TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2011, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Abril de 2011.

Contenido

Presentación

Tzaloa es una publicación periódica trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y su objetivo es fomentar el estudio de las matemáticas como una disciplina dinámica y creativa. El diseño de las secciones y la cuidadosa selección de sus contenidos buscan apoyar de manera efectiva, con información y con materiales de calidad, a estudiantes y profesores de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los diferentes concursos de la Olimpiada de Matemáticas.

Esta revista, con orgullo, toma su nombre del náhuatl porque está hecha por y para los mexicanos. Tzaloa significa aprender y las páginas que la conforman buscan ayudar a satisfacer la necesidad de contar con espacios adecuados para profesores, estudiantes y, en general, para todas aquellas personas interesadas en desarrollar e incrementar sus capacidades para el razonamiento lógico matemático y la resolución de problemas.

Tzaloa, Año 2011, Número 2

Pensando en los estudiantes y profesores que se están preparando para participar en las diferentes etapas de los concursos estatales, fue que hicimos la selección del material que figura en este segundo número del año 2011. Es así, que las secciones *Problemas de Práctica* y *Problemas Propuestos*, están integradas en su mayoría con material clasificado con niveles introductorio e intermedio. Se buscó que la variedad de temas y niveles de estos problemas fuera equilibrada y esperamos que el conjunto sea de utilidad para apoyar la preparación de todos.

El artículo de matemáticas de esta ocasión trata sobre *Estrategias básicas de conteo* y, desde la primera página, se hace evidente la experiencia olímpica de su autor Leonardo Ignacio Martínez Sandoval. De esta forma, el lector descubrirá que el artículo no sólo contiene una exposición bastante completa de las técnicas *estándar* de conteo, sino que, adicionalmente, se complementa con una serie de útiles recomendaciones prácticas para enfrentar problemas de olimpiada. La gran cantidad de ejemplos y ejercicios que se incluye constituye otro atractivo plus de este trabajo.

Además, también hemos incluido los problemas y soluciones del Concurso Nacional de 2010. En la sección correspondiente, se mencionan los nombres de los ganadores y se presentan algunas de las soluciones dadas por ellos. Por otro lado, en el ámbito internacional presentamos el examen con soluciones de la *XXV Olimpiada Iberoamericana*,donde México tuvo una participación muy destacada. Por último, también podrás encontrar los problemas del examen de la *XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico*.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 24 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

25ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1992. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2011-2012 y, para el 1° de julio de 2012, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 13 al 19 de noviembre de 2011 en San Luis Potosí, San Luis Potosí. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2012: la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 53^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Argentina, y la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Bolivia.

Estrategias básicas de conteo

Por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Nivel Intermedio

“Poco a poco fui volviéndome habilísimo en este arte. Al cabo de unos meses - gracias a nuevos y constantes ejercicios contando hormigas y otros insectos- llegué a realizar la proeza de contar todas las abejas de un enjambre”.

Beremiz Samir en *El hombre que calculaba*

Una de las habilidades más útiles a la hora de resolver problemas de combinatoria en la Olimpiada de Matemáticas es saber contar bien. Al comenzar en la olimpiada tenemos un entendimiento básico de qué quiere decir “contar cosas”. Usualmente nuestra intuición sirve muy bien durante las primeras etapas, pero rápidamente nos damos cuenta que es necesario desarrollar nuevas técnicas que nos permitan contar cosas de manera simplificada.

En este artículo haremos un recordatorio de las técnicas de conteo básicas. Comenzaremos por ver problemas de primeras etapas. En estos problemas tenemos la ventaja de que podemos hacer cuentas explícitas, es decir, como resultado podemos dar un número, y también muchas veces basta con enlistar los objetos que tenemos que contar. Después de esto introduciremos las dos reglas principales para contar: la regla de la suma y la regla del producto. A partir de estas dos reglas se hace la mayor parte del conteo. Tras ver algunos ejemplos de estas reglas, llegaremos a otras herramientas usadas frecuentemente, como las permutaciones y las combinaciones. En la sección final, “Divide y Conquista”, veremos cómo incorporar todas las técnicas de conteo *estándar* para resolver problemas más difíciles.

Recuerda que como en cualquier otro tema, la única forma de entenderlo bien es resolviendo los problemas. Es por eso que cada tema tiene problemas para que puedas practicar.

Enlistar los objetos

Vamos a comenzar con el siguiente problema:

Ejemplo 1 *¿De cuántas formas podemos hacer una palabra de dos vocales distintas?*

La técnica más básica que existe para contar objetos es enlistarlos y contar cuántos elementos tiene la lista. Esta técnica es útil cuando las cosas que tenemos que enumerar son pocas.
Cuando usamos esta técnica, queremos asegurarnos de que todos los objetos que queremos contar aparezcan en la lista. Es por esto que resulta útil dar a los objetos que contamos un cierto orden y enlistarlos siguiendo este orden. Para el problema que planteamos, tenemos un orden natural, el orden “lexicográfico”. Acomodando las palabras que queremos contar como si aparecieran en un diccionario, podemos enlistarlas como sigue:

AE AI AO AU EA EI EO EU IA IE IO IU OA OE OI OU UA UE UI UO

Tras contar los elementos aquí, vemos que son 20. En este ejemplo tuvimos dos ventajas. Una es que ya teníamos un orden natural para los elementos. La otra, que los objetos que contamos ya tenían una forma fácil de representarlos por escrito. En otros problemas, nosotros debemos elegir nuestro orden y nuestra notación. Consideremos otro problema en el cual enfrentaremos estas dos dificultades.

Ejemplo 2 *Se tienen 6 niños. Se elegirán 3 para que trabajen en Geometría. Los otros 3 trabajarán en Combinatoria. ¿De cuántas formas pueden quedar divididos?*

Imaginemos que queremos enumerar todas las posibilidades para los equipos. Una primera observación es que nada más necesitamos elegir a los 3 niños que trabajarán en Geometría, pues ya sabemos que los otros trabajarán en Combinatoria.
Tenemos que encontrar una forma adecuada de referirnos a los niños por escrito. Una opción sería darles nombres, pero esto sería engorroso, pues una configuración tendría que ser algo del estilo “Mario”, “Luis”, “Karen”. Algo que resulta más práctico es olvidarnos de que son niños y simplemente referirnos a ellos por número, digamos 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Esta notación nos da la ventaja de que los números, como las palabras, también tienen un orden por sí mismos. Una última observación que tenemos que hacer es que en este caso no nos importa en qué orden elegimos los niños, pues el equipo 123 es el mismo equipo que el 213 o el 132. Una manera de enlistar a los equipos de Geometría es primero poner a los que tengan al niño 1, luego a los que tengan al 2 y no al 1, luego los que tengan al 3 y no al 1 ni dos y finalmente los que tengan al 4, pero no al 1, 2 ni 3. Obtendremos una lista como la siguiente:

123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356 y 456. En esta lista ya podemos contar que hay 20 formas posibles de hacer equipos.
A partir de este momento ya se empiezan a ver otras dificultades de intentar enumerar todos los objetos que queremos contar. Una vez que el problema comienza a hacerse

más grande, es más dificil enlistar todas las posibilidades y asegurarse que realmente sean todas. Es por esto que necesitamos encontrar formas más generales de contar. Perderemos la ventaja de poder *ver* todos los objetos posibles a cambio de poder *argumentar* conteos más grandes.

Problemas

1. ¿De cuántas formas podemos escribir a 6 como suma de algunos enteros positivos si no importa el orden de los sumandos? ¿Y si sí importa?
2. ¿Cuántas diagonales tiene un heptágono?
3. Entre 1 y 100, ¿cuántos múltiplos de 7 hay que no sean múltiplos de 3?
4. ¿Cuántas veces al día se cruzan las manecillas de un reloj?
5. ¿Cuántos números primos hay entre 50 y 100?

Dividir en casos y la regla de la suma

Hay ocasiones en las que es fácil contar objetos siempre y cuando tengamos una condición adicional. Hay algunas otras ocasiones en las cuales para ordenar el conteo nos conviene organizar a los objetos en categorías. En ambos casos la filosofía será transformar un problema grande en problemas más pequeños. Aprovecharemos las respuestas de esos problemas más pequeños para obtener la solución del problema original. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3 *¿Cuántos triángulos isósceles distintos existen con lados enteros y cuyo perímetro sea menor o igual a* 10*?*

Para asegurarnos de considerar todos los triángulos hay que contar de una manera ordenada. ¿Hay algún elemento del problema que podamos dejar fijo para tener problemas más pequeños? Una opción podría ser dividir en casos según el tamaño de los lados iguales, al cual llamaremos t. Considerando la restricción del perímetro y la restricción de la desigualdad del triángulo[1] procedemos de la siguiente manera.

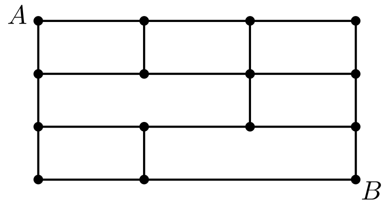
- Si $t = 1$, entonces el tercer lado sólo puede medir 1, pues un valor mayor no cumpliría la desigualdad del triángulo.
- Si $t = 2$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2 ó 3.
- Si $t = 3$, entonces el tercer lado puede medir 1, 2, 3 ó 4, pues hay que cuidar la restricción del perímetro.
- Si $t = 4$, entonces el tercer lado puede medir 1 ó 2.
- Si $t > 4$, entonces no hay triángulos que cumplan lo requerido, pues su perímetro es al menos 11.

[1] Ver en el apéndice el Teorema 18.

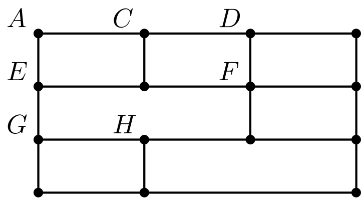
Tenemos una lista con los posibles casos y cuántas opciones hay en cada uno de ellos: 1, 3, 4 y 2. ¿Qué hacemos con estos números? Sumarlos, obteniendo de resultado 10. Después de dividir en casos debemos de sumar las posibilidades de todas las opciones, para obtener el total de formas en el problema original. En este problema, la ventaja al fijar t es que en los problemas más pequeños es fácil asegurar que contamos todas las posibilidades.
Veamos otro problema en el cual es útil hacer este truco.

Ejemplo 4 1. *¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?*

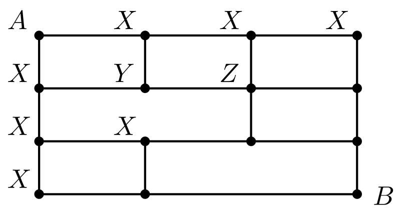
2. *Si se permite caminar sobre los segmentos de la figura sólo hacia la derecha y hacia abajo, ¿cuántos caminos hay del vértice A al vértice B?*



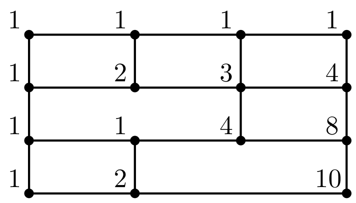
Una primera respuesta al primer inciso puede ser que hay 7, sin embargo, estos sólo son algunos de los rectángulos que se forman. Hay algunos otros que tienen líneas adentro. Intentar contarlos a simple vista es complicado pues es difícil marcar cuáles rectángulos ya hemos contado y cuáles no. Sin embargo, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿qué vértices pueden ser *la esquina superior izquierda* de un rectángulo? En la siguiente figura se marcan todos los vértices que pueden tener esta propiedad:



Cambiemos el problema original a un problema más pequeño: ¿cuántos rectángulos tienen a A como esquina superior izquierda? Esta es una pregunta más fácil de responder, y rápidamente se puede verificar que hay 6 de estos rectángulos. Haciendo lo mismo con los vértices C, D, E, F, G y H obtenemos 2, 2, 3, 1, 2 y 1 rectángulos respectivamente. Esto nos da un total de 17 rectángulos. Una vez más, dividir en casos nos permitió resolver un problema atacando problemas más sencillos.
La regla de la suma también se puede aplicar varias veces conforme conozcamos más información del problema. Veamos cómo se aplica esta observación a la resolución de la segunda parte del problema. Primero, en la siguiente figura responderemos el problema más sencillo de encontrar de cuántas formas podemos llegar desde A a alguno de los vértices marcados con X caminando sólo hacia la derecha y hacia abajo.



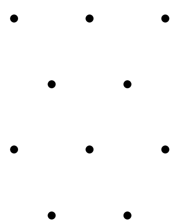
Unos segundos de reflexión bastarán para convencernos de que sólo hay una forma de llegar a dichos vértices. Responder esta pregunta fue muy fácil. Ahora, ¿cómo contamos las formas en las que podemos llegar al vértice Y? Tenemos dos opciones para haber llegado a Y, llegar por arriba o llegar por la izquierda. Esto nos da dos formas de llegar a Y.
Al hacer lo mismo con Z llegamos a una conclusión similar, sólo que ahora tenemos dos formas de llegar a Z por la izquierda (las dos formas de llegar a Y y luego pasar a Z) y una forma de llegar por arriba, dando un total de 3 formas de llegar.
Así, simplemente debemos seguir *sumando* las opciones izquierda y superior en los vértices para llegar a la Figura 4 y encontrar que el total de caminos es 10.



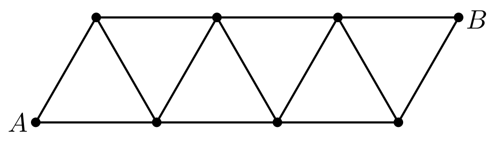
La regla de la suma es **sólo** la primera de las dos reglas básicas de conteo. La limitación que tiene es que cuando dividimos en casos, éstos son ajenos, pero a veces nos gustaría poder tomar varias decisiones compatibles. La regla del producto, que veremos a continuación, maneja estas situaciones.

Problemas

6. ¿De cuántas formas podemos elegir 3 puntos alineados en el siguiente acomodo de puntos?



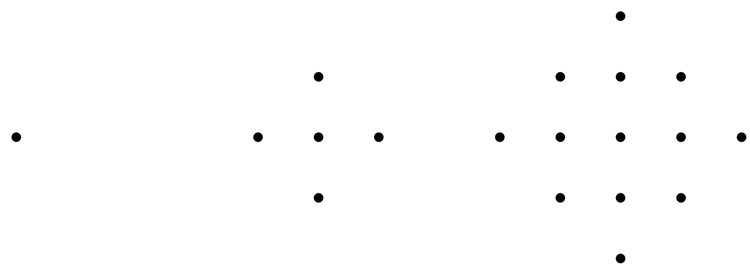
7. Considera la siguiente figura. ¿Cuántos caminos existen del vértice A al vértice B tales que nunca avancen hacia la izquierda?



8. Considera los 27 cubitos unitarios que forman un cubo de $3 \times 3 \times 3$. ¿De cuántas formas es posible tomar tres de ellos con sus centros alineados?

9. ¿Cuántos enteros positivos menores a 10000 cumplen que el producto de sus dígitos es 36?

10. ¿Cuántos puntos habrá en la figura del paso 50?



Decisiones compatibles y la regla del producto

Ejemplo 5 *En el restaurante "Platillos Olímpicos" se puede pedir una comida corrida que consta de 3 tiempos. Hay que elegir si el primer platillo va a ser sopa de fideo, consomé o ensalada. Hay que elegir si el segundo platillo va a ser arroz o espaguetti. Hay cuatro tipos de platillos principales: milanesa empanizada, filete de pescado a la mantequilla, lasagna de verduras o enchiladas suizas. Además, se puede pedir agua de tamarindo o agua de horchata. Durante 7 semanas Leo fue a comer a "Platillos Olímpicos". Muestra que forzosamente repitió su comida alguna vez.*

En esta ocasión la pregunta no es directamente acerca de conteo, pero todo indica que el camino adecuado es contar cuántas formas distintas de comer existen. Si logramos ver que son menos de 49, el número de días en 7 semanas, demostraremos lo que se quiere.

Una vez más, enlistar todas las posibilidades es una opción. Por ejemplo, si sólo nos fijamos en el primer platillo y el tipo de agua, hay 6 posibilidades: FT, FH, CT, CH, ET, EH. La observación crucial antes de empezar a hacer una larga lista de

las posibilidades es que cada opción de primer platillo *es compatible con* cada opción de agua. Es decir, hay 3 opciones de primer platillo y *para cada una de ellas* hay 2 opciones de agua, de modo que tenemos en total $3 \cdot 2 = 6$ opciones.
Incorporándo todos los tiempos de la comida, podemos ver de manera similar que en total tenemos $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ formas distintas de pedir comida. Por el *Principio de las Casillas*[2], tras 49 días Leo tuvo que repetir.
Al igual que con la regla de la suma, en ocasiones tenemos que ir incorporando a nuestra cuenta cierta información que vayamos obteniendo conforme fijamos elementos en el problema.

Ejemplo 6 *¿De cuántas formas podemos elegir de entre* 10 *actores al protagonista, al acompañante y al malo de una película?*

Una vez más, tenemos un problema en el cual tenemos que tomar decisiones *compatibles*. Lo primero que podríamos hacer es elegir al protagonista. Esto se puede hacer de 10 formas distinas. Sin embargo, una vez que escogemos al protagonista debemos elegir a alguna de *las otras* 9 personas como su acompañante. Ya que tomamos a estos dos personajes, todavía hay que elegir al malo de la película, para el cuál quedan únicamente 8 opciones. Como tenemos que elegir al protagonista*, y luego* al acompañante *y luego* al malo, y estas opciones son compatibles, tenemos un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ posibilidades.
Aquí vale la pena mencionar que hemos asumido implícitamente que el protagonista, el acompañante y el malo de la película son personas distintas.
En ocasiones hay que inventar las decisiones compatibles que se deben de tomar. Es decir, el problema puede parecer preguntar de cuántas formas se puede hacer *una* cosa, lo cual es difícil de responder. En este caso, hay que transfomar nuestra decisión *única* en *muchas* decisiones pequeñas que son fáciles de contar.

Ejemplo 7 *Se tienen* 20 *programadores. Programan en Python, Java o C. Nadie programa en los* 3 *lenguajes y cada quien programa en al menos un lenguaje. ¿De cuántas formas puede pasar esto?*

Intentar enlistar todas las posibilidades en este problema tomaría mucho tiempo. Otra opción es decidir para cada lenguaje qué personas lo sabrán. Sin embargo, al seguir esta idea nos encontramos con la dificultad de no poder meter todas las hipótesis con facilidad. En vez de esto, podemos decidir por cada programador en qué lenguajes puede programar. Para un programador hay 6 opciones de lenguajes de programación que puede saber: P, J, C, PJ, PC o JC. Así, el primer programador tiene 6 opciones. Para cada una de estas opciones, el segundo programador tiene 6 opciones. Siguiendo así, vemos que debemos multiplicar veinte veces el 6, de modo que hay 6^{20} formas en las cuales los programadores del grupo pueden saber los lenguajes.

Problemas

11. Un número es capicúa si se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda. ¿Qué hay más, números capicúas de 7 dígitos o de 8 dígitos?

[2] Ver en el apéndice el Teorema 7.

12. En un juego de mesa se tienen varias tarjetas. En cada tarjeta está marcada una de 5 figuras. Esta figura puede ser de uno de cuatro colores. Además, la tarjeta tiene un número de 1 a 9. En cada turno se pone una tarjeta en la mesa que cumpla cierta condición. Esta condición garantiza que al menos un cuarto de las tarjetas se puedan poner. Después de haber puesto 30 tarjetas, aproximadamente ¿cuántas se pueden poner?

13. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar en un salón con n niños? ¿Cuántas palabras de n letras, cada una de ellas a o b, existen?

14. ¿De cuántas formas se pueden poner tres fichas de dominó consecutivas?

15. En un examen cada una de las 6 preguntas tiene 3 opciones. Si un alumno contesta el examen totalmente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga al menos la mitad de las preguntas bien?

Asignaciones, permutaciones y combinaciones

La regla de la suma y la regla del producto realmente son las herramientas más versátiles de conteo. Hay que aprender a utilizarlas en una gran cantidad de situaciones y no deben de subestimarse. Sin embargo, hay otras técnicas de conteo estándar que se deducen a partir de las reglas de la suma y del producto, y que frecuentemente se usan para contar cosas en problemas de olimpiada. Veremos primero ejemplos de cuándo usar estas herramientas y luego las enunciaremos en general.

Ejemplo 8 *¿Cuántos números de cuatro dígitos tienen todos sus dígitos impares?*

Esta es una aplicación directa de la regla del producto. Cada uno de los 4 dígitos tiene 5 opciones, ser 1, 3, 5, 7 ó 9, y cada elección de dígito es compatible con las demás. Así, hay 4^5 números que cumplen esta condición.
La situación en general es la siguiente. Se tienen n objetos tales que cada uno de ellos se puede clasificar en exactamente uno de m tipos. Es posible que haya más de un objeto de un mismo tipo. Como para cada uno de los n objetos hay m posibilidades, en total tenemos m^n formas de clasificar los objetos.

Ejemplo 9 *¿Cuánto suman los números de 5 dígitos que tienen exactamente un 1, un 2, un 3, un 4 y un 5?*

Esta es una pregunta un poco más complicada. Para simplificar el problema vamos a dividir la suma total como sigue. En primer lugar, veremos en cuánto colaboran los dígitos de las unidades de todos estos números. En algunos de estos números aparece el 1 como dígito de las unidades. ¿En cuántos? Formaremos números que terminen en 1. Para contar cuántos números de estos tenemos, usaremos la regla del producto. El dígito de las decenas ahora sólo tiene 4 valores posibles: 2, 3, 4 ó 5. Una vez que fijemos el dígito de las decenas, el de las centenas sólo tiene 3 valores posibles. Siguiendo así, vemos que hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ números que terminan en 1. Así mismo, hay 24 números que terminen en 2, 3, 4 y 5. De modo que las unidades colaboran con

$(1+2+3+4+5)\cdot 24 = 360$ a la suma total. De manera similar, podemos ver que los dígitos de las decenas colaboran con $(10+20+30+40+50)\cdot 24 = 3600$. Siguiendo así, vemos que la suma total es $360 + 3600 + 36000 + 360000 + 3600000 = 3999960$.
La parte que nos interesa del problema es que queremos poner en orden algunos objetos. En el problema, una vez que fijábamos algún dígito, los otros podrían acomodarse de $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ formas. En el problema en general, tenemos n objetos distintos que queremos acomodar en una línea. Usando la regla del producto, en la primer posición de la línea podemos poner cualquiera de los n objetos. En la siguiente posición, ya sólo tenemos $n-1$ posibilidades. Siguiendo así, la penúltima posición sólo podrá ser ocupada por uno de 2 objetos y el objeto en la última quedará totalmente determinado. Esto nos da un total de $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$ formas de acomodar estos objetos en una línea. Para no escribir un producto tan largo, usualmente se abrevia como $n!$ y se lee "n factorial". A estas formas de acomodar objetos distinguibles en una línea se les conoce como permutaciones.

Ejemplo 10 *Cuando se desarrolla la multiplicación* $(x+a)(x+a)(x+b)(x+b)(x+c)$, *¿en cuántos sumandos el exponente de* x *es* 3*?*

Ejemplo 11 *Se tienen* 8 *pelotas blancas,* 3 *pelotas negras y una pelota gris. ¿De cuántas formas se pueden colocar en una fila si lo único que nos importa es de qué color son?*

Cada sumando de la multiplicación del primer problema se obtiene eligiendo una de las dos letras de cada paréntesis. Así, tenemos 2^5 sumandos. ¿Cómo le hacemos para ver en cuántos de estos el exponente de x es 3? Para que un sumando tenga el exponente de x igual a 3 necesitamos que en tres de los paréntesis multipliquemos las x y en los otros 2 no. Entonces, para encontrar un sumando con x^3 es necesario *elegir* 3 de los 5 factores, para que en ellos tomemos la x y en los otros dos no. De modo que para responder la pregunta tenemos que saber de cuántas formas podemos elegir 3 objetos diferentes de entre 5 objetos. Por el momento no conocemos esta cantidad, pero temporalmente la llamaremos $\binom{5}{3}$. En un momento veremos cómo calcular este número.
Para resolver el segundo problema tenemos una situación similar. Usaremos la regla del producto. Pensemos en los 12 lugares que ocuparán las pelotas. La pelota gris tiene 12 posibles lugares que puede ocupar. Como en las otras pelotas únicamente nos importa el color, no es un simple problema de permutaciones. Sin embargo, si de los 11 lugares restantes *elegimos* 8 para que en ellos queden las pelotas blancas, entonces tendremos determinado completamente el acomodo. Es decir, nuestro problema ya nada más necesita saber de entre 11 objetos, de cuántas formas podemos elegir 8 de ellos. Llamemos temporalmente a este número $\binom{11}{8}$.
Queremos encontrar una fórmula que podamos calcular para $\binom{5}{3}$ y para $\binom{11}{8}$. Más aún, planteemos el problema en general. Tomemos números enteros n y k con $0 \le k \le n$. Si tenemos los números del 1 al n podemos preguntarnos de cuántas formas podemos *elegir* k de ellos distintos sin que nos importe el orden. Llamemos $\binom{n}{k}$ a este número. Hay muchas formas de determinar el valor de $\binom{n}{k}$, pero a continuación mostramos una basada en el principio de doble conteo.

Retomemos una pregunta de permutaciones: ¿De cuántas formas podemos acomodar los números del 1 al n en una fila? La respuesta era $n!$. Sin embargo, hay otra forma válida de contar las maneras de acomodar a estos números en una fila.
Por ejemplo, otro procedimiento que determina completamente cómo acomodar los números del 1 al n en una fila es el siguiente. Primero, decidimos de entre los n números cuáles van a ser los primeros k en la fila. De acuerdo con la notación que estamos utilizando, tenemos que elegir k de entre n números, de modo que lo podemos hacer de $\binom{n}{k}$ formas. *Para cada forma* de elegir estos k números, ahora tenemos que decidir en qué orden quedarán, lo cual se puede hacer de $k!$ formas. Finalmente, los últimos $n-k$ números ya se sabe cuales son, pero aún hay que ordenarlos, lo cual se puede hacer de $(n-k)!$ formas. Así, usando la regla del producto tenemos que hay $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ formas de acomodar a los números del 1 al n en una fila.
Aquí viene el punto clave del Principio de Doble Conteo. Con una cuenta, tenemos que hay $n!$ acomodos. Con otra, tenemos que hay $\binom{n}{k}k!(n-k)!$ acomodos. ¿Es esto un error? No! Al obtener dos números con formas distintas y correctas de contar una misma cosa, llegamos a la conclusión de que tienen que ser iguales. De modo que la conclusión que sacamos de todo esto es que $n! = \binom{n}{k}k!(n-k)!$, de donde se deduce una fórmula explícita para las *combinaciones*: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. A los números de este tipo se les conoce como *coeficientes binomiales* y la notación $\binom{n}{k}$ se lee "n en k". Es muy importante recordar el significado combinatorio de los coeficientes binomiales, no sólo la fórmula para obtenerlos explícitamente.
Regresando a los problemas planteados, hay $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ términos que tengan a x^3 y hay $12\binom{11}{8} = 12\frac{11!}{8!3!} = 12 \times 165 = 1980$ formas de acomodar las pelotas en una línea si sólo nos importa el color.
En la siguiente sección veremos cómo podemos combinar todas estas técnicas para resolver problemas más complicados.

Problemas

16. ¿De cuántas formas se pueden sentar n personas en una mesa circular? Dos acomodos son iguales si al girar la mesa quedan iguales.

17. ¿Cuántos números de cinco dígitos distintos hay?

18. ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que puedan atacarse entre sí? (Una torre de ajedrez puede atacar a piezas en su misma fila o columna).

19. ¿Cuántas parejas de subconjuntos ajenos de números del 1 al 20 hay? (Dos subconjuntos son ajenos si no tienen elementos en común).

20. ¿De cuántas formas se puede emparejar a 8 personas?

21. Encuentra algo que se pueda hacer de $3!\,7!\,11! + 2^5 + \binom{8}{4}$ formas.

22. Se tienen 4 libros de álgebra, 5 libros de combinatoria, 3 libros de teoría de números y 2 libros de geometría. ¿De cuántas formas se pueden poner en un estante si sólo nos importa de qué tema son?

Divide y Conquista

Una vez que tienes práctica suficiente con las técnicas mencionadas anteriormente, aún hay una habilidad muy importante por aprender para poder contar bien. Los problemas de olimpiada rara vez consistirán en aplicar de golpe una fórmula de combinaciones o de permutaciones. Usualmente, hay que dividir el problema en pedazos pequeños, y en cada uno de estos usar las técnicas antes mencionadas. Hay que aprender cuándo se tiene que dividir un problema en una suma o en una multiplicación. Veremos algunos ejemplos en donde podemos aplicar el principio de Divide y Conquista.

Ejemplo 12 *En una pizzería hay* 10 *ingredientes. Las pizzas pequeñas llevan* 3 *ingredientes distintos. Las pizzas medianas llevan* 5 *ingredientes distintos. Las pizzas grandes llevan* 7 *ingredientes distintos. ¿De cuántas formas se pueden pedir* 2 *pizzas?*

Como está escrito el problema, tenemos que hacer algunas suposiciones. Por ejemplo, vamos a suponer que si ordenamos una pizza A y luego una B es lo mismo que ordenar una B y luego una A. También supondremos que no importa en qué orden se pongan los ingredientes de una pizza, sino simplemente cuáles son. Para resolver este problema, una buena meta intermedia es encontrar cuántos tipos distintos de pizzas existen. Esto lo contamos como sigue.
Si la pizza es pequeña, hay que elegir 3 de 10 ingredientes, y esto lo podemos hacer de $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$ formas distintas. Si la pizza es mediana, hay que elegir 5 de 10 ingredientes, y esto lo podemos hacer de $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ formas distintas. De manera análoga encontramos que hay $\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ formas de hacer una pizza grande. Como dividimos en casos, aquí hay que aplicar la regla de la suma para obtener un total de $120 + 252 + 120 = 492$ tipos de pizza distintos.
Ahora tenemos que ocuparnos de la forma de hacer las órdenes. Podríamos intentar contarlas con asignaciones, pero entonces estaríamos cometiendo el error de darle un orden a las pizzas. Podríamos intentar contarlas sólo con combinaciones, pero las combinaciones no cuentan cuando se repite un mismo tipo de pizza. Sin embargo, sí sabemos qué hacer en cada uno de estos casos, de modo que nos conviene dividir las ordenes según repitan pizza o no.
Si nuestra orden tiene dos pizzas iguales, entonces hay que elegir únicamente qué tipo de pizza es, lo cual podemos hacer de 492 formas. Si nuestra orden tiene dos pizzas distintas, entonces hay que elegir de entre los 492 tipos, 2 de ellos. Esto lo podemos hacer de $\binom{492}{2} = \frac{492 \cdot 491}{2} = 120786$ formas. Finalmente, como dividimos en casos, tenemos que aplicar la regla de la suma y obtenemos $120786 + 492 = 121278$ ordenes distintas de dos pizzas.

Ejemplo 13 *Gogo tiene* 4 *amigas. Para el día de San Valentín compró* 3 *peluches iguales y* 2 *rosas iguales, ¿de cuántas formas puede obsequiar todos sus regalos si los puede obsequiar como quiera?*

Una vez más, nos enfrentamos a un problema que no se puede resolver directamente con una cuenta de permutaciones o combinaciones aislada. En el problema anterior lo último que hicimos fue aplicar la regla de la suma. En este problema usaremos al final la regla del producto dividiendo el problema en los siguientes dos problemas más

sencillos: ¿de cuántas formas puede repartir los peluches? ¿de cuántas formas puede repartir las rosas?
Resolvamos la primer pregunta. Como Gogo puede repartir los peluches como quiera, tiene varias opciones según cuántos peluches regale a una misma persona. Dividiremos por casos de la siguiente manera.

- Gogo le da los 3 peluches a la misma chica. Esto lo puede hacer de 4 formas, únicamente decidiendo a quién se los va a dar.

- Gogo le da 2 peluches a una y 1 a otra. De las 4 tiene que elegir a una para regalarle los 2 y de las *otras* 3 tiene que elegir a otra para darle el que queda. Esto se puede hacer de $4 \cdot 3 = 12$ formas.

- Gogo le da máximo un peluche a cada una. Tiene que *elegir* a 3 de ellas, lo cual lo puede hacer de $\binom{4}{3} = 4$ formas.

Juntando los casos, vemos que Gogo puede regalar los peluches de $4 + 12 + 4 = 20$ formas. Con las rosas pasa algo similar. Si regala ambas a una sola persona, lo puede hacer de 4 formas. Si regala una y una, lo puede hacer de $\binom{4}{2} = 6$ formas. Así, tiene $4 + 6 = 10$ formas distintas de regalar las rosas.
Como cada forma de regalar los peluches es compatible con cada forma de regalar las rosas, hay que aplicar la regla del producto para encontrar el total de posibilidades. Así, Gogo tiene $20 \cdot 10 = 200$ formas de darle los regalos a sus amigas en San Valentín.

Ejemplo 14 *¿Cuántas manos de dominó tienen al menos* 5 *mulas?*

Para este problema tenemos que recordar que el juego de dominó consta de fichas con todas las posibles parejas de números entre 0 y 6. Una mano de dominó consta de 7 fichas (sin importar su orden) y una ficha es una mula si ambos números en ella son iguales. Dos fichas se pueden juntar por dos extremos iguales.
Como una mula queda totalmente determinada por un número de 0 a 6, entonces hay 7 mulas. Las otras fichas no son mulas y están determinadas por 2 de los 7 números, de modo que hay $\binom{7}{2} = 21$ de éstas. Como pasan cosas distintas con las fichas que son mulas y con las que no, resolveremos el problema contando cuántas mulas tiene la mano.

- Si la mano tiene 5 mulas, hay que elegir 5 de 7 números para que sean las mulas. Esto lo podemos hacer de $\binom{7}{5}$ formas. Además, para cada elección de mulas, entre las otras 21 fichas hay que elegir 2 para completar la mano, lo cual podemos hacer de $\binom{21}{2}$ formas. Esto nos da un total de $\binom{7}{5}\binom{21}{2}$ posibilidades en este caso.

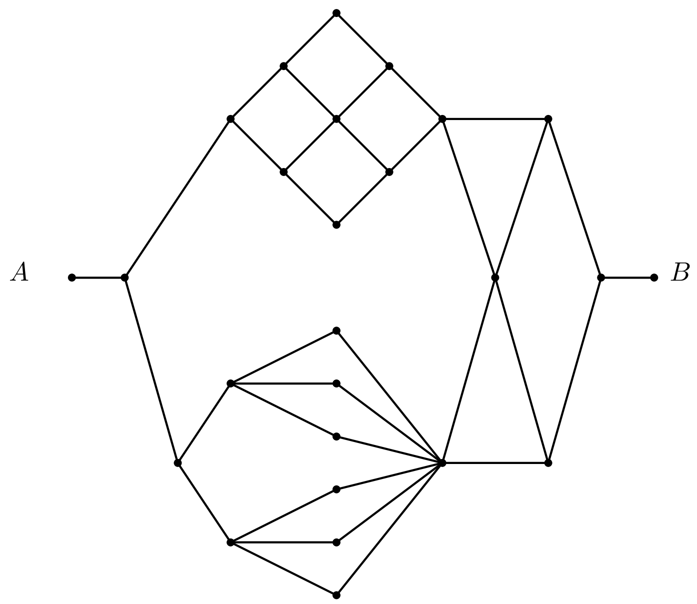
- Para una mano con 6 mulas hay que elegir 6 de 7 números que correspondan a las mulas y luego entre las 21 fichas restantes elegir una para completar la mano. Así, en este caso hay $\binom{7}{6} \cdot 21$ manos posibles.

- Sólo hay una mano que tenga las 7 mulas.

Sumando las posibilidades de todos los casos, vemos que en total tenemos $\binom{7}{5}\binom{21}{2} + \binom{7}{6} \cdot 21 + 1 = 4410 + 147 + 1 = 4558$ manos de dominó con al menos 5 mulas.

Problemas

23. ¿Cuántas formas hay de llegar de A a B en la siguiente figura si únicamente se permite avanzar a la derecha?



24. En un grupo de 15 personas se eligirá un tesorero, un presidente y un organizador de logística. Si no necesariamente son personas distintas, ¿de cuántas formas podemos elegirlos?

25. ¿De cuántas formas se pueden colocar 4 pelotas negras indistinguibles y 4 pelotas blancas indistinguibles alrededor de una mesa? (Dos configuraciones se consideran iguales si una de ellas se puede obtener a partir de la otra rotando la mesa).

26. Se marca una tarjeta con un 1, dos tarjetas con un 2, y así sucesivamente hasta que se marcan cincuenta tarjetas con un 50. Se revuelven las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas deben sacarse como mínimo para asegurar que entre las que se sacan hay al menos 10 con el mismo número?

27. Para organizar un torneo de futbol se necesitan elegir tres meses distintos del año, con la condición de que no tengan 31 días. En el primer mes habrá 10 días distintos en los cuales se juegue un partido. En el segundo mes habrá 5 días distintos en los cuales se juegue un partido. En el último mes habrá 3 días

distintos en los cuales se juegue un partido. ¿De cuántas formas es posible hacer el calendario de juegos? Recuerda que hay años bisiestos.

28. Pichi escribe todos los números mayores a 10000 que se pueden formar con dígitos a, b, c, d y e (no necesariamente en ese orden) que cumplen la condición de que $b = a + 2$, $c = b + 2$, $d = c + 2$ y $e = d + 2$.

    - ¿Cuántos números escribió Pichi?
    - Calcula la suma de los números que escribió Pichi.

Conclusiones

Existen varias técnicas básicas de conteo. Las podemos resumir en la siguiente lista:

- Podemos contar objetos enlistándolos con un orden.
- Si dividimos un problema en casos y sabemos de cuántas formas se puede hacer cada caso, al final hay que sumar los resultados.
- Si tenemos que hacer múltiples decisiones compatibles que sabemos de cuántas formas se pueden hacer, entonces hay que multiplicar las posibilidades.
- Podemos elegir el tipo de n objetos entre m tipos de m^n formas distintas.
- Podemos acomodar n objetos distintos en una fila de $n!$ formas.
- Podemos elegir k de n objetos en $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formas.
- Para resolver un problema grande, podemos aplicar el principio de Divide y Conquista para resolver problemas más pequeños y luego combinar los resultados adecuadamente.

Para poder aprovechar al máximo estas técnicas es necesario que las practiques. Después de resolver varios problemas se empieza a desarrollar un instinto para saber contar. Quien sabe, a lo mejor un día de estos podrías contar las abejas de un enjambre de golpe.

Problemas de práctica

Para este segundo número del año hemos incrementado un poco la dificultad de los problemas, de manera que en esta sección encontrarás material clasificado en los niveles introductorio e intermedio. Otra diferencia con respecto al número anterior, es que ahora abandonamos el formato de *opción múltiple,* mismo que se acostumbra usar en la primera eliminatoria de los concursos estatales, para adoptar el formato de *pregunta abierta* que caracteriza a las etapas más avanzadas de los concursos olímpicos.

Ahora, te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y usar todos tus conocimientos para encontrar la solución para cada uno de los 20 problemas de práctica de este número. Aunque en la siguiente sección podrás encontrar las respuestas de todos ellos, te recomendamos que no la consultes sino hasta después que hayas llegado por ti mismo a tu propia solución.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que conoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. Si $0 < a < b < 1$, ¿cuál número entre a, b, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ y ab es mayor?

Problema 2. En un triángulo ABC se tiene $\angle A = 80^\circ$ y $\angle C = 40^\circ$. La mediatriz de AC corta a BC en un punto P y a la recta AB en un punto Q. Determina la medida del ángulo $\angle BPQ$.

Problema 3. ¿Cuántos números de cuatro dígitos múltiplos de 3 hay tales que el número formado por sus dos últimos dígitos es también un múltiplo de 3?

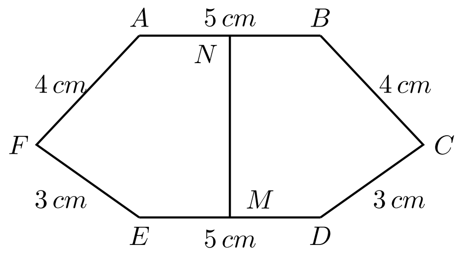
Problema 4. En una comida te dan 5 tortillas. Un taco se prepara con una o dos tortillas y uno de dos guisados. ¿De cuántas formas puedes prepararte un plato de tacos? (Nota: Debes usar todas las tortillas y el orden en que pongas los tacos en el plato no importa.)

Problema 5. El entero positivo n y el primo p satisfacen la relación

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 27p.$$

Determina la razón $\frac{n^2}{p}$.

Problema 6. En hexágono de la figura, $\angle AFE = \angle BCD = 90°$, M y N son los puntos medios de AB y ED, respectivamente, y MN es un eje de simetría de la figura. Determina el área del hexágono.



Problema 7. Leo lanza dos monedas y Marco lanza una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que Leo obtenga más águilas que Marco?

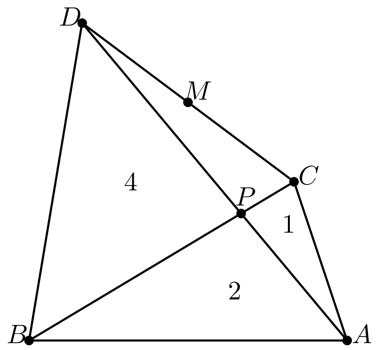
Problema 8. ¿Cuántos números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ hay que elegir para asegurar que su producto sea múltiplo de 32?

Problema 9. En una circunferencia de radio 1 se traza un diámetro PQ y se inscribe un triángulo equilátero con base AB paralela a PQ. El segmento PQ corta al lado BC en el punto R. ¿Es la longitud de PR menor, igual, o mayor que la longitud de un cuarto de la circunferencia?

Problema 10. Tenemos tres montones de piedras con 51, 49 y 5 piedras respectivamente. Se pueden juntar cualesquiera dos montones para formar uno sólo, o bien, cualquier montón con un número par de piedras se puede separar en dos montones con igual número de piedras cada uno. Haciendo sólo estos movimientos, ¿es posible obtener 105 montones con una sóla piedra cada uno?

Problema 11. Un peón blanco y uno negro se colocan en un tablero de ajedrez. Los peones se mueven por turnos a las casillas vacías ayacentes solamente mediante movimientos verticales u horizontales. ¿Se podrá definir una secuencia de movimientos de tal forma que se obtengan todas las posiciones posibles para los dos peones sin que se repita ninguna? ¿Será posible hacerlo aún en el caso de que los peones no se muevan por turnos?

Problema 12. Si las áreas de los triángulos BPD, APB y CPA son $4\,cm^2$, $2\,cm^2$ y $1\,cm^2$, respectivamente, y M es el punto medio de CD, ¿cuál es el área del triángulo AMB?



Problema 13. Sea $p > 5$ un número primo. Demuestra que $p - 4$ no puede ser la cuarta potencia de un entero.

Problema 14. Con 21 fichas de damas, unas blancas y otras negras, se forma un rectángulo de 3×7. Demuestra que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Problema 15. Dado un cuadrilátero $ABCD$ tal que $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, demuestra que AC y BD son perpendiculares.

Problema 16. Sean a y b dos enteros positivos. Sea A un subconjunto con más de $\frac{a+b}{2}$ elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, a + b\}$. Demuestra que hay dos números en A cuya diferencia es a o b.

Problema 17. En el triángulo acutángulo ABC se tiene que $\angle BAC$ es menor que $\angle ACB$. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y sea AD un diámetro de $\mathcal{C}$. Sea E el punto de intersección del rayo AC con la tangente a $\mathcal{C}$ que pasa por B. La perpendicular a AD que pasa por E intersecta a la circunferencia circunscrita del triángulo BCE, otra vez, en el punto F. Demuestra que CD es bisectriz del ángulo $\angle BCF$.

Problema 18. Demuestra que el cubo de todo número natural se puede expresar como diferencia de dos cuadrados, tales que al menos uno de ellos es múltiplo de 9.

Problema 19. Se pintan todos los puntos del plano usando sólo tres colores. Demuestra que sin importar cómo se haga, siempre habrá al menos un segmento de longitud 1 cuyos puntos extremos tengan el mismo color.

Problema 20. Determina todos los enteros positivos $x \leq y \leq z$ tales que,

$$x^y + y^z = z^x.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que para cada problema se incluye la explicación que justifica su validez. Observa que, en todos los casos, la argumentación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que para ningún problema la solución se presenta sin sustento.

Como siempre, las soluciones que presentamos no son únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si éste es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

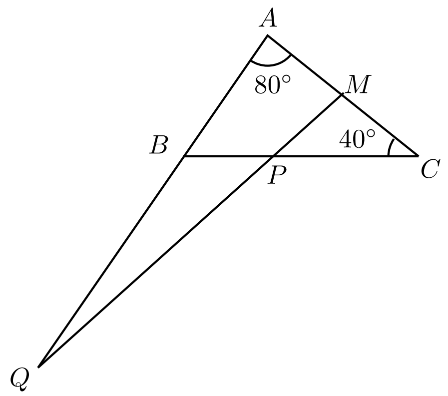
Solución del problema 1. Demostremos que $\sqrt{b}$ es el mayor.

$ab < b < \sqrt{b}$ pues $a < 1$ y $\sqrt{b} < 1$.

$a < \sqrt{a} < \sqrt{b}$ pues $\sqrt{a} < 1$ y $a < b$.

Con estas desigualdades se sigue que $\sqrt{b}$ es el mayor de los números.

Solución del problema 2. Sea M el punto medio del lado AC. Como PQ es mediatriz, tenemos que $\angle CMP = 90°$. Fijándonos en el triángulo MPC, tenemos que $\angle MPC = 180° - 90° - 40° = 50°$ y como los ángulos $\angle BPQ$ y $\angle MPC$ son opuestos por el vértice, obtenemos que $\angle BPQ = \angle MPC = 50°$.



Solución del problema 3. Sea $N = abcd$ uno de dichos números. Por el criterio de divisibilidad por 3 (ver en el apéndice el criterio 2) tenemos que tanto $a+b+c+d$ y $c+d$ son múltiplos de 3. Esto ocurre si y sólo si $a+b$ y $c+d$ son múltiplos de 3, y por el mismo criterio es equivalente a que los números de dos dígitos ab y cd son múltiplos de 3 (además cd puede comenzar en 0).
Primero elegimos ab. Este número tiene que ser de dos dígitos y es múltiplo de 3, por lo que puede ser desde $12 = 3(4)$ hasta $99 = 3(33)$, o sea, tiene 30 opciones. El número cd puede ser desde $00 = 3(0)$ hasta $99 = 3(33)$, o sea, tiene 34 opciones. Así hay $30 \times 34 = 1,020$ números que cumplen las condiciones.

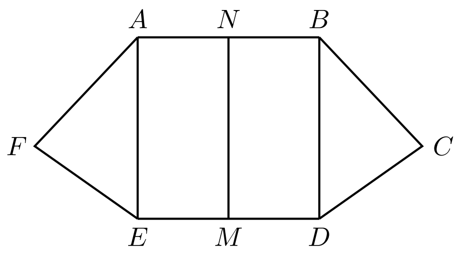
Solución del problema 4. Llamemos a los guisados A y B. Podemos hacernos dos, uno o ningún taco doble.

- Si tenemos dos tacos dobles, hay que elegir cuántos de esos son del guisado A (cero, uno o dos) y de qué guisado será el taco sencillo (A ó B). Así, hay 6 formas en este caso.
- Si tenemos un taco doble, hay que elegir de qué es (A ó B) y cuántos de los tacos sencillos son de guisado A (cero, uno, dos o tres). Así, en este caso hay 8 formas.
- Finalmente, si no tenemos tacos dobles sólo hay que elegir cuántos de esos son de guisado A (6 formas).

Esto da un total de 20 posibilidades.

Solución del problema 5. Desarrollando el lado izquierdo obtenemos que $5n^2 + 10 = 27p$. Como el lado izquierdo es divisible entre 5, el lado derecho también debe serlo, de modo que $p = 5$. Luego, $5n^2 + 10 = 27(5) = 135$ de donde $n^2 = 25$. Por lo tanto, $\frac{n^2}{p} = \frac{25}{5} = 5$.

Solución del problema 6. Si trazamos AE y BD, por la simetría son perpendiculares a los lados DE y AB. Aplicando el teorema de Pitágoras (ver en el apéndice el teorema 10) a los triángulos laterales que se forman, obtenemos que $BD = AE = 5\,cm$.



Esto nos dice que $ABDE$ es un cuadrado. El área de los triángulos AFE y BDC es $\frac{3\cdot 4}{2} = 6\,cm^2$ y el área del hexágono es $5^2 + 2 \cdot 6 = 37\,cm^2$.

Solución del problema 7. Veamos los ocho posibles resultados, donde A indica águila y S indica sol (las dos primeras letras indican las monedas de Leo y la tercera la de Marco).

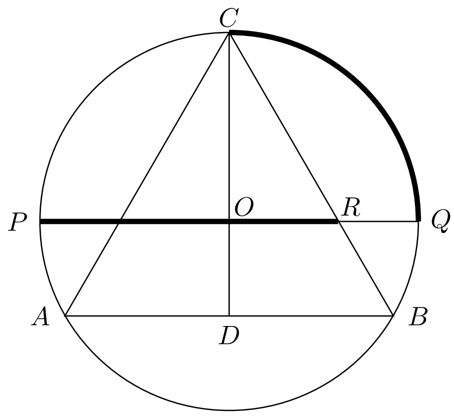
$\{A, A, A\}$ Leo obtuvo más águilas.
$\{A, A, S\}$ Leo obtuvo más águilas.
$\{A, S, A\}$ Obtuvieron la misma cantidad de águilas.
$\{A, S, S\}$ Leo obtuvo más águilas.
$\{S, A, A\}$ Obtuvieron la misma cantidad de águilas.
$\{S, A, S\}$ Leo obtuvo más águilas.
$\{S, S, A\}$ Marco obtuvo más águilas.
$\{S, S, S\}$ Obtuvieron la misma cantidad de águilas.

Así que la probabilidad buscada es $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Solución del problema 8. Primero notamos que los impares no nos ayudan a que el producto sea múltiplo de $32 = 2^5$. Consideramos las factorizaciones en primos de los pares: $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $6 = 2^1 \cdot 3$, $8 = 2^3$ y $10 = 2^1 \cdot 5$. Si sólo elegimos 8 números, estos podrían ser todos los impares, el 2, el 6 y el 10 (que sólo aportan un factor 2), que no es múltiplo de 2^5. Ahora, si elegimos 9 números lo peor que podría pasar es que tengamos los cinco impares, los tres que aportan sólo un factor 2 al producto y el 4, que aporta dos factores 2, cuyo producto es múltiplo de 2^5. Entonces la respuesta es 9.

Solución del problema 9. Unamos C con el centro O y prolonguemos el trazo hasta cortar al lado AB en un punto D.
Los triángulos DBC y ORC son semejantes (ver en el apéndice el criterio 16 y la definición 15), de donde se obtiene que,

$$OR = DB \cdot \frac{CO}{CD} = \frac{DB}{CD}.$$



Si designamos por x a la longitud de los lados del triángulo ABC, tenemos $DB = \frac{x}{2}$ y aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CDB, tenemos que $CD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Luego, $OR = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, por lo que

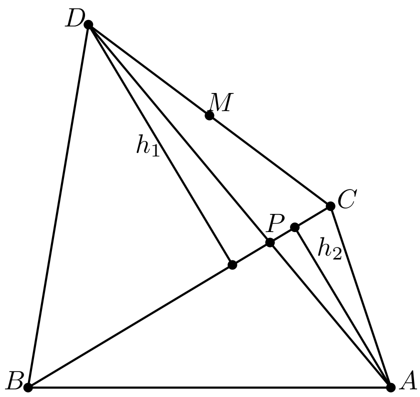
$$PR = PO + OR = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} = 1.5773\ldots > 1.5707\ldots = \frac{\pi}{2} = \widehat{CQ}.$$

Solución del problema 10. No es posible. Notemos que si en algún momento el número de piedras en cada montón es divisible por un entero impar, entonces en el siguiente paso el número de piedras en el(los) montón(es) resultante(s) será divisible por ese mismo impar. Es claro que, bajo las condiciones iniciales, en el primer paso sólo podemos obtener uno de los siguientes casos: dos montones con 100 y 5 piedras, o dos montones con 56 y 49 piedras o dos montones con 54 y 51 piedras. En cada uno de estos casos, el número de piedras de ambos montones tiene un común divisor impar (5, 7 y 3, respectivamente) mayor que 1. Por lo tanto es imposible obtener 105 montones de piedras con 1 piedra cada uno, pues en este caso, el único común divisor sería 1.

Solución del problema 11. La respuesta a la primera pregunta es no. Para verlo, supongamos que existe una secuencia de movimientos mediante la cual se obtienen todas las posiciones posibles sólo una vez. Escojamos una casilla cualquiera que esté vacía al principio y al final de todos los movimientos de dicha secuencia. Existen exactamente 63 posiciones (a las que llamaremos *especiales*) en las que el peón blanco está precisamente en esa casilla y el peón negro está en cualquiera de las otras casillas. Ahora, observemos que las posiciones especiales siempre se dan por parejas (de dos en dos), primero cuando el peón blanco se mueve a la casilla (se obtiene una posición especial) y luego, al final de la siguiente jugada del peón negro (pues se tiene de nuevo otra posición especial). Todas estas parejas de posiciones especiales deberían ser diferentes entre sí, pero 63 es un número impar, lo que es una contradicción. Por lo tanto tal secuencia de movimientos no es posible.

Aún eliminado la restricción de mover los peones por turnos, la respuesta sigue siendo no. Supongamos de nuevo que existe una secuencia de movimientos y llamemos *par* a una posición donde los dos peones están colocados en casillas del mismo color e *impar* en caso contrario. Nótese que en la secuencia, las posiciones pares e impares siempre se van alternando, por lo que la diferencia entre el número de posiciones pares e impares es a lo más 1. Por otro lado, el número total de posiciones pares es $64 \cdot 31$ (podemos colocar al peón blanco en cualquiera de las 64 casillas y al negro en cualquiera de las restantes 31 del mismo color) y el número de posiciones impares es $64 \cdot 32$ (podemos colocar al peón blanco en cualquiera de las 64 casillas y al negro en cualquiera de las 32 del otro color). De lo anterior, se sigue que el número de posiciones pares e impares difiere en 64, lo que es una contradicción y por lo tanto no existe dicha secuencia de movimientos. (Observe que la demostración para la segunda pregunta funciona también para la primera.)

Solución del problema 12. Sean h_1 y h_2 las longitudes de las alturas de los triángulos CDB y CBA, respectivamente. Denotemos por (ABC) al área del triángulo ABC.



Tenemos que,

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{BP \cdot h_2}{2}}{\frac{PC \cdot h_2}{2}} = \frac{(APB)}{(CPA)} = \frac{2}{1} = 2.$$

De donde,

$$2 = \frac{BP}{PC} = \frac{\frac{BP \cdot h_1}{2}}{\frac{PC \cdot h_1}{2}} = \frac{(PDB)}{(CDP)},$$

y deducimos que $(CDP) = 2\,cm^2$.

Finalmente podemos calcular el área del triángulo AMB como sigue

$$\begin{aligned}(AMB) &= (ABDC) - (MDB) - (CMA)\\ &= (ABDC) - \frac{1}{2}(CDB) - \frac{1}{2}(CDA) = 9 - 3 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\,cm^2.\end{aligned}$$

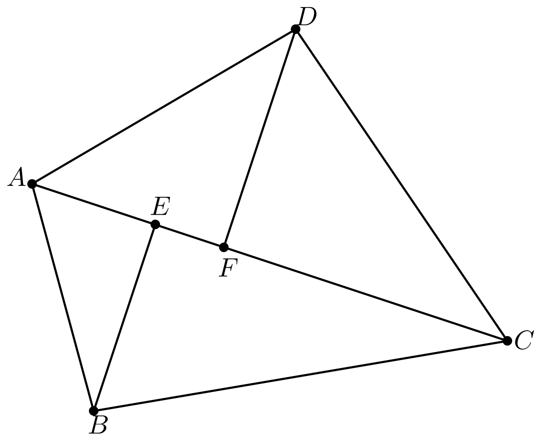
Solución del problema 13. Supongamos que sí existe un entero q tal que $p-4=q^4$. Entonces,

$$\begin{aligned} p &= q^4+4=(q^2+2)^2-4q^2 \\ &= (q^2+2+2q)(q^2+2-2q) \\ &= ((q+1)^2+1)((q-1)^2+1). \end{aligned}$$

Como p es primo alguno de los factores deberá ser 1. Si $(q-1)^2+1=1$ se tiene que $q=1$, y si $(q+1)^2+1=1$ entonces $q=-1$, pero en cada caso se tendría que $p=5$, lo cual no es posible. Luego, no hay entero q tal que $p-4=q^4$.
Comentario. La factorización de q^4+4 es un caso especial de la factorización de Sophie Germain: $a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$.

Solución del problema 14. Colocaremos el tablero en posición vertical, es decir, con 7 filas y 3 columnas. Asignaremos el dígito 0 al color blanco y el dígito 1 al color negro. De este modo cada fila representa un número escrito en base 2. Si dos números escritos en base 2 son iguales, sus filas forman un rectángulo. Luego, todas las filas han de representar números distintos en base 2.
Observemos que si en una fila se colocan todas las fichas del mismo color, por ejemplo el negro, necesariamente habrá un rectángulo ya que no podemos colocar en ninguna fila dos fichas negras y sólo podemos llenar un máximo de 4 filas de las restantes sin que se forme un rectángulo.
Por lo expuesto en el párrafo anterior, debemos excluir a los números 000 y 111. Ahora bien, existen $8=2^3$ números de tres dígitos escritos en base 2, pero quitando los anteriores quedan 6 y tenemos 7 filas, por lo que necesariamente hemos de repetir algún número y se formaría un rectángulo.

Solución del problema 15. Sean E y F los pies de las perpendiculares a AC desde B y D, respectivamente. Hay que demostrar que $E=F$.



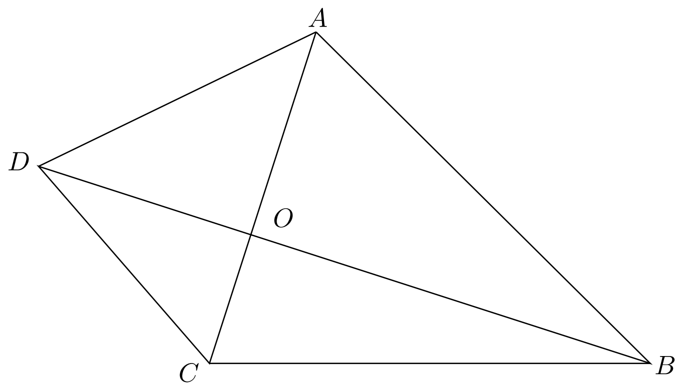
Por hipótesis tenemos que $AB^2 - BC^2 = AD^2 - DC^2$ y por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$\begin{aligned} AB^2 - BC^2 &= (AE^2 + EB^2) - (BE^2 + EC^2) = AE^2 - EC^2 \\ &= (AE + EC)(AE - EC) = AC(AC - 2EC). \end{aligned}$$

Análogamente obtenemos que $AD^2 - DC^2 = AC(AC - 2FC)$, luego, $AC - 2EC = AC - 2FC$ y concluimos que $E = F$.

Solución alternativa. Como $\angle AOD + \angle COD = 180°$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que

$$\angle BOC = \angle AOD = \theta \leq 90° \text{ y } \angle AOB = \angle COD = 180° - \theta \geq 90°.$$



De la desigualdad de Pitágoras (ver en el apéndice el Teorema 11) se sigue que,

$$\begin{aligned} AO^2 + DO^2 &\geq AD^2, \\ BO^2 + CO^2 &\geq BC^2, \\ AO^2 + BO^2 &\leq AB^2, \\ CO^2 + DO^2 &\leq CD^2, \end{aligned}$$

donde, en todos los casos, tenemos la igualdad si y sólo si $\theta = 90°$. Entonces,

$$\begin{aligned} AD^2 + BC^2 &\leq \left(AO^2 + DO^2\right) + \left(BO^2 + CO^2\right) \\ &= \left(AO^2 + BO^2\right) + \left(CO^2 + DO^2\right) \\ &\leq AB^2 + CD^2\,, \end{aligned}$$

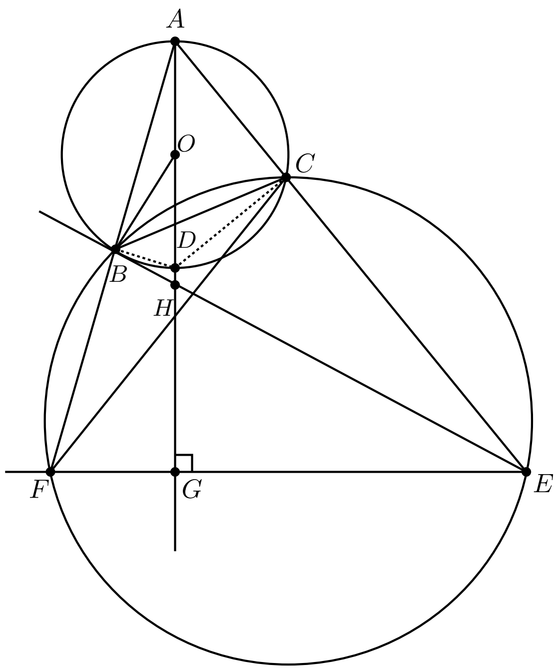
donde la igualdad se da si y sólo si $\theta = 90°$. Dado que, por hipótesis, tenemos que $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$, entonces $\theta = 90°$ y AC es perpendicular a BD.

Solución del problema 16. Hagamos dos listas con los números $1, 2, \ldots, a + b$, de la siguiente manera:

1	2	$\ldots$	b	$b+1$	$b+2$	$\ldots$	$b+a$
$a+1$	$a+2$	$\cdots$	$a+b$	1	2	$\ldots$	a

En el arreglo hay $a+b$ columnas y cada entero del conjunto $\{1, 2, \ldots, a+b\}$ aparece 2 veces en la tabla. También cada uno de los números de A aparece 2 veces en el arreglo y estos ocupan más de $a+b$ lugares. Luego deberá haber una columna cuyos números pertenecen a A, y para tales números su diferencia es claramente a o b.

Solución del problema 17. Sean O el circuncentro de $\mathcal{C}$, G el pie de la perpendicular de A sobre EF y H el punto donde se cortan AD y BE. Los triángulos rectángulos OBH y EGH son semejantes por tener el ángulo H opuesto por el vértice.



Luego,

$$\angle FEB = \angle HOB. \tag{1}$$

Por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$ (ver en el apéndice la definición 24 y el teorema 25), tenemos que

$$\angle FEB = \angle FCB. \tag{2}$$

Y en el cuadrilátero cíclico $DCAB$ se tiene,

$$\angle DCB = \angle DAB = \frac{1}{2}\angle DOB. \tag{3}$$

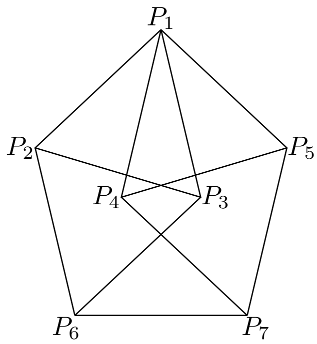
Luego de (1), (2) y (3) se sigue que $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle FCB$, por lo que CD es bisectriz del ángulo $\angle FCB$.

Solución del problema 18. Consideremos la ecuación $n^3 = a^2 - b^2$. En lo que sigue demostraremos que para cualquier natural n, siempre es posible encontrar naturales a y b tales que la satisfacen.
Para encontrar una solución de la ecuación $n^3 = (a+b)(a-b)$ podemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} a+b &= n^2, \\ a-b &= n. \end{aligned}$$

Si sumamos ambas ecuaciones, obtenemos que $2a = n^2 + n$, de donde se sigue que $a = \frac{n(n+1)}{2}$, por lo que a es un número natural. Restándolas, obtenemos $2b = n^2 - n$, por lo que $b = \frac{n(n-1)}{2}$, que también es un número natural. Con esto queda probado que el cubo de cualquier natural se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados y sólo faltaría probar que alguno de ellos es múltiplo de 9.
Como $n-1$, n y $n+1$ son números consecutivos, alguno de ellos debe ser múltiplo de 3. Si n fuera el múltiplo de 3, entonces tanto a^2 como b^2 serían múltiplos de 9. Si sucede que $n-1$ es el múltiplo de 3, entonces b^2 sería múltiplo de 9. Por último, si $n+1$ fuera el múltiplo de 3, entonces a^2 sería múltiplo de 9. En cualquier caso tenemos que alguno de los dos, a^2 ó b^2, tiene que ser múltiplo de 9.

Solución del problema 19. Consideremos la siguiente figura donde todos los segmentos tienen longitud 1 y supongamos que ninguno de los segmentos que la forman tiene extremos del mismo color.



Es evidente que los puntos P_1, P_2 y P_3 deben ser de colores disitintos. Observemos también, que P_6 no puede tener el mismo color que P_2, ni el mismo que P_3, por lo que se concluye que P_6 debe tener el mismo color que P_1. Siguiendo un razonamiento análogo con P_1, P_4, P_5 y P_7, llegamos a la conclusión de que P_1 y P_7 tienen el mismo color. Lo anterior nos lleva a una contradicción, pues P_6 y P_7 tendrían el mismo color (el de P_1). Es así, que en esta figura (y por lo tanto en el plano) debe existir al menos un segmento (de longitud 1) con extremos del mismo color.

Solución del problema 20. Observemos primero que todo entero $n \geq 3$ satisface la desigualdad $n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)}$. En efecto, si elevamos ambos lados de esta desigualdad a la $n(n+1)$, obtenemos la desigualdad equivalente $n^{n+1} > (n+1)^n$ la cual se sigue al desarrollar $(n+1)^n$ (se deja de ejercicio al lector). Luego, tenemos que

$3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \cdots$, de donde $y^z > z^y \geq z^x$ si $y \geq 3$. Por lo tanto, la ecuación $x^y + y^z = z^x$ no tiene solución si $y \geq 3$. Como $1 \leq x \leq y$, los valores posibles para (x, y) son $(1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 2)$. En el primer caso, tenemos que $z = 2$. En los otros casos, las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{aligned} 1 + 2^z &= z, \\ 4 + 2^z &= z^2. \end{aligned}$$

La segunda ecuación no tiene solución ya que $2^z > z$. La tercera ecuación tampoco tiene solución debido a que $2^z \geq z^2$ si $z \geq 4$ y la terna $(x, y, z) = (2, 2, 3)$ no es solución de la ecuación $x^y + y^z = z^x$. Por lo tanto, la ecuación original tiene la única solución $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

Problemas propuestos

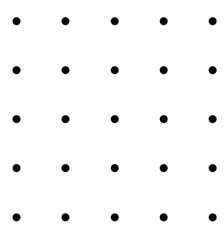
Problemas propuestos.
Año 2011 No. 2.

Tzaloa, más que una simple revista, es el medio de comunicación de una comunidad muy participativa, en la que todos compartimos la pasión por las matemáticas y disfrutamos al superar los retos que presentan los problemas. Por eso, siempre nos sentiremos orgullosos de publicar tu trabajo y nunca dejaremos de reconocer el gran talento de todos nuestros lectores.

Como en cada número, a continuación proponemos los 5 problemas que necesitarán la participación de todos para encontrar soluciones creativas y elegantes. Recuerda que ahora tienes más tiempo para enviarnos tu trabajo. Las soluciones a los problemas propuestos en este número se publicarán en Tzaloa Número 1, Año 2012.

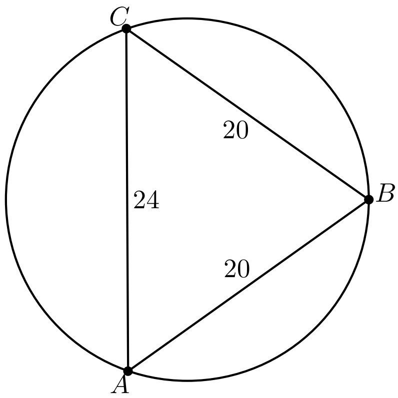
Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella esteremos recibiendo todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problema 1. (Principiante) ¿Cuántos cuadrados hay tales que sus cuatro vértices están entre los siguientes puntos?



Problema 2. (Principiante) ¿Cuál es el diámetro del siguiente círculo, si se sabe que

$AC = 24\,cm$ y $BC = BA = 20\,cm$?



Problema 3. (Intermedio) ¿Cuál es la suma de los máximos divisores propios de los números del 1 al 100? (Nota: Un divisor propio de un entero positivo n es un divisor que no es igual a n.)

Problema 4. (Intermedio) El punto A está en el interior de un ángulo con vértice M. Un rayo de luz que se emite desde el punto A, incide en un punto B de uno de los lados del ángulo y se refleja para incidir en un punto C del otro lado del ángulo, para finalmente ser reflejado de regreso a A. Si se cumplen las leyes oridinarias de la reflexión[3], demuestra que el circuncentro del triángulo BCM está sobre la recta AM.

Problema 5. (Avanzado) Determina todos los enteros positivos a, n, p, q y r tales que,

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$

[3]Según las cuales cuando un rayo incide en una superficie plana, los ángulos de incidencia (θ_1) y relexión (θ_2) son iguales ($\theta_1 = \theta_2$).

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2010 No. 3.

A continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos de Tzaloa 3, año 2010. Es importante mencionar que en esta ocasión, 4 de las 5 soluciones que presentamos fueron enviadas por nuestos lectores. Lo anterior nos da mucho gusto porque nunca antes habíamos tenido tanta participación. Esperamos que en el próximo número la participación siga incrementándose, que todas las soluciones que se publiquen sean elaboradas por los lectores y que, de entre ellas, alguna sea tuya.

Problema 1. (Intermedio) Considera la suma, la diferencia positiva, el producto y el cociente mayor que 1 de dos enteros positivos distintos. Si al sumar los cuatro resultados obtienes 450, determina los dos números.

Solución de Francisco Gómez Hernández. Supongamos que a y b son esos números y que $a < b$. Entonces, los cuatro números que suman 450 son: $b + a$, $b - a$, ab y $\frac{b}{a}$. Despejando $\frac{b}{a}$ obtenemos,

$$\frac{b}{a} = 450 - ab - (b - a) - (b + a) = 450 - ab - 2b.$$

Notemos que el lado derecho de esta igualdad es un entero, de modo que $\frac{b}{a}$ es entero, digamos $\frac{b}{a} = t$. Luego, $b = at$ para algún entero positivo t (pues a y b son positivos). Sustituyendo,

$$(b + a) + (b - a) + ab + \frac{b}{a} = 2b + ab + \frac{b}{a} = 2at + a^2t + t = t(a + 1)^2 = 450.$$

Como a es un entero positivo, tenemos que $(a + 1)^2$ es un cuadrado mayor que 1 y divide a $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Luego, $(a + 1)^2 = 9, 25,$ o 225.

- Si $(a + 1)^2 = 9$, entonces $a + 1 = 3$ y $a = 2$. Luego, $t = \frac{450}{9} = 50$ y $b = 100$.
- Si $(a + 1)^2 = 25$, entonces $a + 1 = 5$ y $a = 4$. Luego, $t = \frac{450}{25} = 18$ y $b = 72$.
- Si $(a+1)^2 = 225$, entonces $a+1 = 15$ y $a = 14$. Luego, $t = \frac{450}{225} = 2$ y $b = 28$.

Por lo tanto, las soluciones son $(a, b) = (2, 100), (4, 72)$ y $(14, 28)$.

El problema 1 también lo resolvieron Luis Camilo Castillo Toledano, Luis Eduardo García Hernández y Noé Muñoz Elizondo.

Problema 2. (Intermedio) En un tablero de 123 renglones y 123 columnas, cada casilla es pintada de rojo o azul de acuerdo con las siguientes condiciones:

1. Cada casilla pintada de rojo que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 5 casillas azules entre sus 8 casillas vecinas.

2. Cada casilla pintada de azul que no esté en el borde del tablero tiene exactamente 4 casillas rojas entre sus 8 casillas vecinas.

Determina el número de casillas pintadas de rojo en el tablero.

Solución de Luis Camilo Castillo Toledano. Demostraremos que la cantidad de casillas rojas en el tablero es 4×41^2.
Observemos primero que $123 \times 123 = 3^2 \times 41^2$. Dividamos el tablero en 41^2 subtableros de 3×3 y analicemos qué sucede en cada uno de ellos. Si la casilla central de un subtablero de 3×3 está pintada de azul, entonces a su alrededor hay 4 casillas rojas. Luego, en dicho subtablero, habrá 5 casillas azules y 4 casillas rojas. Por ejemplo,

A	R	A
R	A	R
A	R	A

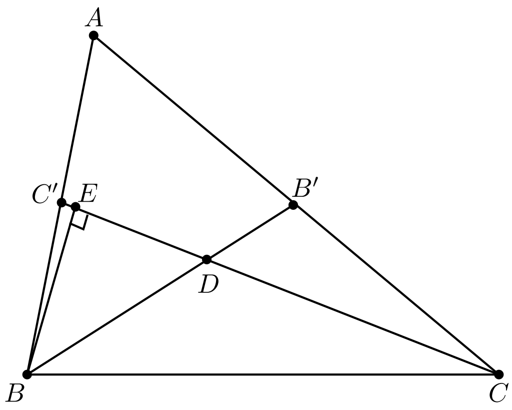
Ahora, si la casilla central de un subtablero de 3×3 está pintada de rojo, entonces a su alrededor habrá 5 casillas azules, y por lo tanto en dicho subtablero habrá 5 casillas azules y 4 casillas rojas. Por ejemplo,

A	A	A
A	R	A
R	R	R

Por lo tanto, sin importar de que color esté pintada la casilla central de cualquier subtablero de 3×3 siempre hay 5 casillas azules y 4 rojas. Como hay 41^2 subtableros de 3×3, tenemos 5×41^2 casillas azules y 4×41^2 casillas rojas.

Problema 3. (Intermedio) Demuestra que si en un triángulo de área S el producto de las longitudes de dos de sus medianas es igual a $\frac{3}{2}S$, entonces dichas medianas son perpendiculares.

Solución de Luis Camilo Castillo Toledano. Sean B' y C' los puntos medios de los lados AC y AB, respectivamente. Sea D el baricentro del triángulo ABC y sea E el pie de la altura trazada desde B sobre el segmento CC'. Demostraremos que $E = D$.



Como las medianas de un triángulo se cortan en el baricentro en razón $2:1$, tenemos que el segmento BD mide el doble que el segmento $B'D$, y el segmento CD mide el doble que el segmento $C'D$. Escribamos $BD = 2x$ y $CD = 2y$, donde $x = B'D$ y $y = C'D$. Denotaremos por (ABC) al área de cualquier triángulo ABC. Tenemos por hipótesis que $(ABC) = S$ y

$$BB' \cdot CC' = \frac{3}{2}S. \tag{4}$$

Sustituyendo $BB' = 3x$ y $CC' = 3y$ en (4), obtenemos $\frac{3}{2}S = 9xy$ de donde $S = 6xy$. Por otra parte, como C' es punto medio de AB, tenemos que $(CC'B) = \frac{S}{2}$. Calculando $(CC'B)$ por el lado CC' tenemos también que $(CC'B) = \frac{CC' \cdot BE}{2}$. Luego, $\frac{CC' \cdot BE}{2} = \frac{S}{2}$ y de aquí $CC' \cdot BE = 3y \cdot BE = S$. Como $S = 6xy$, obtenemos que $3y \cdot BE = 6xy$ y por lo tanto $BE = 2x$. Así, $BE = BD$ y como $\angle CEB = 90°$, se sigue que $E = D$, como queríamos demostrar.

El problema 3 también lo resolvió Luis Eduardo García Hernández.

Problema 4. (Intermedio) Sea x un número real que satisface la ecuación $x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2$, donde p es un número primo. Demuestra que para todo entero n, el valor de la expresión $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un número entero y calcula su valor en función de p.

Solución. Considerando que

$$\left(x + \tfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2\,(x)\left(\tfrac{1}{x}\right) + \tfrac{1}{x^2} = x^2 + \tfrac{1}{x^2} + 2$$

y como $x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2$, tenemos que $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = p^2 - 2 + 2 = p^2$, de donde se sigue que

$$x + \frac{1}{x} = \pm p\,. \tag{5}$$

Ahora, para todo entero n definimos $f(n) = x^n + \frac{1}{x^n}$ y probaremos por inducción fuerte[4] que $f(n)$ siempre es un entero. Es claro que $f(-n) = f(n)$, por lo que bastará hacer la prueba para el caso $n \geq 0$.

[4]ver en el apéndice

- **Caso base** $n = 0$.- En este caso el resultado es inmediato toda vez que
$$f(0) = x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2\ . \tag{6}$$
- **Caso base** $n = 1$.- En este caso se sigue de (5) donde se probó que
$$f(1) = x + \frac{1}{x} = \pm p\ . \tag{7}$$
- **Caso base** $n = 2$.- Por hipótesis,
$$f(2) = x^2 + \frac{1}{x^2} = p^2 - 2\ . \tag{8}$$
- **Hipótesis de inducción**.- Sea $n \geq 3$ y supongamos que para todo $0 \leq k < n$, $f(k)$ es un entero.
- **Paso inductivo**.- Demostraremos entonces que $f(n)$ es un entero.
Como,
$$\left(x^{n-1} + \tfrac{1}{x^{n-1}}\right)\left(x + \tfrac{1}{x}\right) = x^n + x^{n-2} + \tfrac{1}{x^{n-2}} + \tfrac{1}{x^n},$$
tenemos que,
$$f(n-1)f(1) = f(n) + f(n-2),$$
de donde se sigue,
$$f(n) = f(n-1)f(1) - f(n-2), \tag{9}$$
es entero.

Por lo tanto, $x^n + \frac{1}{x^n}$ es un entero para todo entero n.
Además, dado el carácter constructivo de la demostración, nótese que el conjunto de ecuaciones (6), (7), (8) y (9) definen a la función recursiva f, misma que, para todo entero n, permite calcular de manera efectiva el valor de $x^n + \frac{1}{x^n}$.

Problema 5. (Avanzado) Determina todos los enteros positivos a y b tales que
$$\frac{b^2 a}{a + b}$$
sea un número primo.

Solución de Luis Eduardo García Hernández. Sean a y b enteros positivos tales que $\frac{b^2 a}{a+b} = p$ es un número primo. Sea d el máximo común divisor de a y b. Entonces, podemos escribir $a = dx$, $b = dy$ con x, y enteros positivos primos relativos. Sustituyendo tenemos que,
$$\frac{b^2 a}{a + b} = \frac{d^3 x y^2}{d(x + y)} = \frac{d^2 x y^2}{x + y} = p.$$

Como x, y son primos relativos, también lo son y^2 y $x + y$. Luego, $\frac{d^2x}{x+y}$ es un entero, digamos que $\frac{d^2x}{x+y} = t$. Entonces, $ty^2 = p$. Como p es primo, debe suceder que $t = 1$ y $y^2 = p$, o bien $t = p$ y $y^2 = 1$. En el primer caso, tendríamos que $y = \sqrt{p}$, lo cual no puede ser. Luego, $y^2 = 1$ y se sigue que $y = 1$. Sustituyendo obtenemos que $\frac{d^2x}{x+1} = p$. Ahora, como x y $x + 1$ son primos relativos, tenemos que $\frac{d^2}{x+1}$ es un entero y por lo tanto, $x = 1$ o $x = p$.

- Si $x = 1$, entonces $d^2 = 2p$ y por lo tanto $p = d = 2$. Luego, $a = 2$ y $b = 2$.
- Si $x = p$, entonces $d^2 = p + 1$, es decir, $(d + 1)(d - 1) = p$. Luego, $d + 1 = p$ y $d - 1 = 1$. Restando estas igualdades, se sigue que $p = 3$ y $d = 2$. Por lo tanto, $a = 6$ y $b = 2$.

Por lo tanto, las soluciones son $(a, b) = (2, 2)$ y $(6, 2)$.

Solución de Luis Camilo Castillo Toledano. Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{b^2a}{a+b} = p \tag{10}$$

es un número primo. Multiplicando por a ambos lados de esta igualdad obtenemos $(ba)^2 = a(a + b)p$. Como p es primo y el lado izquierdo de esta igualdad es un cuadrado, el factor $a(a + b)$ debe ser de la forma $p^{2r-1}q^{2s}$ con r y q enteros positivos, s entero no negativo y q no múltiplo de p. Luego, $(ba)^2 = p^{2r}q^{2s}$ de donde, $ab = p^r q^s$. Sustituyendo en (10) obtenemos que $bp^r q^s = (a + b)p$ de donde $a = b(p^{r-1}q^s - 1)$. Haciendo $d = p^{r-1}q^s - 1$ y sustituyendo $a = bd$ en (10), obtenemos que $d(b^2 - p) = p$. Como p es primo, tenemos que $d = 1$ o $d = p$.

- Si $d = 1$, entonces $b^2 - p = p$, es decir, $b^2 = 2p$ de donde se sigue que $p = 2$ y $a = b = 2$.
- Si $d = p$, entonces $b^2 - p = 1$, es decir, $b^2 = p + 1$ y por lo tanto $p = 3$, $b = 2$ y $a = 6$.

Problemas y Soluciones del Concurso Nacional 2010

Del 21 al 27 de noviembre de 2010 se llevó a cabo en Ensenada, Baja California, el Concurso Nacional de la 24^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Flavio Hernández González (Aguascalientes)
Karina Patricia De la Torre Sáenz (Chihuahua)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Jorge Garza Vargas (Distrito Federal)
Fernando Serrano Crotte (Distrito Federal)
Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Manuel Alejandro Espinosa García (Michoacán)
María Natalie Arancibia Alberro (Morelos)
Georges Belanger Albarrán (Morelos)
Daniel Perales Anaya (Morelos)
Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León)
Angel Adrián Dominguez Lozano (Nuevo León)
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León)
José Naín Rivera Robles (Querétaro)
José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Angel Adrián Dominguez Lozano (Nuevo León)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)

Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)
Zyanya Irais Martínez Tanahara (Baja California)
Gustavo Humberto Vargas de Los Santos (Campeche)
Edson Gabriel Garrido Vargas (Yucatán)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Morelos
2. Nuevo León
3. Jalisco
4. Distrito Federal
5. Chihuahua
6. Guanajuato
7. Yucatán
8. Aguascalientes
9. Sonora
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Ing. Dagoberto Cruz Sibaja**" y fue ganado por Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Nuevo León y Nayarit, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones del Concurso Nacional 2010. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Encuentra todas las ternas de números naturales (a, b, c) que cumplan la ecuación $abc = a + b + c + 1$.

Solución de Flavio Hernández González. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b \leq c$, y que la terna de números naturales (a, b, c) cumple que $abc = a+b+c+1$. Entonces, $a(bc - 1) = b + c + 1$, luego, $bc - 1 \mid b + c + 1$, pero $bc - 1 \geq 0$, entonces,

$$\begin{aligned} bc - 1 &\leq b + c + 1, \\ bc - b - c &\leq 2, \\ bc - b - c + 1 &\leq 3, \\ (b - 1)(c - 1) &\leq 3. \end{aligned}$$

Sabemos que $b \geq 1$. Si $b = 1$, entonces, como $a \leq b$, tendríamos $a = b = 1$, de donde obtendríamos una contradicción. Por lo tanto, $b \geq 2$, entonces, $(c - 1) \leq (c - 1)(b - 1) \leq 3$, de donde, $c \leq 4$. Veamos todas las posibilidades.

- Si $c = 2$, entonces $b = 2$, luego sustituyendo en la ecuación obtenemos $a = \frac{5}{3}$, que es una contradicción.
- Si $c = 3$, entonces $2(b-1) \leq 3$, pero $b \geq 2$, luego $b = 2$. De aquí que $a = \frac{6}{5}$, lo cual es una contradicción.
- Si $c = 4$, entonces $3(b-1) \leq 3$, de donde $b \leq 2$. Luego, $b = 2$ y $a = 1$.

Por lo tanto, la única solución es $a = 1$, $b = 2$ y $c = 4$.

Problema 2. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden).
Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

Solución de Georges Belanger Albarrán. Pintemos el tablero con los n colores 1, $2, \ldots, n$, de la siguiente manera: La primera casilla de la columna i la pintamos con el color i, y las casillas siguientes las pintamos con los colores $i+1, i+2, \ldots, i+n-1$ módulo n. En la siguiente figura se ilustra el caso $n = 6$.

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

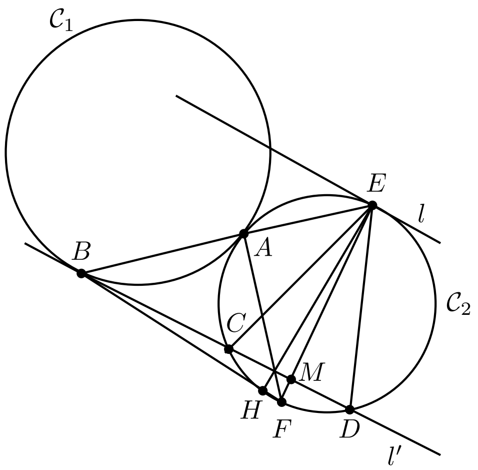
Esta coloración tiene exactamente una vez cada color del 1 al n en cada fila y en cada columna, con lo que aseguramos que por cada paso que hagamos afectaremos exactamente un foco de cada color.
Por lo tanto, si en algún momento hemos hecho un número impar de pasos, entonces hemos afectado un número impar de veces a cada color y entonces tiene que haber un foco de cada color que hayamos afectado un número impar de veces, y como al principio todos estaban apagados, entonces ese foco tiene que estar prendido. Por lo tanto hay un foco de cada color prendido y entonces hay al menos n focos prendidos.
Ahora, si hemos aplicado un número par de pasos, considera algún foco que esté prendido. Si ignoramos los pasos aplicados a su fila y su columna estamos ignorando un número impar de pasos (porque el foco está prendido). Por lo tanto, en el tablero de $(n-1) \times (n-1)$ que nos queda, hemos hecho un número impar de movimientos, por lo que por el caso impar ese tablero tiene al menos $n-1$ focos prendidos, y en consecuencia el tablero completo tiene al menos n focos prendidos.

Problema 3. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco CD sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Muestra que CD, AF y EH son concurrentes.

Solución de Jorge Garza Vargas. Primero demostraremos un resultado auxiliar.

Lema. Sea ABC un triángulo y sea Γ su circuncírculo. Sea l la tangente a Γ en el punto A. Si l y BC son paralelas, entonces $AC = AB$.
Demostración del Lema. Sea $P \in l$ del otro lado de B respecto a AC. Como l y BC son paralelas, tenemos que $\angle PAC = \angle ACB$. Ahora, como l es tangente a Γ, tenemos que $\angle PAC = \angle CBA$. Luego, $\angle ACB = \angle CBA$ y por lo tanto $AC = AB$.

Regresando al problema, sea M el punto de intersección de CD y EF, y sea l la tangente a $\mathcal{C}_2$ por E. Es un hecho conocido que si $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son tangentes en A, entonces A es el centro de homotecia de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.
Sea l' la recta que determinan los puntos C y D, y sea H la homotecia que manda a $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$.



Tenemos entonces que H manda a B en E (pues $B \in \mathcal{C}_1$, $E \in \mathcal{C}_2$ y EB pasa por A) es decir, B y E son homólogos. Por lo tanto, H manda a l' en l ya que l' y l son tangentes a circunferencias en puntos homólogos. Como en toda transformación homotética una recta se mapea en otra paralela a ésta, concluimos que l y l' son paralelas.
Ahora, como CD y l son paralelas, y además l es tangente a $\mathcal{C}_2$, aplicando el Lema anterior se sigue que $ED = EC$. Además tenemos que $\widehat{CF} = \widehat{FD}$, lo que implica que $CF = FD$. Luego, los triángulos CFD y CED son isósceles, y de aquí tenemos que EF es mediatriz de CD. Luego, EF pasa por el centro de $\mathcal{C}_2$ y por lo tanto EF es diámetro de $\mathcal{C}_2$. En consecuencia, $\angle FAE = \angle EHF = 90^\circ$, es decir, AF y EH son alturas del triángulo EFB. Finalmente, como BD y EF son perpendiculares, tenemos

que BM también es altura del triángulo EFB, y como las alturas de un triángulo concurren, se sigue que EH, AF y BM son concurrentes.

Solución alternativa. Puesto que los ángulos opuestos por el vértice A entre la recta BE y la tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ por A son iguales, los arcos AB y AE son también iguales. Luego, $\frac{\widehat{ED}-\widehat{AC}}{2} = \angle EBD = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AE}}{2} = \frac{\widehat{EC}-\widehat{AC}}{2}$, de donde $\widehat{EC} = \widehat{ED}$. Además, como F es el punto medio del arco $\widehat{CD}$, EF es un diámetro de $\mathcal{C}_2$, CD es perpendicular a EF y $\angle EAF = \angle EHF = 90°$. Por lo tanto, CD, AF y EH son alturas del triángulo BEF y concurren.

Problema 4. Sea n un entero positivo. En una cuadrícula de $n \times 4$, cada renglón es igual a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Un *cambio* es tomar tres casillas

(a) consecutivas en el mismo renglón y

(b) con dígitos distintos escritos en ellas

y cambiar los tres dígitos de estas casillas de la siguiente manera:

$$0 \to 1, \quad 1 \to 2, \quad 2 \to 0.$$

Por ejemplo, un renglón $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$ puede cambiarse al renglón $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline\end{array}$ pero no al renglón $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 2 & 1 \\ \hline\end{array}$ pues 0, 1 y 0 no son distintos entre sí.
Los cambios se pueden aplicar cuantas veces se quiera, aún a renglones ya cambiados. Muestra que para $n < 12$ no es posible hacer un número finito de cambios de forma que la suma de los números en cada una de las cuatro columnas sea la misma.

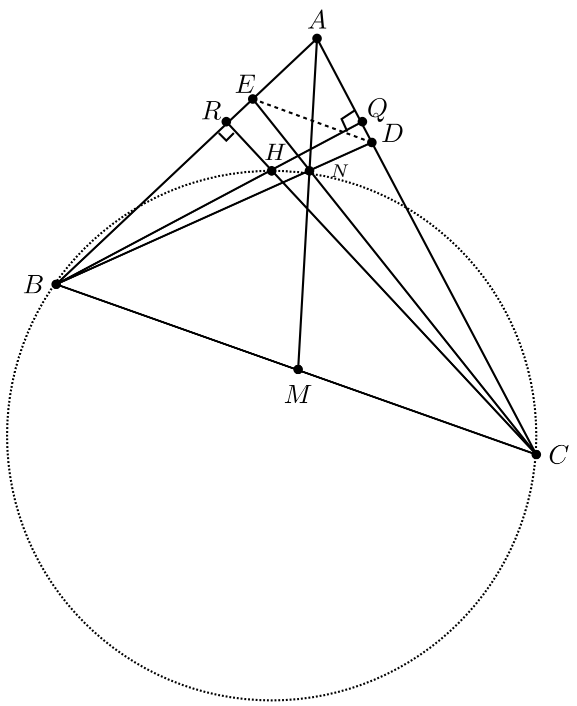
Solución de Jorge Garza Vargas. Observemos primero que no importa el número de cambios que se hagan los números en un renglón siempre serán 0, 0, 1, 2, en algún orden. Ahora fijémonos en las dos casillas del centro, es decir, las de la segunda y tercera columna. Como en cada cambio se toman 3 casillas consecutivas y sólo hay 4 casillas por renglón, siempre se elegirán las dos del centro. Sabiendo esto, veamos cuáles son los posibles números que pueden tener las dos casillas del centro. Comienza en $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$, después de un cambio obtenemos $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$, después de otro cambio tendremos $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$ y después de otro $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$ por lo que a partir de aquí se ciclará. Por lo tanto, las dos casillas del centro pueden ser de tres formas: $\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$.

Supongamos que una cuadrícula de $4 \times n$ se puede cambiar para que las cuatro columnas tengan suma k. Entonces, la suma de todos los números en la cuadrícula es $4k$. Por otro lado, como en cada renglón se tienen los números $0, 0, 1, 2$, la suma de los números en cada renglón es igual a 3, por lo que la suma de todos los números en la cuadrícula es $3n$. Luego, $4k = 3n$ de donde se sigue que $4 \mid n$ pues 3 y 4 son primos relativos.

Sea x_0 la cantidad de renglones en donde las dos casillas del centro son de la forma $\boxed{0 \mid 1}$, sea x_1 la cantidad de renglones en donde las dos casillas del centro son de la forma $\boxed{1 \mid 2}$, y sea x_2 la cantidad de renglones en donde las dos casillas del centro son de la forma $\boxed{2 \mid 0}$. Como $\boxed{0 \mid 1}$, $\boxed{1 \mid 2}$ y $\boxed{2 \mid 0}$ son las únicas opciones, tenemos que $x_0 + x_1 + x_2 = n$. Además, por la manera en que definimos x_0, x_1 y x_2, la suma de los números en la segunda columna es $0x_0 + 1x_1 + 2x_2 = x_1 + 2x_2$, y la suma de los números de la tercera columna es $1x_0 + 2x_1 + 0x_2 = x_0 + 2x_1$. Entonces, $k = x_1 + 2x_2 = x_0 + 2x_1$ de donde $2x_2 = x_0 + x_1$. Luego, $n = x_0 + x_1 + x_2 = 2x_2 + x_2 = 3x_2$ y así $3 \mid n$.
Concluimos entonces que $3 \cdot 4 = 12$ divide a n y así, $n \geq 12$. Por lo tanto, si $n < 12$ no es posible que con un número finito de cambios se llegue a que las cuatro columnas sumen lo mismo.

Problema 5. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90^\circ$.

Solución de Georges Belanger Albarrán. Llamemos Q y R a las intersecciones de BH y CH con los lados AC y AB, respectivamente, y D y E a las intersecciones de BN y CN con AC y AB, respectivamente.



Primero probaremos que el cuadrilátero $AEND$ es cíclico. Observemos que el cua-

drilátero $ARHQ$ es cíclico, debido a que $\angle HRA + \angle HQA = 90° + 90° = 180°$, por lo tanto $\angle RAQ + \angle RHQ = 180°$. También observemos que $\angle RHQ = \angle BHC$, por ser opuestos por el vértice, $\angle BHC = \angle BNC$ porque el cuadrilátero $BHNC$ es cíclico, y $\angle BNC = \angle END$, por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto, $\angle END = \angle RHQ$ y entonces $\angle END + \angle EAD = \angle RHQ + \angle RAQ = 180°$, por lo que $AEND$ es un cuadrilátero cíclico como queríamos.
Ahora probemos que ED es paralela a BC. Vemos que las cevianas AM, BD, CE concurren en N, luego, por el teorema de Ceva, tenemos que $\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} = 1$, pero $\frac{BM}{MC} = 1$ debido a que M es el punto medio de BC. Por lo tanto, $\frac{CD}{DA} \cdot \frac{AE}{EB} = 1$, es decir, $\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$. Luego, por el teorema de Thales tenemos que ED y BC son paralelas como queríamos.
Para concluir notemos que como el triángulo BQC es rectángulo, con ángulo recto en Q, entonces $\angle QBC + \angle QCB = 90°$. Pero $\angle QBC = \angle HNE$, porque el cuadrilátero $BHNC$ es cíclico, $\angle BCQ = \angle EDA$, porque DE es paralela a BC, y $\angle EDA = \angle ANE$, porque $AEND$ es un cuadrilátero cíclico. Por lo tanto, $\angle ANH = \angle ANE + \angle ENH = \angle QCB + \angle QBC = 90°$ como queríamos demostrar.

Problema 6. Sean p, q, r números primos distintos. Muestra que si pqr divide a

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$$

entonces $(pqr)^3$ divide a

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

Solución de Jorge Garza Vargas. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p > q > r$. Vamos a encontrar todas las ternas de números primos (p, q, r) que cumplan que $pqr \mid (pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$. Sea (p, q, r) una terna que cumple lo anterior. Como $p \mid (pq)^r$ y $p \mid (rp)^q$, tenemos que $p \mid (qr)^p - 1$, es decir, $(qr)^p \equiv 1 \pmod{p}$. Por otro lado, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $(qr)^p \equiv qr \pmod{p}$. Luego, $qr \equiv 1 \pmod{p}$, es decir, $p \mid qr - 1$. Análogamente, tenemos que $q \mid rp - 1$ y $r \mid pq - 1$. Entonces, $pq + pr + qr - 1$ es divisible entre p, q y r, así que, $pq + pr + qr - 1 \equiv 0 \pmod{pqr}$, de donde, $pqr + 1 \leq pq + pr + qr$.
Demostraremos que $r = 2$. Supongamos que $r \geq 3$. Ya que $pq > pr$ y $pq > qr$, tenemos que,

$$pqr + 1 > pqr \geq 3pq > pq + pr + qr,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $r = 2$.
Sustituyendo tenemos que $2pq \mid 2q + 2p + pq - 1$, luego $pq \mid 2(p + q) - 1$, de donde $pq + 1 \leq 2(p + q)$.
Demostraremos ahora que $q = 3$. Supongamos que $q \geq 5$, entonces $pq + 1 > pq \geq 5p > 2(p + q)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $q = 3$. Si volvemos a sustituir obtenemos que $6p \mid 5 + 5p$, luego $6p \leq 5 + 5p$ y así $p \leq 5$. Como p es primo y $p > q = 3$, concluimos que $p = 5$.
Por lo tanto, si (p, q, r) cumple que $p > q > r$ son números primos tales que pqr divide

a $(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$, entonces $p = 5$, $q = 3$ y $r = 2$.
Si demostramos que $5^3 3^3 2^3 \mid 3((5 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 2)^5 + (2 \cdot 5)^3 - 1)$ habremos terminado.
Observemos que,

$$\begin{array}{rcl} 2^3 & \mid & (15^2 - 1) + 6^5 + 10^3 \\ 3^2 & \mid & 15^2 + 6^5 + (10^3 - 1) \\ 5^3 & \mid & (15^2 + 6^5 - 1) + 10^3. \end{array}$$

Luego, $5^3 3^2 2^3 \mid 15^2 + 6^5 + 10^3 - 1$, de donde

$$5^3 3^3 2^3 \mid 3((5 \cdot 3)^2 + (3 \cdot 2)^5 + (2 \cdot 5)^3 - 1).$$

Olimpiadas Internacionales

XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En México, el 7 de marzo de este año, se aplicó el examen de la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron, para ser evaluados, al país organizador que en esta ocasión es Japón.
Los 10 mejores exámenes fueron de los alumnos:

1. Daniel Perales Anaya.
2. Flavio Hernández González.
3. Diego Alonso Roque Montoya.
4. Georges Belanger Albarrán.
5. Fernando Josafath Añorve López.
6. Adán Medrano Martín del Campo.
7. Joshua Ayork Acevedo Carabantes.
8. José Naín Rivera Robles.
9. Angel Adrián Domínguez Lozano.
10. Juan Carlos Ortiz Rhoton.

A continuación presentamos el examen de la XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlo.

Problema 1. Sean a, b, c enteros positivos. Muestra que es imposible que los tres números a^2+b+c, b^2+c+a y c^2+a+b sean cuadrados perfectos al mismo tiempo.

Problema 2. Considera cinco puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en el plano de tal forma que no haya tres colineales. Determina el valor máximo posible que puede tomar el valor mínimo entre los ángulos $\angle A_iA_jA_k$ donde i, j, k son enteros distintos entre 1 y 5.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 30°$. La bisectriz interior y la bisectriz exterior del ángulo $\angle ABC$ intersectan a la recta AC en B_1 y B_2, respectivamente. La bisectriz interior y la bisectriz exterior del ángulo $\angle ACB$ intersectan a la recta AB en C_1 y C_2, respectivamente. Suponga que los círculos con diámetros B_1B_2 y C_1C_2 se intersectan dentro del triángulo ABC en el punto P. Muestra que $\angle BPC = 90°$.

Problema 4. Sea n un entero positivo impar fijo. Considera $m + 2$ puntos distintos P_0, P_1, $\ldots$, P_{m+1} (donde m es un entero no negativo) en el plano cartesiano, de tal manera que las siguientes tres condiciones se satisfacen:

(1) $P_0 = (0, 1)$, $P_{m+1} = (n + 1, n)$, y para cada entero i, $1 \leq i \leq m$ ambas coordenadas x, y de P_i son enteros entre 1 y n, (1 y n, inclusive).

(2) Para cada entero i, $0 \leq i \leq m$, P_iP_{i+1} es paralelo al eje x si i es par, y es paralelo al eje y si i es impar.

(3) Para cada par i, j con $0 \leq i < j \leq m$, los segmentos P_iP_{i+1} y P_jP_{j+1} comparten a lo más un punto.

Determina el máximo valor posible que m puede tomar.

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales, que satisfacen las siguientes dos condiciones:

(1) Existe un número real M tal que para cada número real x, se cumple $f(x) < M$.

(2) Para cada par de números reales x y y, se cumple que

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXV Olimpiada Iberoamericana

Del 19 al 29 de septiembre de 2010 se llevó a cabo la XXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en Asunción, Paraguay. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Irving Daniel Calderón Camacho (Estado de México), Flavio Hernández González (Aguascalientes), Daniel Perales Anaya (Morelos) y Manuel Enrique Dosal Bustillos (Chihuahua). El alumno Irving Daniel obtuvo medalla de oro, los alumnos Flavio y Daniel obtuvieron medalla de plata, y Manuel Enrique obtuvo medalla de bronce. En esta ocasión, México obtuvo el tercer lugar de entre los 21 países que participaron.

A continuación presentamos los problemas con sus soluciones de la XXV Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Se tienen diez monedas indistinguibles puestas en línea. Se sabe que dos de ellas son falsas y ocupan posiciones consecutivas en la línea. Para cada conjunto de posiciones, se puede preguntar cuántas monedas falsas contiene. ¿Es posible determinar cuáles son las monedas falsas efectuando únicamente dos de estas preguntas, sin conocer la respuesta de la primera antes de formular la segunda?

Solución de Irving Daniel Calderón Camacho. Sí se puede. Sean $M_1, M_2, \ldots, M_{10}$ las monedas, acomodadas en ese orden. Vamos a preguntar cuántas monedas falsas hay en los conjuntos $A = \{M_2, M_3, M_4, M_5, M_{10}\}$ y $B = \{M_1, M_2, M_3, M_8, M_9\}$. En la siguiente tabla ponemos las monedas falsas y las respuestas que obtendríamos a la pregunta anterior.

Monedas falsas	Monedas falsas en A	Monedas falsas en B
M_1, M_2	1	2
M_2, M_3	2	2
M_3, M_4	2	1
M_4, M_5	2	0
M_5, M_6	1	0
M_6, M_7	0	0
M_7, M_8	0	1
M_8, M_9	0	2
M_9, M_{10}	1	1

Como para cada posible posición de las monedas falsas obtenemos una respuesta única, podemos determinar siempre cuáles son las monedas falsas.

Problema 2. Determinar si existen números enteros positivos a y b tales que todos los términos de la sucesión definida por $x_1 = 2010$, $x_2 = 2011$,

$$x_{n+2} = x_n + x_{n+1} + a\sqrt{x_n x_{n+1} + b}, \quad n \geq 1,$$

sean enteros.

Solución de Irving Daniel Calderón Camacho. Vamos a demostrar que $a = 2$ y $b = 2011$ funcionan. La demostración de que todos los términos de la sucesión (x_n) son enteros positivos se hará por inducción fuerte. Como base de inducción tomaremos $n = 3$ ya que $x_1 = 2010$ y $x_2 = 2011$ son enteros positivos por hipótesis. Tenemos que,

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2 + 2011} \\ &= 2010 + 2011 + 2\sqrt{(2010)(2011) + 2011} \\ &= 4021 + 2\sqrt{2011^2} = 4021 + 2(2011). \end{aligned}$$

Entonces, es claro que x_3 es un entero positivo. Supongamos ahora que x_j es un entero positivo para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $n \geq 3$. Demostraremos que x_{n+1} es un entero positivo. Usando la recursión tenemos que:

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-1}x_{n-2} + 2011}.$$

Como x_n y $x_{n-1} + x_{n-2}$ son enteros positivos (por hipótesis de inducción), tenemos que $2\sqrt{x_{n-1}x_{n-2} + 2011}$ es un entero y en consecuencia $\sqrt{x_{n-1}x_{n-2} + 2011}$ también es entero. Sea $\sqrt{x_{n-1}x_{n-2} + 2011} = m$ con m entero. Entonces,

$$x_{n-1}x_{n-2} + 2011 = m^2 \;\text{ y }\; x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + 2m.$$

Luego:

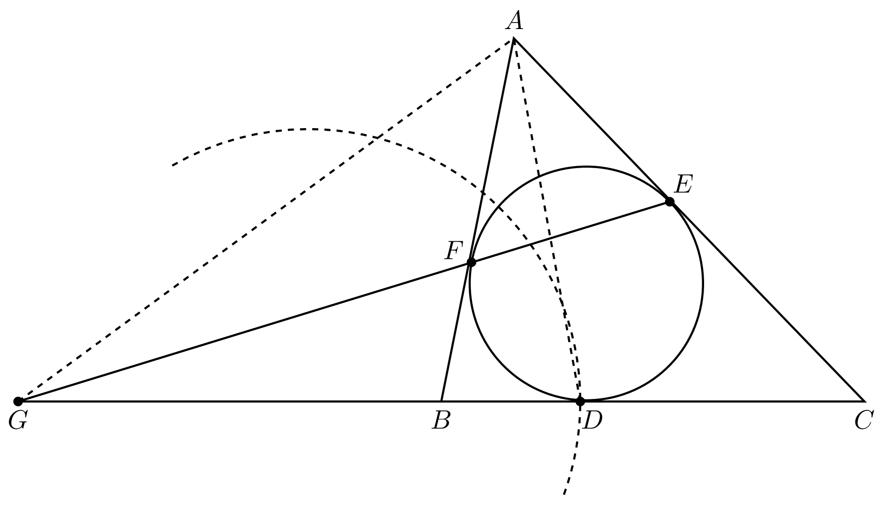
$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_{n-1}+x_n+2\sqrt{x_{n-1}x_n+2011}\\
&= x_{n-1}+x_n+2\sqrt{x_{n-1}(x_{n-1}+x_{n-2}+2m)+2011}\\
&= x_{n-1}+x_n+2\sqrt{x_{n-1}^2+(x_{n-1}x_{n-2}+2011)+2mx_{n-1}}\\
&= x_{n-1}+x_n+2\sqrt{x_{n-1}^2+m^2+2mx_{n-1}}\\
&= x_{n-1}+x_n+2\sqrt{(x_{n-1}+m)^2}\\
&= x_{n-1}+x_n+2(x_{n-1}+m),
\end{aligned}$$

de donde se sigue que x_{n+1} es un entero positivo, como queríamos demostrar.

Comentario: Se deja de ejercicio al lector demostrar que para $a = 2$ y $b = 2011$, la sucesión (x_n) está definida por $x_n = 2010F_n^2 + F_{2n-2}$ para $n \geq 1$, donde (F_n) es la sucesión de Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$.

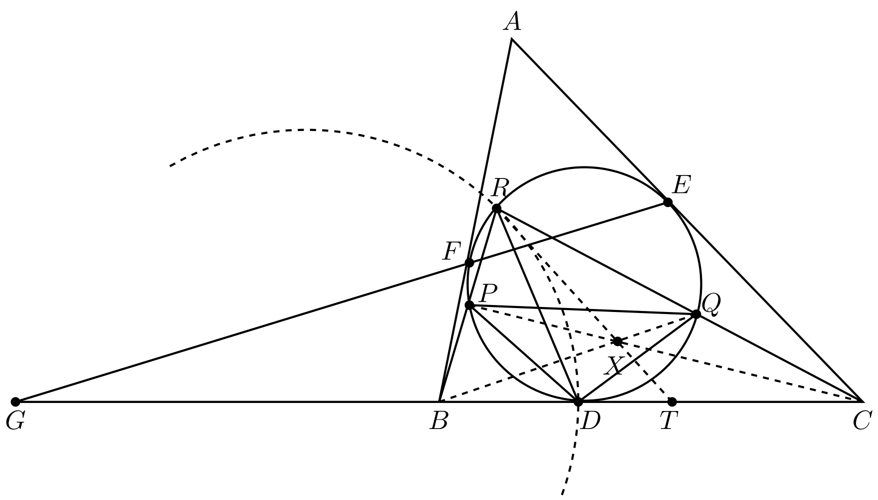
Problema 3. La circunferencia Γ inscrita al triángulo escaleno ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. La recta EF corta a la recta BC en G. La circunferencia de diámetro GD corta a Γ en R ($R \neq D$). Sean P y Q ($P \neq R$, $Q \neq R$) las intersecciones de BR y CR con Γ, respectivamente. Las rectas BQ y CP se cortan en X. La circunferencia circunscrita a CDE corta al segmento QR en M y la circunferencia circunscrita a BDF corta al segmento PR en N. Demostrar que las rectas PM, QN y RX son concurrentes.

Solución. Primero demostraremos que $\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC}$.



Consideremos el triángulo ABC y los puntos G, F y E. Por el teorema de Menelao (ver en el apéndice el teorema 21) tenemos que $\frac{GB}{GC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$. Como $AF = AE$, $FB = DB$ y $CE = CD$ entonces $\frac{GB}{GC} = \frac{DB}{DC}$. Por lo tanto, el círculo de diámetro GD es el círculo de Apolonio de BC (ver en el apéndice la definición 26).

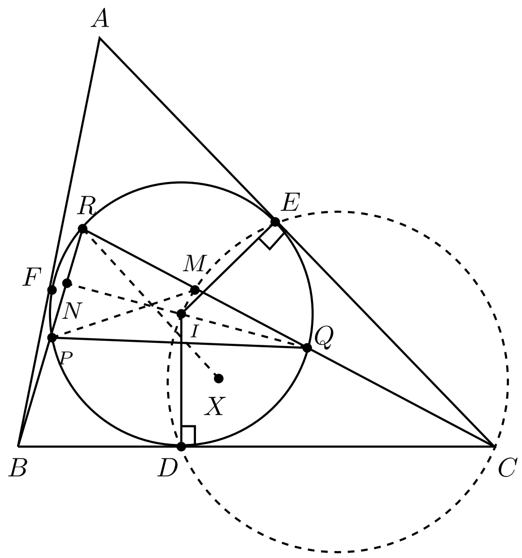
Ahora demostraremos que RX pasa por los puntos medios de BC y PQ.
Como R está en el círculo de Apolonio de BC y $\frac{RB}{RC} = \frac{DB}{DC}$, entonces, por el teorema de la bisectriz, RD es la bisectriz interna del ángulo $\angle BRC$.



Luego,

$$\angle PDB = \angle PRD = \angle BRD = \angle CRD = \angle QRD = \angle DPQ,$$

lo que prueba que las rectas PQ y BC son paralelas. Entonces, $\frac{RP}{PB} = \frac{RQ}{QC}$ y, por el teorema de Menelao, $\frac{BT}{TC} \cdot \frac{CQ}{QR} \cdot \frac{RP}{PB} = 1$ si y sólo si $BT = TC$, es decir, RX pasa por el punto medio de BC, y siendo PQ y BC paralelos, por el punto medio de PQ también.
Finalmente probaremos que M y N son los puntos medios de QR y PR, respectivamente.
Como D y E son puntos de tangencia, los ángulos $\angle CDI$ y $\angle CEI$ son rectos, luego el cuadrilátero $CDIE$ es cíclico, es decir, I pertenece al circuncírculo del triángulo CDE cuyo diámetro es CI. Como M pertenece a ese círculo, $\angle CMI$ es recto, es decir, IM es perpendicular a QR. Pero QR es una cuerda del incírculo del triángulo ABC, luego M es punto medio.
Análogamente, N es punto medio de PR.



Ahora bien, observemos que PM, QN y RX son las medianas del triángulo PQR y se intersectan en su baricentro. Por lo tanto, son concurrentes.

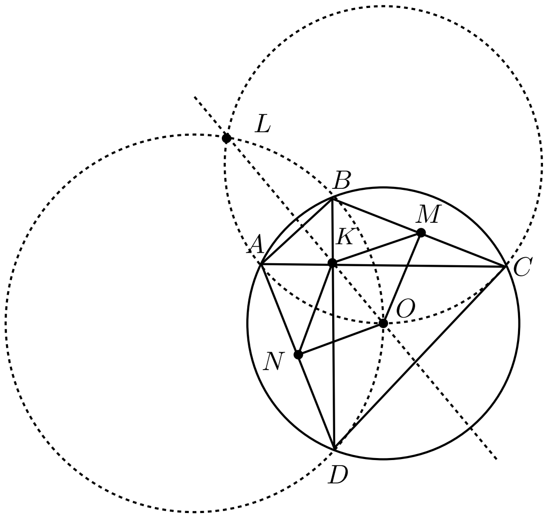
Problema 4. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos números enteros positivos distintos son números enteros. Hallar el menor valor posible para la media aritmética.
Si a y b son números positivos, sus medias aritmética, geométrica y armónica son respectivamente: $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Solución de Manuel Enrique Dosal Bustillos. Sean a, b los enteros positivos, con $a < b$. También sea $d = (a, b)$ el máximo común divisor de a y b, y sean $a = da_1$ y $b = db_1$, luego $(a_1, b_1) = 1$. Tenemos que $\frac{(a+b)}{2} = \frac{d(a_1+b_1)}{2}$ es entero. Por lo tanto, d ó $a_1 + b_1$ tiene que ser par (I).
Como $\sqrt{ab} = \sqrt{d^2 a_1 b_1} = d\sqrt{a_1 b_1}$ es entero, entonces $\sqrt{a_1 b_1}$ es entero, luego $a_1 b_1$ es un cuadrado, y como $(a_1, b_1) = 1$, entonces tanto a_1 como b_1 son cuadrados (II).
Ahora bien, $\frac{2}{1/a+1/b} = \frac{2ab}{(a+b)} = \frac{2d^2 a_1 b_1}{d(a_1+b_1)} = \frac{2da_1 b_1}{a_1+b_1}$ es entero. Luego, $a_1 + b_1$ divide a $2da_1 b_1$, pero $(a_1 + b_1, a_1) = (b_1, a_1) = 1$, y $(a_1 + b_1, b_1) = 1$, entonces $a_1 + b_1$ no tiene ningún factor en común con $a_1 b_1$. Por lo tanto, $a_1 + b_1$ divide a $2d$ (III).
Tomando en cuenta (I), (II) y (III) hagamos los primeros casos posibles. El primer caso es tomar a a_1 y b_1 lo menor posibles. Como se debe cumplir (II) y $a < b$, sean $a_1 = 1$ y $b_1 = 4$. Entonces por (III), 5 divide a $2d$, y por (I) como 5 es impar, entonces d tiene que ser par y lo menor que puede ser d es 10. Luego, tenemos que $\frac{a+b}{2} = \frac{d(a_1+b_1)}{2} = \frac{10(5)}{2} = 25$.
El segundo caso es tomando $a_1 = 1$ y $b_1 = 9$. Entonces por (III), 10 divide a $2d$ y lo

menor que puede ser d es 5, con lo que $\frac{a+b}{2} = \frac{5(10)}{2} = 25$.
Ahora si $a_1 = 1$ y $b_1 \geq 16$, entonces $a_1 + b_1 \geq 17$, y por (III) $d \geq \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{17}{2}$. Luego, $d \geq 9$ con lo que $\frac{a+b}{2} = \frac{d(a_1+b_1)}{2} \geq \frac{9\times 17}{2} > 25$.
Finalmente, si $a_1 > 1$, entonces por (II) $a_1 \geq 4$ y $b_1 \geq 9$, de donde $a_1 + b_1 \geq 13$. Luego, por (III) se sigue que $d \geq \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{13}{2}$, entonces d es al menos 7 y por lo tanto $\frac{a+b}{2} \geq \frac{7\times 13}{2} > 25$. Entonces el valor mínimo para $\frac{a+b}{2}$ es 25.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales AC y BD son perpendiculares. Sean O el circuncentro de $ABCD$, K la intersección de las diagonales, $L \neq O$ la intersección de las circunferencias circunscritas a OAC y OBD, y G la intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los lados de $ABCD$. Probar que O, K, L y G están alineados.

Solución. Probaremos que los puntos L y G están sobre la recta OK.
Consideremos el punto L. Sean Γ, Γ_1 y Γ_2 los circuncírculos de $ABCD$, OAC y OBD, respectivamente.



Observemos que AC es el eje radical de Γ y Γ_1, y que BD es el eje radical de Γ y Γ_2. Por lo tanto, K es el centro radical de Γ, Γ_1 y Γ_2, luego está sobre el eje radical de Γ_1 y Γ_2, que es OL. Entonces, L está sobre la recta OK.
Sean M y N los puntos medios de BC y AD, respectivamente. El punto G es el punto medio de MN. Como OM es perpendicular a BC, el ángulo entre las rectas OM y AC es $90^\circ - \angle BCA = 90^\circ - \angle BDA = \angle CAD = \angle AKN$, que es igual al ángulo entre las rectas KN y AC. Luego, las rectas OM y KN son paralelas. Análogamente se prueba que las rectas ON y KM son paralelas. Entonces, $OMKN$ es un paralelogramo. Por lo tanto, los puntos medios de MN y OK coinciden, es decir,

G es el punto medio de OK. Así, O, K, L y G están alineados.

Problema 6. Alrededor de una mesa circular se sientan 12 personas y sobre la mesa hay 28 floreros. Dos personas pueden verse si y sólo si no hay ningún florero alineado con ellas. Probar que existen al menos dos personas que pueden verse.

Solución. A cada par de personas de la mesa le asignaremos un peso (número real positivo). Si A y B son dos personas, el segmento que determinan separa al resto de la gente en dos conjuntos.
Sea m el mínimo de los cardinales de esos dos conjuntos. Entonces definimos el peso asignado al par $\{A, B\}$ como $P(A, B) = \frac{1}{m+1}$.
Luego, la suma de todos los pesos de todos los pares (no ordenados) de personas es

$$1 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{1}{5} \cdot 12 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 28.4.$$

Decimos que un florero sobre la mesa *bloquea* al par $\{A, B\}$ si está en el segmento determinado por A y B. Si un florero en la mesa bloquea algunos pares, consideramos un par $\{A, B\}$ de esos con peso máximo $P(A, B) = \frac{1}{m+1}$. A un lado del segmento AB hay sólo m personas. Cada par distinto de $\{A, B\}$ que el florero bloquea debe contener exactamente una de esas m personas y la misma persona no puede aparecer en dos pares distintos bloqueados por el florero. Luego, el florero bloquea a lo más $m + 1$ pares y la suma de los pesos de los pares bloqueados por el florero es a lo máximo $(m + 1)P(A, B) = 1$.
Finalmente, la suma de los pesos de todos los pares bloqueados por los 28 floreros es a lo más $28 < 28.4$. Entonces hay un par que no es bloqueado por ningún florero.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de abril a julio de 2011.

Del 28 de abril al 8 de mayo, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 52^a Olimpiada Internacional (un máximo de 6 alumnos), la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe (un máximo de 3 alumnos) y la preselección para la XXVI Olimpiada Iberoamericana.

Junio, primera quincena

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como semifinal de su Concurso Estatal y envío de este examen semifinal.
Entrenamientos para los seleccionados nacionales que asistirán a la XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

Del 16 al 26 de junio, Colima, México

XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe.

17 y 18 de junio

Aplicación de los exámenes semifinales en los estados (estados registrados con este propósito).

Del 23 de junio al 3 de julio

Entrenamientos para los seleccionados nacionales para asistir a la 52^a IMO.

Del 16 al 24 de julio, Amsterdam, Países Bajos

52^a Olimpiada Internacional.

Tercera semana de julio

Publicación del onceavo número de la revista “Tzaloa.”

Apéndice

Teorema 1 (Factorización en primos) *Todo entero* n *mayor que* 1 *puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [5].

Criterio 2 (Criterio de divisibilidad entre 3**)** *Un entero positivo es divisible entre* 3 *si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
Ver [7].

Definición 3 (Congruencias) *Dados dos números enteros* a, b, *y un entero positivo* m, *decimos que* a *es congruente con* b *módulo* m, *si* $a - b$ *es múltiplo de* m. *En este caso escribimos* $a \equiv b \pmod{m}$.
Ver [7].

Teorema 4 (Pequeño teorema de Fermat) *Si* a *es un entero y* p *es un número primo, entonces* $a^p \equiv a \pmod{p}$. *En particular, si* a *no es divisible entre* p, *se tiene que* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Ver [5].

Teorema 5 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición* $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$, *donde* k_0 *es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que* $P(k_0)$ *es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición* $P(k)$ *para algún entero* $k \geq k_0$.
3. *Se demuestra que* $P(k+1)$ *es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$.
Ver [8].

Teorema 6 (Inducción fuerte) *El método de inducción fuerte se utiliza para demostrar que una proposición* $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$, *donde* k_0 *es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone que para algún entero $k \geq k_0$ la proposición $P(m)$ es verdadera para todo entero $k_0 \leq m \leq k$.*

3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [8].

Teorema 7 (Principio de las casillas) *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*
Ver [9].

Teorema 8 (Fórmulas de área)

1. *El área de un rectángulo de lados a y b es $a \times b$.*

2. *El área de un triángulo es igual a $\frac{1}{2}hl$, donde l es la medida de un lado y h es la medida de la altura sobre dicho lado.*

3. *El área de un círculo de radio r es igual a πr^2.*

Ver [1, 2].

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*
Ver [1, 2].

Teorema 10 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Recíprocamente, si la suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual al cuadrado del tercer lado, entonces el triángulo es rectángulo.*
Ver [1, 2, 6].

Teorema 11 (Desigualdad de Pitágoras) *Si ABC es un triángulo, entonces,*

1. *$AB^2 < CA^2 + CB^2$ si y sólo si $\angle ACB < 90°$.*

2. *(Teorema de Pitágoras) $AB^2 = CA^2 + CB^2$ si y sólo si $\angle ACB = 90°$.*

3. *$AB^2 > CA^2 + CB^2$ si y sólo si $\angle ACB > 90°$.*

Ver [1, 2].

Definición 12 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [1, 2].

Criterio 13 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **ángulo-lado-ángulo** *y lo denotamos como* **ALA**.
Ver [1, 2].

Criterio 14 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL**.
Ver [1, 2].

Definición 15 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\begin{aligned}
\angle ABC &= \angle A'B'C' \\
\angle ACB &= \angle A'C'B' \\
\angle BAC &= \angle B'A'C'
\end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 16 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Teorema 17 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*
Ver [2].

Teorema 18 (Desigualdad del triángulo) *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned}
a + b &> c, \\
a + c &> b, \\
b + c &> a.
\end{aligned}$$

Ver [1, 2].

Definición 19 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$, su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*
Ver [2].

Teorema 20 (Teorema de la bisectriz) *Dado un triángulo ABC, AL es la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$ si y sólo si $\frac{BA}{AC} = \frac{BL}{LC}$.*
Ver [2].

Teorema 21 (Teorema de Menelao) *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*
Ver [2].

Teorema 22 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [2].

Teorema 23 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

Definición 24 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [2].

Teorema 25 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Definición 26 (Círculo de Apolonio) *Dados un segmento AB y una constante $c > 0$, el lugar geométrico de los puntos P tales que $\frac{AP}{PB} = c$ es una circunferencia. Dicha circunferencia intersecta a la recta AB en dos puntos diametralmente opuestos.*
Ver [10].

Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[5] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México, 1972.

[6] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[7] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[8] F. Ruiz Benjumeda. *Demostrando por Inducción*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 3, 2009.

[9] P. Soberón Bravo. *El Principio de las Casillas*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2010.

[10] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna*. Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Octavio Arizmendi Echegaray
Calle Alhóndiga No. 10
Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 34 14 03
mor2_octavio@hotmail.com

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Cd. Juárez
Av. Tomás Fernández 8945
32320, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 6 29 91 09
Fax (656) 6 29 91 01
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
SITE
Sistemas de Inteligencia Territorial Estratégica
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
fuerunt@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 64
Fax (55) 56 22 48 64
jago@hp.fciencias.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa 1a Sección, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
carlos.rubio@uady.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12, Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel. (55) 56 22 45 32
Cel. 55 33 52 36 27
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 73 23 587
dtorres@cimat.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`