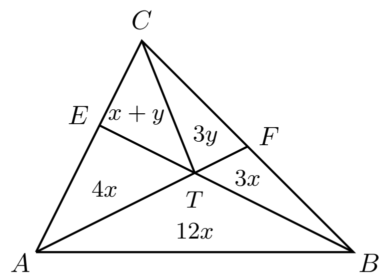
$$3 = \frac{BT}{TE} = \frac{(ABT)}{(ATE)} = \frac{12x}{(ATE)},$$

de donde $(ATE) = 4x$.

Si ahora aplicamos la propiedad en el triángulo BEC, tenemos

$$3 = \frac{BT}{TE} = \frac{(BTC)}{(TEC)} = \frac{3(x+y)}{(TEC)},$$

de donde $(TEC) = x + y$.



Aplicamos ahora la propiedad en el triángulo AFC y obtenemos

$$4 = \frac{AT}{TF} = \frac{(ATC)}{(TFC)} = \frac{(ATE) + (TEC)}{(TFC)} = \frac{5x + y}{3y},$$

de donde $12y = 5x + y$. Luego, $y = \frac{5x}{11}$.
Finalmente, aplicando la propiedad en el triángulo ATC, obtenemos

$$\frac{CE}{EA} = \frac{(TEC)}{(ATE)} = \frac{x+y}{4x} = \frac{\frac{16x}{11}}{4x} = \frac{4}{11}.$$

Problema 5. (Avanzado) Sea $A = (a_1, a_2, \ldots, a_{2010})$ una sucesión de enteros no necesariamente distintos, cada uno de ellos tomados del intervalo $[-1005, 1005]$. Además, supongamos que la suma de todos los términos de A es igual a 1. Demuestra que existe una subsucesión de A tal que la suma de sus términos es igual a cero.

Solución. En primer, lugar observemos que si algún término de A es igual a cero (digamos a_k), entonces el resultado es trivial pues podemos tomar la subsucesión que contiene sólo a ese término: (a_k).
Supondremos entonces que para todo $1 \leq k \leq 2010$, tenemos que $a_k \neq 0$. Reordenemos A en una nueva sucesión $B = (b_1, b_2, \ldots, b_{2010})$ seleccionando los elementos de A de uno en uno mediante el siguiente procedimiento: comencemos tomando $b_1 > 0$. Después, para cada $i \in \{2, 3, \ldots, 2010\}$ escogemos b_i como cualquiera de los elementos no seleccionados de A que tenga signo contrario al signo del resultado de la suma parcial $s_{i-1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{i-1}$. Nótese que si en algún paso llegara a suceder que escogiéramos $b_i = -s_{i-1}$, entonces el resultado es trivial, por lo que a partir de este momento supondremos que $s_{i-1} \neq 0$.
Nótese que para cada paso del proceso de selección, la existencia de un candidato apropiado para b_i está garantizada, toda vez que la condición $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2010} = 1$ implica que la suma de los términos todavía no seleccionados de A tiene que ser cero

o tiene que ser de signo contario que s_{i-1}.
Por la manera en que hemos ido seleccionando a los términos de B, cada una de las sumas parciales $s_1, s_2, \cdots, s_{2010}$ es alguno de los 2009 enteros distintos de cero del intervalo $[-1004, 1005]$. Por el *principio de las casillas*, existen enteros m y n tales que $s_m = s_n$, donde $1 \leq m \leq n \leq 2010$. Entonces es claro que $b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n = 0$.

Problemas y Soluciones del Concurso Nacional 2009

Del 8 al 14 de noviembre de 2009 se llevó a cabo en Campeche, Campeche, el Concurso Nacional de la 23ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 31 estados de la República. El estado de Tabasco no participó. Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Hernández González Flavio (Aguascalientes)
Arreola Gutiérrez Fernando Ignacio (Aguascalientes)
Zhou Tan David (Baja California)
Dosal Bustillos Manuel Enrique (Chihuahua)
Embarcadero Ruiz Daniel (Distrito Federal)
Calderón Camacho Irving Daniel (Estado de México)
Leal Camacho Manuel Alejandro (Jalisco)
Miranda Olvera José Luis (Jalisco)
Ortiz Rhoton Juan Carlos (Jalisco)
Belanger Albarrán Georges (Morelos)
Perales Anaya Daniel (Morelos)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Jiménez Reichow Tilman (Oaxaca)
Guardiola Espinosa José Ramón (San Luis Potosí)
Jiménez Benítez José Manuel (San Luis Potosí)
Ucán Aké Raúl Eugenio (Yucatán)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

García González Héctor Benjamín (Colima)

Ortiz Rhoton Juan Carlos (Jalisco)
González Cázares Jorge Ignacio (Jalisco)
Arancibia Alberro María Natalie (Morelos)
Roque Montoya Diego Alonso (Nuevo León)
Añorve López Fernando Josafath (Nuevo León)
Díaz Calderón Julio César (Oaxaca)
Cervantes Pérez Ángel Gustavo (Yucatán)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 23^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Morelos
3. San Luis Potosí
4. Nuevo León
5. Distrito Federal
6. Yucatán
7. Chihuahua
8. Baja California
9. Aguascalientes
10. Oaxaca

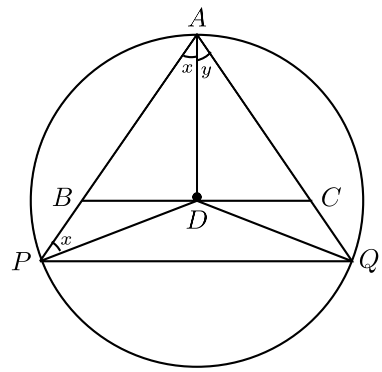
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**San Francisco de Campeche**" y fue ganado por San Luis Potosí. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Distrito Federal y Nuevo León, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones del Concurso Nacional 2009. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Solución del Examen del Concurso Nacional 2009

Problema 1. Sean ABC un triángulo y AD la altura sobre el lado BC. Tomando a D como centro y a AD como radio, se traza una circunferencia que corta a la recta AB en P, y corta a la recta AC en Q. Muestra que el triángulo AQP es semejante al triángulo ABC.

Solución. (Georges Belanger Albarrán.) Tenemos que D es el centro del círculo que pasa por A, P y Q. Por lo tanto, D es el circuncentro del triángulo APQ. Llamemos x al ángulo PAD. Como $DA = DP$ por ser radios, el triángulo DAP es isósceles y $\angle DAP = \angle APD = x$.



Como en un triángulo los ángulos internos suman $180°$, entonces $\angle ADP = 180° - 2x$. El ángulo central ADP abre el mismo arco que el ángulo inscrito AQP, entonces $\angle ADP = 2\angle AQP$, luego $\angle AQP = 90° - x$. Ahora bien, en el triángulo ADB tenemos que $\angle ADB = 90°$ y $\angle DAB = x$, entonces $\angle ABD = 90° - x = \angle AQP$. Así, los triángulos ABC y AQP comparten el ángulo en A y $\angle ABC = \angle AQD$, luego por el criterio AA los dos triángulos son semejantes, que es lo que queríamos probar. (Análogamente, si $\angle DAC = y$ podemos probar que $\angle ACB = \angle APQ = 90° - y$. Entonces, los tres ángulos de los triángulos ABC y AQP son iguales y por lo tanto los triángulos son semejantes.)

Problema 2. En cajas marcadas con los números $0, 1, 2, 3, ...$ se van a colocar todos los enteros positivos de acuerdo con las siguientes reglas:

- si p es un número primo éste se coloca en la caja con el número 1;
- si el número a se coloca en la caja con el número m_a y b se coloca en la caja con el número m_b, entonces el producto de a y b, es decir ab, se coloca en la caja con el número $am_b + bm_a$.

Encuentra todos los enteros positivos n que cuando se coloquen queden en la caja con el número n.

Solución. (José Luis Miranda Olvera.) Los números n que se colocan en la caja con el número n son tales que $n = ab = am_b + bm_a$ para algún par de enteros a y b.
Si n se puede escribir como el producto de 2 números enteros positivos x y y distintos de 1 y tales que $(x, y) = 1$ y $xy = n$, entonces $n = xy \neq xm_y + ym_x$. Esto se debe a que si $xy = xm_y + ym_x$ entonces $x \mid xm_y + ym_x$, luego $x \mid ym_x$, de donde $x \mid m_x$, entonces $m_x \geq x$, y de aquí que

$$xm_y + ym_x > ym_x \geq xy = n,$$

lo que no es posible. Por lo tanto, n no se puede expresar como el producto de dos números primos relativos distintos de 1. Luego, $n = p^r$ donde p es un número primo y $r \geq 2$. Ahora bien, demostremos que $n = m_n$ si y sólo si $n = p^p$. Supongamos que $n = m_n = p^r$, para algún entero $r \geq 2$. Como los números primos van en la caja número 1, tenemos que

$$m_{p^r} = p^r = p^{r-1}m_p + pm_{p^{r-1}},$$

lo cual implica que $m_{p^{r-1}} = p^{r-1} - p^{r-2}$. Además, para todo $1 \leq y < r$, tenemos que

$$m_{p^{r-y}} = p^{r-(y+1)} + pm_{p^{r-(y+1)}}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} p^{r-2} + pm_{p^{r-2}} &= m_{p^{r-1}} = p^{r-1} - p^{r-2} \\ m_{p^{r-2}} &= p^{r-2} - 2p^{r-3}. \end{aligned}$$

Recursivamente llegamos a que

$$m_{p^{r-y}} = p^{r-y} - yp^{r-(y+1)},$$

para todo $1 \leq y < r$. En particular,

$$\begin{aligned} m_{p^{r-(r-2)}} &= p^{r-(r-2)} - (r-2)p^{r-(r-1)} \\ m_{p^2} &= p^2 - (r-2)p \\ 2p &= p^2 - rp + 2p \\ p &= r, \end{aligned}$$

ya que $m_{p^2} = pm_p + pm_p = 2p$.
Por lo tanto, $n = m_n$ si y sólo si $n = p^p$, donde p es primo.

Problema 3. Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Muestra que

$$\frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \quad \text{y que} \quad \frac{1}{a^3+2} + \frac{1}{b^3+2} + \frac{1}{c^3+2} \leq 1.$$

Solución. (Manuel Enrique Dosal Bustillos.) Tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a^3+2} + \frac{b^3}{b^3+2} + \frac{c^3}{c^3+2} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{\frac{a^3+2}{a}} + \frac{b^2}{\frac{b^3+2}{b}} + \frac{c^2}{\frac{c^3+2}{c}} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{a^2+\frac{2}{a}} + \frac{b^2}{b^2+\frac{2}{b}} + \frac{c^2}{c^2+\frac{2}{c}} \geq 1. \end{aligned}$$

Aplicando una desigualdad útil[1], tenemos que

$$\frac{a^2}{a^2+\frac{2}{a}} + \frac{b^2}{b^2+\frac{2}{b}} + \frac{c^2}{c^2+\frac{2}{c}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}}.$$

[1]Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son positivos, entonces

$$\frac{a_1^2}{x_1} + \frac{a_2^2}{x_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

Entonces, la primera desigualdad quedará demostrada si probamos que

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}} \geq 1.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}} \geq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad (a+b+c)^2 \geq a^2+b^2+c^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad 2(ab+bc+ac) \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\\ &\Leftrightarrow \quad 2(ab+bc+ac) \geq 2(bc+ac+ab),\end{aligned}$$

ya que la condición $abc = 1$ implica que $\frac{1}{a} = bc$, $\frac{1}{b} = ac$ y $\frac{1}{c} = ab$. Como la última desigualdad es cierta, hemos demostrado así la primera desigualdad.

Multiplicando la desigualdad $\dfrac{1}{a^3+2}+\dfrac{1}{b^3+2}+\dfrac{1}{c^3+2} \leq 1$ por $(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)$, obtenemos la desigualdad equivalente

$$(b^3+2)(c^3+2)+(a^3+2)(c^3+2)+(a^3+2)(b^3+2) \leq (a^3+2)(b^3+2)(c^3+2),$$

la cual se simplifica a

$$a^3b^3c^3+b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3 \geq 4.$$

Como $abc = 1$, tenemos que $a^3b^3c^3 = 1$, y la desigualdad anterior se reduce a la desigualdad

$$b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3 \geq 3.$$

Pero esta desigualdad es verdadera, pues si aplicamos la desigualdad media aritmética-media geométrica a los números reales positivos b^3c^3, a^3c^3 y a^3b^3, tenemos que

$$b^3c^3+a^3c^3+a^3b^3 \geq 3\sqrt[3]{(b^3c^3)(a^3c^3)(a^3b^3)} = 3\sqrt[3]{a^6b^6c^6} = 3(abc)^2 = 3.$$

Por lo tanto, hemos demostrado así la segunda desigualdad.

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero impar y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales distintos. Sea M el mayor de estos números y sea m el menor de ellos. Muestra que es posible escoger los signos en la expresión $s = \pm a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ de manera que

$$m < s < M.$$

Solución. (Flavio Hernández González.) Renombrando los números podemos suponer que

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n.$$

Ahora escogemos

$$s = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{n-1} + a_n.$$

Entonces

$$s = a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{n-1} + a_n) > a_1$$

pues $(-a_k + a_{k+1}) > 0$ para toda k.
Por otra parte

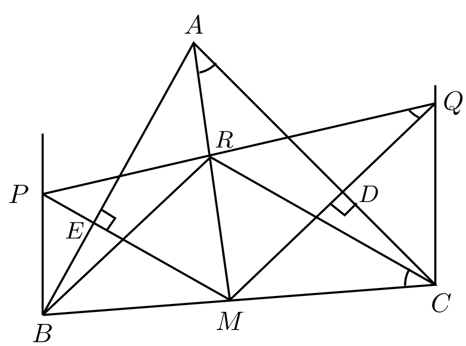
$$s = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_n < a_n$$

pues $(a_k - a_{k+1}) < 0$ para toda k.
Por lo tanto

$$m < s < M.$$

Problema 5. Considera un triángulo ABC y un punto M sobre el lado BC. Sea P la intersección de las perpendiculares a AB por M y a BC por B, y sea Q la intersección de las perpendiculares a AC por M y a BC por C. Muestra que PQ es perpendicular a AM si y sólo si M es punto medio de BC.

Solución. (Daniel Perales Anaya.) Sean E el punto de intersección de AB y PM, D el punto de intersección de AC y MQ, y R el punto de intersección de AM y PQ.



Supongamos que AM es perpendicular a PQ.
Como $\angle MCQ = \angle MRQ = \angle MRP = \angle MBP = 90°$, entonces $PBMR$ y $QCMR$ son cuadriláteros cíclicos. Entonces

$$\angle MAD = 90° - \angle RMQ = \angle RQM = \angle RCM.$$

Análogamente,

$$\angle BAR = 90° - \angle RMP = \angle MPR = \angle MBR.$$

Por lo tanto, el circuncírculo del triángulo ARC es tangente a BC en C y el circuncírculo del triángulo ARB es tangente a BC en B. Luego, por potencia a estos círculos desde M tenemos que $MC^2 = MA \cdot MR = MB^2$, de donde $MC = MB$.
Por lo tanto, M es punto medio de BC.
Supongamos que M es punto medio de BC, es decir, $MB = MC$.

Como $\angle MCQ = \angle MDC = 90^\circ$ y $\angle QMC = \angle CMD$, entonces el triángulo QMC es semejante al triángulo CMD. Análogamente, el triángulo BEM es semejante al triángulo PBM. Luego, los lados correspondientes son proporcionales, por lo que tenemos que $\frac{QM}{MC} = \frac{MC}{MD}$ y $\frac{PM}{BM} = \frac{BM}{ME}$, de donde $QM \cdot MD = MC^2$ y $PM \cdot ME = BM^2$. Entonces, $PM \cdot ME = BM^2 = MC^2 = QM \cdot MD$, luego por potencia desde M tenemos que $PEDQ$ es cíclico. Como $\angle AEM = \angle ADM = 90^\circ$, tenemos que $AEMD$ es cíclico. Entonces,

$$\angle PQD = 180^\circ - \angle PED = \angle DEM = \angle DAM = 90^\circ - \angle AMD,$$

por lo que $\angle PQD + \angle AMD = 90^\circ$. Luego,

$$\begin{aligned} \angle MRQ &= 180^\circ - (\angle RQM + \angle RMQ) = 180^\circ - (\angle PQD + \angle AMD) \\ &= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ. \end{aligned}$$

Por lo tanto, PQ es perpendicular a AM.

Problema 6. En una fiesta con n personas, se sabe que de entre cualesquiera 4 personas, hay 3 de las 4 que se conocen entre sí o hay 3 que no se conocen entre sí. Muestra que las n personas se pueden separar en 2 salones de manera que en un salón todos se conocen entre sí y en el otro salón no hay dos personas que se conozcan entre sí.
Nota: conocerse se considera una relación mutua.

Solución. (Diego Alonso Roque Montoya.) Resolveremos el problema por inducción sobre el número de personas en la fiesta.
Claramente los casos para $n = 1, 2, 3, 4$ cumplen la condición del problema. Supongamos entonces que la condición se cumple para $n = k$. Digamos que llega otra persona P a la fiesta y que antes de que llegara estaban separados de forma que el número de personas en el cuarto donde todos se conocen sea el mayor posible. Llamaremos a este cuarto el primer cuarto. Si la nueva persona conoce a todos los del cuarto donde todos se conocen o a ninguno de los del otro cuarto, entonces puede entrar al cuarto correspondiente y se cumple la condición.
De lo contrario, la persona P no conoce al menos a alguien del primer cuarto (llamemos A a esta persona) y conoce al menos a alguien del segundo cuarto (llamemos B a esta persona).
Consideramos a una persona C del primer cuarto. Si C no conoce a B, entonces no puede haber tres personas en el conjunto $\{A, B, C, P\}$ que no se conozcan, ni tres que se conozcan. Luego, B conoce a C. Como C es cualquier persona del primer cuarto podemos deducir que B conoce a todos los del primer cuarto con la posible excepción de A.
Usando este mismo argumento demostramos que A no conoce a nadie del segundo cuarto con la posible excepción de B.
Si B conoce a A, entonces B podría mandarse al primer cuarto y tendría más personas lo cual no es posible por la suposición de que el número de personas era el mayor posible. Luego, B no conoce a A.
Si P no conoce a C, no se cumple la condicion del problema, luego P conoce a C y por lo tanto a todos los del primer cuarto excepto a A. Si pasamos a A al segundo cuarto, P

conoce a todos los del primer cuarto. Entonces podemos poner a P en el primer cuarto y se cumple la condición.
Por lo anterior podemos separar a $n = k + 1$ personas en dos cuartos cumpliendo con las condiciones del problema, lo que termina la inducción.

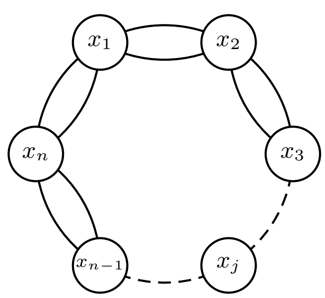
Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXIV Olimpiada Iberoamericana

El año pasado, México tuvo el privilegio de organizar la XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Ésta se llevó a cabo en la ciudad de Querétaro, del 17 al 27 de septiembre de 2009. México ocupó el 5° lugar de entre los 21 países que participaron. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Manuel Guillermo López Buenfil (Chihuahua), Erik Alejandro Gallegos Baños (Oaxaca), Daniel Perales Anaya (Morelos), y César Bibiano Velasco (Morelos).
Manuel Guillermo obtuvo medalla de oro, Erick Alejandro y Daniel obtuvieron medalla de plata y César mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la XXIV Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea n un natural mayor que 2. Supongamos que n islas están ubicadas en un círculo y que entre cada dos islas vecinas hay dos puentes como en la figura.



Comenzando en la isla x_1, ¿de cuántas maneras se pueden recorrer los $2n$ puentes pasando por cada puente exactamente una vez?

Solución. Jorge Alberto Olarte (Colombia). Al principio se tienen dos opciones: ir a x_2 ó a x_n. Entonces sin pérdida de generalidad supongamos que empieza yendo hacia x_2 y luego multiplicamos por 2.
Si sigue avanzando hasta x_k

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_k,$$

y en x_k en vez de ir a x_{k+1} va a x_{k-1} se tienen 2^{k-1} posibilidades para llegar a x_k ya que se cruzaron $k-1$ puentes y cada vez se tenían 2 posibles puentes. Cuando se devuelve está obligado a tomar los otros puentes hasta x_1.
Posteriormente sale de x_1 hacia x_n y tiene que ir hasta x_k, ya que si se devuelve antes cuando llega nuevamente a x_1 habrá puentes que no podrá recorrer. Luego de x_1 a x_k cruza $n+1-k$ puentes, es decir tuvo 2^{n+1-k} posibilidades, y de regreso a x_1 toma el único camino restante.
Multiplicando se tiene $2^{n+1-k} \cdot 2^{k-1} = 2^n$. Como se puede devolver en cualquier x_k (si se devolvió en x_1 dio toda la vuelta antes) hay $n \cdot 2^n$ posibilidades. A eso le sumamos el caso de que nunca se haya devuelto, lo cual da otras 2^n formas (2 posibilidades por cada uno de los puentes en la primera vuelta), y una vez que regresa por primera vez a x_1 vuelve a dar una vuelta por los puentes que quedan. Entonces hay $n \cdot 2^n + 2^n$ caminos, y multiplicando por 2 se tienen $(n+1)2^{n+1}$ caminos en total.

Problema 2. Para cada entero positivo n se define $a_n = n + m$ donde m es el mayor entero tal que $2^{2^m} \leq n2^n$. Determinar qué enteros positivos no aparecen en la sucesión a_n.

Solución. Reynaldo Gil Pons (Cuba).

Lema 8 *Dado m un entero positivo, el mayor entero n tal que $n2^n < 2^{2m}$ es $2^m - m$.*

Prueba del lema.

- Si $n \geq 2^m - m + 1$ y $2^{2m} \geq n2^n \geq (2^m - m + 1)2^{2^m - m + 1}$ entonces al dividir por $2^{2^m - m + 1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} 2^m - m + 1 &< 2^{m-1} \\ 2^{m-1} &< m - 1, \end{aligned}$$

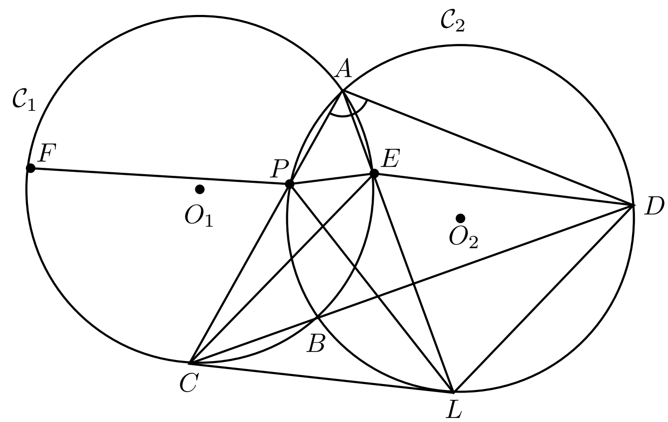
  lo cual es imposible.

- Si $n = 2^m - m$, entonces $n2^n = (2^m - m)2^{2^m - m} = 2^{2^m} - m2^{2^m - m} < 2^{2^m}$.

Entonces, con este lema, si $2^{m-1} - (m-1) < J \leq 2^m - m$ tenemos que $2^{2^{m-1}} \leq J2^J < 2^{2^m}$. Por lo tanto si J recorre los números entre $2^{m-1} - (m-1) + 1$ y $2^m - m$ (inclusive), $a_J = J + m - 1$ recorrería los números desde $2^{m-1} + 1$ hasta $2^m - 1$. Con esto tenemos que los números que no aparecen en la sucesión son las potencias de dos, 2^α con $\alpha \geq 1$.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de centros O_1 y O_2 con el mismo radio, que se cortan en A y en B. Sea P un punto sobre el arco AB de $\mathcal{C}_2$ que está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta AP corta a $\mathcal{C}_1$ en C, la recta CB corta a $\mathcal{C}_2$ en D y la bisectriz de $\angle CAD$ intersecta a $\mathcal{C}_1$ en E y a $\mathcal{C}_2$ en L. Sea F el punto simétrico a D con respecto al punto medio de PE. Demostrar que existe un punto X que satisface $\angle XFL = \angle XDC = 30°$ y $CX = O_1O_2$.

Solución. Percy Guerra Ríos (Perú). Los ángulos ACB y ADB son iguales, ya que sostienen el mismo arco AB en circunferencias congruentes, así que el triángulo ACD es isósceles y AL es perpendicular a CD.

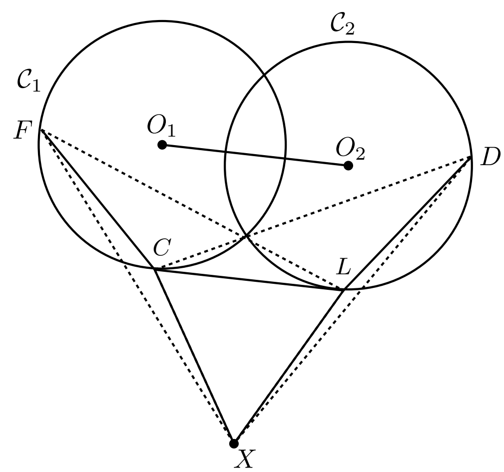


Sea $\alpha = \angle CAL = \angle LAD$, entonces $\angle ACB = 90° - \alpha$, y su ángulo central es $\angle AO_1B = 180° - 2\alpha$. Por simetría se tiene que $\angle AO_1O_2 = 90° - \alpha$. Análogamente, $\angle O_1O_2A = 90° - \alpha$. Ahora nos fijamos en el triángulo O_1O_2A, donde tenemos que $\angle O_1AB = \angle BAO_2 = \alpha$ y $O_1O_2 = 2r \cdot \sin\alpha$, donde r es el radio común de las circunferencias.

Por ley de senos en los triángulos ACE, ALD y APL tenemos $CE = 2r \cdot \sin\alpha$, $LD = 2r \cdot \sin\alpha$ y $PL = 2r \cdot \sin\alpha$, por lo tanto $CE = LD = PL = O_1O_2$.

La recta AL es un eje de simetría respecto a C y D, entonces $DE = EC = LD = CL$. Y como F es simétrico de D con respecto al punto medio de EP tengo $FP = ED = CL$ y $FP||ED$ y por el rombo $CEDL$ tengo que $ED||CL$, por lo tanto FP y CL son paralelas y de la misma longitud, por lo que el cuadrilátero $FCLP$ es un paralelogramo y $FC = PL$.

Sea X el punto tal que el triángulo CXL sea equilátero. Como $CL = O_1O_2$, se tiene que $CX = O_1O_2$.



Como C es el circuncentro del triángulo FLX, entonces $\angle XFL = \frac{1}{2}\angle XCL = 30°$ y como L es el circuncentro del triángulo CXD tenemos que $\angle XDC = \frac{1}{2}\angle XLC = 30°$.
Por lo tanto, dicho punto X cumple con las condiciones pedidas.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean I el incentro de ABC y P el otro punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo A con el circuncírculo de ABC. La recta PI intersecta por segunda vez al circuncírculo de ABC en el punto J. Demostrar que los circuncírculos de los triángulos JIB y JIC son tangentes a IC y a IB, respectivamente.

Solución. Ricardo Jesús Ramos Castillo (Perú). Sean M, N y R puntos en las prolongaciones de BA, CI y BI, respectivamente. Por ser AP bisectriz exterior, tenemos que

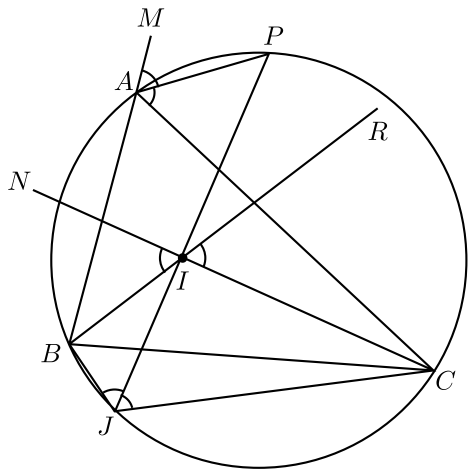
$$\angle MAP = \angle PAC = \frac{1}{2}\angle MAC = \frac{\angle B + \angle C}{2}.$$

Sabemos que $\angle MAP = \angle BJP$, pues el cuadrilátero $BAJP$ es inscriptible, y también $\angle PAC = \angle PJC$, porque el cuadrilátero $PAJC$ es inscriptible. Además

$$\begin{aligned} \angle NIB &= \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}, \\ \angle RIC &= \angle IBC + \angle ICB = \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B + \angle C}{2}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que

$$\angle NIB = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \angle MAP = \angle BJP = \angle BJI,$$
$$\angle RIC = \frac{\angle B + \angle C}{2} = \angle PAC = \angle PJC = \angle IJC.$$



Por el teorema del ángulo seminscrito, de $\angle NIB = \angle BJI$ se sigue que la recta NI es tangente al circuncírculo del triángulo BIJ, y de $\angle RIC = \angle IJC$ se sigue que la recta RI es tangente al circuncírculo del triángulo CIJ, que son justamente las tangencias que queríamos demostrar.

Problema 5. La sucesión a_n está definida por

$$a_1 = 1, \quad a_{2k} = 1 + a_k \ \text{ y } \ a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}, \quad \text{para todo entero } \ k \geq 1.$$

Demostrar que todo número racional positivo aparece exactamente una vez en esta sucesión.

Solución. Reynaldo Gil Pons (Cuba). Es claro que $a_{2^r q} = r + a_q$, pues

$$a_{2^r q} = 1 + a_{2^{r-1}q} = 1 + 1 + a_{2^{r-2}q} = \cdots = r + a_q,$$

también, $a_{2k} > 1$ y $a_{2k+1} < 1$ para toda $k > 0$. Vamos a probar que no existe $i \neq j$ tal que $a_i = a_j$. Para esto, asumimos que $i = 2^\alpha(2r+1)$ y $j = 2^\beta(2m+1)$ para algunos números α, β, r y m mayores o iguales que 0. Supongamos que $a_i = a_j$. Por lo anterior,

$$a_i = a_{2^\alpha(2r+1)} = \alpha + a_{2r+1}$$

y

$$a_j = a_{2^\beta(2m+1)} = \beta + a_{2m+1}.$$

Luego, $\alpha = \beta$ y $a_{2r+1} = a_{2m+1}$, de aquí tenemos $\frac{1}{a_{2r}} = \frac{1}{a_{2m}}$, lo que implica $a_r = a_m$. Este procedimiento se puede repetir un número finito de veces hasta que llegamos a una ecuación de la forma

$$1 = a_1 = a_{2l+1}$$

para alguna l. Pero esto implica que $l = 0$ por lo que vimos al principio. Por lo tanto $i = j$.
Ahora vamos a demostrar que para toda pareja (n, m) de números naturales tales que $\text{mcd}(n, m) = 1$, existe j tal que $a_j = \frac{n}{m}$. La demostración es por inducción en la cantidad de pasos k del algoritmo de la división de Euclides,

$$\begin{aligned} n &= q_1 m + r_1 \\ m &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k \end{aligned}$$

donde k es el primer número tal que $r_k = 0$.
Si $k = 1$, entonces n es un múltiplo de m, de donde $m = 1$ y $a_{2^n-1} = n - 1 + a_1 = n$.
Supongamos que todos los números $\frac{n}{m}$ aparecen en la sucesión, siempre y cuando, el número de pasos en el algoritmo de Euclides es menor que cierto N. Sean x y y dos números naturales tales que la cantidad de pasos en el algoritmo de Euclides es $N + 1$,

$$\begin{aligned} x &= q_1 y + r_1 \\ y &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{N-1} &= q_{N+1} r_N. \end{aligned}$$

Note que la cantidad de pasos en el algoritmo de Euclides para la pareja (y, r_1) es N. Por inducción, existe s tal que $a_s = \frac{y}{r_1}$. Si s es par $a_{s+1} = \frac{r_1}{y}$, si s es impar $a_{s-1} = \frac{r_1}{y}$, en ambos casos podemos decir que existe un t tal que $a_t = \frac{r_1}{y}$, luego

$$a_{2^{q_1} t} = q_1 + a_t = q_1 + \frac{r_1}{y} = \frac{q_1 y + r_1}{y} = \frac{y}{x}$$

lo que completa el paso de inducción.

Problema 6. Alrededor de una circunferencia se marcan 6000 puntos y cada uno se colorea con uno de 10 colores dados, de manera tal que entre cualesquiera 100 puntos consecutivos siempre figuran los 10 colores. Hallar el menor valor k con la siguiente propiedad: Para toda coloración de este tipo existen k puntos consecutivos entre los cuales figuran los 10 colores.

Solución. Manuel Guillermo López Buenfil (México). Sean $c_1, c_2, \ldots, c_{10}$ los colores y consideremos los puntos numerados del 1 al 6000. Dividimos a los puntos en 60 grupos de 100 puntos y los coloreamos de la siguiente manera: Para $r = 1, 2, \ldots, 9$ pintamos los puntos de la forma $100n + 11r$ con el color c_r y el resto de los puntos los coloreamos del color c_{10}. Veamos que cumple la propiedad: cada 100 puntos consecutivos contienen a un grupo completo y contiene los diez colores, en este caso, para obtener un conjunto de puntos con los diez colores debemos cruzar al menos 8 intervalos de puntos de color c_{10} para que estén los otros 9 colores, el intervalo entre 99 y $11 \pmod{100}$ es el más largo con 11 puntos c_{10} mientras que los demás tienen 10, entonces lo mejor es no tomar ese intervalo dando $k = 9 + 8 \cdot 10 = 89$, de donde $k \geq 89$, por necesitarse 89 en este caso.

Supongamos que en cierta coloración no hay 89 puntos consecutivos en los que aparezcan los 10 colores. Tomemos 11 puntos cualesquiera y los 89 siguientes, en los últimos 89 no aparecen los 10 colores pero en los 100 sí, entonces hay al menos un color en los primeros 11 puntos que no aparece en los siguientes 89. Ahora para $0 \leq s \leq 7$ hacemos el siguiente razonamiento: tomemos los puntos del $11s + 1$ al $11s + 100$, en esos puntos aparecen los 10 colores pero en los últimos 89 no, entonces hay al menos un color entre los puntos $11s+1$ y $11s+11$ que no aparece en los últimos 89 puntos, pero por lo demostrado anteriormente, este color debe ser distinto al color que obtuvimos en el intervalo con extremos $11i + 1$ y $11i + 11$, $0 \leq i < s$, lo que nos prohíbe $s - 1$ colores, al acabar tendremos que los puntos del 89 al 100 sólo pueden contener dos colores. Repitiendo este argumento se concluye que cualesquiera 12 puntos consecutivos tienen a lo más dos colores.

Tomemos dos puntos de colores distintos, sin pérdida de generalidad c_1 y c_2, y volvamos a numerar de tal forma que sean los puntos 1 y 2, respectivamente. Del punto 3 al 12 sólo puede haber puntos de color c_1 y c_2 así que el punto 13 será el primero en tener la posibilidad de ser de otro color, digamos c_3. Como éste es el primer punto de color c_3, el anterior es distinto, por lo que los 11 puntos anteriores al c_3 tienen que ser del color c_2 ya que del punto 2 al 13 sólo hay puntos de colores c_2 y c_3. Repitiendo este argumento los siguientes 11 puntos serán de color c_3, luego 11 puntos de color c_4 y así sucesivamente hasta 11 puntos de color c_9, obteniendo así 99 puntos y habiendo usado 9 colores, por lo que el último punto es de color c_{10}. Si un intervalo hubiera contenido más de 11 puntos entonces habríamos construido un grupo de 100 puntos que no contiene los 10 colores, lo cual sería una contradicción. Continuando el argumento vemos que cada grupo de 11 puntos consecutivos tienen que ser del mismo color, sin embargo 11 no divide a 6000 por lo cual la coloración es imposible, es decir, $k \leq 89$. Por las dos desigualdades para k, tenemos que $k = 89$.

XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 4 al 10 de octubre de 2009, se celebró en Girardot, Colombia, la XI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua), Jorge Vargas Garza (Distrito Federal), y Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León).

Jorge y Manuel Enrique obtuvieron medalla de oro, y Diego Alonso medalla de plata. México ocupó el primer lugar de 12 países participantes.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $P(n)$ el producto de los dígitos no nulos del entero positivo n. Por ejemplo, $P(4) = 4$, $P(50) = 5$, $P(123) = 6$, $P(2009) = 18$. Halle el valor de la suma

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(2008) + P(2009).$$

Solución. (Manuel Enrique Dosal Bustillos). Tenemos que

$$\begin{aligned}
P(1) + P(2) + \cdots + P(9) &= 1 + 2 + \cdots + 9 = 45 \\
P(10) + P(11) + \cdots + P(19) &= 1 + 45 = 1(46) \\
P(20) + P(21) + \cdots + P(29) &= 2(1 + 45) = 2(46) \\
P(30) + P(31) + \cdots + P(39) &= 3(1 + 45) = 3(46) \\
&\vdots \\
P(90) + P(91) + \cdots + P(99) &= 9(1 + 45) = 9(46).
\end{aligned}$$

Luego,

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(98) + P(99) = 45 + 46(1 + 2 + \cdots + 9) = 45(47).$$

Ahora bien, si fijamos $a \neq 0$ tenemos que $P(abc) = aP(bc)$, luego

$$\sum P(abc) = \sum aP(bc) = a \sum P(bc),$$

donde b y c varían de 0 a 9.
Pero ya tenemos la suma de $P(1)$ hasta $P(99)$, luego tenemos que

$$\begin{aligned}
P(101) + P(102) + \cdots + P(199) &= 1(45)(47) \\
P(201) + P(202) + \cdots + P(299) &= 2(45)(47) \\
P(301) + P(302) + \cdots + P(399) &= 3(45)(47) \\
&\vdots \\
P(901) + P(902) + \cdots + P(999) &= 9(45)(47).
\end{aligned}$$

Observemos que nos falta sumar $P(100) = 1$, $P(200) = 2$ hasta $P(900) = 9$, luego

$$\begin{aligned}
P(100) + P(101) + \cdots + P(998) + P(999) &= (1 + 2 + \cdots + 9) + \\
&\quad + (45)(47)(1 + 2 + \cdots + 9) \\
&= 45(1 + 47(45)).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma desde $P(1)$ hasta $P(999)$ es

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(999) = (45)(47) + 45(1 + 47(45)) = 45(1 + 47(46)).$$

Observemos que $P(1000 + k) = P(k)$ si $1 \leq k \leq 999$. Luego,

$$\begin{aligned}
P(1000) + P(1001) + \cdots + P(1999) &= 1 + P(1) + P(2) + \cdots + P(999) \\
&= 1 + 45(1 + 47(46)),
\end{aligned}$$

de donde

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(1999)=2[45(1+47(46))]+1.$$

Finalmente, sólo nos resta calcular la suma desde $P(2000)$ hasta $P(2009)$. Tenemos que

$$\begin{aligned}P(2000)+P(2001)+\cdots+P(2009) &= 2+2+4+6+\cdots+18\\ &= 2(1+1+2+3+\cdots+9)\\ &= 2(46).\end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma final es

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(2009)=2[45(1+47(46))]+1+2(46)=194,763.$$

Segunda solución. Sea $R(n)$ el producto de todos los dígitos de n incluyendo los ceros y tomando los números de 1 y 2 dígitos como $00x$ y $0xy$, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}R(1)+R(2)+\cdots+R(999) &= 0\cdot 0\cdot 0+0\cdot 0\cdot 1+\cdots+9\cdot 9\cdot 9-0\cdot 0\cdot 0\\ &= (0+1+2+\cdots+9)^3-0=45^3.\end{aligned}$$

Si en lugar de los ceros colocamos unos, el producto de los dígitos distintos de 0 se mantiene, es decir, calcular $P(1)+P(2)+\cdots+P(999)$ es equivalente a sustituir en la expresión $R(1)+R(2)+\cdots+R(999)$ los ceros por unos, por lo que

$$\begin{aligned}P(1)+P(2)+\cdots+P(999) &= (1+1+2+3+\cdots+9)^3-1\\ &= 46^3-1=97,335.\end{aligned}$$

Luego, $P(1000)=1$,

$$P(1001)+P(1002)+\cdots+P(1999)=P(1)+P(2)+\cdots+P(999)=97,335$$

y

$$P(2000)+P(2001)+\cdots+P(2009)=2+2+4+6+8+10+12+14+16+18=92.$$

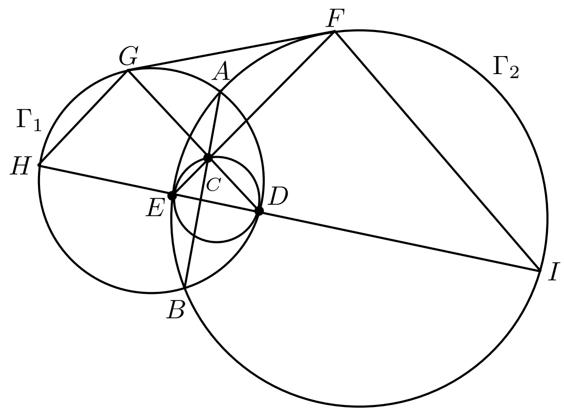
Finalmente,

$$P(1)+P(2)+\cdots+P(2009)=97,335+1+97,335+92=194,763.$$

Problema 2. Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 se intersectan en los puntos A y B. Considere una circunferencia Γ contenida en Γ_1 y Γ_2, tangente a ellas respectivamente en D y E. Sean C uno de los puntos de intersección de la recta AB con Γ, F la intersección de la recta EC con Γ_2 y G la intersección de la recta DC con Γ_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta ED con Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Demuestre que F, G, H e I están sobre una misma circunferencia.

Solución. (Jorge Garza Vargas). Como Γ está contenida en Γ_1 y es tangente a esta, entonces Γ es tangente internamente a Γ_1. Sabemos que el centro de homotecia de

Γ y Γ_1 es el punto D (por ser el punto de tangencia de éstas). Luego, los triángulos ECD y HGD son homotéticos con centro en D, entonces EC es paralelo a GH. Análogamente, Γ es tangente internamente a Γ_2, E es el centro de homotecia de Γ y Γ_2 y CD es paralelo a FI.



Por los paralelismos anteriores tenemos que $\angle CED = \angle GHD$, $\angle GDE = \angle FIE$ y $\angle ECD = \angle HGD = \angle EFI$. Como C está en el eje radical de las circunferencias Γ_1 y Γ_2, entonces $EC \cdot CF = DC \cdot GC$, luego el cuadrilátero $GEDF$ es cíclico, entonces $\angle GDE = \angle GFE$ y $\angle DEF = \angle DGF$.
Por lo tanto, $\angle GHI + \angle GFI = \angle CED + \angle GFE + \angle EFI = \angle CED + \angle CDE + \angle ECD = 180^\circ$ ya que estos ángulos son los ángulos internos del triángulo ECD. Así que el cuadrilátero $HGFI$ es cíclico porque sus ángulos opuestos suman 180°.
Por lo tanto, F, G, H e I están sobre una misma circunferencia.

Problema 3. Se tienen 2009 cajas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores A y B juegan alternadamente, comenzando por A. Una jugada consiste en seleccionar una caja i que no esté vacía, tomar una o más piedras de esa caja y ponerlas en la caja $i+1$. Si $i = 2009$, las piedras que se tomen se desechan. El jugador que retire la última piedra (dejando todas las cajas vacías) gana.

1. Suponiendo que inicialmente en la caja 2 hay 2009 piedras y todas las demás cajas $(1, 3, 4, 5, \ldots, 2009)$ están vacías, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

2. Suponiendo que inicialmente cada caja contiene exactamente una piedra, halle una estrategia ganadora para uno de los dos jugadores y justifíquela.

Solución.

1. El jugador B tiene una estrategia ganadora, que consiste en lo siguiente: cada vez que A mueva $k > 0$ piedras de la caja i a la caja $i+1$, B responde moviendo k piedras de la caja $i+1$. Como inicialmente todas las piedras están en cajas pares, la estrategia de B hace que se mantenga esta situación cada vez que le toque

jugar a A, quien nunca podrá retirar piedras de la caja 2009. Como eventualmente todas las piedras tendrán que salir de la caja 2009, B será quien saque la última piedra.

2. Ahora es A quien tiene una estrategia ganadora. Como primera jugada mueve una piedra de cualquier caja impar. De este modo quedarán 1004 cajas impares no vacías. En lo sucesivo, si B mueve una piedra de una caja impar, A debe responder moviendo una piedra de otra caja impar (siempre podrá hacerlo por la paridad del número de cajas impares no vacías). Si en cambio B mueve $k > 0$ piedras de una caja par $2i$ a la caja $2i + 1$, entonces A responde moviendo k piedras de la caja $2i + 1$.

Problema 4. Se desea colocar números naturales alrededor de una circunferencia cumpliendo la siguiente propiedad: Las diferencias entre cada par de números vecinos, en valor absoluto, son todas diferentes.

1. ¿Será posible colocar los números del 1 al 2009 satisfaciendo la propiedad?

2. ¿Será posible suprimir alguno de los números del 1 al 2009, de tal manera que los 2008 números restantes se puedan colocar satisfaciendo la propiedad?

Solución.

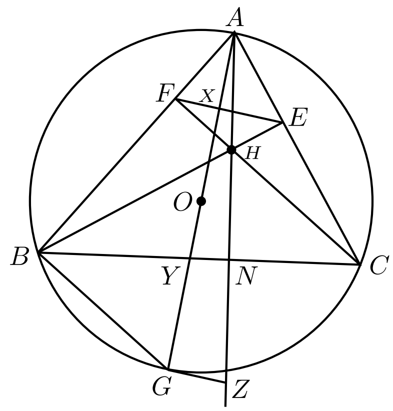
1. No, pues debería haber 2009 diferencias, y como la menor diferencia posible es 1 y la mayor posible es $|2009 - 1| = 2008$, por el principio de las casillas alguna diferencia debería aparecer más de una vez.

2. Sí. Supongamos que se retira a. Si se colocan los números restantes en el orden $1, 2009, 2, 2008, \ldots, a-1, 2011-a, a+1, 2010-a, \ldots, 1005, 1006$, se obtienen las diferencias $2008, 2007, \ldots, 2012 - 2a, 2010 - 2a, 2009 - 2a, \ldots, 2, 1$ y la diferencia entre el primero y el último es 1005. Para que sean todas diferentes basta que sea $2011 - 2a = 1005$, es decir $a = 503$, y nos queda el orden

$$1, 2009, 2, 2008, \ldots, 502, 1508, 504, 1507, 505, 1506, \ldots, 1005, 1006.$$

Problema 5. Dado ABC un triángulo acutángulo y escaleno, sea H su ortocentro, O su circuncentro, E y F los pies de las alturas trazadas desde B y C, respectivamente. La recta AO corta nuevamente al circuncírculo del triángulo en un punto G y a los segmentos FE y BC en los puntos X y Y, respectivamente. La recta AH corta a la tangente al circuncírculo trazada por G en un punto Z. Demuestre que HX es paralelo a YZ.

Solución. (Diego Alonso Roque Montoya). Denotemos por N al pie de la altura trazada desde A, entonces AN es perpendicular a BC. Como $\angle HNB = 90^\circ = \angle HFB$, entonces el cuadrilátero $HNBF$ es cíclico.



Como $FECB$ es cíclico, entonces $\angle BFE + \angle BCE = 180^\circ$, pero $\angle BCE$ y $\angle BGA$ abren el mismo arco, entonces $180^\circ = \angle BFE + \angle BCE = \angle BFE + \angle BGA = \angle BFX + \angle BGX$. Luego, $FXGB$ es cíclico.
Por potencia de punto en $FXGB$ y $HNBF$ tenemos que

$$AX \cdot AG = AF \cdot AB = AH \cdot AN,$$

entonces, $XHNG$ es cíclico.
Además, $\angle AGZ = \angle OGZ = \angle YNZ = 90^\circ$, entonces $YNZG$ es cíclico. Entonces,

$$\angle XHA = \angle XGN = \angle YGN = \angle YZN = \angle YZA.$$

Por lo tanto, XH es paralelo a YZ.

Problema 6. Encuentre todos los números primos p y q tales que $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

Solución. La única solución es $p = 7$, $q = 3$.
Primero supongamos que p y q son distintos de 3. Entonces $p \equiv \pm 1 \pmod 3$ y $q \equiv \pm 1 \pmod 3$. Checando todas las posibilidades, obtenemos que el lado izquierdo de la ecuación es divisible entre 3 mientras que el lado derecho no, o bien el lado derecho es múltiplo de 3 mientras que el lado izquierdo no. Luego, no hay solución y por lo tanto $p = 3$ ó $q = 3$. Si $p = 3$, entonces $q^5 = 3^3 - (3+q)^2 = 27 - (3+q)^2 < 27$ de donde $q < \sqrt[5]{27} < 2$, lo cual no es posible. Entonces, $q = 3$ y $p^3 - 243 = (p+3)^2$. La ecuación $p^3 - 243 = (p+3)^2$ es equivalente a la ecuación $(p-7)(p^2+6p+36) = 0$. Luego, $p = 7$ ó $p^2 + 6p + 36 = 0$. Es fácil verificar que la ecuación $p^2 + 6p + 36 = 0$ no tiene soluciones reales. Por lo tanto, $q = 3$ y $p = 7$ es la única solución que cumple el problema.

Errata. En el número anterior de Tzaloa, el Problema 2 de la XI Olimpiada Centroamericana y del Caribe aparece con un error en su redacción. Sin embargo, en esta sección hemos enunciado de manera correcta dicho problema.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de abril a julio de 2010.

Del 29 de abril al 9 de mayo, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 51^a Olimpiada Internacional (un máximo de 6 alumnos), la delegación que representará a México en la XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe (un máximo de 3 alumnos) y la preselección para la XXV Olimpiada Iberoamericana.

Primera quincena de junio

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como semifinal de su Concurso Estatal y envío de este examen semifinal.

Junio

Entrenamientos para los seleccionados nacionales que asistirán a la XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Junio, Puerto Rico

XII Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Del 19 al 27 de junio, Morelia, Michoacán

Entrenamientos para los seleccionados nacionales para ir a la 51^a Olimpiada Internacional.

18 y 19 de junio

Aplicación de los exámenes semifinales en los estados registrados con este propósito.

Del 2 al 15 de julio, Astana, Kasajstán

51^a Olimpiada Internacional.

Apéndice

Teorema 1 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [5, 7].

Teorema 2 (Número de divisores) *Si la factorización en primos del entero n es $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son primos distintos, entonces el número de divisores positivos de n es igual a $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.*
Ver [5, 7].

Definición 3 (Congruencias) *Dados dos números enteros a, b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m, si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*
Ver [9].

Teorema 4 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

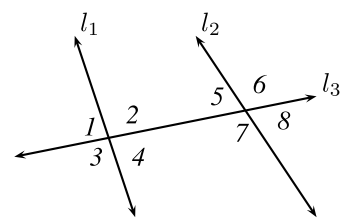
y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.
Ver [3].

Teorema 5 (Fórmulas de área)

1. *El área de un rectángulo de lados a y b es $a \times b$.*
2. *El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado.*
3. *El área de un círculo de radio r es igual a πr^2.*

Ver [1, 2].

Definición 6 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del* 1 *al* 8*, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 *intersecta a las rectas* l_1 *y* l_2*, decimos que es* **transversal** *a ellas. Los ángulos* 2*,* 4*,* 5 *y* 7 *están entre las rectas* l_1 *y* l_2*, los llamamos* **ángulos internos***, los ángulos restantes los llamamos* **ángulos externos***. Los ángulos en lados opuestos por la transversal* l_3 *se llaman* **ángulos alternos***, como por ejemplo* 3 *y* 5*. A los ángulos* 4 *y* 5 *les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos* 3 *y* 6 *son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 *y* 7 *los llamamos* **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son* 3 *y* 7*,* 1 *y* 5*,* 4 *y* 8*,* 2 *y* 6*.*
Si l_1 *y* l_2 *son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.*
Ver [2].

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$*.*
Ver [1, 2].

Teorema 8 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2, 8].

Definición 9 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$*.*
Ver [1, 2].

Criterio 10 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA***.*
Ver [1, 2].

Criterio 11 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL***.*
Ver [1, 2].

Definición 12 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 13 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Teorema 14 (Ley de los cosenos) *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.
Ver [2].

Teorema 15 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [2].

Teorema 16 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 17 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [2].

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[6] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[7] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[8] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[9] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Gerardo Arizmendi Echegaray
Centro de Investigación en Matemáticas
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
gerardo@cimat.mx

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

Luis Cruz Romo
UPIITA, IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional 2580
Col. Barrio la Laguna Ticomán
07340, México, D.F.
lucruz@ipn.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
Fax (999) 942-31-40
carlos.rubio@uady.mx
jacob.rubio@gmail.com

Pablo Soberón Bravo
Circuito Interior no. 830
Fracc. La Herradura
62303, Cuernavaca, Morelos
Cel. (777) 134 55 49
bandrak@hotmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel (55) 56 22 45 32
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Facultad de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
marcant@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa Primera Sec, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12
Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 ó 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`