TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2011, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Julio de 2011.

Contenido

Presentación	v
Artículos de matemáticas: Contando de dos formas distintas	**1**
Problemas de práctica	**9**
Soluciones a los problemas de práctica	**13**
Problemas propuestos	**23**
Problemas propuestos. Año 2011 No. 3	23
Soluciones a los problemas propuestos. Año 2010 No. 4	24
Olimpiadas Internacionales	**29**
American Mathematics Competition (AMC)	29
XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe	38
Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales	**41**
XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico	41
Información Olímpica	**49**
Apéndice	**51**
Bibliografía	**55**
Directorio	**57**

Presentación

Tzaloa, Año 2011, Número 3

Por ser el tercer número del año 2011, el contenido de las secciones de problemas corresponde, en su mayoría, al nivel intermedio. A pesar de lo anterior, también hemos procurado incluir algunos materiales de los niveles básico y avanzado. Pensamos que así, el balance alcanzado resultará de utilidad tanto para estudiantes y profesores que se preparan para las últimas etapas de los concursos estatales como para las delegaciones estatales que participarán en el concurso nacional. Al mismo tiempo, no nos olvidamos de nuestros lectores que comienzan a preparase para los concursos del próximo año, como tampoco de los que orgullosamente conforman las selecciones que representan a México en concursos de nivel internacional.

Para dar continuidad a los temas de conteo trabajados en el artículo del número anterior, le pedimos a nuestro amigo Leonardo I. Martínez que profundizara la exposición presentando una de las estrategias avanzadas más útiles para resolver problemas olímpicos, nos referimos a la llamada técnica del *Doble Conteo*. Aunque su uso es recurrente en la solución de incontables problemas olímpicos, no existen muchos trabajos donde esta técnica se enuncie y trabaje de forma sistemática. Es importante mencionar que, para acceder al contenido de este artículo, el lector debe estar familiarizado con los resultados básicos así como con el lenguaje y notación propios de la combinatoria. Presupone un manejo suelto de la notación sigma (para sumas), el uso de factoriales y conocimiento de los coeficentes binomiales de Newton. Aunque las características anteriores hacen que el material se clasifique como avanzado, consideramos que cualquiera que haya trabajado previamente los contenidos del artículo *Estrategias básicas de conteo*[1], no tendrá dificultades para seguirlo.

Como siempre, en las secciones de Olimpiadas Internacionales presentamos los resultados y exámenes de los últimos concursos en los que México participó. Comenzamos con la publicación de los exámenes de la AMC (*American Mathematics Competition*)

[1]Publicado en Tzaloa 2, Año 2011.

niveles 10 y 12, mismos que sirven de preparación para las delegaciones mexicanas que participan en los concursos internacionales de cada año. También incluimos en esa sección el examen que se aplicó en la *XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe*, donde México obtuvo el primer lugar imponiendo un nuevo record de puntaje para este concurso.

Finalmente, en la sección de Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales, presentamos el examen de la *XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico* con sus soluciones, algunas de las cuales son originales encontradas por los estudiantes mexicanos, mismos que obtuvieron el lugar 14 de los 34 países que participaron.

No olvidamos incluir el calendario de actividades olímpicas para este trimestre y también actualizamos toda la información del Directorio del Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 24 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1992. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2011-2012 y, para el 1° de julio de 2012, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 25^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 13 al 19 de noviembre de 2011 en San Luis Potosí, San Luis Potosí. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2012: la XXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 53^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en julio en Argentina, y la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Bolivia.

Contando de dos formas distintas

Por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Nivel Avanzado

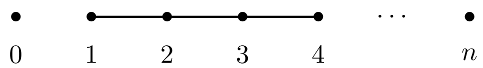
Introducción

En muchas ocasiones hay más de una forma de contar los elementos de un conjunto. A veces una de estas formas es más fácil de identificar, o incluso puede ser suficiente para responder un problema. Sin embargo, existen ocasiones en las que encontrar formas alternativas para contar los elementos de un conjunto nos ayuda a encontrar la solución de un problema, o bien, nos permite obtener resultados interesantes.
La técnica de doble conteo es muy poderosa. Sin embargo, una de las principales dificultades es que a veces no se ve fácilmente dónde podemos usarla. A través de la solución de varios problemas esperamos dar una mejor idea del tipo de situaciones donde se puede utilizar. Suponemos que el lector maneja los principios básicos de conteo. También usaremos la notación de suma y sus propiedades.
La idea principal es encontrar un conjunto que se pueda contar de dos formas distintas. Veremos un par de ejemplos introductorios y en la siguiente sección veremos algunos ejemplos más avanzados.

Ejemplo 1 *Demuestra que,*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Observemos los enteros de 0 a n en la recta numérica. ¿Cuántos segmentos podemos formar con extremos en estos puntos? Por un lado, cada una de las $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ parejas de puntos determina totalmente un segmento. Por otro lado, hay 1 segmento de longitud n, 2 segmentos de longitud $n-1$, y así, hasta n segmentos de longitud 1, obteniendo en total $\sum_{k=1}^{n} k$ segmentos. Como contamos la misma cosa, concluimos que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.



Ejemplo 2 *En un grupo de* 25 *personas se estudian* 7 *temas. Se sabe que a cada persona le gustan al menos dos temas. Demuestra que existe un tema que le gusta al menos a* 8 *personas.*

Como a cada persona le gustan al menos dos temas, sabemos que al menos hay $25 \cdot 2 = 50$ temas que le gustan a las personas (contando los temas repetidos). Estos 50 gustos los podemos repartir en 7 casillas, una por cada tema. Entonces por el principio de las casillas debemos tener que alguna tiene al menos 8, obteniendo lo que queremos.

El Principio de Doble Conteo

Todas las demostraciones por doble conteo se basan en el siguiente principio.

Principio de Doble Conteo. Si contamos la cantidad de objetos de cierto conjunto de una forma y resulta a y luego las contamos de otra forma y resulta b, entonces $a = b$.

Parece un principio muy sencillo y su demostración es igual de sencilla: ambos números son iguales pues tanto a como b son la cantidad de elementos en el conjunto. La utilidad del principio del doble conteo se basa en que encontremos dos formas *distintas* y *correctas* de contar los elementos de un conjunto. Un ejemplo es la manera en la que demostramos la fórmula para la suma de los primeros n enteros positivos. Nos gustaría encontrar una fórmula similar para la suma de los primeros n cuadrados. Pero antes de hacer esto, vamos a usar el Principio de Doble Conteo para demostrar algunas identidades de coeficientes binomiales.

Ejemplo 3 *Para cada pareja de enteros* m, n *con* $0 \leq m \leq n$ *se tiene que,*

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Si tenemos n objetos y queremos elegir m de ellos, por un lado podemos elegir los m que queremos de $\binom{n}{m}$ formas o los $n-m$ que no queremos de $\binom{n}{n-m}$ formas. De esta manera, obtuvimos dos maneras distintas y correctas de contar los subconjuntos de m elementos y por lo tanto $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

Ejemplo 4 *Para cada entero no negativo* n *se tiene que,*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

En este caso contamos la cantidad de subconjuntos que hay de un conjunto con n elementos. Por un lado, cada uno de los n elementos tiene dos posibilidades: estar o no estar en el subconjunto y, por lo tanto hay 2^n subconjuntos. Por otro lado, hay $\binom{n}{k}$ subconjuntos con exactamente k elementos, y los subconjuntos pueden tener desde 0 hasta n elementos, de modo que hay $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ subconjuntos y obtenemos la igualdad deseada. Cabe aclarar que el conjunto vacío (aquel que no tiene elementos) es considerado como subconjunto.

Ejemplo 5 *Para cada entero positivo n se tiene que,*

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Consideremos ahora cuántos equipos con un líder se pueden hacer en un grupo con n personas. Por un lado, podemos comenzar eligiendo de entre las n personas al que será el líder. Luego, las $n-1$ personas restantes tienen dos opciones: estar o no estar en el equipo. De esta forma, podemos hacer $n2^{n-1}$ equipos con líder.
Por otro lado, podemos primero elegir cuántas personas tendrá el equipo (digamos k). Hay $\binom{n}{k}$ formas de elegir a las k personas y todavía hay que elegir quién de las k personas es el líder. Esta cuenta nos da $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ y por el Principio de Doble Conteo, obtenemos que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Ejemplo 6 *Para cada pareja de enteros no negativos m, n se tiene que,*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}.$$

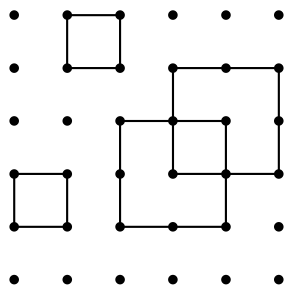
¿De cuántas formas podemos colocar m pelotas verdes indistinguibles y $n+1$ pelotas azules indistinguibles en línea?
Por un lado, de las $n+m+1$ posiciones que van a ocupar las pelotas, podemos elegir $n+1$ de ellas para que las ocupen las azules, y esto nos determina dónde quedan las verdes, de modo que por un lado la respuesta es $\binom{n+m+1}{n+1}$.
Pero desglosando los acomodos posibles, la *última* bola azul puede quedar en las posiciones $n+1, n+2, \ldots, n+m+1$. Si queda en la posición $n+k+1$, las otras n pelotas azules que quedan por acomodar deben quedar en las primeras $n+k$ posiciones, lo cual podemos hacerlo de $\binom{n+k}{n}$ formas, y esto ya determina el acomodo. Sumando sobre las posibles k, desde 0 hasta m, obtenemos la identidad.

Como se ve en estos ejemplos, tenemos que encontrar un conjunto adecuado para contar. En los casos en los que tenemos una identidad a demostrar, a veces alguno de los lados nos da una pista de qué conjunto podemos utilizar. Sin embargo, no siempre es sencillo encontrar este conjunto, de modo que veremos algunos ejemplos en los cuales tenemos que hacer una elección más elaborada. Veremos primero cómo podemos demostrar la fórmula de la suma de los primeros cuadrados contando de dos formas distintas.

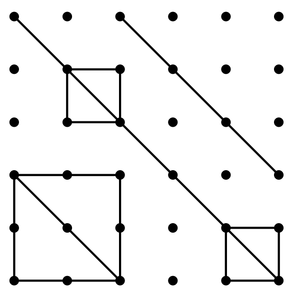
Ejemplo 7 *Para cada entero positivo n se tiene que,*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lo primero que nos gustaría es encontrar una situación en que la cantidad de objetos que tenemos sea alguno de los lados de nuestra ecuación. Para esto consideraremos $(n+1)^2$ puntos acomodados en cuadrado como en la figura. Contaremos cuántos cuadrados podemos hacer con vértices en estos puntos de forma que queden con los lados parelelos al cuadrado original. La primera forma en la que los contaremos, será por la longitud de su lado. Dicha longitud puede ir desde 1 hasta n. Hay 1 cuadrado con lado n, hay 4 con lado $n-1$, 9 con lado $n-2$ y así, hasta obtener n^2 de lado 1. Esto muestra que tenemos $\sum_{i=1}^{n} i^2$ cuadrados.



No es tan sencillo encontrar otra forma de contar los cuadrados. Tras intentar un poco, se puede pensar en lo siguiente: observemos la diagonal del cuadrado que pasa por el punto superior izquierdo y el inferior derecho. Hay otros $2(n-1)$ segmentos paralelos a esa diagonal que tienen vértices en la figura. Así, otra forma de determinar un cuadrado es elegir una de estas líneas y elegir dos puntos en ella. Esos formarán respectivamente la esquina superior izquierda e inferior derecha de un cuadrado.



Hay dos de esas líneas con 2 puntos, dos líneas con 3 puntos, y así sucesivamente, hasta dos líneas con n puntos y sólo una línea con $n+1$ puntos. De modo que podemos elegir dos puntos como queremos de,

$$2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2+k}{2}+\binom{n+1}{2}$$

formas. Pero ya habíamos encontrado expresiones más simples para esto en un ejemplo anterior (ver Ejemplo 6), de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{2+k}{2}+\binom{n+1}{2} &= 2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\\
&= 2\frac{(n+1)n(n-1)}{6}+\frac{(n+1)n}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

Vamos a ver un último ejemplo. Si sumamos los números de las *diagonales* del Triángulo de Pascal, como en la siguiente figura, obtenemos una sorpresa, pues vamos encontrando los números de Fibonacci[2]. Demostraremos que esto siempre sucede usando doble conteo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & 8 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 34 & \\
 & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1
\end{array}$$

Ejemplo 8 *La siguiente identidad se cumple para todo entero* $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k}{k}=F_{n+1},$$

donde $\lfloor x \rfloor$ *denota el mayor entero que es menor o igual que* x.

Consideraremos un tablero de $1\times(n+1)$. Coloquemos una ficha en la casilla de hasta la izquierda. ¿De cuántas formas podemos llevar la ficha a la casilla de hasta la derecha si podemos movernos uno o dos espacios hacia la derecha en cada movimiento?

[2]Los números de Fibonacci están definidos por las relaciones $F_0=0$, $F_1=1$ y $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ para $n\geq 2$

Primero, demostraremos por inducción que se puede de F_{n+1} formas. Nuestra base de inducción necesitará verificar dos casos. Para un tablero de 1×1 sólo podemos quedarnos donde estamos, así que únicamente es $1 = F_1$ forma. Para un tablero de 1×2, lo único que se puede hacer es moverse un espacio a la derecha, de modo que también hay $1 = F_2$ forma. Ahora, si tomamos un tablero de $1 \times n$ con $n \geq 3$, tenemos dos opciones: llegar a la casilla $n - 1$ y de ahí avanzar 1, o bien llegar a la casilla $n - 2$ y de ahí avanzar 2. Así, por hipótesis inductiva hay F_{n-1} y F_{n-2} opciones, respectivamente, y su suma es F_n, como buscábamos.
Ahora encontraremos otra forma de describir esos recorridos. Observemos cuántos pasos de 2 cuadritos podemos hacer. Pueden ir desde 0 hasta $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Si decidimos hacer k pasos de 2 espacios, hay que dar $n - 2k$ pasos de 1 espacio para llegar. En total damos $n - k$ pasos, y sólo queda por decidir en qué orden darlos. Puedo elegir cuáles de los $n - k$ saltos son los dobles y esto se puede hacer de $\binom{n-k}{k}$ formas. Finalmente, sumando sobre las posibles k, obtenemos la identidad deseada.

La notación de las parejas

Las demostraciones de doble conteo comparten en común que se pueden escribir en términos de contar parejas de cosas. Consideremos la siguiente forma de escribir la solución del segundo problema que vimos.

Contemos las parejas (p, m) donde p es una persona y m es una materia que le gusta a p. El problema nos pide que encontremos al menos 8 parejas con la misma segunda coordenada. De acuerdo con la hipótesis del problema, para cada p fija tenemos al menos 2 parejas, de modo que tenemos al menos 50 parejas. Para la segunda coordenada, tenemos únicamente 7 opciones, de modo que por el principio de las casillas, hay al menos 8 parejas con la misma segunda coordenada, tal como queríamos.

Consideremos un ejemplo más. Dado un conjunto fijo C de n elementos, contaremos la cantidad de parejas $(S, |S|)$, donde S es un subconjunto y $|S|$ es la cantidad de elementos que tiene. Como cada subconjunto tiene una cantidad fija de elementos, hay exactamente una pareja por cada uno de los 2^n subconjuntos de C. Por otro lado, dejando fijo $|S| = k$, sabemos que tenemos $\binom{n}{k}$ subconjuntos, y los valores de k varían de 0 a n. Esto nos dice que la cantidad de parejas son $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, demostrando de nuevo una identidad que ya teníamos antes.

Ésta es simplemente una forma más de escribir demostraciones por doble conteo. Vamos a enunciar el Principio de Doble Conteo con esta notación.

El Principio de Doble Conteo con notación de las parejas.
Consideremos dos conjuntos finitos I e J. Supongamos que tenemos algunas de las parejas (i, j) con $i \in I$ y $j \in J$. Denotemos por a_i la cantidad de estas parejas con primera coordenada igual a i y b_j la cantidad estas de parejas con segunda coordenada igual a j. Entonces $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$.
Ambas sumas son la cantidad de parejas (i, j) que tomamos.

Es posible que hasta ahora no se vea la ventaja de usar este método, sin embargo ayuda bastante en la claridad a la hora de escribir la solución de un problema. Las soluciones de los siguientes problemas pueden escribirse como lo hicimos en la sección pasada, pero la solución usando parejas expresa la idea de una manera más clara.

Como primer ejemplo, encontraremos la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 2.

Ejemplo 9 *Demuestra que si n es un entero positivo, entonces,*

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1.$$

Vamos a poner a 2^{n+1} jugadores en un torneo. En la primera ronda, juegan por parejas y el ganador de cada pareja pasa a la siguiente ronda, y así sucesivamente hasta que haya un ganador. Contaremos las parejas (p, r), donde r es una de las $n + 1$ rondas y p es una de las personas que perdió en esa ronda. Si fijamos la primera coordenada, sólo puede haber una ronda en la cual pierde una persona. Como al final hay un ganador, en total hay $2^{n+1} - 1$ parejas, una por cada persona que perdió.

Por otro lado, en la primera ronda hay 2^n perdedores, en la segunda 2^{n-1} perdedores y así, hasta que en la última ronda sólo hay un perdedor. Así, $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

El siguiente problema ilustra un poco mejor cómo podemos aprovechar esta técnica en problemas tipo olimpiada.

Ejemplo 10 *Se tiene un $2010-$ágono regular. Se pintan 1005 de sus vértices de rojo y los otros de azul. Demuestra que se pueden elegir dos polígonos de 503 vértices, uno con vértices rojos y el otro con vértices azules, de modo que sean congruentes.*

Primero numeramos los vértices del polígono $1, 2, \ldots, 2010$ en el sentido de las manecillas del reloj. Consideremos una coloración fija del $2010-$ágono. Contaremos las parejas (i, j) tales que $1 \leq i \leq 2010$, $1 \leq j \leq 2009$ y el vértice en la posición i es de color distinto al vértice en la posición $i + j$ (módulo 2010).

Para cada i, hay 1005 valores para la segunda coordenada (uno por cada punto del otro color que el vértice en i). Así, tenemos $2010 \cdot 1005$ parejas. Pero debemos obtener la misma cantidad de parejas si contamos dejando las j fijas. Como la segunda coordenada tiene sólo 2009 posibilidades, por el principio de las casillas (ver en el apéndice el teorema 3) hay al menos $\left\lfloor \frac{2010 \cdot 1005}{2009} \right\rfloor + 1 = 1006$ parejas con la misma segunda coordenada, digamos j'. De estas 1006, otra vez por el principio de las casillas, hay al menos 503 con el vértice i correspondiente del mismo color. Por la forma en que construimos las parejas, podemos rotar el polígono formado por estos 503 vértices i en j' unidades y obtener un polígono congruente al primero, pero del otro color, tal como queríamos.

Ejercicios

1. Demuestra que para cada par de enteros m, n con $0 \leq m \leq n$ se tiene que,
$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

2. Reescribe algunas de las demostraciones escritas con el método general usando la notación de las parejas y viceversa.

3. Si n, r y k son enteros positivos tales que $n \geq r \geq k$, demuestra que,
$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}.$$

4. Demuestra que si n y m son enteros positivos entonces,
$$\sum_{k=1}^{n} m^k = \frac{m^{n+1}-1}{m-1}.$$

5. Para cada entero positivo n demuestra que,
$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \binom{n}{3}(n-3)^n + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

Bibliografía

1. T. Andreescu, B. Enescu. *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2004.

2. L.I. Martínez Sandoval. *Estrategias básicas de conteo.* Tzaloa No. 2, 2011, pp. 1-14.

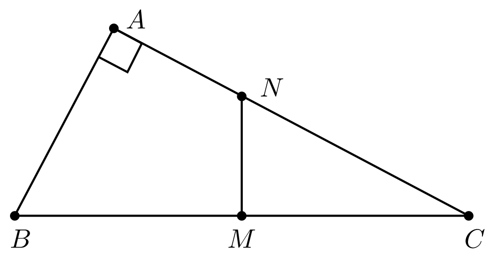
3. M.L. Pérez Seguí. *Combinatoria Avanzada.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM 2010.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 interesantes problemas de nivel predominantemente intermedio, pero también incorporamos algunos básicos y avanzados. Con ellos podrás poner a prueba tus habilidades y esperamos que te resulten interesantes y útiles para tu preparación. Como siempre, en la siguiente sección encontrarás las soluciones de todos ellos, pero ya sabes que no debes consultarla sin antes haber llegado a tu propia solución o, por lo menos, sin haberle dedicado bastante tiempo a cada uno. Ten en cuenta que cuando consultas la solución de un problema sin haber hecho el esfuerzo de resolverlo por tí mismo, desperdicias una valiosa oportunidad para incrementar el desarrollo de tus habilidades como solucionador de problemas.

Por último, te invitamos a contribuir para que esta sección de la revista se siga enriqueciendo con la participación de todos. Estamos seguros que conoces y tienes problemas interesantes que proponer, por eso ponemos a tu disposición el correo `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus sugerencias.

Problema 1. El triángulo ABC es rectángulo con $\angle BAC = 90°$, y la mediatriz del lado BC intersecta al lado AC en el punto N. Si el área del cuadrilátero $ABMN$ es el doble que el área del triángulo MCN, determina las medidas de los ángulos del triángulo ABC.



Problema 2. Encuentra todos los enteros positivos de cuatro dígitos $abcd$ tales que sus dígitos a, b, c, d forman una progresión aritmética en ese orden.

Problema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyo ángulo recto está en C. Sean $BCDE$ y $ACFG$ los cuadrados externos formados sobre los lados CB y AC del triángulo ABC, respectivamente. Si AE intersecta a BC en H, y BG intersecta a AC en K, ¿cuánto mide el ángulo $\angle CKH$?

Problema 4. Determina si es posible escribir a la fracción $\frac{1}{2011}$ como suma de 2011 fracciones unitarias distintas. (Una fracción unitaria es una fracción de la forma $\frac{1}{n}$ donde n es un entero positivo).

Problema 5. Sea N un número de tres dígitos distintos de 0, y sea N' el mismo número pero escrito al revés. ¿Cuántos N cumplen que 7 divide a $N - N'$?

Problema 6. Sean m y n enteros positivos y p un número primo. Encuentra todos los valores de m, n y p que cumplan que $p^n + 144 = m^2$.

Problema 7. Sean ABC un triángulo, D el punto medio de BC, E el punto medio de AD y F la intersección de BE con AC. Determina el valor de la razón $\frac{AF}{FC}$.

Problema 8. Sea n un entero positivo. Si $S(n)$ denota la suma de dígitos de n, ¿cuántos dígitos tiene el número $S(S(S(S(2011^{2011}))))$?

Problema 9. Determina todos los enteros positivos m y n tales que,

$$2 \cdot 10^n + 25 = m^2.$$

Problema 10. Encuentra todas las parejas (x, y) de enteros que satisfacen la ecuación,

$$x^4 - x + 1 = y^2.$$

Problema 11. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB + CD = BC + DE$. Una semicircunferencia con centro en el lado AE es tangente a los lados AB, BC, CD y DE, en los puntos P, Q, R y S, respectivamente. Demuestra que PS y AE son paralelas.

Problema 12. Sean a y b números reales tales que $a + b = 17$. Determina el valor mínimo de la suma $2^a + 4^b$.

Problema 13. Seis enteros positivos distintos se escriben sobre las caras de un cubo (un número en cada cara). En cada vértice del cubo se escribe el número que resulta de multiplicar los números de las 3 caras adyacentes al vértice. La suma de estos 8 números es igual a 385.

1. Determina la suma de los 6 números de las caras.

2. Determina todos los valores posibles para los 6 números de las caras.

Problema 14. Sabiendo que $1001! + 2, 1001! + 3, \ldots, 1001! + 1001$ es un bloque de 1000 números enteros consecutivos tal que ninguno de ellos es primo, determina si existe un bloque de 1000 números enteros consecutivos tal que contenga exactamente 5 números primos.

Problema 15. Para cada vértice de un pentágono, definimos su altura como el segmento que parte de él y llega perpendicular hasta el lado opuesto. De manera similar definimos una mediana como el segmento que va desde un vértice hasta el punto medio del lado opuesto. Suponga que en un pentágono las 5 alturas y las 5 medianas tienen todas la misma longitud. Demuestra que el pentágono es regular.

Problema 16. Dos personas juegan en un tablero de 3×100 casillas. En su turno cada jugador coloca dos fichas en casillas contiguas (no en diagonal). El primer jugador coloca sus fichas en cualquier posición (horizontal o vertical) y el otro jugador deberá colocar las suyas de forma perpendicular con respecto a las del primer jugador en el turno anterior. Pierde aquel que en su turno ya no pueda colocar sus dos fichas. ¿Existe alguna estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores?

Problema 17. Demuestra que todo entero positivo n puede ser representado en la forma

$$3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$$

donde $u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_k$ son enteros tales que $u_1 > u_2 > \cdots > u_k \geq 0$ y $0 \leq v_1 < v_2 < \cdots < v_k$.

Problema 18. Un tablero de $m \times n$ está relleno con signos "$+$" y "$-$". Llamaremos *irreducible* a un tablero que no pueda ser transformada en otro que sólo tenga signos "$+$" mediante aplicaciones sucesivas de la operación que cambia todos los signos de cualquier columna o renglón. Demuestra que todo tablero irreducible siempre contiene un subtablero irreducible de 2×2.

Problema 19. Determina todos los enteros positivos que no se pueden escribir en la forma $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ con a y b enteros positivos.

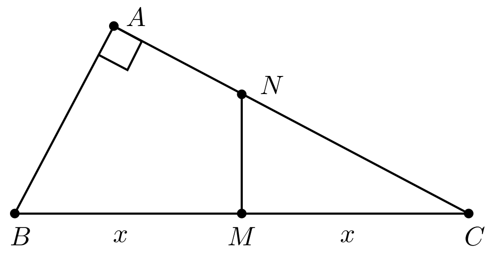
Problema 20. En una extraña fiesta cada persona conocía exactamente a otras 22 personas. Para cada pareja de personas X, Y que se conocían, no había en la fiesta ninguna otra persona que las conociera a ambas. Además, para cada pareja de personas X, Y que no se conocían había exactamente otras 6 personas en la fiesta a las que cada una conocía. ¿Cuántas personas había en la fiesta?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que el equipo editorial de Tzaloa preparó para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que en cada problema siempre se incluye la explicación que justifica la validez de la solución y observa que la argumentación siempre se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos.

Sin embargo, sabemos que la solución de ningún problema es única y que, probablemente, las que aquí se presentan no son las mejores. Por eso, es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida y quizá más elegante. Si este es el caso y la quieres compartir con nosotros o no estás muy seguro de su validez, simplemente te invitamos para que la envíes a nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto la estaremos analizando para compartir contigo nuestra opinión.

Solución del problema 1.



Sea $x = BM = MC$. Los triángulos CAB y CMN son semejantes (ver en el apéndice la definición 15) y el área del triángulo CAB es el triple del área del triángulo

CMN de donde,

$$3 = \left(\frac{AC}{MC}\right)^2$$

y se tiene que $AC = \sqrt{3}x$. Luego, por el teorema de Pitágoras (ver en el apéndice el Teorema 11) en el triángulo ABC obtenemos que

$$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4x^2 - 3x^2} = x.$$

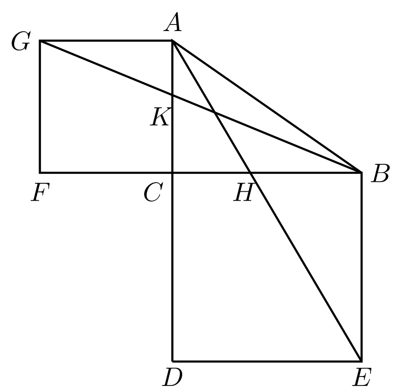
Por lo tanto, el triángulo ABC es la mitad de un triángulo equilátero y sus ángulos son $30°$, $60°$ y $90°$.

Solución del problema 2. Sea $h = d - c = c - b = b - a$. Como a y d son dígitos, obtenemos que $d - a = 3h$, de donde $-9 \leq 3h \leq 9$, es decir, $-3 \leq h \leq 3$. Veamos cada caso.

- Si $h = \pm 3$, se tiene que dar la igualdad $d - a = \pm 9$, y como $a \neq 0$ obtenemos sólo el número 9630.
- Si $h = -2$, $d - a = -6$ y a puede valer 6, 7, 8, ó 9.
- Si $h = -1$, $d - a = -3$ y a puede valer 3, 4, 5, 6, 7, 8, ó 9.
- Si $h = 0$, $d - a = 0$ y a puede valer cualquier dígito distinto de 0.
- Si $h = 1$, $d - a = 3$ y a puede valer 1, 2, 3, 4, 5, ó 6.
- Si $h = 2$, $d - a = 6$ y a puede valer 1, 2, ó 3.

Por lo tanto, tenemos en total $1 + 4 + 7 + 9 + 6 + 3 = 30$ números que cumplen.

Solución del problema 3. Observemos que el triángulo KCB es semejante al triángulo GFB, y que el triángulo HCA es semejante al triángulo EDA.



Entonces,

$$\frac{KC}{AC} = \frac{KC}{GF} = \frac{CB}{FB} = \frac{BC}{BC+AC},$$
$$\frac{HC}{BC} = \frac{HC}{DE} = \frac{CA}{DA} = \frac{AC}{BC+AC},$$

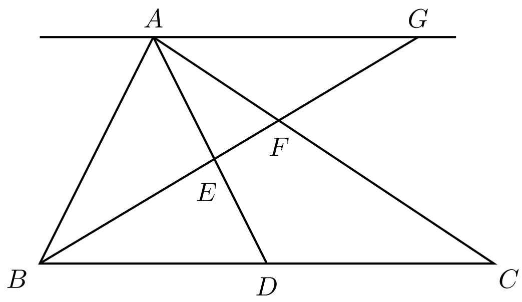
de donde, $KC = HC = \frac{BC \cdot AC}{BC+AC}$. Luego el triángulo rectángulo KCH es isósceles y por lo tanto, $\angle CKH = 45°$.

Solución del problema 4. Cada fracción unitaria $\frac{1}{n}$ se puede escribir como suma de dos fracciones unitarias: $\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}$. De manera análoga, $\frac{1}{2n} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}$ y así $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n}$. Continuando de esta forma podemos expresar a $\frac{1}{n}$ como suma de fracciones unitarias con denominadores crecientes y todos ellos pares y distintos, salvo los últimos dos que son iguales.
Por otra parte, observemos que $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ y que $\frac{1}{2n} = \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$ para todo entero positivo n. Luego, cada fracción de la forma $\frac{1}{k}$ se puede escribir como suma de dos fracciones unitarias distintas si k es par.
Por lo tanto, la fracción $\frac{1}{2011}$ se puede escribir primero como suma de 2010 fracciones unitarias con denominadores pares crecientes y la última fracción de esta suma se puede escribir como suma de dos fracciones unitarias distintas. De esta manera la fracción $\frac{1}{2011}$ se puede escribir como suma de 2011 fracciones unitarias distintas.

Solución del problema 5. Podemos escribir a N como $100a + 10b + c$ con a, b y c dígitos distintos de cero. Entonces, $N' = 100c + 10b + a$, y por lo tanto $N - N' = 99(a - c)$. Como 7 no divide a 99, entonces $N - N'$ es divisible entre 7 si y sólo si 7 divide a $a - c$. Como a y c son dígitos, las únicas parejas (a, c) que cumplen esto son aquellas con $a = c$, o las parejas $(1, 8)$, $(2, 9)$, $(8, 1)$ y $(9, 2)$. En total hay $9 + 4 = 13$ de estas parejas, y para cada una se puede elegir uno de 9 valores para b. Así, hay en total $9 \cdot 13 = 117$ números N que cumplen lo pedido.

Solución del problema 6. Tenemos que $p^n = m^2 - 144 = (m - 12)(m + 12)$. Como p es un número primo, $m - 12$ y $m + 12$ deben ser potencias de p. Luego, $m - 12 = 1$, es decir, $m = 13$ o p divide a $m - 12$ y a $m + 12$. Si $m = 13$, entonces, $(m, n, p) = (13, 2, 5)$.
Si p divide a $m - 12$ y a $m + 12$, entonces $p \mid (m + 12) - (m - 12) = 24$, es decir, $p = 2$ o $p = 3$. Si $p = 2$, debemos encontrar dos potencias de 2 cuya diferencia sea 24. Observemos que $m - 12 < 32$, pues $2^{n+1} - 2^n > 24$, para $n \geq 5$. Luego, $m - 12$ es igual a $2^1, 2^2, 2^3$ o 2^4. Considerando cada caso, vemos que sólo $m - 12 = 8$ cumple, por lo tanto $(m, n, p) = (20, 8, 2)$.
Si $p = 3$, entonces debemos encontrar dos potencias de 3 cuya diferencia sea 24. Observemos que $m - 12 < 27$, pues $3^{n+1} - 3^n > 24$, para $n \geq 3$. Entonces $m - 12$ es: 3^1 o 3^2. Considerando cada caso, vemos que sólo $m - 12 = 3$ funciona, luego $(m, n, p) = (15, 4, 3)$.
Por lo tanto, los posibles valores para (m, n, p) son: $(13, 2, 5)$, $(20, 8, 2)$ y $(15, 4, 3)$.

Solución del problema 7. Sea G la intersección de la prolongación de BF con la paralela a BC por A. Entonces los triángulos AGE y DBE son semejantes y como $AE = ED$ tenemos que $AG = BD = CD$. Luego, $AG = \frac{1}{2}CB$.



Por otra parte, los triángulos AFG y CFB también son semejantes, y por lo tanto $\frac{1}{2} = \frac{AG}{CB} = \frac{AF}{FC}$.

Solución del problema 8. Primero acotamos 2011^{2011}:

$$2011^{2011} < (10^4)^{2011} = 10^{8044},$$

de donde 2011^{2011} tiene a lo más 8044 dígitos. Entre los números que tienen a lo más 8044 dígitos el $10^{8044} - 1$ es el que tiene mayor suma de dígitos, siendo esta igual a $9 \cdot 8044 = 72396$. Por lo que

$$S(2011^{2011}) \leq 72396.$$

Ahora, entre los números menores que o iguales que 72396, el 69999 es el que tiene mayor suma de dígitos, de donde

$$S(S(2011^{2011})) \leq 42.$$

Y de la misma manera, el 39 es el número con mayor suma de dígitos de los menores o iguales que 42 y

$$S(S(S(2011^{2011}))) \leq 12.$$

Finalmente, cualquier número menor o igual que 12 tiene suma de dígitos menor que 10 y concluimos que $S(S(S(S(2011^{2011}))))$ tiene sólo un dígito.

Nota. Viendo que $2011^{2011} \equiv 4 \pmod 9$, como la suma de dígitos de un número no cambia su congruencia módulo 9, obtenemos que $S(S(S(S(2011^{2011})))) = 4$.

Solución del problema 9. Como 5 divide tanto a 10^n como a 25, también tiene que dividir a m^2, y como 5 es primo, 5 divide a m. Digamos que $m = 5k$, con k un entero positivo. Sustituimos

$$2 \cdot 10^n + 25 = (5k)^2 = 25k^2.$$

Como 25 divide a 25 y a $25k^2$, 25 divide a $2 \cdot 10^n$, de donde $n \geq 2$. Cancelamos y tenemos que

$$2^{n+1}5^{n-2} + 1 = k^2.$$

Ahora, el lado izquierdo siempre es impar, de donde k tiene que ser impar, digamos $k = 2t + 1$, sustituimos

$$\begin{aligned} 2^{n+1}5^{n-2} + 1 &= (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 \\ 2^{n+1}5^{n-2} &= 4t^2 + 4t \\ 2^{n-1}5^{n-2} &= t^2 + t = t(t+1). \end{aligned}$$

Como t y $t+1$ son primos relativos, uno tiene que ser igual a 2^{n-1} y el otro igual a 5^{n-2}. Si $t = 2^{n-1}$ y $t + 1 = 5^{n-2}$ es fácil ver que sólo $n = 3$ cumple, de donde $m = 45$. De la misma manera, si $t = 5^{n-2}$ y $t + 1 = 2^{n-1}$ es fácil ver que sólo $n = 2$ cumple, de donde $m = 15$. Entonces, las parejas que cumplen son $n = 2$, $m = 15$ y $n = 3$, $m = 45$.

Solución del problema 10. Consideraremos cuatro casos: $x \leq -1$, $x = 0$, $x = 1$ y $x \geq 2$.

1. Si $x \leq -1$, entonces $x < 1$, luego $(x^2)^2 = x^4 < x^4 - x + 1$. Además como $x < 0$ y $2x + 1 \leq -1 < 0$, entonces $x(2x + 1) > 0$, de donde, $2x^2 > -x$. Luego,
$$x^4 - x + 1 < x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2.$$
Luego, $(x^2)^2 < x^4 - x + 1 < (x^2 + 1)^2$. Como $x^4 - x + 1$ está estrictamente entre dos cuadrados perfectos consecutivos, entonces él mismo no puede ser un cuadrado perfecto (y^2). Por lo tanto, en este caso no hay parejas que cumplan la ecuación.

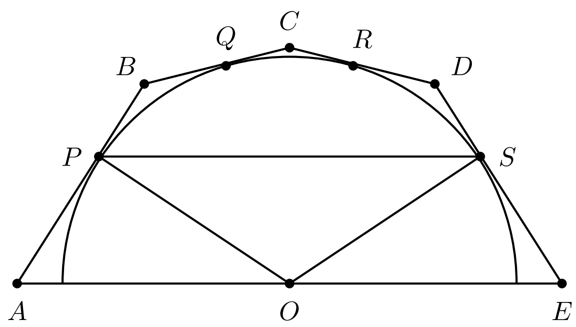
2. Si $x = 0$, tenemos que $y^2 = 1$, de donde $y = \pm 1$. Por lo tanto, $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (0, -1)$ cumplen la ecuación.

3. Si $x = 1$, tenemos que $y^2 = 1$, de donde $y = \pm 1$. Por lo tanto, $(x, y) = (1, 1)$ y $(x, y) = (1, -1)$ cumplen la ecuación.

4. Si $x \geq 2$, entonces $x > 1$, luego $x^4 - x + 1 < x^4 = (x^2)^2$. Además como $x(2x - 1) > 0$, tenemos que $-x > -2x^2$. Luego,
$$x^4 - x + 1 > x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2.$$
Luego, $(x^2 - 1)^2 < x^4 - x + 1 < (x^2)^2$. Nuevamente, como $x^4 - x + 1$ está estrictamente entre dos cuadrados perfectos consecutivos, entonces él mismo no puede ser un cuadrado perfecto (y^2). Por lo tanto, en este caso no hay parejas que cumplan la ecuación.

Por lo tanto las soluciones son: $(0, 1), (0, -1), (1, 1)$ y $(1, -1)$.

Solución del problema 11. Sea O el centro de la semicircunferencia. Tenemos que $BP = BQ$, $CQ = CR$ y $DR = DS$, ya que son tangentes a la semicircunferencia (ver en el apéndice el teorema 17).



Usando la condición $AB + CD = BC + DE$, obtenemos:

$$AP + BP + CR + DR = BQ + CQ + DS + ES.$$

De aquí tenemos que $AP = ES$. Además, $\angle APO = \angle ESO = 90°$ y $PO = SO$. Por lo tanto, los triángulos APO y ESO son congruentes (ver en el apéndice el criterio 13).

Primera forma de terminar. De la congruencia de los triángulos APO y ESO se sigue que $\angle OPS = \angle OSP$ y por lo tanto:

$$\angle APS = \angle APO + \angle OPS = 90° + \angle OSP = \angle PSE.$$

Por otro lado, en el cuadrilátero $APSE$ tenemos que:

$$2\angle EAP + 2\angle APS = \angle EAP + \angle APS + \angle PSE + \angle SEA = 360°.$$

Entonces, $\angle EAP + \angle APS = 180°$ y así $APSE$ es un trapecio isósceles. Por lo tanto, AE y PS son paralelas.

Segunda forma de terminar. De la congruencia de los triángulos APO y ESO, la altura desde P en el triángulo APO es igual a la altura desde S en el triángulo ESO, por lo tanto P y S están a la misma distancia de la recta AE, y en consecuencia PS es paralela a AE.

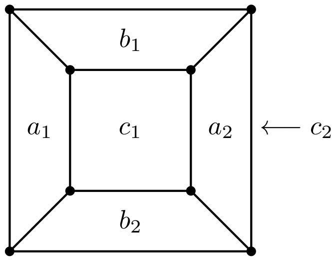
Solución del problema 12. Ya que 2^a y 4^b son positivos, podemos utilizar la desigualdad de la media aritmética - media geométrica (ver en el apéndice el teorema 7) como sigue:

$$\begin{aligned} 2^a + 4^b = 2^{a-1} + 2^{a-1} + 2^{2b} &\geq 3\sqrt[3]{2^{a-1}\cdot 2^{a-1}\cdot 2^{2b}} \\ &= 3\sqrt[3]{2^{2(a+b-1)}} = 3\sqrt[3]{2^{2(16)}} = 3\sqrt[3]{2^{32}} \\ &= 3\cdot 2^{10}\sqrt[3]{4}, \end{aligned}$$

con la igualdad si y sólo si $2^{a-1} = 2^{2b}$. Luego, $a - 1 = 2b$ y de aquí $3b = 16$ (pues $a + b = 17$). Por lo tanto, el valor mínimo buscado es $3\cdot 2^{10}\sqrt[3]{4}$ con $a = \frac{35}{3}$ y $b = \frac{16}{3}$.

Solución del problema 13.

1. Sean a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 los números escritos por parejas en caras opuestas como se muestra en el siguiente cubo.



La suma de los 8 números de los vértices es:

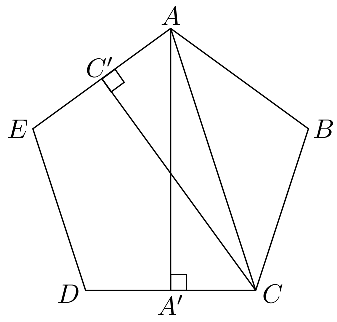
$$\begin{aligned} S &= a_1b_1c_2 + b_1a_2c_2 + a_1b_1c_1 + b_1a_2c_1 + c_1a_2b_2 + a_1c_1b_2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 \\ &= b_1c_2(a_1+a_2) + b_1c_1(a_1+a_2) + b_2c_1(a_2+a_1) + b_2c_2(a_1+a_2) \\ &= (a_1+a_2)(b_1c_2 + b_1c_1 + b_2c_1 + b_2c_2) \\ &= (a_1+a_2)(b_1(c_2+c_1) + b_2(c_1+c_2)) \\ &= (a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2). \end{aligned}$$

Luego, $S = (a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = 385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$. Como 5, 7 y 11 son números primos, los factores $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ y $c_1 + c_2$ deben ser iguales a estos números en algún orden, por lo que la suma de los 6 números de las caras es $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = 5 + 7 + 11 = 23$.

2. Observemos que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Luego, los enteros escritos en las caras del cubo no pueden estar muy "alejados" de los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. De hecho, necesitamos modificar esta suma en 2, lo cual será posible modificando uno de los números del 1 al 6 al aumentarlo en 2 o modificando dos de los números aumentando en 1 a cada uno. El primer caso se puede hacer solamente al sumar 2 al 5 o al 6, ya que los números deben ser distintos, obteniendo las colecciones $\{1, 2, 3, 4, 7, 6\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$. El segundo caso sólo se puede hacer cuando se suma 1 al 5 y al 6, dando la colección $\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$. Por lo tanto, sólo hay dos colecciones: $\{1, 2, 3, 4, 7, 6\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$. Y se acomodan así: $\{2, 3\}, \{1, 6\}, \{4, 7\}$ en el primer caso, y $\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 8\}$ en el segundo caso.

Solución del problema 14. Probaremos que tal bloque sí existe. A partir de un bloque dado $a_1, a_2, \ldots, a_{1000}$, obtendremos otro mediante el reemplazo del mayor de los números del bloque (a_{1000}) por el menor menos uno ($a_1 - 1$). Observemos que en cada paso el número de primos del segundo bloque difiere a lo más en 1 con respecto al número de primos del primer bloque. Si partimos del bloque inicial (que no tiene ningún número primo) y efectuamos este procedimiento repetidamente, es evidente que para cuando lleguemos al bloque de los números del 1 al 1000, éste tendrá mucho más de 5 primos. Es así, que en algún paso de la secuencia tuvimos que tener un bloque con exactamente 5 primos.

Solución del problema 15. Sean A, B, C, D y E los vértices del pentágono y A', B', C', D' y E' los puntos medios de los segmentos CD, DE, EA, AB y BC, respectivamente. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que en todo pentágono la mediana de cada vértice siempre es mayor o igual que la altura trazada desde el mismo vértice, pero como por hipótesis todas las medianas y las alturas tienen la misma longitud, entonces tenemos que la mediana y la altura de cada vértice coinciden.



Ahora sabemos que $AA' = CC'$ y $\angle AA'C = \angle CC'A = 90°$, y como AC es lado común de los triángulos rectángulos $AA'C$ y $CC'A$ se sigue por el teorema de Pitágoras que $C'A = A'C$. Luego, por el criterio LLL concluimos que los triángulos $AA'C$ y $CC'A$ son congruentes, y $CD = 2CA' = 2AC' = EA$. De manera análoga se concluye que $EA = BC = DE = AB$, por lo que el pentágono $ABCDE$ es equilátero. Por otro lado, la congruencia de $AA'C$ y $CC'A$ además implica que $\angle ACD = \angle EAC$ y como $AB = BC$ también tenemos que $\angle BCA = \angle CAB$. Entonces $\angle BCD = \angle EAB$, de donde se sigue que $ABCDE$ es equiangular y por lo tanto regular.

Solución del problema 16. El primer jugador tiene garantizada la victoria si juega de la siguiente manera.

Dividamos el tablero en 25 *regiones* de 4×3 (4 renglones y 3 columnas). El primer jugador siempre coloca sus dos fichas sobre una columna (alineadas con respecto al eje mayor del tablero) y en sus primeras 25 jugadas lo hace sobre las casillas de la columna *central* de cada región. En su primer turno coloca sus fichas en cualquiera de las regiones. Si, en su turno, el segundo jugador coloca sus fichas en una región ocupada con fichas del primer jugador, entonces el primer jugador escoge cualquiera de las otras regiones libres para la siguiente jugada. Si por el contrario, en su turno el segundo jugador coloca sus fichas en una región libre, entonces el primer jugador responde colocando sus fichas en esa misma región.

Después de las primeras 25 jugadas, el primer jugador habrá ocupado en todas y cada una de las 25 regiones del tablero dos casillas contiguas sobre la columna central. Lo anterior deja, a lo más, 25 jugadas adicionales para el segundo jugador. Nótese que

al estar obligado a colocar sus fichas siempre alineadas con respecto al eje menor del tablero, sólo puede jugar en renglones que no tengan ocupada la casilla de la columna central.
Por otro lado, observe que después de las primeras 25 jugadas, el primer jugador tiene garantizadas, cuando menos, otras $25 \times 2 = 50$ jugadas (dos por cada región, pues, a los lados de sus primeras fichas, tiene *reservadas* las casillas de la primera y la segunda columna) sin que el segundo jugador pueda hacer algo para impedirlo.

Solución del problema 17. Probaremos el resultado por inducción fuerte (ver en el apéndice el teorema 2). Para la base ($n = 1$) tenemos que el resultado es verdadero toda vez que $1 = 2^0 \cdot 3^0$. Ahora, sea $n > 1$ un entero cualquiera y supondremos que para todo entero m tal que $1 \leq m < n$ existe una representación *adecuada* y probaremos que n también puede ser representado adecuadamente.

- Si n es par, entonces $\frac{n}{2}$ tiene una representación adecuada $3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$ y por lo tanto $n = 2\left(\frac{n}{2}\right) = 3^{u_1} \cdot 2^{v_1+1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2+1} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k+1}$ también es una representación adecuada.

- Si n es impar, sea t el único entero tal que $3^{t+1} > n \geq 3^t$. Si $n = 3^t$, entonces $n = 3^t \cdot 2^0$ y quedaría probado el resultado. En caso contrario, tenemos que $n - 3^t$ tiene una representación adecuada $3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$ y entonces $n = 3^t \cdot 2^0 + 3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + \cdots + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$. Como $n - 3^t$ es par, entonces $v_1 > 0$ y, más aún, $3^{t+1} > n \geq 3^t + 3^{u_1} \cdot 2^{v_1} \geq 3^t + 3^{u_1} \cdot 2$. Por lo tanto $3^t \cdot 2 > 3^{u_1} \cdot 2$, de donde se sigue que $t > u_1$ y entonces tenemos que la representación dada arriba para n resulta ser adecuada.

Solución del problema 18. En primer lugar, observemos que un tablero de 2×2 es irreducible si y sólo si contiene una cantidad impar de signos $-$. Es fácil verificar que si un tablero de 2×2 contiene un número par de signos $-$ entonces siempre podrá ser transformado en otro que sólo tenga signos $+$. Ahora, como la operación no cambia la paridad del número de signos $-$, entonces un tablero de 2×2 que contenga un número impar de signos $-$ es intrínsecamente irreducible. Si un tablero de $m \times n$ contiene un subtablero irreducible de 2×2, éste es evidentemente irreducible (toda vez que en el subtablero no es posible cambiar todos los $-$ por $+$). Por otro lado, supongamos que el tablero de $m \times n$ no contiene subtableros irreducibles de 2×2. Aplicando la operación a todas las columnas que tienen en la primera posición un signo $-$, obtendremos un tablero cuyo primer renglón sólo contiene signos $+$. Ahora, afirmamos que el segundo renglón de este tablero sólo contiene signos $+$ ó $-$, pero no ambos. Véase, que de no ser así habría un signo $+$ al lado de un signo $-$, que junto con los dos signos $+$ arriba de ellos (en el primer renglón) formarían un subtablero irreducible de 2×2, lo cual es contradictorio. Aplicando, si fuera necesario, la operación al segundo renglón obtenemos un tablero en el que los dos primeros renglones sólo tienen signos $+$. Siguiendo el razonamiento anterior con los renglones restantes, es claro que podemos arreglar el tablero hasta que sólo tenga signos $+$. Por lo tanto, un tablero de $m \times n$ no es irreducible si y sólo si no contiene subtableros irreducibles de 2×2.

Solución del problema 19. Sea $A = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$. Efectuando la suma tenemos que $A = \frac{2ab+a+b}{b(b+1)}$ de donde $b \mid a$. Escribamos $a = mb$ con m entero positivo. Entonces $A = m + \frac{mb+1}{b+1} = 2m - \frac{m-1}{b+1}$, de donde $b+1 \mid m-1$. Escribamos $m-1 = n(b+1)$ con $n \geq 0$ entero. Entonces, $A = n(2b+1)+2$. Si $n = 0$, tenemos $A = 2$. Si $n = 1$, entonces al variar b, obtenemos $A = 5, 7, \ldots$. Observemos que $A \neq 3$. Nos queda analizar a los números pares $x > 2$. Observe que $A = x$ si y sólo si $x - 2 = n(2b+1)$ si y sólo si $x - 2$ es múltiplo de algún primo impar. Por lo tanto, los números que no se pueden escribir en la forma requerida son el 1, el 3 y todos los números de la forma $2^k + 2$ con k entero positivo.

Solución del problema 20. Supongamos que hay n personas en la fiesta $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fijemos i y contemos el número de parejas ordenadas distintas (j, k) tales que p_i conoce a p_j y p_j conoce a p_k. Hay 22 parejas con $k = i$. Supongamos que $k \neq i$. Entonces p_k es una de las $n - 22 - 1$ personas que p_i no conoce, y hay 6 personas p_j tales que debemos incluir a (j, k) en nuestra cuenta. Luego, hay $22 + 6(n - 23)$ de tales parejas. Por otra parte, en total hay $22^2 = 484$ parejas ya que cada persona conoce a otras 22 personas. Por lo tanto, $484 = 22 + 6(n - 23)$ de donde obtenemos que $n = 100$.

Problemas propuestos

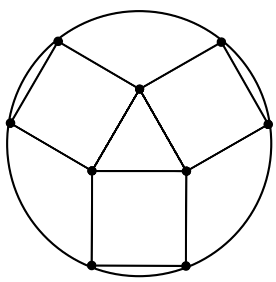
Problemas propuestos.
Año 2011 No. 3.

La comunidad de Tzaloa se distingue por la pasión de poder superar los retos y por su gran amor a la reina de las ciencias: *La Matemática*. Por eso, siempre nos sentiremos orgullosos de publicar tu trabajo y siempre reconoceremos el gran talento de todos nuestros lectores.

A continuación presentamos el reto de los 5 problemas propuestos para este trimestre. Recuerda que a partir de este momento puedes enviarnos tus trabajos y que tienes hasta antes de la publicación de Tzaloa 2, año 2012, para hacernos llegar las soluciones creativas y elegantes que sólo tú puedes construir.

Como siempre nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com` está a tu servicio y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, nos pondremos en contacto contigo para poder publicar tu trabajo.

Problema 1. (Principiante) El siguiente hexágono está formado por un triángulo equilátero de lado 2, tres cuadrados y tres triángulos isósceles. ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia?



Problema 2. (Intermedio) Sea n un entero positivo par y sean a, b enteros positivos primos relativos. Determina todos los valores de a y b tales que $a+b$ sea divisor de a^n+b^n.

Problema 3. (Intermedio) Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. Las rectas paralelas a los lados de ABC que pasan por P dividen a este triángulo en tres triángulos más pequeños y tres cuadriláteros con vértice común P. Demuestra que si dos de estos cuadriláteros son rombos, entonces el tercero también lo es.

Problema 4. (Intermedio) ¿De cuántas maneras se pueden colocar dos cuadrados de 2×2 en una cuadrícula de 5×5 sin que se traslapen?

Problema 5. (Avanzado) Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc\leq 1$. Demuestra que,

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{a^2+a}\geq\frac{3}{2}.$$

Soluciones a los problemas propuestos. Año 2010 No. 4.

A continuación publicamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2010. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 1, año 2011, por lo que todavía estás a tiempo para enviarnos la tuya y así podamos publicarla dándote todo el crédito y reconocimiento público que sólo tú mereces.

Problema 1. (Introductorio) Un entero positivo n se llama *completo* si satisface la siguiente propiedad: Si a es un dígito de n, entonces el número $9-a$ también es un dígito de n. Por ejemplo, el número $465,930$ es completo, mientras que el número $3,671$ no lo es. ¿Cuántos números completos hay entre 1 y 10^6?
(Nota: El número 9 se considera completo ya que se puede escribir como 09).

Solución. Cada número menor que 10^6 lo consideraremos de 6 dígitos, rellenando con ceros a la izquierda de ser necesario. Primero consideramos los conjuntos $\{0,9\}$, $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ y $\{4,5\}$. Para cada conjunto, si uno de sus elementos aparece en un número completo, el otro también tiene que aparecer. Por lo que, un número completo menor que 10^6 tiene 2, 4 ó 6 dígitos diferentes. Veamos cada caso.

- Si el número tiene sólo 2 dígitos diferentes, primero elegimos uno de los 5 conjuntos para tomar de él los dígitos y luego tenemos que contar cuántos números podemos formar con esos dos dígitos. Si elegimos el conjunto $\{a,b\}$ podemos formar 2^6 números, pero tenemos que restar 2, pues no consideramos los números $aaaaaa$ y $bbbbbb$. Tenemos en total $5(2^6-2)=310$.

- Si el número tiene 4 dígitos diferentes, elegimos los dos conjuntos de $\binom{5}{2} = 10$ maneras. Ahora, tenemos que ver cuántos números de 6 dígitos hay que tengan exactamente esos 4 dígitos. Dividiremos nuevamente en dos casos:

  1. Supongamos que tres de los dígitos aparecen una vez y el restante aparece tres veces. Primero elegimos de 4 formas el dígito que se repetirá, luego elegimos las tres posiciones que ocupará de $\binom{6}{3} = 20$ formas y por último acomodamos los tres dígitos que faltan de $3! = 6$ formas. Tenemos un total de $4 \cdot 20 \cdot 6 = 480$ números.
  2. Supongamos que dos dígitos se repiten dos veces y los restantes aparecen una vez. Primero elegimos el primer dígito a repetirse de 4 formas, luego elegimos las dos posiciones que ocupará de $\binom{6}{4} = 15$ formas. Ahora elegimos el segundo dígito a repetirse de 3 maneras y las posiciones que ocupará de $\binom{4}{2} = 6$ formas. Finalmente multiplicamos por $2! = 2$ que son las maneras de acomodar los dos dígitos restantes. Esto nos da $4 \cdot 15 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 2,160$ números. Pero estamos contando doble, pues si primero elegimos el dígito a con posiciones a_1 y a_2. y luego el dígito b con posiciones b_1 y b_2 hay también otro número considerado donde primero elegimos el dígito b con posiciones b_1 y b_2, y luego el dígito a con posiciones a_1 y a_2. Por lo tanto, hay $1,080$ números en este caso.

  Por lo tanto, tenemos $10(480 + 1,080) = 15,600$ números en este caso.

- Si el número tiene 6 dígitos diferentes, simplemente elegimos los tres conjuntos de dígitos de $\binom{5}{3} = 10$ formas. Con los seis dígitos podemos formar $6! = 720$ números, por lo que tenemos en total $10 \cdot 720 = 7,200$ números.

Concluimos que hay $310 + 15,600 + 7,200 = 23,110$ números completos menores que 10^6.

Problema 2. (Intermedio) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_8$ ocho enteros distintos cualesquiera escogidos del conjunto $A = \{1, 2, \ldots, 16, 17\}$. Demuestra que existe un entero $k > 0$ tal que la ecuación $a_i - a_j = k$ tiene al menos 3 soluciones diferentes. Además encuentra un subconjunto de A con 7 elementos tal que la ecuación $a_i - a_j = k$ no tenga tres soluciones distintas para ningún valor de $k > 0$.

Solución. Supongamos que no existe un entero $k > 0$ con la propiedad requerida y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_8$.
Consideremos las 7 diferencias $d_i = a_{i+1} - a_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Asimismo consideraremos las 6 diferencias $b_i = a_{i+2} - a_i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Es fácil ver que la suma de esas 13 diferencias es

$$2 \cdot (a_8 - a_1) + (a_7 - a_2) \leq 2(17 - 1) + (16 - 2) = 46.$$

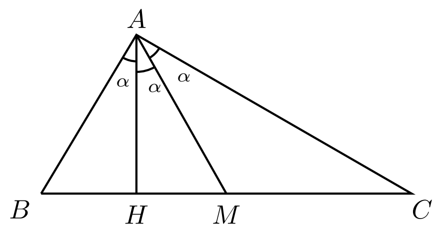
Al suponer que ninguna de estas diferencias ocurre más de dos veces, tenemos que el valor más pequeño posible para la suma de las 13 diferencias es

$$2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) + 7 = 49,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, debe existir un entero $k > 0$ tal que al menos tres de las diferencias $a_i - a_j = k$ con $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, 7, 8\}$.
Para la segunda parte del problema es fácil ver que $\{1, 2, 4, 7, 11, 16, 17\} \subseteq A$ es una de varias posibles soluciones.

Problema 3. (Intermedio) En un triángulo ABC la mediana y la altura desde el vértice A dividen al ángulo $\angle BAC$ en tres ángulos de áreas iguales. Determina las medidas de los ángulos del triángulo ABC.

Solución. Sea M el punto medio del lado BC y H el pie de la altura desde A. Tenemos que los triángulos ABH y AMH son congruentes por el criterio de congruencia ALA. Además $BH = HM = \frac{MC}{2}$, ya que $MC = MB$.



Como AM es bisectriz del ángulo HAC, por el teorema de la bisectriz tenemos que $\frac{AH}{AC} = \frac{HM}{MC}$, es decir, $\frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}$. Pero

$$\frac{AH}{AC} = \cos(2\alpha) = \frac{1}{2}.$$

Como $0 < 2\alpha < 180°$, tenemos que $2\alpha = 60°$, de donde $\alpha = 30°$. Por lo tanto, los ángulos del triángulo ABC son $\angle BAC = 3\alpha = 90°$, $\angle ABC = 90° - \alpha = 60°$ y $\angle BCA = 90° - 2\alpha = 30°$.

Problema 4. (Avanzado) Sean a, b, c y d números reales tales que $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 1$. Determina el valor máximo de la suma

$$(a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4.$$

Solución. Sea S la suma que deseamos maximizar. Observemos que para cualesquiera números reales x, y, se tiene que

$$(x+y)^4 \leq (x+y)^4 + (x-y)^4 = 2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4),$$

y la igualdad se da si y sólo si $x = y$.
Aplicando esta desigualdad a cada sumando de S tenemos que

$$\begin{aligned} S &\leq 2(3a^4 + 3b^4 + 3c^4 + 3d^4 + 6(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)) \\ &= 6(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2(a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2)) \\ &= 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ &\leq 6. \end{aligned}$$

Cuando $a = b = c = d$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, la igualdad se alcanza en los números $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ y $a = b = c = d = -\frac{1}{2}$.
Por lo tanto, el valor máximo de S es 6.

Problema 5. (Avanzado) Sea n un entero positivo. Demuestra que

$$\frac{S(2n)}{2} \leq S(n) \leq 5 \cdot S(2n)$$

donde $S(n)$ denota la suma de los dígitos de n.
Demuestra también que existe un entero positivo n tal que

$$S(n) = 2010 \cdot S(3n).$$

Solución. Sea $n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^ka_k$ un entero positivo con dígitos $a_0, a_1, \ldots, a_k$. Tenemos que

$$2n = 2a_0 + 10(2a_1) + 10^2(2a_2) + \cdots + 10^k(2a_k). \tag{1}$$

Si $a_i \leq 4$, entonces $2a_i$ es un dígito y $S(2a_i) = 2a_i$.
Si $a_i \geq 5$, entonces $2a_i = 10 + a_i'$ donde a_i' es un dígito, y $10^i(2a_i) = 10^{i+1} + 10^i a_i'$.
Luego, cada uno de los sumandos de (1) con $a_i \geq 5$ aporta $1 + a_i'$ a la suma de los dígitos de $2n$. Como también $S(2a_i) = 1 + a_i'$, se sigue que

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} S(2a_i).$$

Por otra parte, es fácil verificar que $S(2a_i) \leq 2a_i$ y $S(a_i) \leq 5 \cdot S(2a_i)$ para cada dígito a_i.
Por lo tanto,

$$S(2n) = \sum_{i=0}^{k} S(2a_i) \leq \sum_{i=0}^{k} 2a_i = 2\sum_{i=0}^{k} a_i = 2S(n)$$

y

$$5 \cdot S(2n) = \sum_{i=0}^{k} 5 \cdot S(2a_i) \geq \sum_{i=0}^{k} S(a_i) = S(n),$$

de donde se sigue el resultado.

Finalmente, consideremos el número $n = \underbrace{33\ldots3}_{6028}6$.

Tenemos que,

$$3n = 1\underbrace{00\ldots0}_{6028}8, \quad S(3n) = 9 \ \text{ y } \ S(n) = 3(6028) + 6 = 18090 = 2010 \cdot S(3n).$$

Olimpiadas Internacionales

American Mathematics Competition (AMC)

En el mes de marzo se pidió al comité de la olimpiada de Estados Unidos de América, el examen de la primera fase que aplican a nivel nacional. Dicho examen consta de dos niveles: AMC 10 y AMC 12. El nivel 10 es para los estudiantes que están cursando a lo más primero de preparatoria, y el nivel 12 para aquellos que están en segundo o tercero. En cada nivel los concursantes tienen 75 minutos para resolver el examen y el puntaje máximo posible es de 150 puntos. Los estudiantes mexicanos que en ese momento eran parte de la preselección para la Olimpiada Centroamericana y del Caribe, presentaron el examen AMC 10. Los tres primeros lugares fueron: Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco), con 121.5 puntos, Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco), con 99 puntos, y Gustavo Humberto Vargas de los Santos (Campeche), con 99 puntos. Por otra parte, los estudiantes que en ese momento eran parte de la preselección para las Olimpiadas Iberoamericana e Internacional, presentaron el examen AMC 12. Los tres primeros lugares del equipo mexicano fueron: Flavio Hernández González (Aguascalientes), con 117 puntos, Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco), con 113 puntos, y Daniel Perales Anaya (Morelos), con 108 puntos.

A continuación presentamos los exámenes del concurso AMC (American Mathematics Competition) de este año.

AMC $10A$

Problema 1. Un plan de teléfono celular cuesta 20 dólares cada mes, más 5 centavos por mensaje de texto enviado, más 10 centavos por cada minuto utilizado después de 30 minutos. En enero Michelle envío 100 mensajes de texto y habló durante 30.5 horas. ¿Cuánto es lo que debe pagar?

(a) $\$24$ (b) $\$24.50$ (c) $\$25.50$ (d) $\$28$ (e) $\$30$

Problema 2. Una botella pequeña de shampoo puede contener 35 mililítros de shampoo, mientras que una botella grande puede contener 500 mililítros. Jasmine quiere comprar el mínimo número necesario de botellas pequeñas para llenar totalmente una botella grande. ¿Cuántas botellas debe comprar?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 3. Suponga que $[a\,b]$ denota el promedio de a y b, y $\{a\,b\,c\}$ denota el promedio de a, b y c. ¿Cuánto vale $\{\{1\,1\,0\}[0\,1]\,0\}$?

(a) $\frac{2}{9}$ (b) $\frac{5}{18}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{7}{18}$ (e) $\frac{2}{3}$

Problema 4. Sean $X = 10 + 12 + 14 + \cdots + 100$, $Y = 12 + 14 + 16 + \cdots + 102$. ¿Cuál es el valor de $Y - X$?

(a) 92 (b) 98 (c) 100 (d) 102 (e) 112

Problema 5. En una escuela primaria, los estudiantes de tercer, cuarto y quinto grado corren en promedio 12, 15 y 10 minutos por día, respectivamente. Hay el doble de estudiantes de tercer grado que de cuarto grado y el doble de estudiantes de cuarto que de quinto grado. ¿Cuál es el número promedio de minutos corridos por los estudiantes al día?

(a) 12 (b) $\frac{37}{3}$ (c) $\frac{88}{7}$ (d) 13 (e) 14

Problema 6. El conjunto A tiene 20 elementos y el conjunto B tiene 15 elementos. ¿Cuál es el menor número de elementos de $A \cup B$, la unión de A y B?

(a) 5 (b) 15 (c) 20 (d) 35 (e) 300

Problema 7. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones no tiene soluciones?

(a) $(x + 7)^2 = 0$ (b) $|-3x| + 5 = 0$ (c) $\sqrt{-x} - 2 = 0$ (d) $\sqrt{x} - 8 = 0$
(e) $|-3x| - 4 = 0$

Problema 8. El verano pasado el $30\,\%$ de las aves que vivían en Ciudad Lago eran gansos, $25\,\%$ eran cisnes, $10\,\%$ eran garzas y $35\,\%$ eran patos. ¿Qué porcentaje de las aves que no eran cisnes eran gansos?

(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50 (e) 60

Problema 9. Una región rectangular está limitada por las gráficas de las ecuaciones $y = a$, $y = -b$, $x = -c$ y $x = d$, donde a, b, c y d son números positivos. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa el área de la región?

(a) $ac + ad + bc + bd$ (b) $ac - ad + bc - bd$ (c) $ac + ad - bc - bd$

(d) $-ac - ad + bc + bd$ (e) $ac - ad - bc + bd$

Problema 10. La mayoría de los estudiantes de la clase del Sr. Gómez compraron lápices en la librería de la escuela. Cada estudiante compró el mismo número de lápices y este número es mayor que 1. El precio en centavos de cada lápiz es mayor que el número de lápices que cada estudiante compró y el costo total de todos los lápices fue de 17.71 dólares. ¿Cuál es el precio en centavos de cada lápiz?

(a) 7 (b) 11 (c) 17 (d) 23 (e) 77

Problema 11. El cuadrado $EFGH$ tiene un vértice en cada lado del cuadrado $ABCD$. El punto E está en AB de manera que $AE = 7EB$. ¿Cuál es la razón entre el área de $EFGH$ y el área de $ABCD$?

(a) $\frac{49}{64}$ (b) $\frac{25}{32}$ (c) $\frac{7}{8}$ (d) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$ (e) $\frac{\sqrt{14}}{4}$

Problema 12. Los jugadores de un equipo de basquetbol hicieron tiros que valen 3 puntos, otros que valen 2 puntos y algunos tiros libres que valen 1 punto. Anotaron la misma cantidad de puntos con los tiros de 2 puntos que con los tiros de 3 puntos. El número de tiros libres exitosos es mayor en 1 que el número de tiros exitosos de 2 puntos. Si el puntaje final del equipo fue de 61 puntos, ¿cuántos tiros libres hicieron?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 13. ¿Cuántos enteros pares, entre 200 y 700, existen tales que todos sus dígitos son diferentes y pertenecen al conjunto $\{1, 2, 5, 7, 8, 9\}$?

(a) 12 (b) 20 (c) 72 (d) 120 (e) 200

Problema 14. Un par de dados de 6 caras son lanzados. La suma de los números que se obtiene es el diámetro de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del círculo sea menor que el perímetro?

(a) $\frac{1}{36}$ (b)$\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{5}{18}$

Problema 15. Roy compró un coche híbrido, eléctrico-gasolina. En un viaje, las primeras 40 millas el coche utilizó únicamente la bateria eléctrica y el resto del viaje utilizó exclusivamente gasolina, gastando 0.02 galones por milla. Si en todo el viaje tuvo un promedio de 55 millas por galón, ¿cuántas millas recorrió en el viaje?

(a) 140 (b) 240 (c) 440 (d) 640 (e) 840

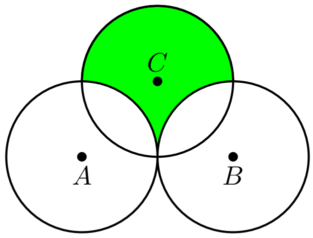
Problema 16. La expresión $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}}$ es igual a:

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{6}$ (c) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ (d) $3\sqrt{3}$ (e) 6

Problema 17. En la secuencia de 8 términos A, B, C, D, E, F, G, H el valor de C es 5 y la suma de cualesquiera tres términos consecutivos es 30. ¿Cuánto vale $A + H$?

(a) 17 (b) 18 (c) 25 (d) 26 (e) 43

Problema 18. Cada uno de los círculos tiene radio 1. Los círculos con centros A y B son tangentes. Si el círculo con centro C es tangente con el punto medio del segmento AB, ¿cuánto vale el área sombreada?



(a) $3 - \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{3\pi}{4}$ (e) $1 + \frac{\pi}{2}$

Problema 19. En 1991 la población de cierta ciudad era un cuadrado perfecto. Diez años después, el número de habitantes se incrementó en 150 personas y la población era un cuadrado perfecto más 9. Hoy, en 2011, con el incremento de 150 personas más, la población es de nuevo un cuadrado perfecto. ¿Cuál de los siguientes números está más cerca del porcentaje de crecimiento de la población de la ciudad durante este período de veinte años?

(a) 42 (b) 47 (c) 52 (d) 57 (e) 62

Problema 20. Dos puntos en una circunferencia de radio r son seleccionados de forma independiente y al azar. Para cada punto, se dibuja en la dirección de las manecillas del reloj una cuerda de longitud r. ¿Cuál es la probabilidad de que dos cuerdas se intersecten?

(a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Problema 21. Dos monedas falsas de igual peso se mezclan con 8 monedas idénticas y auténticas. El peso de cada una de las monedas falsas es diferente al peso de cada una de las monedas auténticas. De las 10 monedas, se seleccionan 2 al azar y sin reemplazamiento. De las 8 monedas restantes, se eligen otras 2 al azar y sin reemplazamiento. Si el peso total del primer par de monedas seleccionadas es igual al peso total del segundo par, ¿cuál es la probabilidad de que las 4 monedas sean auténticas?

(a) $\frac{7}{11}$ (b) $\frac{9}{13}$ (c) $\frac{11}{15}$ (d) $\frac{15}{19}$ (e) $\frac{15}{16}$

Problema 22. Cada vértice de un pentágono $ABCDE$ se colorea. Hay 6 colores para elegir y cada diagonal debe tener los extremos de distinto color. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear?

(a) 2520 (b) 2880 (c) 3120 (d) 3250 (e) 3750

Problema 23. Siete estudiantes cuentan del 1 al 1000 de la siguiente manera:

- Alicia dice todos los números excepto el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números. Esto es, Alicia dice,

$$1, 3, 4, 6, 7, 9, \ldots, 997, 999, 1000.$$

- Bárbara dice todos los números que Alicia no dijo, excepto que también omite el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.
- Cándida dice todos los números que no dijeron Alicia y Bárbara, pero también omite el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.
- Diana, Elena y Fátima, dicen todos los números que no han dicho las estudiantes anteriores en orden alfabético, pero también omiten el número del medio de cada grupo consecutivo de tres números.
- Finalmente, Jorge dice el único número que nadie dijo.

¿Qué número dice Jorge?

(a) 37 (b) 242 (c) 365 (d) 728 (e) 998

Problema 24. Dos tetraedros regulares distintos tienen todos sus vértices en los vértices del mismo cubo unitario. ¿Cuál es el volumen de la región formada por la intersección de los tetraedros?

(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (d) $\frac{1}{6}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

Problema 25. Sea R una región cuadrada y $n \geq 4$ un entero. Un punto X en el interior de R se llama "particional n-rayos", si existen n rayos saliendo de X que dividen a R en n triángulos de la misma área. ¿Cuántos puntos son "particional 100-rayos" pero no son "particional 60-rayos"?

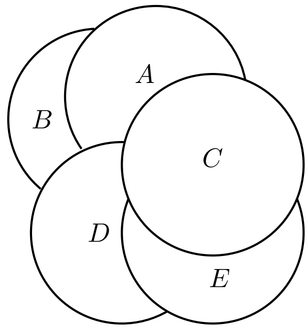
(a) 1500 (b) 1560 (c) 2320 (d) 2480 (e) 2500

AMC $12A$

Problema 1. Un plan de teléfono celular cuesta 20 dólares cada mes, más 5 centavos por mensaje de texto enviado, más 10 centavos por cada minuto utilizado después de 30 minutos. En enero Michelle envío 100 mensajes de texto y habló durante 30.5 horas. ¿Cuánto es lo que debe pagar?

(a) $\$24$ (b) $\$24.50$ (c) $\$25.50$ (d) $\$28$ (e) $\$30$

Problema 2. Hay 5 monedas colocadas sobre una mesa como se muestra en la figura.



¿Cuál es el orden de las monedas de arriba hacia abajo?

(a) (C, A, E, D, B) (b) (C, A, D, E, B) (c) (C, D, E, A, B)
(d) (C, E, A, D, B) (e) (C, E, D, A, B)

Problema 3. Una botella pequeña de shampoo puede contener 35 mililítros de shampoo, mientras que una botella grande puede contener 500 mililítros. Jasmine quiere comprar el mínimo número necesario de botellas pequeñas para llenar totalmente una botella grande. ¿Cuántas botellas debe comprar?

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 14 (e) 15

Problema 4. En una escuela primaria, los estudiantes de tercer, cuarto y quinto grado corren en promedio 12, 15 y 10 minutos por día, respectivamente. Hay el doble de estudiantes de tercer grado que de cuarto grado y el doble de estudiantes de cuarto que de quinto grado. ¿Cuál es el número promedio de minutos corridos por los estudiantes al día?

(a) 12 (b) $\frac{37}{3}$ (c) $\frac{88}{7}$ (d) 13 (e) 14

Problema 5. El verano pasado el $30\,\%$ de las aves que vivían en Ciudad Lago eran gansos, $25\,\%$ eran cisnes, $10\,\%$ eran garzas y $35\,\%$ eran patos. ¿Qué porcentaje de las aves que no eran cisnes eran gansos?

(a) 20 (b) 30 (c) 40 (d) 50 (e) 60

Problema 6. Los jugadores de un equipo de basquetbol hicieron tiros que valen 3 puntos, otros que valen 2 puntos y algunos tiros libres que valen 1 punto. Anotaron la misma cantidad de puntos con los tiros de 2 puntos que con los tiros de 3 puntos. El número de tiros libres exitosos es mayor en 1 que el número de tiros exitosos de 2 puntos. Si el puntaje final del equipo fue de 61 puntos, ¿cuántos tiros libres hicieron?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 7. La mayoría de los estudiantes de la clase del Sr. Gómez compraron lápices en la librería de la escuela. Cada estudiante compró el mismo número de lápices y este número es mayor que 1. El precio en centavos de cada lápiz es mayor que el número de lápices que cada estudiante compró y el costo total de todos los lápices fue de 17.71 dólares. ¿Cuál es el precio en centavos de cada lápiz?

(a) 7 (b) 11 (c) 17 (d) 23 (e) 77

Problema 8. En la secuencia de 8 términos A, B, C, D, E, F, G, H el valor de C es 5 y la suma de cualesquiera tres términos consecutivos es 30. ¿Cuánto vale $A + H$?

(a) 17 (b) 18 (c) 25 (d) 26 (e) 43

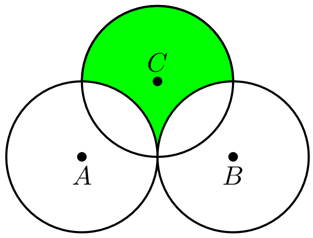
Problema 9. En una convención de gemelos y trillizos, había 9 conjuntos de gemelos y 6 conjuntos de trillizos, todos de familias distintas. Cada gemelo le dio la mano a todos los gemelos excepto a su hermano(a) y a la mitad de los trillizos. Cada trillizo dio la mano a todos los trillizos excepto a sus hermanos (hermanas) y a la mitad de los gemelos. ¿Cuántos apretones de manos hubo?

(a) 324 (b) 441 (c) 630 (d) 648 (e) 882

Problema 10. Un par de dados de 6 caras son lanzados. La suma de los números que se obtiene es el diámetro de un círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que el área del círculo sea menor que el perímetro?

(a) $\frac{1}{36}$ (b) $\frac{1}{12}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $\frac{1}{4}$ (e) $\frac{5}{18}$

Problema 11. Cada uno de los círculos tiene radio 1. Los círculos con centros A y B son tangentes. Si el círculo con centro C es tangente con el punto medio del segmento AB, ¿cuánto vale el área sombreada?



(a) $3-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 2 (d) $\frac{3\pi}{4}$ (e) $1+\frac{\pi}{2}$

Problema 12. Una lancha de motor y una balsa partieron desde el muelle A río abajo. La balsa recorrió la distancia hasta el muelle B a la velocidad de la corriente del río. La lancha de motor se mantuvo a una velocidad constante con respecto al río. La lancha de motor llegó al muelle B, e inmediatamente giró y viajó de regreso río arriba. Se encontró con la balsa 9 horas después de dejar el muelle A. ¿Cuántas horas le tomó a la lancha de motor ir del muelle A al muelle B?

(a) 3 (b) 3.5 (c) 4 (d) 4.5 (e) 5

Problema 13. En un triángulo ABC, se tiene que $AB = 12$, $BC = 24$ y $AC = 18$. La recta que pasa por el incentro del triángulo ABC y es paralela a BC, intersecta al segmento AB en el punto M y al segmento AC en el punto N. ¿Cuál es el perímetro del triángulo AMN?

(a) 27 (b) 30 (c) 33 (d) 36 (e) 42

Problema 14. Supongamos que a y b son enteros positivos de un solo dígito elegidos de manera independiente y al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el punto (a, b) se encuentre por encima de la parábola $y = ax^2 - bx$?

(a) $\frac{11}{81}$ (b) $\frac{13}{81}$ (c) $\frac{5}{27}$ (d) $\frac{17}{81}$ (e) $\frac{19}{81}$

Problema 15. La base circular de una semiesfera de radio 2 está sobre la base de una pirámide cuadrangular de altura 6. La semiesfera es tangente a las otras 4 caras de la pirámide. ¿Cuál es la longitud de cada arista de la base de la pirámide?

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $\frac{13}{3}$ (c) $4\sqrt{2}$ (d) 6 (e) $\frac{13}{2}$

Problema 16. Cada vértice de un pentágono $ABCDE$ se colorea. Hay 6 colores para elegir y cada diagonal debe tener los extremos de distinto color. ¿Cuántas maneras diferentes hay de colorear?

(a) 2520 (b) 2880 (c) 3120 (d) 3250 (e) 3750

Problema 17. Tres círculos de radios 1, 2 y 3 son tangentes externamente dos a dos. ¿Cuál es el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia?

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) 1 (d) $\frac{6}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

Problema 18. Supongamos que $|x+y|+|x-y|=2$. ¿Cuál es el valor mayor posible de x^2-6x+y^2?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 19. En una competencia con N jugadores, el número de jugadores con status VIP es igual a

$$2^{1+\lfloor \log_2(N-1)\rfloor}-N.$$

Suponiendo que 19 jugadores tienen status VIP, ¿cuál es la suma de los dos más pequeños valores de N? (Nota: $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

(a) 38 (b) 90 (c) 154 (d) 406 (e) 1024

Problema 20. Sea $f(x)=ax^2+bx+c$, donde a, b y c son enteros. Supongamos que $f(1)=0$, $50<f(7)<60$, $70<f(8)<80$, y $5000k<f(100)<5000(k+1)$ para algún entero k. ¿Cuál es el valor de k?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 21. Sean $f_1(x)=\sqrt{1-x}$ y $f_n(x)=f_{n-1}(\sqrt{n^2-x})$ para cada entero $n\geq 2$. Si N es el mayor valor de n para el cual el dominio de f_n es no vacío, el dominio de f_N es $\{c\}$. ¿Cuál es el valor de $N+c$?

(a) -226 (b) -144 (c) -20 (d) 20 (e) 144

Problema 22. Sea R una región cuadrada y $n\geq 4$ un entero. Un punto X en el interior de R se llama "particional n-rayos", si existen n rayos saliendo de X que dividen a R en n triángulos de la misma área. ¿Cuántos puntos son "particional 100-rayos" pero no son "particional 60-rayos"?

(a) 1500 (b) 1560 (c) 2320 (d) 2480 (e) 2500

Problema 23. Sean $f(z)=\frac{z+a}{z+b}$ y $g(z)=f(f(z))$, donde a y b son números complejos. Supongamos que $|a|=1$ y que $g(g(z))=z$ para todo z tal que $g(g(z))$ está definido. ¿Cuál es la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de $|b|$?

(a) 0 (b) $\sqrt{2}-1$ (c) $\sqrt{3}-1$ (d) 1 (e) 2

Problema 24. Considere todos los cuadriláteros $ABCD$ tales que $AB=14$, $BC=9$, $CD=7$ y $DA=12$. ¿Cuál es el radio del círculo más grande que cabe dentro de tal cuadrilátero?

(a) $\sqrt{15}$ (b) $\sqrt{21}$ (c) $2\sqrt{6}$ (d) 5 (e) $2\sqrt{7}$

Problema 25. En el triángulo ABC se tiene que $\angle BAC = 60°$, $\angle CBA \leq 90°$, $BC = 1$ y $AC \geq AB$. Sean H, I y O el ortocentro, incentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente. Supongamos que el área del pentágono $BCOIH$ es la mayor posible. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle CBA$?

(a) $60°$ (b) $72°$ (c) $75°$ (d) $80°$ (e) $90°$

XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe

Del 16 al 26 de junio de 2011 se celebró en Colima, México, la XIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. México ocupó el primer lugar, con 118 puntos, de entre los 13 países que participaron. Éste es el puntaje más alto que se ha obtenido en una Olimpiada Centroamericana.

La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco), Enrique Chiu Han (Distrito Federal) y Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco). Todos ellos obtuvieron medalla de oro. Enrique obtuvo 41 puntos de un total de 42, Adán obtuvo 40 puntos y Juan Carlos obtuvo 37 puntos.

A continuación presentamos los exámenes de la XIII Olimpiada Centroamericana y del Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Problema 2. Sean ABC un triángulo escaleno, D el pie de la altura desde A, E la intersección del lado AC con la bisectriz del $\angle ABC$, y F un punto sobre el lado AB. Sea O el circuncentro del triángulo ABC y sean X, Y, Z los puntos donde se cortan las rectas AD con BE, BE con CF, CF con AD, respectivamente. Si XYZ es un triángulo equilátero, demuestra que uno de los triángulos OXY, OYZ, OZX es un triángulo equilátero.

Problema 3. *Aplicar un desliz* a un entero $n \geq 2$ significa tomar cualquier primo p que divida a n y reemplazar n por $\frac{n+p^2}{p}$.
Se comienza con un entero cualquiera mayor o igual a 5 y se le aplica un desliz. Al

número así obtenido se le aplica un desliz, y así sucesivamente se siguen aplicando deslices. Demuestra que sin importar los deslices aplicados, en algún momento se obtiene el número 5.

Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos p, q y r, con p y q números primos, que satisfacen la igualdad:

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{q+1}-\frac{1}{(p+1)(q+1)}=\frac{1}{r}.$$

Problema 5. Los números reales positivos x, y, z son tales que,

$$x+\frac{y}{z}=y+\frac{z}{x}=z+\frac{x}{y}=2.$$

Determina todos los valores posibles de $x+y+z$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Sean Y y Z los pies de las perpendiculares desde B y C sobre FD y DE, respectivamente. Sea F_1 la reflexión de F con respecto a E y sea E_1 la reflexión de E con respecto a F. Si $3EF = FD + DE$, demuestra que $\angle BZF_1 = \angle CYE_1$.
Nota: La reflexión de un punto P respecto a un punto Q es el punto P_1 ubicado sobre la recta PQ tal que Q queda entre P y P_1, y $PQ = QP_1$.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se aplica y califica en México. Los 10 mejores exámenes se enviaron a Japón para ser evaluados por el comité japonés. Los alumnos que obtuvieron medalla fueron: Daniel Perales Anaya (Morelos), Flavio Hernández González (Aguascalientes) y Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León) con medalla de plata; Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato), Fernando Josafath Añorve López (Nuevo León), Georges Belanger Albarrán (Morelos) y Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco), con medalla de bronce; Ángel Adrián Domínguez Lozano (Nuevo León), Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco) y José Naín Rivera Robles (Querétaro) obtuvieron una mención honorífica. México ocupó el lugar número 14 de los 34 países participantes.

A continuación presentamos el examen y sus soluciones de la XXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlo.

Problema 1. Sean a, b, c enteros positivos. Muestra que es imposible que los tres números a^2+b+c, b^2+c+a y c^2+a+b sean cuadrados perfectos al mismo tiempo.

Solución de Flavio Hernández González. Supongamos lo contrario, es decir, que los tres números a^2+b+c, b^2+c+a y c^2+a+b son cuadrados perfectos al mismo tiempo. Entonces, como a, b y c son enteros positivos tenemos que,

$$\begin{aligned} a^2+b+c &> a^2, \\ b^2+c+a &> b^2, \\ c^2+a+b &> c^2, \end{aligned}$$

y como son cuadrados perfectos deben ser al menos el siguiente cuadrado perfecto, luego, $a^2+b+c \geq (a+1)^2$, $b^2+c+a \geq (b+1)^2$ y $c^2+a+b \geq (c+1)^2$. Entonces, $a^2+b+c \geq a^2+2a+1$, $b^2+c+a \geq b^2+2b+1$ y $c^2+a+b \geq c^2+2c+1$, de donde, $b+c \geq 2a+1$, $c+a \geq 2b+1$ y $a+b \geq 2c+1$. Luego,

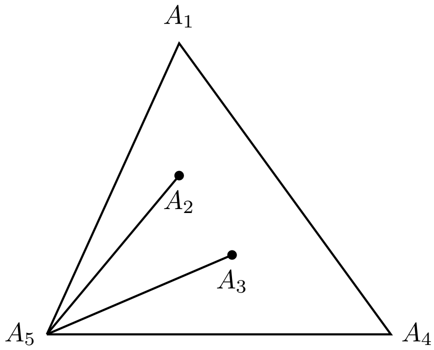
$$\begin{aligned} (b+c)+(c+a)+(a+b) &\geq (2a+1)+(2b+1)+(2c+1) \\ 2a+2b+2c &\geq 2a+2b+2c+3 \\ 0 &\geq 3, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, no es posible que los tres números a^2+b+c, b^2+c+a y c^2+a+b sean cuadrados perfectos al mismo tiempo.

Problema 2. Considera cinco puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 en el plano de tal forma que no haya tres colineales. Determina el valor máximo posible que puede tomar el valor mínimo entre los ángulos $\angle A_iA_jA_k$ donde i, j, k son enteros distintos entre 1 y 5.

Solución de Daniel Perales Anaya. Demostraremos que $36°$ es la respuesta.
Nos fijamos en la envolvente convexa de los cinco puntos (ver en el apéndice la definición 21). Hay 3 casos:

1. La envolvente es un triángulo. Sabemos que los 3 ángulos suman $180°$, y por lo tanto habrá uno menor o igual a $\frac{180°}{3} = 60°$. Supongamos que este ángulo es $\angle A_1A_5A_4$.

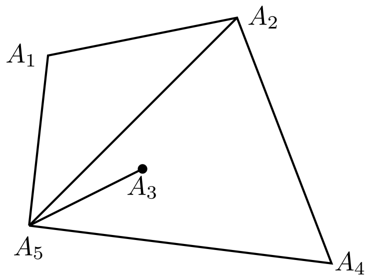


Supongamos que giramos la línea A_5A_1 con centro A_5 en dirección a A_4, entonces nos encontramos primero con A_2 y luego con A_3 (que sabemos están dentro del triángulo). Entonces,

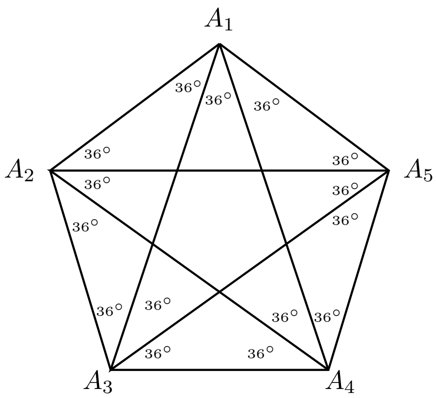
$$\frac{\angle A_1A_5A_2 + \angle A_2A_5A_3 + \angle A_3A_5A_4}{3} = \frac{\angle A_1A_5A_4}{3} \leq \frac{60°}{3} = 20°.$$

Por lo tanto, sabemos que alguno de los tres ángulos será menor que $20°$ y por lo tanto el menor ángulo será menor que $20°$.

2. La envolvente es un cuadrilátero. Como los 4 ángulos del cuadrilátero suman $360°$, el menor de ellos, digamos $\angle A_1A_5A_4$, es menor o igual a $\frac{360°}{4} = 90°$. De la misma forma como dos de los puntos quedan dentro del ángulo $\angle A_1A_5A_4$ podemos dividir este ángulo en 3 ángulos, y por lo tanto, el menor de estos tres será menor o igual a $\frac{90°}{3} = 30°$.



3. La envolvente es un pentágono. Entonces la suma de los 5 ángulos del pentágono es $3(180°) = 540°$, y por lo tanto el menor de los cuatro será menor o igual a $\frac{360°}{5} = 108°$. Sabemos que dentro de este ángulo habrán 2 puntos, por lo que podremos dividir este ángulo en 3 ángulos cuya suma será igual a dicho ángulo, y por lo tanto menor o igual a $108°$. Entonces el menor de los ángulos será menor o igual a $36°$.
Para ver que efectivamente $36°$ es la respuesta, consideremos los vértices de un pentágono regular como se muestra en la figura. En esta, el valor mínimo de los ángulos es justo $36°$.



Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle BAC = 30°$. La bisectriz interior y la bisectriz exterior del ángulo $\angle ABC$ intersectan a la recta AC en B_1 y B_2, respectivamente. La bisectriz interior y la bisectriz exterior del ángulo $\angle ACB$ intersectan

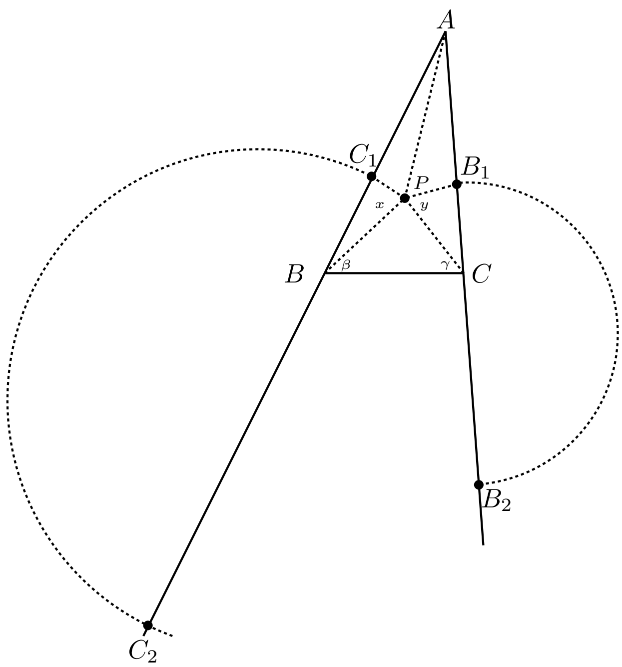
a la recta AB en C_1 y C_2, respectivamente. Suponga que los círculos con diámetros B_1B_2 y C_1C_2 se intersectan dentro del triángulo ABC en el punto P. Muestra que $\angle BPC = 90°$.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Sean Ω_C la circunferencia de diámetro C_1C_2 y Ω_B la circunferencia de diámetro B_1B_2. Tenemos que,

$$\angle C_1CC_2 = \angle C_1CB + \angle BCC_2 = \frac{\angle ACB}{2} + \frac{180° - \angle ACB}{2} = 90°,$$

entonces C pertenece a Ω_C. Similarmente, B pertenece a Ω_B, entonces Ω_C y Ω_B son circunferencias de Apolonio. Entonces PB_1 es bisectriz de $\angle APC$ y PC_1 es bisectriz de $\angle APB$. Sean $\angle BPC_1 = \angle C_1PA = x$ y $\angle CPB_1 = \angle B_1PA = y$. Tenemos que $2x + 2y + \angle BPC = 360°$. Sean $\angle ACB = 2\gamma$ y $\angle ABC = 2\beta$, entonces,

$$\begin{aligned}
\angle BPB_1 &= 180° - \angle BB_2B_1 = 180° - \angle BB_2C \\
&= \angle CBB_2 + \angle BCB_2 = \frac{\angle CBC_2}{2} + 180° - \angle BCA \\
&= \frac{180° - 2\beta}{2} + (180° - 2\gamma) = 90° + 180° - \beta - 2\gamma \\
&= (180° - 2\beta - 2\gamma) + \beta + 90° = 120° + \beta.
\end{aligned}$$



De manera similar tenemos que $\angle C_1PC = 120° + \gamma$.
Entonces,

$$\angle C_1PC = 120 + \gamma = \angle BPC + \angle C_1PB = \angle BPC + x,$$

$$\angle B_1PB = 120 + \beta = \angle BPC + \angle CPB_1 = \angle BPC + y.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\angle BPC &= \frac{4\angle BPC + 2x + 2y - (\angle BPC + 2x + 2y)}{3} \\
&= \frac{2\angle C_1PC + 2\angle B_1PB - 360^\circ}{3} \\
&= \frac{240^\circ + 2\gamma + 240^\circ + 2\beta - 360^\circ}{3} = \frac{120^\circ + 2\gamma + 2\beta}{3} \\
&= \frac{90^\circ + (2\gamma + 2\beta + 30^\circ)}{3} = \frac{180^\circ + 90^\circ}{3} = 90^\circ.
\end{aligned}$$

Problema 4. Sea n un entero positivo impar fijo. Considera $m+2$ puntos distintos P_0, P_1, $\ldots$, P_{m+1} (donde m es un entero no negativo) en el plano cartesiano, de tal manera que las siguientes tres condiciones se satisfacen:

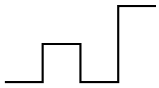
(1) $P_0 = (0,1)$, $P_{m+1} = (n+1, n)$, y para cada entero i, $1 \leq i \leq m$ ambas coordenadas x, y de P_i son enteros entre 1 y n, (1 y n, inclusive).

(2) Para cada entero i, $0 \leq i \leq m$, P_iP_{i+1} es paralelo al eje x si i es par, y es paralelo al eje y si i es impar.

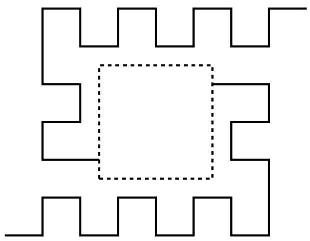
(3) Para cada par i, j con $0 \leq i < j \leq m$, los segmentos P_iP_{i+1} y P_jP_{j+1} comparten a lo más un punto.

Determina el máximo valor posible que m puede tomar.

Solución. Demostraremos que el valor máximo buscado para m es $n(n-1)$. Primero demostraremos que $m \leq n(n-1)$ siempre se cumple para cualquier sucesión $P_0, P_1, \ldots, P_{m+1}$ que satisface las condiciones del problema.
Diremos que un punto es un *vértice* si coincide con P_i para algún i con $1 \leq i \leq m$. Diremos también que 2 puntos $\{P, Q\}$ son *adyacentes* si $\{P, Q\} = \{P_{i-1}, P_i\}$ para algún i con $1 \leq i \leq m$, y *verticalmente adyacentes* si, además de ser adyacentes, PQ es paralela al eje de las y.
Cualquier vértice es verticalmente adyacente con exactamente otro vértice. Por lo tanto, el conjunto de todos los vértices se particiona en un conjunto de parejas de puntos usando la relación de "adyacencia vertical". Luego, concluimos que para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fijo, el número de vértices con coordenada en x igual a k es un número par, de modo que este número par es menor o igual que $n-1$. Por lo tanto, en total hay a lo más $n(n-1)$ vértices, lo que significa que $m \leq n(n-1)$.
Falta demostrar entonces que para cualquier entero positivo impar n existe una sucesión para la cual $m = n(n-1)$. Demostraremos esto por inducción en n. Si $n = 1$, esto es claro. Si $n = 3$, elegimos $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (1,2)$, $P_3 = (2,2)$, $P_4 = (2,1)$, $P_5 = (3,1)$, $P_6 = (3,3)$, y $P_7 = (4,3)$.
Es fácil ver que estos puntos satisfacen las condiciones (ver figura).



Sea n un entero impar mayor o igual que 5, y supongamos que existe una sucesión que satisface las condiciones para $n-4$. Entonces, es posible construir una sucesión la cual da una configuración indicada en el siguiente diagrama, donde la configuración interior del cuadrado punteado está dada por la hipótesis de inducción.



Por hipótesis de inducción hay exactamente $(n-4)(n-5)$ vértices para la configuración dentro del cuadrado punteado de la figura anterior, y todos los puntos latice en la figura anterior que están afuera del cuadrado punteado, excepto los 4 puntos $(n,2), (n-1,n-2), (2,3), (1,n-1)$, son vértices. Por lo tanto, el número total de vértices en esta configuración es,

$$(n-4)(n-5) + (n^2 - (n-4)^2 - 4) = n(n-1),$$

lo que significa que para este valor n existe una sucesión que satisface las condiciones requeridas, lo que completa la inducción.

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de todos los números reales, que satisfacen las siguientes dos condiciones:

(1) Existe un número real M tal que para cada número real x, se cumple $f(x) < M$.

(2) Para cada par de números reales x y y, se cumple que

$$f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy).$$

Solución. Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$ en la identidad dada tenemos que $f(f(1)) = f(1)$. Ahora, sustituyendo $x = 1$, $y = f(1)$ y usando que $f(f(1)) = f(1)$, obtenemos que $(f(1))^2 = f(1)$, de donde se sigue que $f(1) = 0$ o $f(1) = 1$. Si $f(1) = 1$, entonces al sustituir $y = 1$ en la identidad dada obtenemos que $f(x) = x$ para todo x, lo que contradice la condición (1). Por lo tanto, $f(1) = 0$.
Sustituyendo $x = 1$ en la identidad dada y usando que $f(1) = 0$, obtenemos que

$f(f(y)) = 2f(y)$ para todo y. Esto significa que si un número t pertenece a la imagen de la función f, entonces también pertenece el número $2t$, y por inducción podemos concluir que para cualquier entero no negativo n, el número $2^n t$ pertenece a la imagen de f si t lo cumple. Ahora supongamos que existe un número real a para el cual $f(a) > 0$. Entonces, para cualquier entero no negativo n, $2^n f(a)$ debe pertenecer a la imagen de f, lo que contradice la condición (1). Por lo tanto, concluimos que $f(x) \leq 0$ para todo número real x.
Sustituyendo $\frac{x}{2}$ en x y $f(y)$ en y en la identidad dada y usando que $f(f(y)) = 2f(y)$, obtenemos que,

$$f(xf(y)) + f(y)f\left(\frac{x}{2}\right) = xf(y) + f\left(\frac{x}{2}f(y)\right),$$

de donde se sigue que $xf(y) - f(xf(y)) = f(y)f(\frac{x}{2}) - f(\frac{x}{2}f(y)) \geq 0$, ya que los valores de f no son positivos. Combinando esto con la identidad inicial, concluimos que $yf(x) \geq f(xy)$. Cuando $x > 0$, sustituyendo y por $\frac{1}{x}$ y usando que $f(1) = 0$, obtenemos que $f(x) \geq 0$. Como $f(x) \leq 0$ para todo número real x, concluimos que $f(x) = 0$ para todo número real positivo x. También tenemos que $f(0) = f(f(1)) = 2f(1) = 0$.
Si f es idénticamente cero, es decir, $f(x) = 0$ para todo x, entonces es claro que f satisface en este caso la identidad inicial. Si f satisface la identidad inicial pero no es idénticamente cero, entonces existe $b < 0$ tal que $f(b) < 0$. Si hacemos $c = f(b)$, entonces tenemos que $f(c) = f(f(b)) = 2f(b) = 2c$. Para cualquier número real negativo x tenemos que $cx > 0$ de modo que $f(cx) = f(2cx) = 0$, y sustituyendo $y = c$ en la identidad inicial obtenemos,

$$f(2cx) + cf(x) = 2cx + f(cx),$$

de donde se sigue que $f(x) = 2x$ para todo número real negativo x.
Por lo tanto, concluimos que si f satisface la identidad inicial y no es idénticamente cero, entonces f está definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$
Por último demostraremos que esta función satisface las condiciones del problema. Es claro que f satisface la condición (1). También se puede verificar que f satisface la condición (2) dividiendo en cuatro casos dependiendo si x, y son no negativos o negativos.

- Cuando x, y son ambos no negativos, cada lado de la identidad dada es igual a 0.
- Cuando x es no negativo y y es negativo, tenemos que $xy \leq 0$ y cada lado de la identidad dada es igual a $4xy$.
- Cuando x es negativo y y es no negativo, tenemos que $xy \leq 0$ y cada lado de la identidad dada es igual a $2xy$.
- Cuando x, y son ambos negativos, tenemos que $xy > 0$ y cada lado de la identidad dada es igual a $2xy$.

Por lo tanto, las funciones f que satisfacen las condiciones del problema son, $f(x) = 0$ y $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ 2x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, de julio a noviembre de 2011.

Julio, 16 al 24, Ámsterdam, Holanda

52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Agosto, del 11 al 21, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación para la XXVI Olimpiada Iberoamericana (un máximo de 4 alumnos).

Septiembre, primera semana

Límite para registro de delegados que quieran aplicar el examen propuesto por el Comité Organizador de la OMM como final de su Concurso Estatal y envío del examen a los delegados.

Septiembre, Costa Rica

XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Septiembre, 23 y 24

Aplicación de los exámenes finales en los estados registrados con este propósito.

Octubre

Publicación del doceavo número de la revista "Tzaloa".

Apéndice

Teorema 1 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [4].

Teorema 2 (Inducción fuerte) *El método de inducción fuerte se utiliza para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone que para algún entero $k \geq k_0$ la proposición $P(m)$ es verdadera para todo entero $k_0 \leq m \leq k$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.
Ver [4].

Teorema 3 (Principio de las casillas) *Dados al menos $nk+1$ objetos acomodados en n lugares, siempre hay un lugar con al menos $k+1$ objetos.*
Ver [5, 10].

Teorema 4 (Factorización en primos) *Todo entero n mayor que 1 puede expresarse como un producto de primos (con, tal vez, solamente un factor).*
Ver [6, 8].

Teorema 5 (Número de divisores) *Si la factorización en primos del entero n es $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son primos distintos, entonces el número de divisores positivos de n es igual a $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_r + 1)$.*
Ver [6, 8].

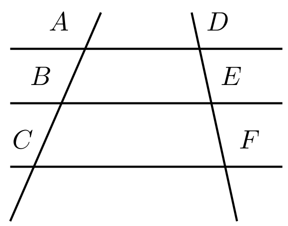
Definición 6 (Congruencias) *Dados dos números enteros a, b, y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m, si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*
Ver [9].

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, se tiene que*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

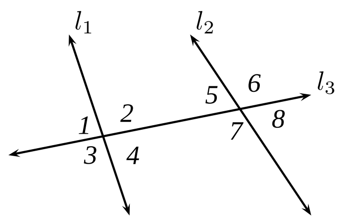
con la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Ver [3].

Teorema 8 (Teorema de Thales) *Consideremos dos rectas transversales a tres rectas como se muestra en la figura. Tenemos que si AD, BE y CF son paralelas entonces $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD, BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.*



Ver [1, 2].

Definición 9 (Ángulos entre paralelas) *Cuando una recta intersecta a otras dos rectas se forman ocho ángulos que numeramos del 1 al 8, como se muestra en la figura.*



Si la recta l_3 intersecta a las rectas l_1 y l_2, decimos que es **transversal** *a ellas. Los ángulos 2, 4, 5 y 7 están entre las rectas l_1 y l_2, los llamamos* **ángulos internos**, *los*

ángulos restantes los llamamos **ángulos externos***. Los ángulos en lados opuestos por la transversal* l_3 *se llaman* **ángulos alternos***, como por ejemplo* 3 *y* 5*. A los ángulos* 4 *y* 5 *les llamamos* **alternos internos** *y los ángulos* 3 *y* 6 *son* **alternos externos***.*
A los ángulos que están en la posición correspondiente respecto a la transversal, como por ejemplo 3 *y* 7 *los llamamos* **ángulos correspondientes***. Entonces, los pares de ángulos correspondientes en la figura anterior son* 3 *y* 7*,* 1 *y* 5*,* 4 *y* 8*,* 2 *y* 6*.*
Si l_1 *y* l_2 *son paralelas los ángulos alternos internos son iguales.*
Ver [2].

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$*.*
Ver [1, 2].

Teorema 11 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 2].

Definición 12 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo* ABC *son iguales a los ángulos y los lados del triángulo* $A'B'C'$*.*
Ver [1, 2].

Criterio 13 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que dos triángulos que tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama* **lado-ángulo-lado** *y lo denotamos como* **LAL***.*
Ver [1, 2].

Criterio 14 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio de congruencia se le llama* **lado-lado-lado** *y lo denotamos como* **LLL***.*
Ver [1, 2].

Definición 15 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos* ABC *y* $A'B'C'$ *son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\begin{aligned}\angle ABC &= \angle A'B'C'\\ \angle ACB &= \angle A'C'B'\\ \angle BAC &= \angle B'A'C'\end{aligned}$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1, 2].

Criterio 16 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1, 2].

Teorema 17 *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un mismo punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*
Ver [2].

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1, 2].

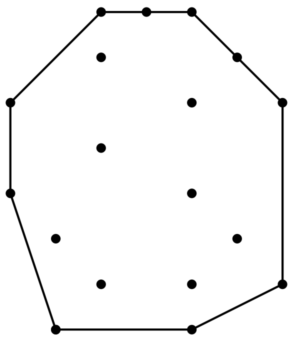
Definición 19 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [2].

Teorema 20 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir, si y sólo si*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [2].

Definición 21 (Envolvente convexa) *La envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en el plano es el polígono convexo más pequeño que contiene en su interior o en sus lados, a todos los puntos del conjunto.*



Bibliografía

[1] A. Baldor. *Geometría plana y del espacio*. Publicaciones Cultural, México, 1999.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM. Tercera edición, 2007.

[4] F. Ruiz Benjumeda. *Demostrando por Inducción*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 3, 2009.

[5] R. Grimaldi, *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. Addison Wesley Longman, Pearson. Tercera edición, 1998.

[6] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[7] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2000.

[8] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de Números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2003.

[9] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[10] P. Soberón Bravo. *El Principio de las Casillas*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2010.

[11] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Anne Alberro Semerena
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 81 03 80
Fax (777) 3 29 70 40
aalberro@uaem.mx

Octavio Arizmendi Echegaray
Calle Alhóndiga No. 10
Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 34 14 03
mor2_octavio@hotmail.com

Ignacio Barradas Bribiesca
Universidad de Guanajuato
L. de Retana #5, Centro
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 00 06 ext 2006
barradas@quijote.ugto.mx

Radmila Bulajich Manfrino
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
bulajich@uaem.mx

Gabriela Campero Arena
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 48 67
Fax (55) 56 22 48 66
gabriela@matematicas.unam.mx

Fernando Campos García
1a de Ángel Rico 85
AU.H. Vicente Guerrero
09200, Iztapalapa, Distrito Federal
Tel. (55) 34 63 75 43
fermexico89@hotmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 24 59 22
Fax (55) 56 22 48 59
jach@fciencias.unam.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, Distrito Federal
Tel. (55) 56 22 49 25
Fax (55) 56 22 48 59
cobian@matematicas.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Cd. Juárez
Av. Tomás Fernández 8945
32320, Cd. Juárez, Chihuahua
Tel. (656) 6 29 91 09
Fax (656) 6 29 91 01
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
SITE
Sistemas de Inteligencia Territorial Estratégica
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 01 40
fuerunt@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
Av. Universidad 3000
04510, México, D.F.
Tel. (55) 56 22 48 64
Fax (55) 56 22 48 64
jago@hp.fciencias.unam.mx

Jesús Jerónimo Castro
CIMAT
Apartado Postal 402
36000, Guanajuato, Guanajuato
Tel. (473) 7 32 71 55
Fax (473) 7 32 57 49
jeronimo@cimat.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Primera Cerrada de Alfalfares 41-2
Rinconada Coapa 1a Sección, Tlalpan
14330, México, D.F.
Tel. (55) 26 52 23 29
ssbmplayer@gmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Periférico norte tablaje 13615
97119, Mérida, Yucatán
Tel. (999) 942-3140 al 49
carlos.rubio@uady.mx

Elena Ruiz Velázquez
Altair 12, Col. Lomas de Palmira
62550, Cuernavaca, Morelos
Tel. (777) 320 54 39
Cel. (777) 133 39 83
eleniux@gmail.com
A00375640@itesm.mx

Carmen Sosa Garza
Facultad de Ingeniería, UAQ
Cerro de las Campanas s/n
Querétaro, Querétaro
Tel. (442) 1 92 12 64 ext. 121 136
Fax (442) 1 92 12 646
carsg@uaq.mx

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
Av. Universidad 1001
62210, Cuernavaca, Morelos.
Tel. (777) 3 29 70 20
Fax (777) 3 29 70 40
rogelio@matcuer.unam.mx

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
Cub. 4 de Becarios,
Circuito Exterior, Ciudad Universitaria
Coyoacán 04510,
México, D.F.
Tel. (55) 56 22 45 32
Cel. 55 33 52 36 27
vill_hugo@hotmail.com
hvillan@matem.unam.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
Callejón Jalisco s/n
Mineral de Valencia
36240, Guanajuato, Guanajuato.
Tel. (473) 73 23 587
dtorres@cimat.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
Calle Yucas 16, Vista Bella
83170, Hermosillo, Sonora.
Tel. (662) 2 19 10 07
hamsteritokeweb@hotmail.com

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://www.omm.unam.mx/