TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2012, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.omm.unam.mx

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Enero de 2012.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Tzaloa es una publicación de interés para un público amplio. Está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, pero debido a que su columna vertebral es la resolución de problemas, también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2012, Número 1

Todo indica que 2012 será un gran año para el movimiento olímpico mexicano. En 2011 las delegaciones mexicanas nos hicieron sentir orgullosos y los nuevos estándares alcanzados llenaron de luz al festejo por los XXV años de Olimpiadas de Matemáticas en México. Asimismo, estos éxitos fueron merecida corona al esfuerzo realizado por muchos y en particular al de Radmila Bulajich, cuya gestión al frente del Comité Organizador de la OMM seguramente será recordada como un período de mucho crecimiento, consolidación y grandes logros.

Es así, que iniciamos este 2012 llenos de entusiasmo. La elección del maestro José Antonio Gómez Ortega como nuevo presidente del Comité Organizador de la OMM no

[1] Palabra náhuatl cuyo significado es *aprender*.

pudo ser más acertada. El indiscutible y apasionado compromiso de José Antonio, junto con su profundo conocimiento del mundo olímpico, constituyen sobradas garantías de que durante esta nueva etapa, el movimiento olímpico mexicano seguirá madurando y alcanzando cada vez mayores alturas.

Pasando al contenido de este primer número del año, comenzamos destacando la contribución de Jacob Rubio, que nos presenta un artículo especial sobre el *Pequeño Teorema de Fermat*. Como viejo lobo de mar, el conocimento de Jacob sobre las olimpiadas termina provocando que este bello resultado clásico pueda ser valorado por el principiante y cobre un nuevo sentido para el más experimentado. Por eso y aunque el material aparezca clasificado bajo la etiqueta de *intermedio*, el principiante no debe intimidarse por ello. La claridad de la exposición, abundada con ejemplos cuidadosamente seleccionados, resultan en un artículo accesible pero al mismo tiempo profundo.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en tí.

De tal forma, que estando todo listo, sólo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero 2012.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 25 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado inumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1993. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2012-2013 y, para el 1° de julio de 2013, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.omm.unam.mx`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 11 al 17 de noviembre de 2012 en Guanajuato, Guanajuato. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2013: la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio; la 54ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Colombia en el mes de julio, y la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre.

El Pequeño Teorema de Fermat

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

Pierre de Fermat (1601-1665), era un concejal de la Audiencia Provincial de la Judicatura en Toulouse, al sur de Francia, que practicaba las matemáticas en su tiempo libre. Sus resultados los comunicaba a sus amigos a través de cartas, y al final resultó que sus obras influyeran significativamente en el desarrollo de la matemática moderna.

En la época de Fermat se tenía la siguiente "hipótesis china":

$$p \text{ es un número primo si y sólo si } 2^p \equiv 2 \pmod{p}.$$

En un sentido la hipótesis no es verdadera. En efecto, el número $2^{341} - 2$ es divisible entre 341, y $341 = 11 \times 31$ no es primo. Sin embargo, la otra dirección de la hipótesis es verdadera. A partir de los manuscritos y las cartas de Fermat se sabe que Fermat conocía (y lo más probable sabía la demostración) de los siguientes hechos:

1. Si n no es primo, entonces $2^n - 1$ no es primo.
2. Si n es primo, entonces $2^n - 2$ es múltiplo de $2n$.
3. Si n es primo y p es un divisor primo de $2^n - 1$, entonces $p - 1$ es múltiplo de n.

El primer enunciado se puede demostrar directamente al factorizar $2^n - 1$. En efecto, si $n = ab$, con $a > 1$ y $b > 1$, entonces,

$$\begin{aligned} 2^n - 1 &= 2^{ab} - 1 \\ &= (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \cdots + 1). \end{aligned}$$

Los otros dos enunciados son variaciones del siguiente resultado más general, indicado en otra de sus cartas: Dado un número primo p, y cualquier progresión geométrica

$1, a, a^2, \ldots,$ el número p debe dividir a algún número $a^n - 1$ con n divisor de $p-1$; luego, si N es cualquier múltiplo del menor de tales números n para los cuales se cumple lo anterior, entonces p divide también a $a^N - 1$.

En notación de congruencias, podemos reescribir el enunciado anterior de la siguiente manera, y al que nos referiremos como pequeño teorema de Fermat: *Si p es un número primo y a es cualquier entero, entonces $a^p \equiv a$ (mod p). En particular, si p no divide al entero a, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Fermat no publicó ninguna demostración del pequeño teorema de Fermat, y fue Leonard Euler (1707-1783) quien primero lo hizo por inducción.

Cuatro demostraciones del pequeño teorema de Fermat

El resultado es claro si $p = 2$. Así que asumiremos que $p > 2$. Observemos que si p es un primo impar, basta demostrar el resultado para $a > 0$ ya que si $a = -b \leq 0$, entonces $a^p \equiv (-b)^p \equiv -b^p \equiv -b \equiv a \pmod p$.

1. Primera demostración. Supongamos que $p \nmid a$ y demostremos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Consideremos los enteros $a, 2a, \ldots, (p-1)a$. Si tuviéramos que $ai \equiv aj \pmod p$ para ciertos enteros i, j, tales que $1 \leq i \leq p-1$ y $1 \leq j \leq p-1$, tendríamos que $p \mid a(i-j)$ y $p \mid i-j$, de donde $i = j$. Luego, los residuos de estos números son $1, 2, \ldots, p-1$ en algún orden y por lo tanto,

$$a(2a)\cdots(p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod p,$$

es decir,

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod p.$$

Como p y $(p-1)!$ son primos relativos, podemos dividir ambos lados de la congrencia anterior entre $(p-1)!$ (ver [2]) y por lo tanto $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

2. Segunda demostración. Procederemos por inducción en a. Si $a = 1$ el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para algún entero $k > 1$. Aplicando el teorema del binomio, tenemos que:

$$(k+1)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} k^{p-j} = k^p + \sum_{j=1}^{p-1} \binom{p}{j} k^{p-j} + 1.$$

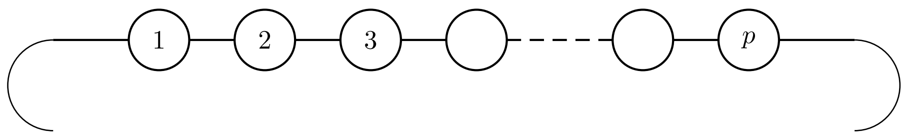
Como $\binom{p}{j} \equiv 0 \pmod p$ para $1 \leq j \leq p-1$ (ejercicio), tenemos que $(k+1)^p \equiv k^p + 1 \pmod p$ y por la hipótesis de inducción se sigue que $(k+1)^p \equiv k+1 \pmod p$. Por lo tanto, $a^p \equiv a \pmod p$ para todo entero positivo a.
Finalmente, $(a,p) = 1$ y $a(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod p$ implican que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

3. Tercera demostración. La haremos mediante un argumento combinatorio. Queremos demostrar que $a^p - a$ es múltiplo de p. Esto es equivalente a demostrar que el resultado de dividir $a^p - a$ entre p es un entero. Vamos a demostrar esto al establecer que esta fracción es igual al número de elementos en un conjunto particular, y por lo tanto debe ser un entero.

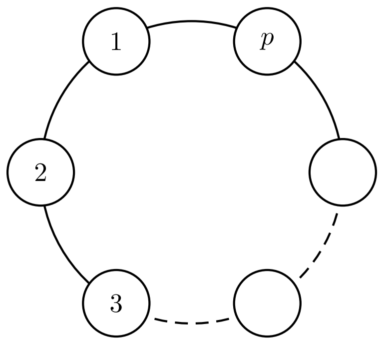
Supongamos que tenemos cuentas que vienen en a colores. Queremos seleccionar p de estas cuentas para formar una cadena con ellas. Está permitido repetir colores. Ya que estamos usando p cuentas, y cada una de ellas puede ser de cualquiera de los a colores, tenemos a^p secuencias de colores diferentes. Como es aburrido tener todas las cuentas del mismo color, pediremos que al menos se utilicen dos colores. Tenemos a cadenas en las cuales todas las cuentas son del mismo color. Restando estas del total, obtenemos $a^p - a$ cadenas en las cuales al menos se utilizan dos colores distintos.

Ahora vamos a unir los extremos de cada cadena para formar una pulsera. Cuando esto se hace, algunas de nuestras cadenas se vuelven indistinguibles. Por ejemplo, supongamos que sólo estuviéramos usando tres cuentas. Cuando las ponemos en una línea recta, la cadena con cuentas “verde, azul, naranja” parece distinta de la cadena con cuentas “azul, naranja, verde”. Pero si unimos los extremos de cada cadena, obtendríamos dos pulseras indistinguibles.

Cadena



Pulsera



Ahora nos preguntamos: “De las $a^p - a$ pulseras que usan al menos dos colores, ¿cuántas de ellas son indistinguibles entre sí?” La respuesta es que cada cadena de p cuentas puede ser cambiada cíclicamente sin producir una pulsera distinta. En nuestro ejemplo, las cadenas:

verde,	azul,	naranja;
azul,	naranja,	verde;
naranja,	verde,	azul;

todas se verán como la misma pulsera cuando los extremos de cada una estén unidos. Ya que cada uno de los p corrimientos cíclicos de una cadena dada nos genera pulseras indistinguibles, tenemos que el número de pulseras indistinguibles que usan al menos dos colores es igual a $\frac{a^p-a}{p}$, y como el número de tales pulseras es un entero, el resultado queda probado.

Ahora nos preguntamos en qué parte del argumento anterior usamos que p es un número primo. La respuesta está en el paso donde afirmamos que cada cadena dada se cuenta p diferentes veces, una por cada uno de los cambios cíclicos posibles. Esto es cierto para un número primo, pero no es cierto en general. Por ejemplo, supongamos que usamos seis cuentas y comenzamos con la cadena,

verde, azul, azul, verde, azul, azul.

Si movemos cíclicamente todas las cuentas una vez, obtenemos la cadena,

azul, azul, verde, azul, azul, verde,

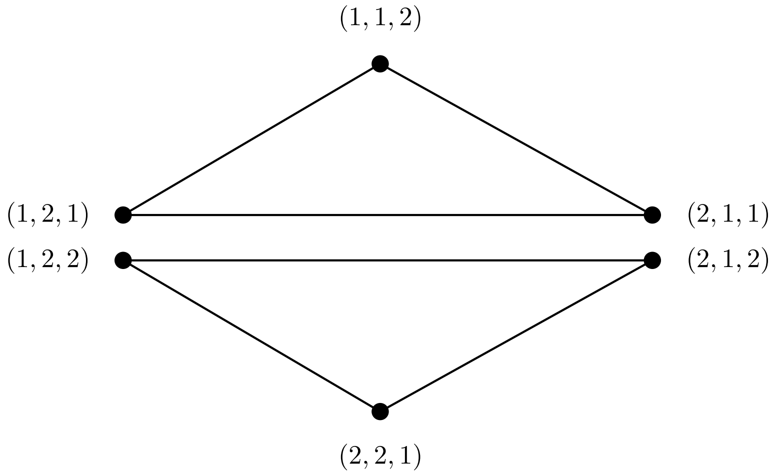
la cual nos dará la misma pulsera. Sin embargo, un cambio más nos lleva a la cadena,

verde, azul, azul, verde, azul, azul,

que es precisamente la cadena con la que comenzamos. En este caso sólo hay 3 cadenas que nos llevan a pulseras indistinguibles de la original. Esto es precisamente el tipo de situación que no puede suceder si estamos usando un número primo de cuentas.

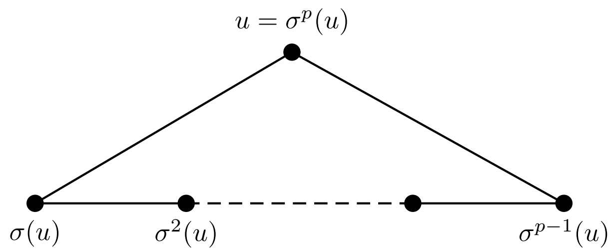
La tercera demostración se puede reescribir utilizando conceptos de teoría de grafos, como lo veremos a continuación en la cuarta y última demostración. Se recomienda al lector consultar la definición 2 en el apéndice.

4. Cuarta demostración. Consideremos el grafo G donde el conjunto de vértices V es el conjunto de todas las p-tuplas $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de enteros positivos entre 1 y a (inclusive) con $u_i \neq u_j$ para algunos $i \neq j$. Es claro que V tiene $a^p - a$ elementos. Dado $u \in V$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$, diremos que uv es una arista de G si y sólo si $v = \sigma(u) = (u_p, u_1, \ldots, u_{p-1})$.
Por ejemplo, si $a = 2$ y $p = 3$, tenemos el siguiente grafo.



El grafo G para $a = 2$ y $p = 3$

Consideremos un vértice arbitrario $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de G. Este vértice es adyacente con los vértices $\sigma(u) = (u_p, u_1, \ldots, u_{p-1})$ y $\sigma^{p-1}(u) = (u_2, u_3, \ldots, u_p, u_1)$, donde $\sigma^i(u) = \sigma^{i-1}(\sigma(u))$ para $i = 2, 3, \ldots$.
Observemos que $\sigma(u) \neq \sigma^{p-1}(u)$, pues en caso contrario, tendríamos que $u_p = u_2, u_1 = u_3, \ldots, u_{p-2} = u_p, u_{p-1} = u_1$, de donde $u_1 = u_3 = u_5 = \cdots = u_{p-1}$ y $u_2 = u_4 = \cdots = u_p$. Luego, el vértice u sería una p-tupla de la forma $u = (a, b, a, b, \ldots, a, b)$ lo cual no puede ser porque p es un primo impar y en este caso u tiene un número par de coordenadas. Por lo tanto, cada vértice de G es adyacente a 2 vértices distintos y en consecuencia, G es una unión disjunta de ciclos (ejercicio para el lector).



Demostraremos que cada uno de estos ciclos tiene longitud igual a p. Supongamos que $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ pertenece a un ciclo de longitud $t < p$. Entonces, $\sigma^t(u) = u$ y tenemos también que $\sigma^p(u) = u$. Por el algoritmo de la división podemos escribir $p = tq + r$ para algunos enteros q y r con $0 \leq r < t$, de modo que $u = \sigma^p(u) = \sigma^{tq+r}(u) = \sigma^r(u)$. Luego, si $0 < r < t$ tendríamos que u está en un ciclo de longitud menor que t lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $r = 0$ y de aquí $t \mid p$. Como p es primo, se sigue que $t = 1$ o $t = p$. La igualdad $t = 1$ no puede suceder porque cada vértice es adyacente a dos vértices distintos. Por lo tanto, $t = p$ y así G está formado por ciclos disjuntos de longitud p. De estos es fácil ver que hay $\frac{a^p - a}{p}$ y por lo tanto $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Aplicaciones

A continuación veremos algunas aplicaciones del pequeño teorema de Fermat en la solución de problemas de olimpiada.

1. Si a es un entero positivo, demostrar que cualquier factor primo mayor que 2 del número a^2+1 es de la forma $4m+1$.

Solución. Sea p un factor primo mayor que 2 del número a^2+1 y supongamos que p no es de la forma $4m+1$. Entonces, p es de la forma $p=4m+3$ para algún entero m. Entonces $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$ y

$$a^{p-1} \equiv (a^2)^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} \equiv -1 \pmod{p},$$

lo que contradice el pequeño teorema de Fermat.

2. Determinar todas las soluciones en enteros x, y que satisfacen la ecuación,

$$1998^2x^2+1997x+1995-1998x^{1998} = 1998y^4+1993y^3-1991y^{1998}-2001y.$$

Solución. Demostraremos que la ecuación no tiene soluciones en enteros. Supongamos que (x,y) es una solución. Como 1997 es primo, aplicando el pequeño teorema de Fermat tenemos que $x^{1997} \equiv x \pmod{1997}$ y $y^{1997} \equiv y \pmod{1997}$. Luego, $x^{1998} \equiv x^2 \pmod{1997}$ y $y^{1998} \equiv y^2 \pmod{1997}$. Considerando la ecuación del problema módulo 1997 tenemos que,

$$x^2+0-2-x^2 \equiv y^4-4y^3+6y^2-4y \pmod{1997},$$

la cual se simplifica en

$$-1 \equiv (y-1)^4 \pmod{1997}. \tag{1}$$

En particular, $y-1$ es primo relativo con 1997. Aplicando nuevamente el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $(y-1)^{1996} \equiv 1 \pmod{1997}$.
Por otro lado, la congruencia en (1) implica que $(-1)^{499} \equiv (y-1)^{4(499)} \pmod{1997}$, es decir, $-1 \equiv (y-1)^{1996} \pmod{1997}$, lo que es una contradicción.

3. (Olimpiada Rioplatense, 2004) Hallar el número de enteros $n>1$ tales que el número $a^{13}-a$ sea divisible entre n para todo entero positivo a.

Solución. Sea $n>1$ un entero tal que $a^{13}-a$ es divisible entre n para todo entero positivo a. Tenemos que p^2, con p primo, no divide a n, ya que p^2 no divide a $p^{13}-p$. Luego, n es producto de primos distintos. Como n debe dividir al número $a^{13}-a$ para todo entero a, en particular n debe dividir al número $2^{13}-2 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13$. El pequeño teorema de Fermat implica que $a^{13} \equiv a \pmod{p}$ para $p=2,3,5,7$ y 13, y por lo tanto $a^{13} \equiv a \pmod{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13}$ para todo entero a. Luego, los enteros

$n > 1$ que cumplen el problema son precisamente los divisores positivos distintos de 1 del número $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Por lo tanto, la respuesta es $2^5 - 1 = 31$ enteros.

4. (Olimpiada Internacional, 2005) Consideremos la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ para $n = 1, 2, \ldots$. Determinar todos los enteros positivos que son primos relativos con cada término de la sucesión.

Solución. Sea $p > 3$ un número primo. Por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que,

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 \pmod{p}.$$

Luego, podemos dividir la congruencia anterior entre 6 obteniendo,

$$2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} \equiv 1 \pmod{p},$$

es decir, p divide al término a_{p-2} de la sucesión. Además, es claro que 2 divide a a_1 y 3 divide a a_2. Por lo tanto, el único número que es primo relativo con cada término de la sucesión es el 1.

5. (Olimpiada Mexicana, 2010) Sean p, q, r números primos distintos. Demostrar que si pqr divide a,

$$(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1,$$

entonces $(pqr)^3$ divide a,

$$3((pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1).$$

Solución. Sin pérdida de generalidad supongamos que $p > q > r$. Vamos a encontrar todas las ternas de números primos (p, q, r) que cumplan que $pqr \mid (pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$. Sea (p, q, r) una terna que cumple lo anterior. Como $p \mid (pq)^r$ y $p \mid (rp)^q$, tenemos que $p \mid (qr)^p - 1$, es decir, $(qr)^p \equiv 1 \pmod{p}$. Por otro lado, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $(qr)^p \equiv qr \pmod{p}$. Luego, $qr \equiv 1 \pmod{p}$, es decir, $p \mid qr - 1$. Análogamente, tenemos que $q \mid rp - 1$ y $r \mid pq - 1$. Entonces, $pq + pr + qr - 1$ es divisible entre p, q y r, así que, $pq + pr + qr - 1 \equiv 0 \pmod{pqr}$, de donde, $pqr + 1 \leq pq + pr + qr$.
Demostraremos que $r = 2$. Supongamos que $r \geq 3$. Ya que $pq > pr$ y $pq > qr$, tenemos que,

$$pqr + 1 > pqr \geq 3pq > pq + pr + qr,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $r = 2$.
Sustituyendo tenemos que $2pq \mid 2q + 2p + pq - 1$, luego $pq \mid 2(p + q) - 1$, de donde $pq + 1 \leq 2(p + q)$.
Demostraremos ahora que $q = 3$. Supongamos que $q \geq 5$, entonces $pq + 1 > pq \geq 5p > 2(p+q)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $q = 3$. Si volvemos a sustituir obtenemos que $6p \mid 5 + 5p$, luego $6p \leq 5 + 5p$ y así $p \leq 5$. Como p es primo y $p > q = 3$, concluimos que $p = 5$.
Por lo tanto, si (p, q, r) cumple que $p > q > r$ son números primos tales que pqr divide

a $(pq)^r + (qr)^p + (rp)^q - 1$, entonces $p = 5$, $q = 3$ y $r = 2$.
Si demostramos que $5^3 3^3 2^3 \mid 3((5\cdot 3)^2 + (3\cdot 2)^5 + (2\cdot 5)^3 - 1)$ habremos terminado.
Observemos que,

$$\begin{array}{rcl} 2^3 & \mid & (15^2 - 1) + 6^5 + 10^3 \\ 3^2 & \mid & 15^2 + 6^5 + (10^3 - 1) \\ 5^3 & \mid & (15^2 + 6^5 - 1) + 10^3. \end{array}$$

Luego, $5^3 3^2 2^3 \mid 15^2 + 6^5 + 10^3 - 1$, de donde

$$5^3 3^3 2^3 \mid 3((5\cdot 3)^2 + (3\cdot 2)^5 + (2\cdot 5)^3 - 1).$$

A continuación se dejan unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Para cada entero $n \geq 0$, sea $a_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Determina el máximo común divisor de los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$.

2. Demuestra que para cualquier número primo p, el número $p^{p+1} + (p+1)^p$ no es un cuadrado.

3. Determina todos los enteros positivos n tales que $7 \mid 2^n - 1$.

4. Demuestra que $7 \nmid 2^n + 1$ para todo entero positivo n.

5. Sean a y b enteros positivos tales que $a > b$ y $a + b$ es par. Demuestra que las raíces de la ecuación,

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2 + 1)^2 = 0$$

son enteros positivos tales que ninguno de ellos es un cuadrado.

6. Demuestra que $n \nmid 2^{n-1} + 1$ si n es un entero mayor que 1.

7. Determina todos los números primos p y q tales que $pq \mid 2^p + 2^q$.
(Sugerencia: Usa el ejercicio anterior.)

Bibliografía

1. T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory: Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

2. A. Rechtman Bulajich, C. J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias.* Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa*, No. 2, 2009.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 30 problemas seleccionados especialmente para comenzar tu preparación de este año. Es importante señalar que en esta ocasión los problemas se presentan en formato de opción múltiple. Esto se debe a que el filtro inicial de la mayoría de los concursos estatales suele ser presentado así. Sin embargo, conviene señalar que para resolverlos no es recomendable obtener la respuesta correcta por eliminación de las otras opciones.

Ten en cuenta que en las olimpiadas no sólo se trata de saber la respuesta correcta, sino que además, es necesario justificar dicha solución. En las etapas más avanzadas de todos los concursos de matemáticas, las preguntas siempre son abiertas y nunca se utiliza el formato de opción múltiple.[2] En el caso de esta publicación, el formato de opción múltiple se adopta con el fin de que el estudiante que recién se inicia se vaya familiarizando con el concurso y sus estapas.

Como seguramente ya habrás observado, en el primer número de cada año el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección no es muy elevado y el material escogido está pensado mayoritariamente para principiantes. Conforme el año transcurra su nivel se irá incrementando paulatinamente, de forma que, para el último número del año, el material será en su mayoría de nivel avanzado.

Por último, te invitamos a que con tu participación contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. ¿Cuántos números enteros, mayores que 1, cumplen la siguiente condición: la tercera parte del número más 15 es mayor que su mitad más 1?

(a) 14 (b) 82 (c) 28 (d) 83 (e) 42

[2] De hecho, el formato de opción múltiple sólo se usa por el carácter masivo de las etapas inciales de muchos concursos y debido a su facilidad de calificación (no requiere apreciación).

Problema 2. En un triángulo LOT, la medida del ángulo exterior en el vértice O es $62°$ y las mediatrices de LO y OT cortan al lado LT en M y N, respectivamente. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle MON$?

(a) $31°$ (b) $62°$ (c) $124°$ (d) $56°$ (e) $26°$

Problema 3. Los números reales x, y, z satisfacen las ecuaciones $x + y + z = 26$ y $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 31$. ¿A qué es igual $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}$?

(a) 638 (b) 777 (c) 786 (d) 803 (e) 806

Problema 4. Sobre cada una de las caras de un cubo se escribe un entero positivo y a cada vértice del cubo se le asigna el producto de las tres caras que llegan a él. Si la suma de estos ocho números es 343, ¿cuál es la suma de los números escritos en las caras?

(a) 343 (b) 7 (c) 21 (d) 10 (e) 6

Problema 5. Se tienen seis enteros distintos cuya suma es 63 de tal manera que siempre que se toman dos de ellos, uno de ellos es múltiplo del otro. ¿Cuál es el número más grande?

(a) 63 (b) 16 (c) 62 (d) 58 (e) 32

Problema 6. Un famoso detective busca al culpable de un robo entre cinco sospechosos: Ana, Beto, Claudia, David y Eduardo. Se sabe que el culpable siempre miente y que los demás siempre dicen la verdad. Ana dice, "¡El culpable es hombre!", Claudia dice, "Fue Ana o Eduardo" y Eduardo dice, "Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente". ¿Quién es el culpable?

(a) Ana (b) Beto (c) Claudia (d) David (e) Eduardo

Problema 7. ¿Cuántos días lunes tiene a lo más un año?

(a) 52 (b) 53 (c) 54 (d) 365 (e) 366

Problema 8. ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay tales que el dígito de las unidaes es igual al dígito de las decenas más el dígito de las centenas?

(a) 495 (b) 500 (c) 1000 (d) 900 (e) 400

Problema 9. ¿Cuál es el área de un rombo de lado $13\,cm$ tal que la suma de sus diagonales es $34\,cm$?

(a) $12\,cm^2$ (b) $120\,cm^2$ (c) $60\,cm^2$ (d) $65\,cm^2$ (e) $140\,cm^2$

Problema 10. Un padre emocionado con el fútbol decide darle a su hijo tantos dólares como la suma de los cuadrados de los goles que anote cada jugador del equipo brasileño. Sabemos que sólo Ronaldinho, Ronaldo y Kaká anotaron 13 goles en total y que el hijo recibió 57 dólares. ¿Cuántos goles anotó Ronaldinho, si fue el que más goles anotó?

(a) 4 (b) 3 (c) 5 (d) 16 (e) 7

Problema 11. Los enteros positivos A, B, C y D satisfacen $A^5 = B^4$, $C^3 = D^2$ y $C = A + 19$. ¿Cuánto vale $D - B$?

(a) 757 (b) 697 (c) 728 (d) 968 (e) 657

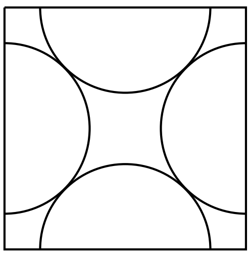
Problema 12. Se tienen 5 piezas: una de plata, una de bronce, una de níquel, una de oro y una de platino, y 5 cofres cerrados, cada uno con una pieza y una inscripción: (1) Oro en 2 o 3; (2) Plata en 1; (3) Bronce en 2 o 3; (4) El número del oro menos 1 es el níquel; (5) El número del bronce más 1 es el platino. Si se sabe que la única inscripción cierta es la del cofre que contiene al oro, ¿en cuál cofre está el níquel?

(a) En el 1 (b) En el 2 (c) En el 3 (d) En el 4 (e) En el 5

Problema 13. De los números de cuatro dígitos que son múltiplos de 9, ¿cuántos hay que tienen todos sus dígitos distintos de cero y distintos entre sí?

(a) 245 (b) 288 (c) 336 (d) 384 (e) 421

Problema 14. Cuatro semicircunferencias de radio $1\,cm$ con centros en los puntos medios de los lados de un cuadrado, son tangentes como se muestra en la figura.



¿Cuál es el área del cuadrado?

(a) $4\,cm^2$ (b) $8\,cm^2$ (c) $6\,cm^2$ (d) $10\,cm^2$ (e) $9\,cm^2$

Problema 15. ¿Cuántos enteros n cumplen que $n^3 - 3n + 2$ es divisible entre $2n + 1$?

(a) 8 (b) 10 (c) 6 (d) 9 (e) 11

Problema 16. Andrea escribe un número de dos dígitos, luego Beatriz suma los cuadrados de los dígitos del número escrito por Andrea y finalmente Camila suma los cuadrados de los dígitos del número escrito por Beatriz. ¿Cuál es el mayor valor que puede obtener Camila?

(a) 41 (b) 130 (c) 145 (d) 157 (e) 162

Problema 17. He comprado varias truchas de tres tamaños distintos: chicas, medianas y grandes. Después de comerme las tres grandes, el peso ha disminuido en un $35\,\%$. Una vez que mi gato se ha comido las tres chicas, el peso ha disminuido de nuevo en $\frac{5}{13}$ de lo que quedaba. ¿Cuántas truchas compré?

(a) 10 (b) 8 (c) 12 (d) 15 (e) No se puede saber

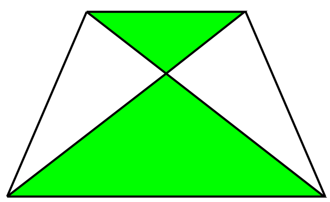
Problema 18. ¿Para cuántos enteros x en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 100\}$ el número $x^3 - x^2$ es el cuadrado de un entero?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) 11

Problema 19. a, b y c son tres números reales positivos tales que $a(b + c) = 152$, $b(c + a) = 162$ y $c(a + b) = 170$. ¿Cuánto vale el producto abc?

(a) 540 (b) 620 (c) 640 (d) 720 (e) 860

Problema 20. Las diagonales de un trapecio lo dividen en cuatro triángulos como se muestra en la figura. Si las áreas de los triángulos sombreados son $18\ cm^2$ y $32\ cm^2$, ¿cuánto mide el área del trapecio?



(a) $116\,cm^2$ (b) $50\,cm^2$ (c) $98\,cm^2$ (d) $120\,cm^2$ (e) $100\,cm^2$

Problema 21. Supongamos que la suma de k enteros consecutivos es un número par divisible entre k, y que el más pequeño de los k enteros consecutivos también es par. ¿Cuál de las siguientes opciones es verdadera?

(a) $k + 3$ es divisible entre 4 (b) $k + 2$ es divisible entre 4
(c) $k + 1$ es divisible entre 4 (d) k es divisible entre 4
(e) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera

Problema 22. Considera un rectángulo cuyos lados miden $8\,cm$ y $9\,cm$. Se dibujan dos circunferencias de igual radio tangentes entre sí y de forma que una de ellas sea tangente a dos de los lados del rectángulo y la otra tangente a los otros dos. ¿Cuánto mide el radio de estas circunferencias?

(a) $\frac{5}{2}\,cm$ (b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}\,cm$ (c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,cm$ (d) $3\,cm$ (e) $\frac{\sqrt{145}}{4}\,cm$

Problema 23. Diariamente los camiones A, B y C pasan por enfrente del palacio municipal. La probabilidad de que el primero en pasar sea el camión A es $\frac{1}{2}$, mientras que para B y C las probabilidades de pasar primero son $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{6}$, respectivamente. Si sabemos que ayer el camión C no fue el primero en pasar, ¿cuál es la probabilidad de que ayer el primer camión hubiera sido A?

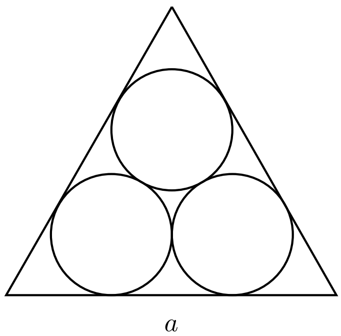
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{5}{12}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{5}$ (e) $\frac{5}{6}$

Problema 24. ¿Cuántas parejas de enteros no negativos (m, n) satisfacen la ecuación,

$$2^m - 2^n = 63?$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Más de 3

Problema 25. Tres circunferencias iguales tangentes entre sí son tangentes a los lados de un triángulo equilátero de lado a, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el radio de las tres circunferencias?



(a) $\frac{a}{4}$ (b) $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}a$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{9}a$ (e) $\frac{2}{7}a$

Problema 26. ¿Cuál es el mayor entero positivo y tal que existe un entero positivo x que satisface la ecuación,

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{525}?$$

(a) 21 (b) 84 (c) 336 (d) 441 (e) 500

Problema 27. ¿Cuál es el coeficiente de x^{50} en el desarrollo del producto:

$$(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 101x^{100})(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{25})?$$

(a) 50 (b) 125 (c) 501 (d) 923 (e) 1001

Problema 28. Los enteros del 1 al 20 están divididos en k conjuntos disjuntos S_1, S_2, . . ., S_k tales que no hay dos enteros en el mismo conjunto cuya suma sea divisible entre 5. Por ejemplo, 3 y 17 no están en el mismo conjunto. ¿Cuál es el menor valor posible de k?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 7 (e) 10

Problema 29. Para un entero positivo n decimos que $p(n)$ es el producto de los dígitos de n distintos de 0. ¿Cuánto vale $p(1) + p(2) + \cdots + p(99)$?

(a) 1525 (b) 2115 (c) 2510 (d) 5100 (e) 5210

Problema 30. Exactamente uno de los cinco números listados en las opciones es un número primo. ¿Cuál es ese número primo?

(a) $999,991$ (b) $999,973$ (c) $999,983$ (d) $1,000,001$ (e) $7,999,973$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 30 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Observa que, en cada solución, no sólo se ha determinado la opción correcta, sino que además, siempre se incluye la argumentación que establece su validez. En todos los casos, la justificación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos, además de que la solución sólo se alcanza a partir del enunciado y sin usar la información contenida en las opciones de respuesta[3].

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas, las mejores o las más elegantes, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com\normalfont.`

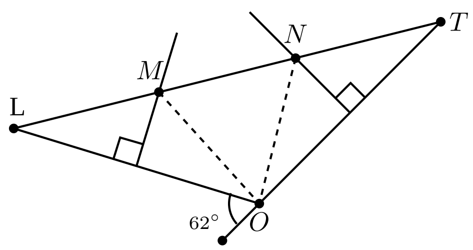
Solución del problema 1. La respuesta es (b).
Sea m uno de los enteros buscados, luego $m > 1$ y,

$$\begin{aligned} \frac{m}{3} + 15 &> \frac{m}{2} + 1, \\ \frac{m}{6} &< 14, \\ m &< 84. \end{aligned}$$

[3]Salvo en el caso muy particular del problema 30 de este número.

Entonces m es un entero tal que $1 < m < 84$, es decir, $m \in \{2, 3, \ldots, 83\}$. Por lo tanto, m puede tomar 82 valores en total.

Solución del problema 2. La respuesta es (d).
Consideremos la siguiente figura.



Como M pertenece a la mediatriz de LO, entonces $\angle OLM = \angle LOM$. Análogamente, como N pertenece a la mediatriz de OT, entonces $\angle OTN = \angle NOT$. Además, como la medida del ángulo exterior en O es 62°, tenemos que,

$$\begin{aligned} \angle LOM + \angle MON + \angle NOT &= 180^\circ - 62^\circ, \\ \angle OLM + \angle MON + \angle OTN &= 118^\circ, \\ \angle MON + 62^\circ &= 118^\circ, \end{aligned}$$

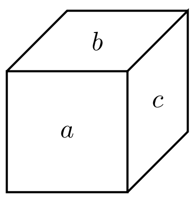
de donde $\angle MON = 56^\circ$.

Solución del problema 3. La respuesta es (d).
Si multiplicamos las dos ecuaciones obtenemos,

$$\begin{aligned} (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) &= 26(31), \\ 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1 &= 806, \end{aligned}$$

de donde $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} = 806 - 3 = 803$.

Solución del problema 4. La respuesta es (c).
Digamos que los números escritos en las caras del cubo son a, b, c, d, e y f, como se muestra en la siguiente figura,



donde d, e y f están detrás de a, b, c, respectivamente. Tenemos que la suma de los números asignados a los vértices es

$$\begin{aligned} 343 &= abc + ace + aef + afb + bcd + ced + efd + fbd \\ &= (a+d)(bc+ce+ef+fb) = (a+d)(b+e)(c+f). \end{aligned}$$

Como $343 = 7^3$ y $a+d$, $b+e$ y $c+f$ son todos mayores a uno, se tiene que $a+d = b+e = c+f = 7$ de donde $a+b+c+d+e+f = 21$.

Solución del problema 5. La respuesta es (e).
Digamos que los números son $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$, dado que siempre que se toman dos, uno es múltiplo del otro, tenemos que a_2 es múltiplo de a_1, a_3 es múltiplo de a_2 y así sucesivamente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_1 &\geq 1, \\ a_2 &\geq 2a_1 \geq 2, \\ a_3 &\geq 2a_2 \geq 4, \\ a_4 &\geq 2a_3 \geq 8, \\ a_5 &\geq 2a_4 \geq 16, \\ a_6 &\geq 2a_5 \geq 32, \end{aligned}$$

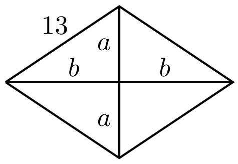
de donde $a_1 + a_2 + \cdots + a_6 \geq 63$. Como la suma de los seis números es 63 todas las igualdades en las desigualdades anteriores se tienen que dar, es decir, $a_1 = 1$, $a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16$ y $a_6 = 32$, de donde se sigue que 32 es el número más grande.

Solución del problema 6. La respuesta es (a).
Primero notamos que Eduardo es inocente, pues la frase "Si Beto es el culpable, entonces Ana es inocente" es cierta independientemente de quién es el culpable. Si el culpable fuera David o Beto, Claudia habría mentido y habría dos mentirosos. Por lo tanto el culpable está entre Ana y Claudia. Finalmente, si Claudia fuera la culpable, Ana habría mentido, pues Claudia es mujer. Por lo tanto, Ana es la culpable.

Solución del problema 7. La respuesta es (b).
Tenemos que $365 = 52 \times 7 + 1$ y $366 = 52 \times 7 + 2$, por lo tanto los primeros 52 grupos de siete días tienen exactamente los siete días de la semana, y sobran uno o dos días si el año es bisiesto. Sólo uno de esos días que sobran puede ser lunes. Por lo tanto, hay a lo más 53 días lunes en un año.

Solución del problema 8. La respuesta es (a).
Sea $N = abcd$ uno de esos números. Tenemos 9 maneras de elegir el dígito a. Luego, si elegimos el dígito $d = k$ tenemos que podemos formar $k+1$ números (ya que b puede valer desde 0 hasta k y c queda determinado). Como k puede ser cualquier dígito, tenemos que hay $9(1 + 2 + \cdots + 10) = 9 \times 55 = 495$ números.

Solución del problema 9. La respuesta es (b).
Sean $2a$ y $2b$ las longitudes de las diagonales del rombo.



Por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2+b^2=13^2$ y por la condición del problema tenemos que $2(a+b)=34$, así que $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=17^2-13^2=120$ de donde $ab=60$. Por lo tanto, el área del rombo es $4(\frac{ab}{2})=4(30)=120\,cm^2$.
También podemos obtener las longitudes de las diagonales del rombo: Sustituyendo $b=17-a$ tenemos que $a(17-a)=60$, es decir, $(a-12)(a-5)=0$ de donde $a=12$ (y $b=5$) o $a=5$ (y $b=12$). Por lo tanto, las diagonales miden $10\,cm$ y $24\,cm$.

Solución del problema 10. La respuesta es (c).
Supongamos que Ronaldinho anotó a goles, y que los otros jugadores anotaron b y c goles. Como Ronaldinho anotó más goles, entonces $b<a$ y $c<a$. Además, tenemos que $a+b+c=13$ y $a^2+b^2+c^2=57$. Luego, $a^2<a^2+b^2+c^2<3a^2$, de donde, $a^2<57<3a^2$, entonces $5\leq a\leq 7$.
Analicemos cada caso.

- Si $a=5$, entonces $b+c=8$ y $b^2+c^2=32$. Pero los únicos dos cuadrados perfectos que suman 32 son 4^2 y 4^2, es decir, $b=c=4$.
- Si $a=6$, entonces $b+c=7$ y $b^2+c^2=21$. Pero no hay dos cuadrados perfectos que sumen 21.
- Si $a=7$, entonces $b+c=6$ y $b^2+c^2=8$. Los únicos cuadrados perfectos que suman 8 son 2^2 y 2^2, pero si $b=c=2$, entonces $b+c\neq 6$.

Por lo tanto, la única posibilidad es que $a=5$, es decir, Ronaldinho anotó 5 goles.

Solución del problema 11. La respuesta es (a).
Como $A^5=B^4$ y $C^3=D^2$, entonces A y C son cuadrados perfectos. Sean T y K enteros positivos tales que $A=T^2$ y $C=K^2$. Como $C=A+19$, tenemos que,

$$\begin{aligned} K^2 &= T^2+19 \\ 19 &= K^2-T^2 \\ 19 &= (K+T)(K-T), \end{aligned}$$

pero 19 es primo, luego $K+T=19$ y $K-T=1$, de donde $K=10$ y $T=9$. Entonces, $A=81$ y $C=100$, y reemplazando en las primeras ecuaciones tenemos que, $B=\left(\sqrt[4]{81}\right)^5=243$ y $D=\left(\sqrt{100}\right)^3=1000$.
Por lo tanto, $D-B=1000-243=757$.

Solución del problema 12. La respuesta es (c).
Observemos primero que las inscripciones (1), (2) y (3) son falsas ya que:

- Si (1) es cierta, el oro estaría en el cofre 1 implicando que (1) es falsa.
- Si (2) es cierta, el oro estaría en el cofre 2 implicando que (1) es cierta.
- Si (3) es cierta, el oro está en el cofre 3 y (1) sería cierta.

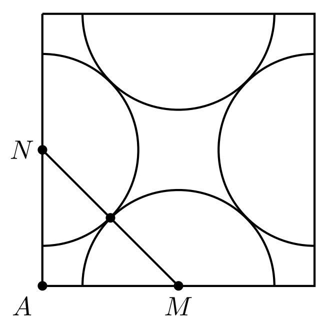
Por lo tanto, el oro está en el cofre 4 o 5.
Si el oro está en el cofre 4, entonces (1), (2), (3) y (5) son falsas, y por lo tanto, el níquel está en el cofre 3, el bronce en el 1, la plata en el 2 y el platino en el 5.
Si el oro está en el cofre 5, entonces (1), (2), (3) y (4) son falsas, y por lo tanto, el bronce está en el cofre 1, el platino en el 2, el níquel en el 3 y la plata en el 4.
Por lo tanto, el níquel está en el cofre número 3.

Solución del problema 13. La respuesta es (c).
Puesto que un número es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9, se tiene que si $abcd = 10^3a+10^2b+10c+d$ es divisible entre 9, entonces cualquier número que se forme con esos dígitos también es divisible entre 9 ($bcda, cdab$, etc.). Por lo tanto, basta contar los que satisfacen $a > b > c > d$ y luego multiplicamos por $4! = 24$.

1. Si $a = 9$, las posibilidades son: $9765, 9621, 9531, 9432, 9864$ y 9873.
2. Si $a = 8$, tenemos los números, $8721, 8631, 8541$ y 8532.
3. Si $a = 7$, los números son: $7641, 7632$ y 7542.
4. Si $a = 6$, sólo se tiene al 6543.
5. Si $a = 5$ o $a = 4$, no hay soluciones.

Por lo tanto, en total hay $14 \times (4!) = 14 \times 24 = 336$ números que satisfacen el problema.

Solución del problema 14. La respuesta es (b).
Sean A uno de los vértices y M y N los puntos medios de los lados adyacentes.



Por el teorema de Pitágoras tenemos que $2AM^2 = AM^2 + AN^2 = MN^2 = 2^2 = 4$, de donde $AM = \sqrt{2}\,cm$. Por lo tanto, el lado del cuadrado mide $2\sqrt{2}\,cm$ y su área es $8\,cm^2$.

Solución del problema 15. La respuesta es (a).
Dividiendo $n^3 - 3n + 2$ entre $2n + 1$ obtenemos de cociente $\frac{n^2}{2} - \frac{n}{4} - \frac{11}{8}$ y de residuo $\frac{27}{8}$. Luego, $8(n^3 - 3n + 2) = (2n + 1)(4n^2 - 2n - 11) + 27$. Por lo tanto, $2n + 1$ divide a $n^3 - 3n + 2$ si y sólo si $2n + 1$ divide a 27. Es fácil verificar que el conjunto de enteros n que cumplen que $2n + 1$ divide a 27 es $\{-14, -5, -2, -1, 0, 1, 4, 13\}$, de donde hay 8 valores posibles de n.

Solución del problema 16. La respuesta es (c).
El número obtenido por Beatriz es como máximo $9^2 + 9^2 = 162$ y puede tener 1, 2 o 3 dígitos.

- Supongamos que el número obtenido por Beatriz tiene un dígito. Entonces el número obtenido por Camila es a lo más $9^2 = 81$. El máximo 81 se obtiene si Andrea escribe el 30, Beatriz el $9 = 3^2 + 0^2$ y Camila el 81.

- Supongamos que el número obtenido por Beatriz es de dos dígitos. Entonces la mayor suma que podría obtener Camila es $9^2 + 9^2 = 162$. Para que esto sea cierto, el número 99 que obtuvo Beatriz tiene que ser la suma de dos cuadrados perfectos. Pero esto no es posible. La segunda suma mayor posible es $9^2 + 8^2 = 145$ y ésta se obtiene si Andrea hubiera escrito el número 77 y Beatriz el $98 = 7^2 + 7^2$.

- Si el número obtenido por Beatriz tuviese tres dígitos, este a lo más podría ser $9^2 + 9^2 = 162$, luego Camila a lo más hubiera podido obtener el $107 = 1^2 + 5^2 + 9^2$.

Por lo tanto, vemos que el mayor número que pudo obtener Camila es el 145.

Solución del problema 17. La respuesta es (a).
En primer lugar, el peso relativo de las tres truchas grandes es el $35\,\%$, y el peso relativo de las tres truchas chicas es $\frac{5}{13} \cdot \frac{65}{100} = \frac{25}{100} = 25\,\%$. Por lo tanto, el peso de las truchas medianas debe ser $100\,\% - 35\,\% - 25\,\% = 40\,\%$ del total.
Nótese que el número de truchas medianas no puede ser menor o igual a 3, porque entonces, al menos una de ellas tendría que pesar más que una de las grandes.
El número de truchas medianas tampoco puede ser mayor o igual que 5, pues en ese caso, habría una trucha mediana que pesaría a lo más un $\frac{40}{5}\,\% = 8\,\%$ del total, lo que es contradictorio pues el peso de cada trucha chica es $\frac{25}{3}\,\% > 8\,\%$ del total.
Así pues la única posibilidad es que el número de truchas medianas sea 4 y que en total se hayan comprado 10 truchas.

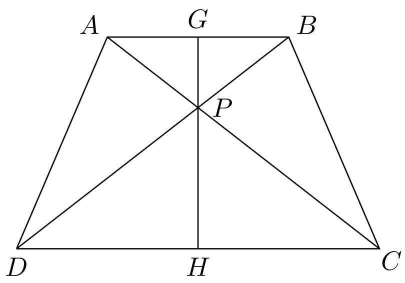
Solución del problema 18. La respuesta es (d).
Como $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, necesitamos que $x - 1$ sea un cuadrado. Como $1 \leq x \leq 100$, tenemos que $0 \leq x - 1 \leq 99$ y es fácil ver que hay 10 cuadrados en el intervalo $[0, 99]$.

Solución del problema 19. La respuesta es (d).
Sumando las tres ecuaciones obtenemos $2ab + 2bc + 2ca = 484$. Luego,

$$\begin{aligned} ab &= 242 - c(a+b) = 242 - 170 = 72, \\ bc &= 242 - a(b+c) = 242 - 152 = 90, \\ ca &= 242 - b(a+c) = 242 - 162 = 80. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) = 72(90)(80)$ de donde $abc = 720$.

Solución del problema 20. La respuesta es (c).
Denotemos por A, B, C y D a los vértices del trapecio, P al punto de intersección de sus diagonales y GH a la altura que une los puntos medios de AB y CD. Como AB y CD son paralelas, sabemos que $\angle APB = \angle CPD$ por ser ángulos opuestos por el vértice, y $\angle BAP = \angle DCP$ por ser ángulos alternos internos. Entonces, por el criterio AAA, los triángulos ABP y CDP son semejantes.



Como la razón de las áreas de estos triángulos es $\frac{18}{32}$, la razón de semejanza de estos triángulos debe ser $\sqrt{\frac{18}{32}} = \frac{3}{4}$. Por lo tanto, $\frac{GP}{PH} = \frac{3}{4}$.
Ahora calculamos el área del trapecio.

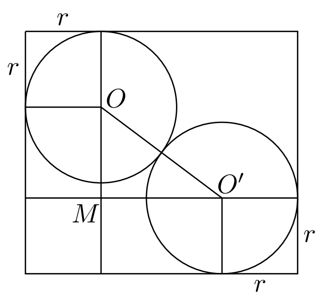
$$\begin{aligned} \frac{AB+CD}{2} \cdot GH &= \frac{AB}{2}(GP+PH) + \frac{CD}{2}(GP+PH) \\ &= \frac{AB}{2}\left(GP + \frac{4}{3}GP\right) + \frac{CD}{2}\left(\frac{3}{4}PH + PH\right) \\ &= \frac{7}{3}\left(\frac{AB \cdot GP}{2}\right) + \frac{7}{4}\left(\frac{CD \cdot PH}{2}\right). \end{aligned}$$

Como $\frac{AB}{2}(GP) = 18$ y $\frac{CD}{2}(PH) = 32$, tenemos que el área es $\frac{7}{3}(18) + \frac{7}{4}(32) = 98\, cm^2$.

Solución del problema 21. La respuesta es (a).
Supongamos que los k enteros consecutivos son $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ con n entero par. La suma de estos números es $S = \frac{(2n+k-1)k}{2}$. Como k divide a S por hipótesis, tenemos que $\frac{S}{k} = n + \frac{k-1}{2}$ debe ser un entero. Por lo tanto, k es un entero impar. Por otra parte, sabemos que S es par, luego 2 divide a $\frac{(2n+k-1)k}{2}$, lo que significa

que 4 divide a $(2n+k-1)k$. Como k es impar, se sigue que $2n+k-1$ es divisible entre 4, y como n es par, concluimos que 4 divide a $k-1$ y por lo tanto, 4 divide a $k-1+4=k+3$.

Solución del problema 22. La respuesta es (a).
Sean O y O' los centros de las circunferencias y r su radio. Pasando por O, trazamos una paralela al lado de $8\ cm$. De forma análoga, pasando por O', trazamos otra paralela al lado de $9\ cm$. Denotemos con M al punto de intersección de estas rectas.



Entonces, $OO'=2r$, $MO'=9-2r$ y $MO=8-2r$. Ahora, por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$(2r)^2=(8-2r)^2+(9-2r)^2.$$

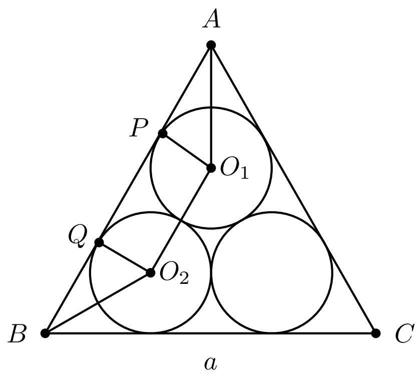
De lo anterior se sigue que $4r^2-68r+145=0$, por lo que $r=\frac{68\pm 48}{4}=\frac{17\pm 12}{2}$, de donde $r=\frac{29}{2}\ cm$ o $r=\frac{5}{2}\ cm$. Como $r=\frac{29}{2}\ cm$ es inconsistente con el problema por ser demasiado grande, la única solución es $r=\frac{5}{2}\ cm$.

Solución del problema 23. La respuesta es (d).
Sabemos que $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{6}$. De lo anterior se sigue que $P(\neg C)=\frac{5}{6}$, que es la suma de $P(A)$ y $P(B)$. Es así, que el problema se reduce a calcular la probabilidad (P_A) de que el primero en pasar sea A, sabiendo que la razón entre $P(A)$ y $P(B)$ es $\frac{3}{2}$. Entonces, P_A debe ser $\frac{3}{5}$.
Otra forma de plantear el problema es la siguiente: Como A, B y C son eventos excluyentes entre sí, es decir, $P(A\wedge B)=0$, $P(A\wedge C)=0$ y $P(B\wedge C)=0$, tenemos que,

$$P_A=\frac{P(A)}{P(\neg C)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Solución del problema 24. La respuesta es (b).
Si m y n son distintos de cero, el lado izquierdo de la ecuación es un número par, lo cual no puede ser ya que el lado derecho es un número impar. Luego, $m=0$ o $n=0$. Si $m=0$, $2^m-2^n=1-2^n\leq 0$ lo cual no es posible. Si $n=0$, entonces $2^m=64=2^6$ y de aquí $m=6$. Por lo tanto, $(6,0)$ es la única solución.

Solución del problema 25. La respuesta es (c).
Llamemos a los vértices del triángulo A, B y C, y denotemos por r al radio de las circunferencias. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias tangentes al lado AB, y sean O_1P y O_2Q las perpendiculares trazadas desde estos centros sobre el lado AB.



Entonces, $AP = QB = r\cot 30^\circ = \sqrt{3}r$, y $PQ = O_1O_2 = 2r$ ya que O_1O_2QP es un rectángulo. Luego,

$$a = AB = AP + PQ + QB = 2\sqrt{3}r + 2r,$$

de donde $r = \frac{a}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}a$.

Solución del problema 26. La respuesta es (c).
Tenemos que $\sqrt{525} = 5\sqrt{21}$. Luego, $\sqrt{y} = 5\sqrt{21} - \sqrt{x}$. Elevando al cuadrado obtenemos $y = 525 + x - 10\sqrt{21x}$. Como y debe ser un entero positivo, $21x$ debe ser un cuadrado, de modo que $x = 21u^2$ para algún entero positivo u. De manera análoga, $y = 21v^2$ para algún entero positivo v. Por lo tanto, la ecuación original se reescribe como $u + v = 5$. Como u es un entero positivo, el mayor valor posible de v es 4, en cuyo caso $y = 21(4^2) = 336$.

Solución del problema 27. La respuesta es (e).
Para obtener x^{50} debemos multiplicar un sumando del segundo factor de la forma x^i $(0 \leq i \leq 25)$ con un sumando del primer factor de la forma $(50 - i + 1)x^{50-i}$. Por lo tanto, el coeficiente de x^{50} es igual a la suma de todos los números de la forma $50 - i + 1$ con $0 \leq i \leq 25$, es decir:

$$\begin{aligned} 51 + 50 + 49 + \cdots + 26 &= \frac{(51+26) + (50+25) + (49+24) + \cdots + (26+51)}{2} \\ &= \frac{77 \cdot 26}{2} = 77 \cdot 13 = 1001. \end{aligned}$$

Solución del problema 28. La respuesta es (b).
El número k no puede ser menor que 4 ya que cualesquiera dos de los números 5, 10, 15

y 20 no pueden estar en el mismo conjunto. Por otra parte, 4 conjuntos son suficientes. Por ejemplo,

$$\{1,6,11,16,5\}, \quad \{2,7,12,17,10\}, \quad \{3,8,13,18,15\}, \quad \{4,9,14,19,20\}.$$

Por lo tanto, el valor mínimo de k es 4.

Solución del problema 29. La respuesta es (b).
Tenemos que,

$$\begin{array}{rcl} p(1)+p(2)+\cdots+p(9) & = & 1+2+\cdots+9=45, \\ p(10)+p(11)+\cdots+p(19) & = & 1+45=46, \\ p(20)+p(21)+\cdots+p(29) & = & 2(1+45)=2(46), \\ & \vdots & \\ p(90)+p(91)+\cdots+p(99) & = & 9(1+45)=9(46). \end{array}$$

Por lo tanto,

$$p(1)+p(2)+\cdots+p(99)=45+46(1+2+\cdots+9)=45+46(45)=45(47)=2115.$$

Solución alternativa. Consideremos a todos los números desde el 0 hasta el 99 como si tuvieran 2 dígitos, es decir, considerando a los números de un dígito como $0x$. Tenemos que la suma de los productos de sus dígitos incluyendo los ceros es,

$$0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 2+\cdots+9\cdot 9-0\cdot 0=(0+1+2+\cdots+9)^2-0=45^2.$$

Ahora, si en lugar de los ceros colocamos unos, el producto de los dígitos distintos de 0 se mantiene, es decir, calcular $p(1)+p(2)+\cdots+p(99)$ es equivalente a sustituir en la igualdad anterior los ceros por unos, por lo que,

$$\begin{aligned} p(1)+p(2)+\cdots+p(99) &= 1\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 2+\cdots+9\cdot 9-1\cdot 1 \\ &= (1+1+2+\cdots+9)^2-1 \\ &= 46^2-1=2115. \end{aligned}$$

Solución del problema 30. La respuesta es (c).
Usaremos las factorizaciones:

$$\begin{array}{rcl} a^2-b^2 & = & (a-b)(a+b), \\ a^3-b^3 & = & (a-b)(a^2+ab+b^2), \\ a^3+b^3 & = & (a+b)(a^2-ab+b^2). \end{array}$$

Tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} 999,991 & = & 1000^2-3^2=997\cdot 1003, \\ 999,973 & = & 100^3-3^3=97(100^2+3\cdot 100+3^2), \\ 1,000,001 & = & 100^3+1^3=101(100^2-100+1), \\ 7,999,973 & = & 200^3-3^3=197(200^2+3\cdot 200+3^2). \end{array}$$

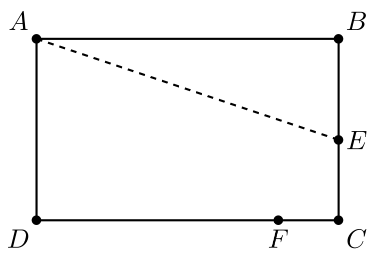
Por lo tanto, el único número primo es el $999,983$.

Problemas propuestos

Tzaloa es tu revista y esta sección está especialmente diseñada para tu paticipación. Como siempre, en este número presentamos 5 problemas nuevos que te necesitan para encontrar su solución. Sabemos que te gustan los retos y por eso los problemas de esta sección son un poco más difíciles que los de la sección *problemas de práctica*. Sin embargo, esto no debe desanimarte pues estamos seguros que con un poco de esfuerzo pronto podrás resolverlos.
Para dar tiempo a que nos envíes tu solución y esta pueda ser analizada con todo cuidado, las respuestas de los problemas propuestos en cualquier número de la revista, se publican con tres números de diferencia. Es así que las respuestas de los problemas propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 4, año 2012, por lo que aún tienes tiempo para preparar y enviarnos tu trabajo.
Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problemas propuestos.
Año 2012 No. 1.

Problema 1. (Principiante) E es un punto sobre el lado BC de un rectángulo $ABCD$ tal que, si se hace un doblez sobre AE, el vértice B coincide con un punto F sobre el lado CD. Si $AD = 16\,cm$ y $BE = 10\,cm$, ¿cuál es la longitud de AE?



Problema 2. (Principiante) Si el conjunto $\{10, 20, 30, 40, 50\}$ se divide en dos conjuntos A y B, muestra que alguno de estos conjuntos tiene a dos de los números y a su diferencia.

Problema 3. (Principiante) Considera una cuadrícula de 25×25 cuadraditos. Si se pueden pintar de rojo contornos de cuadrados de cualquier tamaño, ¿cuál es el menor número de contornos de cuadrados que se deben pintar para tener todas las líneas de la cuadrícula de color rojo?

Problema 4. (Intermedio) Determina el menor entero $n \geq 2$ con la siguiente propiedad: *Los enteros* $1, 2, \ldots, n$ *se pueden reescribir en un renglón de manera que la suma de cualesquiera dos números consecutivos sea un cuadrado perfecto.*
Por ejemplo, $n = 3$ no cumple, ya que en cada acomodo de los números 1, 2 y 3 en un renglón, hay dos números consecutivos cuya suma no es un cuadrado. Los acomodos son:

$$1, 2, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 3, 2, 1;$$

y fallan porque ninguna de las sumas $1 + 2$, $3 + 2$, $2 + 1$, $2 + 3$, $1 + 2$ y $2 + 1$ en cada caso respectivamente, es un cuadrado.

Problema 5. (Intermedio) Determina todas las ternas (a, b, c) (con $a < b < c$) de enteros positivos con las siguientes dos propiedades:

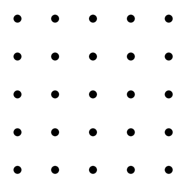
1. a, b y c son tres enteros impares consecutivos.
2. El número $a^2 + b^2 + c^2$ consiste de cuatro dígitos iguales.

Soluciones a los Problemas Propuestos. Año 2011 No. 2.

A continuación te presentamos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 2, año 2011.

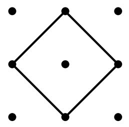
Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 3, año 2011, por lo que todavía estás a tiempo para enviarnos la tuya y así podamos publicarla dándote todo el crédito y reconocimiento público que sólo tú mereces.

Problema 1. (Principiante) ¿Cuántos cuadrados hay tales que sus cuatro vértices están entre los siguientes puntos?

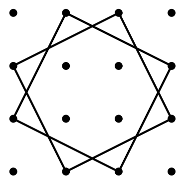


Solución. Es fácil contar los cuadrados con lados enteros, basta fijarse quien sería la esquina superior izquierda del cuadrado. Hay 16 cuadrados de lado 1, 9 de lado 2, 4 de lado 3 y sólo 1 de lado 4.
Ahora bien, los cuadrados con lado no entero quedan inscritos en algún cuadrado de los anteriores, de lado 2, 3 o 4. Veamos estos casos:

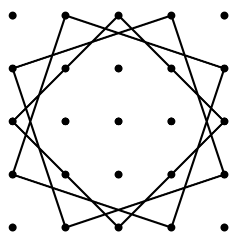
- Cada uno de los cuadrados de lado 2 tiene un cuadrado de estos. Así, hay 9 cuadrados de lado $\sqrt{2}$.



- Cada uno de los cuadrados de lado 3 tiene dos de estos cuadrados. Así hay 8 cuadrados de lado $\sqrt{5}$.

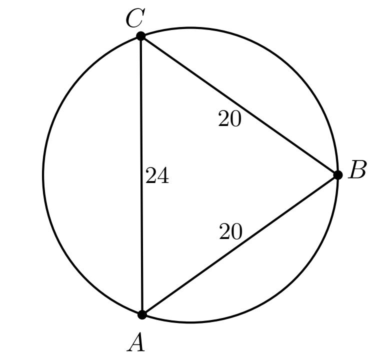


- Por último, hay tres cuadrados inscritos en el cuadrado de lado 4: 1 de lado $\sqrt{8}$ y 2 de lado $\sqrt{10}$.

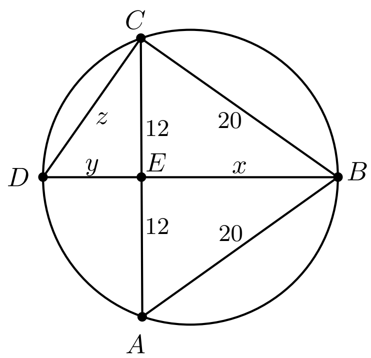


Por lo tanto, tenemos en total $16 + 9 + 4 + 1 + 9 + 8 + 2 + 1 = 50$ cuadrados con vértices en la puntícula.

Problema 2. (Principiante) ¿Cuál es el diámetro del siguiente círculo, si se sabe que $AC = 24\,cm$ y $BC = BA = 20\,cm$?



Solución. Sea D el punto diametralmente opuesto a B, E la intersección de CA con BD y sean x, y e z las longitudes de los segmentos BE, DE y DC, respectivamente.



Por el Teorema de Pitágoras en el triángulo BCE tenemos que $x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16\,cm$. Como BD es diámetro, el triángulo BCD es un triángulo rectángulo y por simetría el triángulo ECD también lo es. De aquí obtenemos las ecuaciones,

$$20^2 + z^2 = (y + 16)^2 \quad \text{y} \quad y^2 + 12^2 = z^2.$$

Desarrollando y restando estas ecuaciones llegamos a $400 = 112 + 32y$ de donde $y = 9\,cm$ y $z = 15\,cm$. Por lo tanto, el diámetro mide $x + y = 16 + 9 = 25\,cm$.

Problema 3. (Intermedio) ¿Cuál es la suma de los máximos divisores propios de los números del 1 al 100? (Nota: Un divisor propio de un entero positivo n es un divisor que no es igual a n.)

Solución. Para $n > 1$, el máximo divisor propio de n es $\frac{n}{p}$, donde p es el primo más pequeño que divide a n. Además, sabemos que un número entre el 1 y el 100 tiene un divisor primo de entre $\{2, 3, 5, 7\}$ o es un primo. Dividamos la suma en cinco casos, considerando a p el menor primo que divide a n.

Caso 1. $p = 2$. Tenemos que n puede ser cualquier par y la suma sería $S_1 = \frac{1}{2}(2 + 4 + 6 + \cdots + 100) = 1275$.

Caso 2. $p = 3$. Tenemos que n puede ser cualquier múltiplo de 3 que no sea par, o sea, los de la forma $6k + 3$. Aquí la suma sería $S_2 = \frac{1}{3}(3 + 9 + 15 + \cdots + 99) = 289$.

Caso 3. $p = 5$. En este caso n es múltiplo de 5 pero coprimo con 2 y 3, o sea, los de la forma $30k+5$ o $30k+25$. La suma es $S_3 = \frac{1}{5}(5+25+35+55+65+85+95) = 73$.

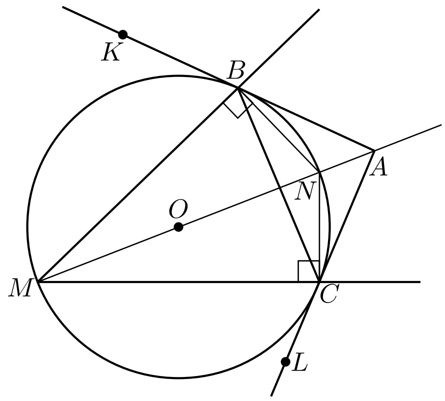
Caso 4. $p = 7$. En este caso, n sólo puede ser 7, 49, 77 o 91 y la suma es $S_4 = \frac{1}{7}(7 + 49 + 77 + 91) = 32$.

Caso 5. n es primo mayor a 7. Cada uno de estos aporta un 1 a la suma y hay 21 posibilidades, de donde $S_5 = 21$.

Por lo tanto, la suma de los máximos divisores propios de los números del 1 al 100 es $1275 + 289 + 73 + 32 + 21 = 1690$.

Problema 4. (Intermedio) El punto A está en el interior de un ángulo con vértice M. Un rayo de luz que se emite desde el punto A, incide en un punto B de uno de los lados del ángulo y se refleja para incidir en un punto C del otro lado del ángulo, para finalmente ser reflejado de regreso a A. Si se cumplen las leyes ordinarias de la reflexión[4], demuestra que el circuncentro del triángulo BCM está sobre la recta AM.

Solución. Sea N el punto de intersección de las perpendiculares a MB y MC trazadas desde B y C respectivamente. Como en el cuadrilátero $MBNC$ los ángulos $\angle MBN$ y $\angle MCN$ son rectos, entonces el punto N está sobre la circunferencia circunscrita del triángulo BCM y MN es un diámetro de la misma.



[4]Según las cuales cuando un rayo incide en una superficie plana, los ángulos de incidencia (θ_1) y reflexión (θ_2) son iguales ($\theta_1 = \theta_2$).

Por otro lado, por la ley de reflexión tenemos que las rectas BN y CN son bisectrices del triángulo ABC. Entonces, bastará con probar que el punto M está sobre la bisectriz AN. Ahora, nótese que por la ley de reflexión también sabemos que las rectas BM y CM son bisectrices de los ángulos $\angle CBK$ y $\angle BCL$, respectivamente. De lo anterior, podemos concluir que M equidista de las rectas AK y AL y por lo tanto está sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Problema 5. (Avanzado) Determina todos los enteros positivos a, n, p, q y r tales que,

$$a^n - 1 = (a^p - 1)(a^q - 1)(a^r - 1).$$

Solución. Primero demostraremos el siguiente resultado.
Lema. *Si $a > 1$ y $a^d - 1 \mid a^n - 1$, entonces $d \mid n$.*
Demostración del Lema. Si $a^d - 1 \mid a^n - 1$, entonces $n \geq d$. Luego, por el algoritmo de la división, $n = dq + r$ para q y r enteros con $0 \leq r < d$. Entonces,

$$\begin{aligned} a^n - 1 &= (a^{dq+r} - a^r) + (a^r - 1) \\ &= a^r(a^{dq} - 1) + (a^r - 1). \end{aligned}$$

Como $a^d - 1$ divide a $a^{dq} - 1$, se sigue que $a^d - 1$ debe dividir a $a^r - 1$. Si $a^r - 1 > 0$ tendríamos que $d \leq r$, lo cual es una contradicción. Luego, $a^r - 1 = 0$ de donde $r = 0$, y por lo tanto $d \mid n$.
Continuemos con la solución del problema.
Si $a = 1$, entonces n, p, q y r pueden ser cualesquiera enteros positivos.
Supongamos que $a > 1$, y sin pérdida de generalidad $p \leq q \leq r$. Luego, tenemos que $a^n - 1 \leq (a^r - 1)^3 = a^{3r} - 3a^{2r} + 3a^r - 1 < a^{3r} - 1$, pues $a^{2r} > a^r$. Por lo tanto $n < 3r$. Como $a^r - 1 \mid a^n - 1$ el Lema implica que $r \mid n$, es decir, $n = rk$ con k entero positivo. Como $n < 3r$ tenemos que $k = 1$ o 2 de modo que los valores posibles de n son r o $2r$.
Si $n = r$, entonces $a^p - 1 = a^q - 1 = 1$ de donde $a = 2$ y $p = q = 1$. Luego, tenemos las soluciones $(a, n, p, q, r) = (2, n, 1, 1, n)$, $(2, n, 1, n, 1)$ y $(2, n, n, 1, 1)$, con n entero positivo.
Si $n = 2r$, entonces $a^r + 1 = a^{p+q} - a^p - a^q + 1$, de modo que $a^{r-p} = a^q - a^{q-p} - 1$. Esto implica que $q - p = 0$ y así $a^{r-q} = a^q - 2$ o $2 = a^q - a^{r-q} = a^{r-q}(a^{2q-r} - 1)$. Tenemos dos opciones:

- $a^{r-q} = 2$ y $a^{2q-r} - 1 = 1$. De donde obtenemos $a = 2$, $p = q = 2$ y $r = 3$. Las soluciones en este caso son $(a, n, p, q, r) = (2, 6, 2, 2, 3)$, $(2, 6, 2, 3, 2)$ y $(2, 6, 3, 2, 2)$.

- $a^{r-q} = 1$ y $a^{2q-r} - 1 = 2$. De donde obtenemos $a = 3$, $p = q = r = 1$, y la única solución en este caso es $(a, n, p, q, r) = (3, 2, 1, 1, 1)$.

Concurso Nacional 2011
25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 13 al 19 de noviembre de 2011 se llevó a cabo en San Luis Potosí, San Luis Potosí, el Concurso Nacional de la 25^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Los 16 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

José Ángel Sánchez Gómez (Baja California)
Alberto Manuel Astiazarán Tobín (Chihuahua)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Jorge Garza Vargas (Distrito Federal)
Ramón Iván García Álvarez (Guanajuato)
Marco Antonio Flores Martínez (Jalisco)
Jorge Ignacio González Cázares (Jalisco)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Juan Carlos Ortiz Rothon (Jalisco)
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco)
Diego Terán Ríos (Morelos)
José Alberto De la Paz Espinosa (Nayarit)
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León)
Julio César Díaz Calderón (Oaxaca)
José Ramón Guardiola Espinosa (San Luis Potosí)
José Ángel de Jesús Sosa Salinas (San Luis Potosí)

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Juan Carlos Ortiz Rothon (Jalisco)
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Carlos Ignacio Carriera Ramírez (Colima)
Manuel Alejandro Ceballos Pech (Yucatán)
Diego Fajardo Rojas (Puebla)
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán (San Luis Potosí)

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 24^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. Yucatán
4. San Luis Potosí
5. Distrito Federal
6. Colima
7. Morelos
8. Guanajuato
9. Baja California
10. Querétaro

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Carlos Jacob Rubio Barrios**" y fue ganado por Nayarit. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Colima y Durango, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2011. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Se tienen 25 focos distribuidos de la siguiente manera: los primeros 24 se disponen en una circunferencia colocando un foco en cada uno de los vértices de un 24-ágono regular, y el foco restante se coloca en el centro de dicha circunferencia.
Únicamente se permite aplicar cualquiera de las siguientes dos operaciones:

- Tomar dos vértices sobre la circunferencia tales que hay una cantidad impar de vértices en los arcos que definen, y cambiar el estado de los focos de estos dos vértices y el del foco del centro de la circunferencia.
- Tomar tres vértices sobre la circunferencia que formen un triángulo equilátero, y cambiar el estado de los focos en estos tres vértices y el del foco del centro de la circunferencia.

Muestra que partiendo de cualquier configuración inicial de focos encendidos y apagados, siempre es posible aplicar un número finito de operaciones para llegar a la configuración en la que todos los focos están encendidos.

(Sugerido por Luis Eduardo García Hernández)

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con sus vértices sobre la circunferencia $\mathcal{C}$. Sea l la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto A. La circunferencia con centro B y radio BA intersecta a la recta l en D y a la recta AC en E. Muestra que la recta DE pasa por el ortocentro del triángulo ABC. *Nota: El ortocentro de un triángulo es el punto donde concurren las tres alturas del triángulo.*

(Sugerido por Luis Eduardo García Hernández)

Problema 3. Sea $n \geq 3$ un entero positivo. Encuentra todas las soluciones de números reales $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ que satisfacen el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2 \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3 \\ &\vdots \\ a_{n-1}^2 + a_{n-1} - 1 &= a_n \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

(Sugerido por Fernando Campos García)

Problema 4. Encuentra el menor entero positivo tal que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos y que es divisible entre cada uno de los números del 1 al 9.

Nota: Un ejemplo de un número que al escribirlo en notación decimal utiliza exactamente dos dígitos distintos es el 2202022002.

(Sugerido por Fernando Campos García)

Problema 5. Una cuadrícula con lados de longitudes $(2^n - 1)$ y $(2^n + 1)$ se quiere dividir en rectángulos ajenos con lados sobre líneas de la cuadrícula y con un número de cuadraditos de 1×1 dentro del rectángulo igual a una potencia de 2.

Encuentra la menor cantidad de rectángulos en los que se puede dividir la cuadrícula.

Nota: El 1 *es considerado una potencia de* 2 *pues* $2^0 = 1$.

(Sugerido por Daniel Perales Anaya)

Problema 6. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias de radios diferentes que se cortan en los puntos A y B. Consideremos un punto C sobre la recta AB de modo que B queda entre A y C. Sean P y Q puntos sobre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, tales que CP es tangente a $\mathcal{C}_1$, CQ es tangente a $\mathcal{C}_2$, P no está dentro de $\mathcal{C}_2$ y Q no está dentro de $\mathcal{C}_1$. La recta PQ corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en R y a $\mathcal{C}_2$ en S, ambos puntos distintos de B. Supongamos que CR corta de nuevo a $\mathcal{C}_1$ en X y CS corta de nuevo a $\mathcal{C}_2$ en Y. Sea Z un punto sobre la recta XY. Muestra que SZ es paralela a QX si y sólo si PZ es paralela a RX.

(Sugerido por Daniel Perales Anaya)

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

52^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 12 al 24 de julio de 2011 se llevó a cabo la 52^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Amsterdam, Holanda, con la participación de 564 competidores provenientes de 101 países.

El desempeño de México en esta competencia internacional fue excelente, ya que logró colocarse en el vigésimo segundo lugar de la lista de países participantes. México conquistó 120 puntos, detrás de Brasil y Bulgaria con 121 puntos cada uno. Brasil y México obtuvieron las puntuaciones más altas de Latinoamérica, seguidos por Perú con 113 puntos y Argentina con 77 puntos. Por primera ocasión, los seis alumnos integrantes de la delegación mexicana obtuvieron una medalla. México ha participado desde 1987 en la Olimpiada Internacional y hasta ahora, es el mejor lugar que ha ocupado.

La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Daniel Perales Anaya y Georges Belanger Albarrán, del Estado de Morelos, Flavio Hernández González, de Aguascalientes, Manuel Alejandro Espinosa García, de Michoacán, Diego Alonso Roque Montoya, de Nuevo León, y Jorge Garza Vargas, del Distrito Federal, todos ellos alumnos menores de 19 años, y Diego con tan solo 15 años de edad. Flavio y Diego se vieron galardonados con una medalla de plata, Daniel, Jorge, Georges y Manuel obtuvieron cada uno una medalla de bronce.

Por primera vez uno de los problemas que México propuso para la 52^a Olimpiada Internacional, fue seleccionado para formar parte del examen de la competencia. El valor de este reconocimiento se puede apreciar al tomar en cuenta el proceso que culmina en esta selección: a lo largo del año el país organizador recibe problemas de todo el mundo y un comité de expertos selecciona, de un conjunto de 140 problemas aproximadamente, un subconjunto de problemas de donde los representantes de cada país eligirán aquellos que integrarán el examen. El problema fue elaborado por Fernando Campos García, exolímpico y actualmente estudiante de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la 52^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cualquier conjunto $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ de cuatro enteros positivos distintos se denota la suma $a_1+a_2+a_3+a_4$ por s_A. Sea n_A el número de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq 4$ para las cuales a_i+a_j divide a s_A. Encontrar todos los conjuntos A de cuatro enteros positivos distintos para los cuales se alcanza el mayor valor posible de n_A.

(Problema sugerido por México)

Solución de Jorge Garza Vargas. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Observemos que $a_i + a_j \mid s_A$ si y sólo si $a_i + a_j \mid s_A - (a_i + a_j)$, es decir, $a_i + a_j$ divide a la suma de los elementos de su complemento si y sólo si divide a s_A.
Como $a_4 > a_2$ y $a_3 > a_1$, entonces $a_4 + a_3 > a_2 + a_1$, luego $a_4 + a_3 \nmid a_2 + a_1$. Análogamente, como $a_4 > a_3$ y $a_2 > a_1$, tenemos que, $a_4 + a_2 \nmid a_3 + a_1$. Entonces, por la observación anterior, obtenemos que $a_4 + a_3 \nmid s_A$ y $a_4 + a_2 \nmid s_A$.
Como hay $\binom{4}{2} = 6$ parejas de elementos en A y dos de ellas no cumplen que la suma de sus elementos dividen a s_A, entonces el máximo n_A satisface que $n_A \leq 6 - 2 = 4$. Observemos que $n_A = 4$, si $A = \{1, 5, 7, 11\}$. Por lo tanto, 4 es el valor máximo que puede alcanzar n_A.
Supongamos que $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ es tal que $n_A = 4$. Luego,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 \mid s_A &\quad\Rightarrow\quad a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4, \\ a_1 + a_3 \mid s_A &\quad\Rightarrow\quad a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4, \\ a_2 + a_3 \mid s_A &\quad\Rightarrow\quad a_2 + a_3 \mid a_1 + a_4, \\ a_1 + a_4 \mid s_A &\quad\Rightarrow\quad a_1 + a_4 \mid a_2 + a_3. \end{aligned}$$

De las dos últimas divisibilidades se obtiene que, $a_2+a_3 \leq a_1+a_4$ y $a_1+a_4 \leq a_2+a_3$, es decir,

$$a_1 + a_4 = a_2 + a_3. \tag{2}$$

Como $a_1 + a_3 \mid a_2 + a_4$, y por (2), tenemos que $a_1 + a_3 \mid 2a_2 + a_3 - a_1$, de donde, $a_1+a_3 \mid 2a_2+a_3-a_1-(a_1+a_3) = 2(a_2-a_1) > 0$. Entonces $2(a_2-a_1)$ es múltiplo de $a_1 + a_3$, luego $a_1 + a_3 \leq 2(a_2 - a_1)$. Por otra parte, si $a_1 + a_3 < 2(a_2 - a_1)$, se tiene que, $a_1 + a_3 < \frac{2(a_2-a_1)}{2} = a_2 - a_1$ (pues es a lo más la mitad), pero $a_2 > a_2 - a_1 > a_3 + a_1 > a_3$, que es una contradicción. Entonces, $a_1 + a_3 \geq 2(a_2 - a_1)$. Por lo tanto, $a_1 + a_3 = 2(a_2 - a_1)$, de donde,

$$2a_2 = 3a_1 + a_3. \tag{3}$$

Análogamente, como $a_3 + a_4 = 2a_3 + a_2 - a_1$ y $a_1 + a_2 \mid a_3 + a_4$, tenemos que $a_1+a_2 \mid 2a_3+a_2-a_1$, de donde, $a_1+a_2 \mid 2(a_3-a_1)$. Pero utilizando (3), obtenemos que $a_3 - a_1 = 2a_2 - 4a_1$, entonces $a_1 + a_2 \mid 4a_2 - 8a_1$, de donde $a_1 + a_2 \mid 4a_2 -$

$8a_1 - (a_1 + a_2) = 3(a_2 - 3a_1)$. Además de (3) se tiene que $a_2 + (a_2 - a_3) = 3a_1$, luego, $a_2 > 3a_1$ y de aquí que $3(a_2 - 3a_1) > 0$. Por lo tanto $a_1 + a_2 \leq 3(a_2 - 3a_1)$.

Por otra parte, $a_1 + a_2 > \frac{3(a_2 - a_1)}{3}$, es decir, $a_1 + a_2$ es más de un tercio de $3(a_2 - a_1)$. Como $a_1 + a_2 \mid 3(a_2 - 3a_1)$, tenemos sólo dos casos.

1. Supongamos que $a_1 + a_2 = 3(a_2 - 3a_1)$. Entonces $5a_1 = a_2$. Luego sustituyendo en (3) obtenemos que, $a_3 = 7a_1$. Sustituyendo en (2) obtenemos que, $11a_1 = a_4$. Además, la cuarteta $(a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1)$ cumple las condiciones del problema para todo a_1 entero positivo.

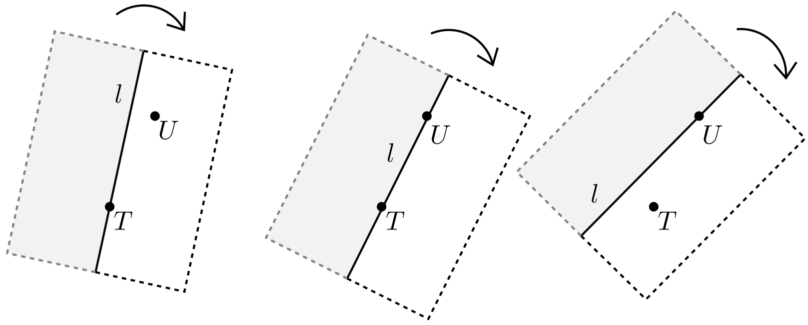
2. Supongamos que $2(a_1 + a_2) = 3(a_2 - 3a_1)$. Entonces $11a_1 = a_2$. Luego sustituyendo en (3) obtenemos que, $19a_1 = a_3$. Finalmente sustituyendo en (2) obtenemos que, $29a_1 = a_4$. Además, la cuarteta $(a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1)$ cumple las condiciones del problema para todo a_1 entero positivo.

Luego, las soluciones son las cuartetas: $(a_1, 5a_1, 7a_1, 11a_1)$ y $(a_1, 11a_1, 19a_1, 29a_1)$ para todo entero positivo a_1.

Problema 2. Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En $\mathcal{S}$ no hay tres puntos colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta l que pasa por un único punto P de $\mathcal{S}$. Se rota l en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de $\mathcal{S}$ al cual llamaremos Q. Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta en el sentido de las manecillas del reloj hasta que la recta encuentre otro punto de $\mathcal{S}$. Este proceso continúa indefinidamente.
Demostrar que se puede elegir un punto P de $\mathcal{S}$ y una recta l que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación un número infinito de veces.

(Problema sugerido por Reino Unido)

Solución oficial. Démosle una orientación a la recta l, esto es, digamos que tiene una dirección positiva y otra negativa. Además, digamos que la recta l siempre divide al plano en dos semiplanos: uno gris y uno blanco. La necesidad de darle una orientación a la recta l es para poder distinguir los lados cuando la recta ha sido girada $180°$. Notemos que siempre que l cambia de centro de rotación del punto T al punto U, T queda en el mismo lado que estaba antes U. Por lo tanto, el número de puntos de $\mathcal{S}$ en el lado gris y el número de puntos de $\mathcal{S}$ en el lado blanco se conservan durante todo el proceso (a excepción de cuando la línea contiene dos puntos de $\mathcal{S}$).



Primero consideremos el caso cuando $|\mathcal{S}| = 2n+1$ es impar. Demostraremos que a través de cualquier punto $T \in \mathcal{S}$, hay una recta que tiene n puntos de cada lado. Para ver esto, elijamos una recta orientada que pase por T que no contenga ningún otro punto de $\mathcal{S}$ y digamos que tiene $n+r$ puntos en su lado gris. Si $r = 0$ no hay nada que demostrar, así que podemos asumir que $r \neq 0$. Si rotamos la recta orientada $180°$ alrededor de T, el número de puntos de $\mathcal{S}$ en su lado gris cambia en 1 cada vez que dicha recta pasa por otro punto de $\mathcal{S}$. Como al terminar tendremos $n-r$ puntos de $\mathcal{S}$ en el lado gris (pues ahora el lado gris es el que antes era el lado blanco), debe haber un momento en que cada lado de la recta contiene n puntos.

Ahora elegimos como estado inicial del remolino un punto $P \in \mathcal{S}$ arbitrario y una recta que pase por P que tenga n puntos en cada lado. Demostraremos que durante la rotación de $180°$, la recta l usa a cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación. Para esto, elegimos otro punto $T \in \mathcal{S}$ y una recta l' que separe a $\mathcal{S}$ en partes iguales. Cuando l gire hasta ser paralela a l', debe ser exactamente l', pues de otro modo, tendríamos dos rectas paralelas, cada una de ellas con un punto de $\mathcal{S}$ que separan en partes iguales a $\mathcal{S}$, lo cual es imposible.

Si $|\mathcal{S}| = 2n$, de una manera parecida al caso impar, para cada punto $T \in \mathcal{S}$ podemos encontrar una recta orientada con $n-1$ puntos en su lado gris y n puntos en su lado blanco. Elegimos dicha recta para un punto arbitrario P como el estado inicial del remolino.

Para este caso, demostraremos que durante una rotación de la recta por $360°$ la recta usa cada punto de $\mathcal{S}$ como centro de rotación. Para ello, elegimos otro punto $T \in \mathcal{S}$ y una recta orientada l' que pase por T que separe a $\mathcal{S}$ en dos conjuntos, uno con $n-1$ en su lado gris y el otro con n puntos en su lado blanco. De la misma manera, al considerar el caso cuando l sea paralela a dicha recta y con la misma orientación, tendremos que l debe pasar por T.

Problema 3. Sea f una función del conjunto de los números reales en sí mismo que satisface,

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

para todo par de números reales x, y. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \leq 0$.

(Problema sugerido por Bielorrusia)

Solución oficial. Haciendo $y = t - x$, la desigualdad dada se puede reescribir en la forma,

$$f(t) \leq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \tag{4}$$

Consideremos algunos números reales a y b. Usando (4) con $t = f(a)$ y $x = b$, así como con $t = f(b)$ y $x = a$, obtenemos,

$$f(f(a)) - f(f(b)) \leq f(a)f(b) - bf(b),$$
$$f(f(b)) - f(f(a)) \leq f(a)f(b) - af(a).$$

Sumando estas dos desigualdades obtenemos,

$$2f(a)f(b) \geq af(a) + bf(b).$$

Ahora, sustituimos $b = 2f(a)$ para obtener $2f(a)f(b) \geq af(a) + 2f(a)f(b)$, o bien, $af(a) \leq 0$. De aquí,

$$f(a) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad a < 0. \tag{5}$$

Supongamos ahora que $f(x) > 0$ para algún número real x. De (4) obtenemos inmediatamente que para todo $t < \frac{xf(x)-f(f(x))}{f(x)}$ se tiene que $f(t) < 0$. Esto contradice la relación (5). Por lo tanto,

$$f(x) \leq 0 \quad \text{para todo número real} \quad x, \tag{6}$$

y por (5) obtenemos que $f(x) = 0$ para todo $x < 0$.
Lo único que nos falta es determinar $f(0)$. Haciendo $t = x < 0$ en (4) obtenemos $0 \leq 0 - 0 + f(0)$, de donde $f(0) \geq 0$. Combinando esto con (6) obtenemos que $f(0) = 0$.

Problema 4. Sea $n > 0$ un entero. Se dispone de una balanza de dos platillos y de n pesas cuyos pesos son $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Debemos colocar cada una de las n pesas en la balanza, una tras otra, de manera tal que el platillo de la derecha nunca sea más pesado que el platillo de la izquierda. En cada paso, elegimos una de las pesas que no ha sido colocada en la balanza, y la colocamos ya sea en el platillo de la izquierda o en el platillo de la derecha, hasta que todas las pesas hayan sido colocadas. Determinar el número de formas en las que esto se puede hacer.

(Problema sugerido por Irán)

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Denotaremos por,

$$(2^{x_1}y_1, 2^{x_2}y_2, \ldots, 2^{x_n}y_n)$$

una forma de acomodar las pesas en los platillos tal que las pesas se pusieron en este orden: $2^{x_1}, 2^{x_2}, \ldots, 2^{x_n}$ y, si la pesa 2^{x_i} con $1 \leq i \leq n$ fue colocada en el platillo de la izquierda decimos que $y_i = 1$ y si fue puesto en la derecha decimos que $y_i = -1$. Justo después de haber puesto la k-ésima pesa, tenemos que,

$$I(k) - D(k) = \sum_{i=1}^{k} 2^{x_i} y_i,$$

donde $I(k)$ y $D(k)$ son los pesos de los platillos izquierdo y derecho, respectivamente, después de haber puesto la k-ésima pesa. Queremos determinar el número de n-tuplas de la forma $(2^{x_1}y_1, \ldots, 2^{x_n}y_n)$ tales que $I(k) - D(k) \geq 0$ para toda k que cumpla $1 \leq k \leq n$.
Sea A_n el conjunto de tales n-tuplas y sea $a = (2^{x_1}y_1, \ldots, 2^{x_n}y_n) \in A_n$. Veamos que si suprimimos la pesa 2^0 y dividimos cada pesa entre 2, obtenemos una forma $a' \in A_{n-1}$. Sea $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_t = 0$. Tenemos que,

$$a' = (2^{x_1-1}y_1, \ldots, 2^{x_{t-1}-1}y_{t-1}, 2^{x_{t+1}-1}y_{t+1}, \ldots, 2^{x_n-1}y_n).$$

Para esta a' demostremos que $I(k) - D(k) \geq 0$ para toda k tal que $0 \leq k \leq n-1$. Dividamos en dos casos:

- $k < t$. Tenemos que $I(k) - D(k) = \sum_{i=0}^{k} 2^{x_i-1}y_i = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} 2^{x_i}y_i \geq 0$, ya que $a \in A_n$.
- $k \geq t$. Como $a \in A_n$, tenemos que $\sum_{i=0}^{k} 2^{x_i}y_i \geq 0$, pero como dicho valor es impar, $\sum_{i=0}^{k} 2^{x_i}y_i \geq 1$, luego,

$$I(k) - D(k) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} 2^{x_i}y_i - 2^0 y_t\right) \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{k} 2^{x_i}y_i - 1\right) \geq \frac{1}{2}(1-1) = 0.$$

Por lo tanto $a' \in A_{n-1}$.
Por otro lado, si tomamos $a' \in A_{n-1}$, multiplicamos todas las pesas por 2, sigue cumpliendo que $I(k) - D(k) \geq 0$ para toda $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, hay que ver en dónde se puede poner la pesa 2^0 que es la única que falta. Dicha pesa no puede ser puesta en el primer movimiento en la bandeja derecha. De cualquier otra manera sí puede ser puesta, ya que en cualquier momento, para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que $I(k) - D(k) \geq 0$, pero no puede ser 0, pues para que sea 0 tendríamos el mismo peso en ambos platillos, es decir, un número con dos diferentes expansiones en base 2. Por lo tanto $I(k) - D(k) \geq 2$ y al agregar el 2^0 obtendríamos $I(k) - D(k) \pm 1 \geq 2 \pm 1 \geq 1 > 0$.
Por lo tanto, cada elemento de A_{n-1} nos genera $2n-1$ elementos en A_n, luego, $|A_n| = (2n-1)|a_{n-1}|$ y (se tiene que $|A_1| = 1$),

$$|A_n| = (2n-1)|A_{n-1}| = \cdots = (2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1).$$

Por lo tanto, hay $(2n-1)(2n-3)\cdots(3)(1)$ formas de colocar las pesas.

Problema 5. Sea f una función del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros positivos. Se supone que para cualesquiera dos enteros m y n, la diferencia

$f(m) - f(n)$ es divisible por $f(m-n)$.
Demostrar que para todos los enteros m y n con $f(m) \leq f(n)$, el número $f(n)$ es divisible por $f(m)$.

(Problema sugerido por Irán)

Solución de Flavio Hernández González. Tomando $m = x$ y $n = 0$, tenemos que $f(x) \mid f(x) - f(0)$. Entonces, $f(x) \mid f(0)$ para toda $x \in \mathbb{Z}$. Luego, tomando $m = 0$ y $n = x$, resulta que, $f(-x) \mid f(0) - f(x)$, pero $f(-x) \mid f(0)$, entonces $f(-x) \mid f(x)$ para toda x entera. Entonces, para toda x entera también pasa que $f(x) \mid f(-x)$. Como la función sólo toma valores positivos, tenemos que $f(-x) = f(x)$ para toda $x \in \mathbb{Z}$.

Ahora supongamos que tenemos una pareja (m, n) con $f(m) \leq f(n)$. Si se da la igualdad es obvio que se cumple la divisibilidad que queremos.

Supongamos que $f(m) < f(n)$. Luego, $f(n-m) \mid f(n) - f(m)$, pero $f(n) - f(m) > 0$, entonces $f(n-m) \leq f(n) - f(m)$, de donde $f(n-m) + f(m) \leq f(n)$.

Notemos que $f(m - (m-n)) \mid f(m) - f(m-n)$.

Como $f(n-m) = f(m-n)$ entonces, $f(n) \mid f(m) - f(n-m)$. Si $f(m) \neq f(n-m)$, tenemos que $f(n) \leq |f(m) - f(n-m)|$. Pero $f(m) + f(n-m) \leq f(n)$ luego,

$$f(m) + f(n-m) \leq |f(m) - f(n-m)|.$$

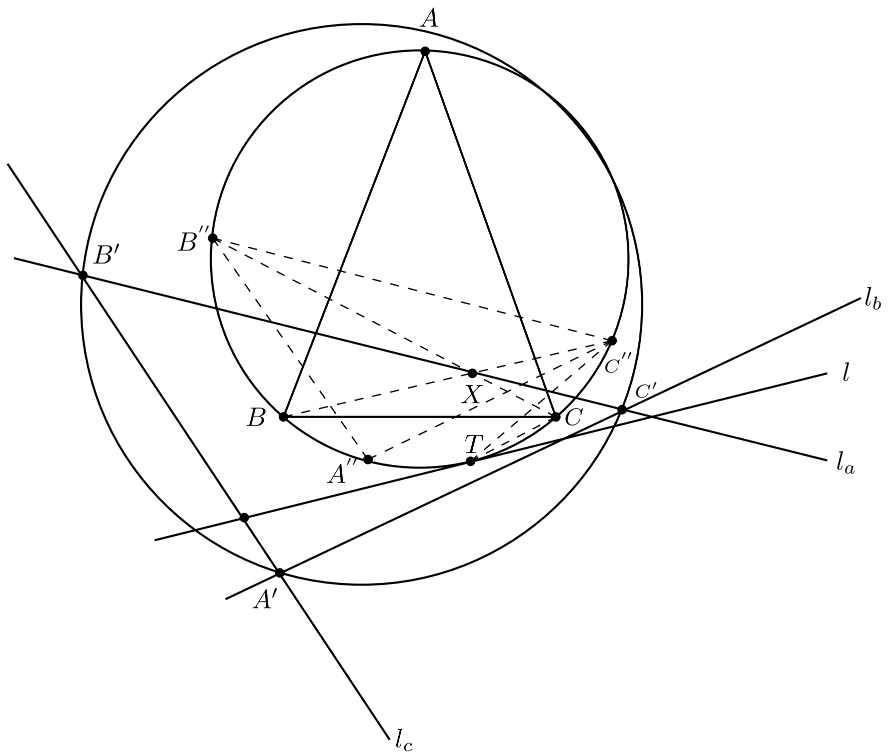
Pero como los valores de f son todos positivos, esta desigualdad no se puede dar, ya que el lado derecho es menor a el mayor de los valores de $f(m)$ y $f(n-m)$. Entonces es una contradicción y $f(m) = f(n-m)$, entonces como $f(n-m) \mid f(n) - f(m)$, tenemos que $f(m) \mid f(n) - f(m)$ y $f(m) \mid f(n)$, como queríamos.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Sea l una recta tangente a Γ, y sean l_a, l_b y l_c las rectas que se obtienen al reflejar l con respecto a las rectas BC, CA y AB, respectivamente. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo determinado por las rectas l_a, l_b y l_c es tangente a la circunferencia Γ.

(Problema sugerido por Japón)

Solución oficial. Para evitar un largo análisis de casos, vamos a utilizar la noción de ángulos orientados. Para dos rectas ℓ y $\jmath$ denotemos por $\angle(\ell, \jmath)$ el ángulo por el cual se puede girar en el sentido contrario a las manecillas del reloj la recta ℓ para obtener una recta paralela a $\jmath$. Luego, todos los ángulos orientados se consideran módulo $180°$.

Denotemos por T el punto de tangencia de l y Γ. Sea $A' = l_b \cap l_c$, $B' = l_a \cap l_c$ y $C' = l_a \cap l_b$. Sea A'' en Γ tal que $TA = AA''$ ($A'' \neq T$ a menos que TA sea un diámetro). Definamos los puntos B'' y C'' de manera análoga.

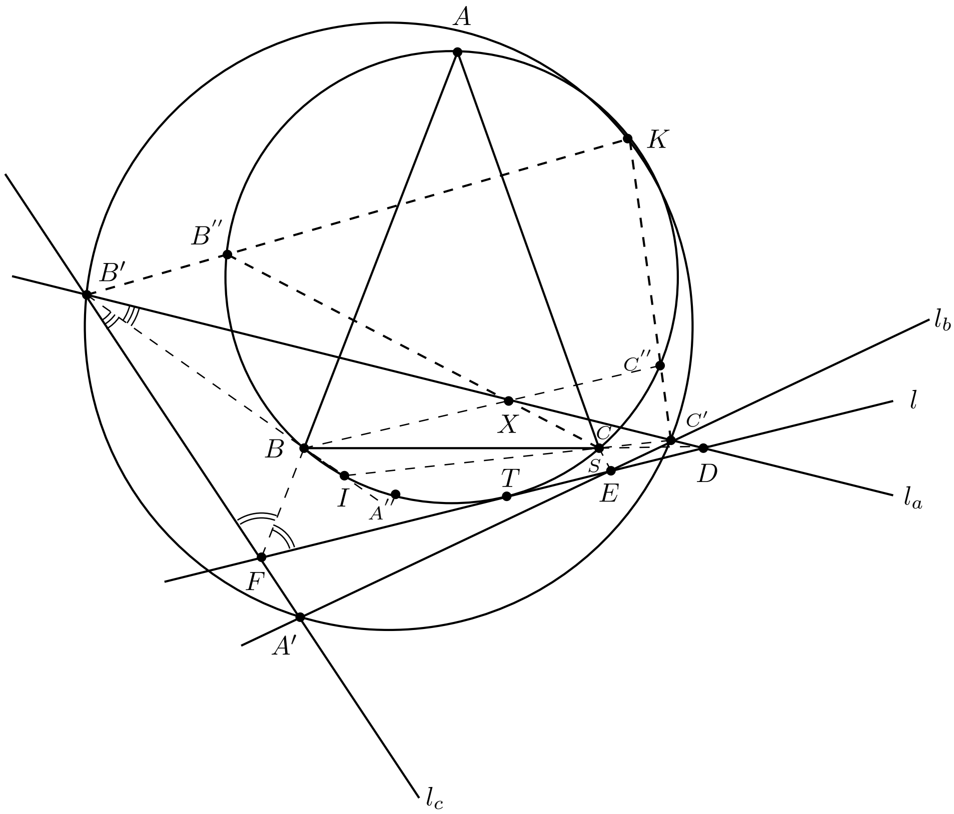


Como los puntos C y B son los puntos medios de los arcos $\widehat{TC''}$ y $\widehat{TB''}$, respectivamente, tenemos que,

$$\begin{aligned}\angle(l, B''C'') &= \angle(l, TC'') + \angle(TC'', B''C'') = 2\angle(l, TC) + 2\angle(TC'', BC'')\\ &= 2\left(\angle(l, TC) + \angle(TC, BC)\right) = 2\angle(l, BC) = \angle(l, l_a).\end{aligned}$$

Luego, l_a y $B''C''$ son paralelas. Análogamente, tenemos que, l_b y $A''C''$ son paralelas y, l_c y $A''B''$ son paralelas. Por lo tanto, los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son homotéticos o se traslada uno en el otro.
Si probamos que son homotéticos y que el centro de homotecia K pertenece a Γ, tendríamos que los circuncírculos son también homotéticos con respecto a K y tangentes en un punto, como se quería demostrar.
Sea X el punto de intersección de las rectas $B''C$ y BC''. Como los puntos X y T son simétricos respecto a la recta BC, ya que las rectas CT y CB'' son simétricas respecto a BC, así como también lo son las rectas BT y BC'', tenemos que el punto X está en l_a.
Ahora demostraremos que el punto de intersección I de las rectas BB' y CC' se encuentra en Γ.

Consideramos el caso en que l no es paralela a los lados del triángulo ABC; los otros casos se pueden ver como casos límite.
Sean $D = l \cap BC$, $E = l \cap AC$ y $F = l \cap AB$.



Debido a la simetría, la recta DB es una de las bisectrices de las rectas $B'D$ y FD. Análogamente, la recta FB es una de las bisectrices de las rectas $B'F$ y DF. Entonces B es el incentro del triángulo $B'DF$, o uno de los excentros. En ambos casos tenemos que, $\angle(BD, DF) + \angle(DF, FB) + \angle(B'B, B'D) = 90°$. Luego,

$$\begin{aligned}\angle(B'B, B'C') &= \angle(B'B, B'D)\\ &= 90° - \angle(BC, DF) - \angle(DF, BA) = 90° - \angle(BC, AB).\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos que $\angle(C'C, B'C') = 90° - \angle(BC, AC)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\angle(BI, CI) &= \angle(B'B, B'C') + \angle(B'C', C'C)\\ &= \angle(BC, AC) - \angle(BC, AB) = \angle(AB, AC),\end{aligned}$$

lo que significa que los puntos A, B, I, C son concíclicos. Por lo tanto, I está en Γ. Ahora bien, sea K el segundo punto de intersección de $B'B''$ y Γ. Aplicando el teorema de Pascal (ver en el apéndice el teorema 19) al hexágono $KB''CIBC''$ tenemos que los puntos $B' = KB'' \cap IB$ y $X = B''C \cap BC''$ son colineales con el punto de intersección S de las rectas CI y $C''K$. Luego, $S = CI \cap B'X = C'$, y los puntos C', C'' y K son colineales. Así K es el punto de intersección de $B'B''$ y $C'C''$, lo que implica que K es el centro de homotecia, llevando a $A'B'C'$ en $A''B''C''$ y pertenece a Γ.

XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 25 de septiembre al 1° de octubre de 2011, en la ciudad de San José, Costa Rica, se realizó la XXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en la que participaron 21 países con un total de 78 estudiantes. México obtuvo el Primer Lugar general por países, quedando por encima de Argentina, Brasil, Cuba, España, Perú y Portugal entre otros. La destacada delegación mexicana estuvo integrada por: Flavio Hernández González, de Aguascalientes, Diego Alonso Roque Montoya, de Nuevo León, quienes obtuvieron medalla de Oro; Jorge Garza Vargas, del Distrito Federal, quien obtuvo medalla de Plata y José Ramón Guardiola Espinosa, de San Luis Potosí, con medalla de Bronce.
Cabe señalar que con esta destacada participación, México cerró con broche de oro el año 2011. En cada una de las Olimpiadas Internacionales a las que asistió, obtuvo resultados sorprendentes. En la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, la delegación mexicana obtiene el mayor puntaje en su historia. En la Olimpiada Internacional de Matemáticas los seis participantes fueron premiados, dos de ellos con medalla de Plata y los otros cuatro con medalla de Bronce, siendo la primera ocasión en que todos los alumnos de la delegación obtienen una presea.

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la XXVI Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. En la pizarra está escrito el número 2. Ana y Bruno juegan alternadamente, comenzando por Ana. Cada uno en su turno sustituye el número escrito por el que se obtiene de aplicar exactamente una de las siguientes operaciones: multiplicarlo por 2, o multiplicarlo por 3, o sumarle 1. El primero que obtenga un resultado mayor o igual a 2011 gana. Hallar cuál de los dos tiene una estrategia ganadora y describir dicha estrategia.

Solución de José Ramón Guardiola Espinosa. Bruno tiene estrategia ganadora.
Ya que Ana comienza, debe obtener como resultado en su primer turno 4, 6 o 3. En caso de que Ana obtenga un 4, Bruno lo sustituye por un 5. Luego Ana podrá obtener $5\cdot 2 = 10$, $5\cdot 3 = 15$ o $5+1 = 6$. En cualquiera de los dos primeros casos, Bruno puede obtener un 30. En caso de que Ana haya obtenido un 6, Bruno continúa obteniendo un $6+1 = 7$. Ana puede continuar con un $7\cdot 2 = 14$, $7\cdot 3 = 21$ o $7+1 = 8$. En cualquiera de los dos primeros casos Bruno puede obtener un 42. En el último caso, Bruno pone $8 + 1 = 9$. Ana solo podrá obtener $9 \cdot 2 = 18$, $9 \cdot 3 = 27$ o $9 + 1 = 10$, y Bruno podría obtener $18 \cdot 2 = 36$, $27 + 1 = 28$ o $10 \cdot 3 = 30$, respectivamente. En el caso en

que Ana haya obtenido un 3, Bruno obtiene un $3 \cdot 3 = 9$ y continua como fue descrito anteriormente.
En todos nuestros casos, Bruno le deja a Ana un par del intervalo $[28, 55]$. Si Ana multiplica por dos o por tres el número obtenido, le deja a Bruno un número par del intervalo $[56, 167]$. Bruno obtiene en este caso un número impar de este mismo intervalo sumando 1. Si Ana decide sumarle 1 al número par del intervalo $[28, 55]$, Bruno entonces multiplica por tres el número obtenido para obtener un número impar del intervalo $[56, 167]$.
Si Ana decide sumarle 1 al número obtenido, Bruno también lo hace. Esto continúa hasta que Ana decida multiplicar el número por 2 o 3 o ella deje el número 168 (pues ella modifica los números impares). Si en algún momento Ana decide multiplicar por 2 el número, obtiene un número par del intervalo $[102, 335]$. Si el número está en el intervalo $[102, 166]$, Bruno puede sumarle 1 y regresar a la posición anterior. En otro caso, el número queda en el intervalo $[168, 335]$. Finalmente, si Ana decide multiplicar el número del intervalo por 3, obtiene ya sea un número del intervalo $[168, 335]$ o un número impar del intervalo $[336, 501]$. A continuación analizaremos estos dos casos.
Si Ana obtiene un número del intervalo $[168, 335]$, Bruno lo multiplica por 2 y obtiene un número par del intervalo $[336, 670]$. Si Ana deja un impar del intervalo $[336, 501]$, Bruno le suma 1. Esto deja a Ana invariantemente con un número par del intervalo $[336, 670]$. Si Ana lo multiplica por 2 o por 3, obtiene un número del intervalo $[671, 2010]$. Si Ana decide sumarle 1 al número, Bruno también lo hace. Por la paridad, será Ana la que obtenga el número 671, el cual también está en el intervalo mencionado anteriormente. Una vez que Ana deja un número del intervalo $[671, 2010]$ Bruno solamente debe multiplicarlo por 3 para obtener la victoria.

Problema 2. Encontrar todos los enteros positivos n para los cuales existen tres enteros no nulos x, y, z tales que:

$$x + y + z = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{n}.$$

Solución de José Ramón Guardiola Espinosa. Supongamos que (n, x, y, z) es una cuarteta de enteros que satisface las condiciones del problema, con n impar. Entonces

$$n(xy + xz + yz) = xyz. \tag{7}$$

Como $x + y + z = 0$, entonces en la terna (x, y, z) hay exactamente 1 o 3 pares, ya que de otro modo su suma sería impar. Sean $2^a, 2^b, 2^c$ las máximas potencias de 2 que dividen a x, y y z respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $a \geq b \geq c$ y $a \geq 1$. Luego,

$$a + b \geq a + c \geq b + c \tag{8}$$

y por tanto $2^{a+c} \mid 2^{a+b}$, lo que implica $2^{a+c} \mid xz$ y $2^{a+c} \mid xy$. Como $2^{a+c} \mid xyz$, entonces por (7) tenemos que $2^{a+c} \mid nyz$. Sin embargo, 2^{b+c} es la máxima potencia de 2 que divide a yz, y n es impar, lo que implica que $a + c \leq b + c$. Por (8), tenemos que

$a + c = b + c$, y por tanto $a = b$. Como $z = -(x + y)$, se sigue que $2^a \mid z$, de donde $a \leq c$, y por tanto $a = c$. Entonces, $2^{3a} \mid xyz$, y por (7), $2^{3a} \mid n(xy + xz + yz)$.
Sin embargo, 2^{2a} es la máxima potencia de 2 que divide a $(xy+xz+yz)$, y n es impar. Esto implica $2a \geq 3a$ con $a \geq 1$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe ninguna solución con n impar.
Si n es par, podemos escribir $n = 2k$. Luego, tomando $x = -6k$, $y = z = 3k$ obtenemos que $x + y + z = 0$ y $-\frac{1}{6k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k} = \frac{-1+2+2}{6k} = \frac{1}{2k}$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y sean X, Y, Z los puntos de tangencia de su circunferencia inscrita con los lados BC, CA, ABC respectivamente. Suponga que C_1, C_2, C_3 son circunferencias con cuerdas XY, ZX, YZ, respectivamente tales que C_1 y C_2 se corten sobre la recta CZ y que C_1 y C_3 se corten sobre la recta BY. Suponga que C_1 corta a las cuerdas XY y ZX en J y M respectivamente; que C_2 corta a las cuerdas YZ y XY en L e I; y que C_3 corta a las cuerdas YZ y ZX en K y N, respectivamente. Demostrar que I, J, K, L, M, N están sobre una misma circunferencia.

Solución de Diego Alonso Roque Montoya. Es conocido que las rectas AX, BY y CZ son concurrentes. Como BY y CZ son los ejes radicales (ver en el apéndice la definición 16) de las parejas (C_1, C_3) y (C_1, C_2), esto implica que AX es el eje radical de (C_2, C_3).
Demostraremos primero que $KN \| AB$.
Por ángulos en la circunferencia C_3, así como en la inscrita al triángulo ABC, tenemos que,

$$\angle ZKN = \angle ZXY = \angle AZY,$$

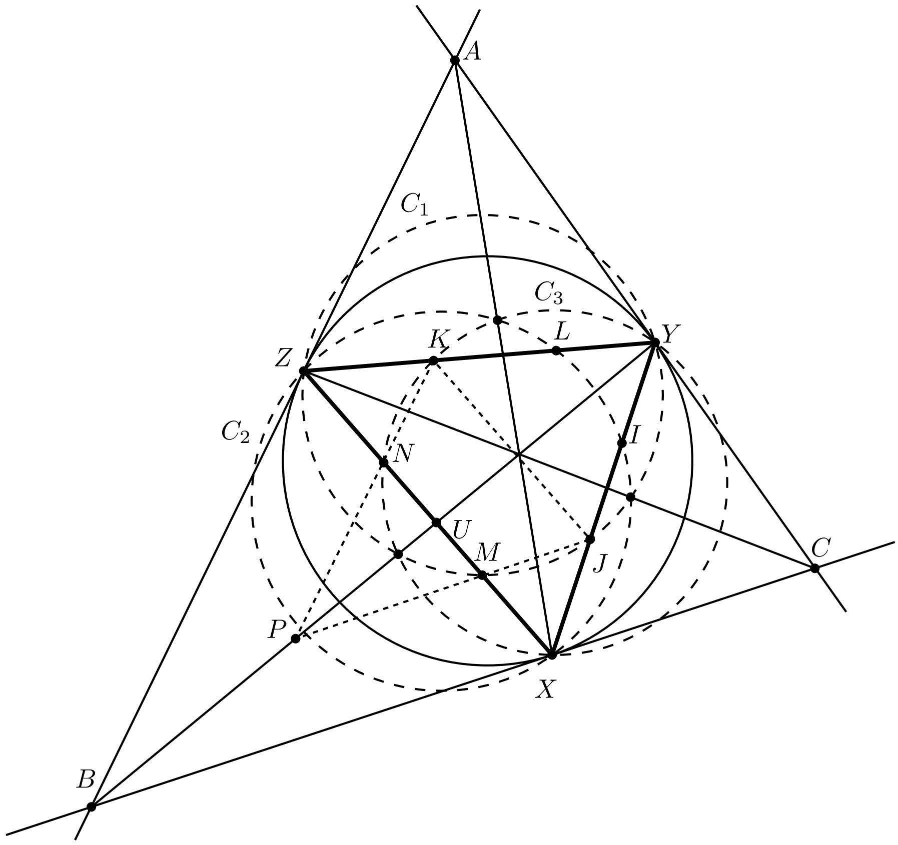
y por ángulos alternos internos, $KN \| AB$. De manera similar, $JM \| CB$.
Sea P la intersección de KN con MJ, y U la intersección de PB y XZ. Por ser $KN \| ZB$ y $JM \| BX$ y coincidir las rectas MN y ZX, tenemos que los triángulos PMN y BXZ son homotéticos con centro de homotecia en U (ver en el apéndice la definición 18). Esto implica que,

$$\frac{UN}{UZ} = \frac{UM}{UX},$$

o lo que es lo mismo, $UM \cdot UZ = UN \cdot UX$. Por lo tanto, U está en el eje radical de C_1 y C_3. Sin embargo, dicho eje es la recta BY. Esto implica que U es la intersección de la recta BY con la recta XZ. Adicionalmente, tenemos que P también se encuentra sobre la recta BY.
Usando que $PK \| ZB$, $PJ \| BX$ y que las rectas ZK, PB y JX concurren en Y, tenemos que los triángulos KPJ y ZBX son homotéticos, con centro de homotecia Y y por tanto $KJ \| ZX$. Por tanto, usando la circunferencia C_2 tenemos que,

$$\angle YKJ = \angle YZX = \angle YIL.$$

Luego, el cuadrilátero $KLIJ$ es cíclico.

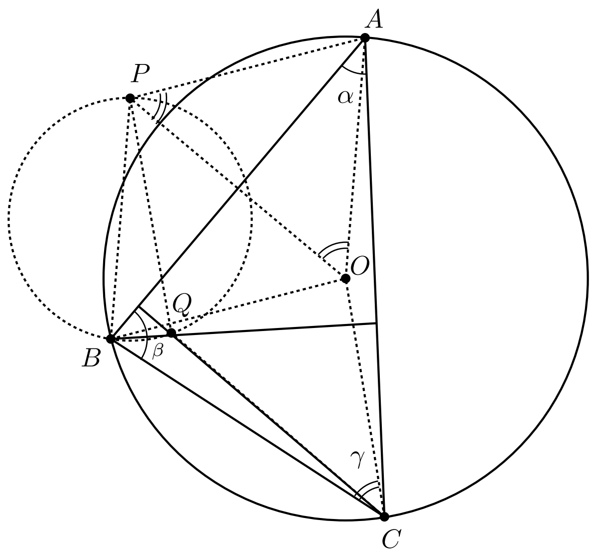


De manera análoga, los cuadriláteros $IJMN$ y $MNKL$ son cíclicos. Como los ejes radicales de estas circunferencias son los lados del triángulo XYZ, tendríamos una contradicción si las circunferencias fueran distintas. Esto implica que al menos dos coinciden y por lo tanto los seis puntos se encuentran sobre una circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AC \neq BC$, y sea O su circuncentro. Sean P y Q puntos tales que $BOAP$ y $COPQ$ son paralelogramos. Demostrar que Q es el ortocentro de ABC.

Solución de Jorge Garza Vargas. Sean $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ y $\angle BCA = \gamma$.
O es circuncentro del triángulo ABC, entonces $AO = BO = CO$, además $\angle BOA = 2\angle BCA = 2\gamma$ y $\angle BOC = 2\angle BAC$, por ser ángulos centrales. En el triángulo isósceles BOC podemos concluir que $\angle OCB = 90° - \alpha$.
Como $OBPA$ es un paralelogramo, $BO = PA$ y $PB = AO$ y los triángulos ABO y BAP son congruentes, de aquí que $PA = BO = AO = PB$, entonces $PBOA$ es un rombo y por lo tanto sus diagonales son perpendiculares, es decir, PO perpendicular a AB. Como por construcción QC es paralela a PO, entonces QC es perpendicular a

AB. De aquí que Q está sobre la altura del triángulo ABC, desde C.



Tomemos el hecho de que en un ángulo de un triángulo, la altura y la recta que une el vértice del ángulo con el circuncentro son isogonales (ver en el apéndice la definición 14), en este caso QC es isogonal a OC, entonces $\angle QCA = \angle OCB = 90^\circ - \alpha$. Por lo tanto,

$$\angle OCQ = \angle BCA - \angle OCB - \angle QCA = \gamma - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha + \gamma - 180^\circ = \alpha - \beta.$$

Como $POCQ$ es paralelogramo, $\angle OCQ = \angle OPQ = \alpha - \beta$, además $OC = PQ$, así $PQ = OC = OB = PA = PB$, de donde podemos asegurar que P es el circuncentro del triángulo AQB. En esta circunferencia $\angle APQ$ es central y $\angle ABQ$ es inscrito, entonces $\angle APQ = 2\angle ABQ$.
Se había demostrado anteriormente que $PBOA$ es un rombo, por lo que PO es bisectriz de $\angle AOB = 2\gamma$, entonces $\angle APO = \angle AOP = \gamma$. Con todas las igualdades obtenidas podemos asegurar lo siguiente,

$$2\angle ABQ = \angle APQ = \angle APO - \angle QPO = \gamma - (\alpha - \beta) = 180^\circ - 2\alpha.$$

Así, $\angle ABQ = 90^\circ - \alpha = \angle OCB = \angle OBC$, de donde podemos asegurar que QB es isogonal a OB, y como O es el circuncentro del triángulo ABC, entonces BQ es altura desde B. Concluimos que como Q está en la altura desde C y desde B, es el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 5. Sean $x_1, \ldots, x_n$ números reales positivos. Demostrar que existen a_1, $\ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tales que,

$$a_1x_1^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Solución de Flavio Hernández González. Demostraremos que el resultado sigue siendo válido, incluso si los x_i son no-negativos. Sin pérdida de generalidad, supongamos $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$. Procederemos por inducción. Cuando $n = 1$, tenemos que podemos tomar $a_1 = 1$ y satisface las condiciones del problema. Con $n = 2$, tomamos $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, y entonces, como $x_1 x_2 \geq x_2^2$, se tiene que,

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = x_1^2 - x_2^2 &= x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &\geq x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 = (a_1x_1 + a_2x_2)^2 \end{aligned}$$

Supondremos entonces que el problema es válido para $n = 2k \geq 2$, usando los signos de manera alternada con los x_i ordenados de mayor a menor. Lo demostraremos para $n = 2k+2$. Sin pérdida de generalidad, tomemos, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{2k+1} \geq x_{2k+2} \geq 0$. Por la hipótesis de inducción,

$$x_3^2 - x_4^2 + \cdots + x_{2k+1}^2 - x_{2k+2}^2 \geq (x_3 - x_4 + \cdots + x_{2k+1} - x_{2k+2})^2. \qquad (9)$$

Sea $s = x_3 - x_4 + \cdots + x_{2k+1} - x_{2k+2}$. Observamos que $x_2 \geq x_3 + (-x_4 + \cdots + x_{2k+1} - x_{2k+2}) = s$ pues $x_2 \geq x_3$ y la componente entre paréntesis es negativa. Sumando $x_1 - x_2$ a la desigualdad anterior obtenemos que $x_1 \geq x_1 - x_2 + s$. Por estas dos desigualdades se obtiene

$$x_1 + x_2 \geq x_1 - x_2 + 2s.$$

Como $x_1 - x_2 \geq 0$, multiplicando por la desigualdad anterior, tenemos,

$$x_1^2 - x_2^2 \geq (x_1 - x_2)^2 + 2s(x_1 - x_2).$$

Sumando esto a la desigualdad (9), se obtiene,

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_2^2 + \cdots + x_{2k+1}^2 - x_{2k+2}^2 &\geq s^2 + (x_1 - x_2)^2 + 2s(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2 + \cdots + x_{2k+1} - x_{2k+2})^2. \end{aligned}$$

Como queríamos probar. Finalmente, para el caso impar, notamos que sencillamente podemos tomar $x_{2k+2} = 0$ para tener una desigualdad similar con $2k + 1$ términos.

Problema 6. Sean k y n enteros positivos, con $k \geq 2$. En una línea recta se tienen kn piedras de k colores diferentes de tal forma que hay n piedras de cada color. Un *paso* consiste en intercambiar de posición dos piedras adyacentes. Encontrar el menor entero positivo m tal que siempre es posible lograr, con a lo sumo m pasos, que las n piedras de cada color queden seguidas si:

a) n es par.

b) n es impar y $k = 3$.

Solución oficial. Primero lo haremos para el caso $k = 2$. Supongamos que los colores son blanco y negro. Sean $W_1, W_2, \dots, W_n$ las piedras blancas numeradas de izquierda a derecha. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea L_i la cantidad de piedras negras que haya a la izquierda de W_i y R_i la cantidad de piedras negras a la derecha de W_i. Claramente, se cumple la ecuación $L_i+R_i = n$. Luego, si $L = \sum_{i=1}^{n} L_i$, y $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$. entonces $L+R = n^2$. Como el mínimo número de pasos necesarios para mover todas las piedras blancas a la derecha es L, y a la izquierda es R, tenemos que se necesitan a lo más $m \leq \min(L, R) \leq \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$ movimientos. Ahora bien, si n es par, en el arreglo $BWWB$, donde B y W son $\frac{n}{2}$ piedras consecutivas de color negro y blanco, respectivamente, $L = R = \frac{n^2}{2}$. Si n es impar, entonces tomamos el arreglo $WBwbBW$, donde B y W son ahora $\frac{n-1}{2}$ piedras consecutivas de color blanco y negro, respectivamente. En este caso, $L = \frac{n^2-1}{2} = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$, y $R = \frac{n^2+1}{2} = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor + 1$. Por lo tanto, $m = \lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$, ya que en estos arreglos se necesitan exactamente $\lfloor \frac{n^2}{2} \rfloor$ intercambios.

a) Usaremos ahora por inducción en k para mostrar que $m_k = \frac{k(k-1)n^2}{4}$, donde m_k es el m correspondiente para un k fijo. El caso base $k = 2$ ya está probado. Demostraremos primero que $m_k \leq \frac{k(k-1)n^2}{4}$. Consideremos una configuración cualquiera de $n(k+1)$ piedras usando $k+1$ colores, n piedras de cada color. Sea C cualquier color y sean $C_1, C_2, \dots, C_n$ las piedras de color C numeradas de izquierda a derecha. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, definimos L_i como la cantidad de piedras a la izquierda de C_i de un color diferente a C, y R_i de forma análoga a la derecha. Entonces $L_i + R_i = kn$ y por tanto, si L es la suma de los L_i y R la de los R_i, se tiene que $L + R = kn^2$ y por tanto, con a lo más $\min(L, R) \leq \frac{kn^2}{2}$ movimientos podemos mover a todas las piedras C_i a la izquierda o a la derecha. Por la hipótesis de inducción

$$m_{k+1} \leq \frac{kn^2}{2} + m_k \leq \frac{kn^2}{2} + \frac{k(k-1)n^2}{4} = \frac{k(k+1)n^2}{4}.$$

Ahora, denotamos por K_i un conjunto de $\frac{n}{2}$ piedras del color i. Es posible demostrar por inducción que el arreglo

$$K_1K_2 \cdots K_{n-1}K_nK_nK_{n-1} \cdots K_2K_1$$

requiere de exactamente $\frac{k(k-1)n^2}{4}$ intercambios.

b) La respuesta es $\frac{3n^2-1}{2}$. Usando las mismas ideas que en la parte anterior, para cada color C tenemos $L_i + R_i = 2n$, por lo que $L + R = 2n^2$ y por tanto $\min(L, R) \leq n^2$. Después de mover un color hacia algún lado, habremos usado a lo más n^2 intercambios, y nos queda el caso $k = 2$ que ya está probado, así que el máximo m posible es $n^2 + \frac{n^2-1}{2} = \frac{3n^2-1}{2}$. Si A, B y C son bloques de $\frac{n-3}{2}$ piedras consecutivas de colores a, b y c, respectivamente, y las letras en minúscula denotan una sola piedra de ese color, el arreglo

$$ABCabcbcacabCBA$$

necesita exactamente de $\frac{3n^2-1}{2}$ intercambios, por lo que $m = \frac{3n^2-1}{2}$.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de enero a abril de 2012.

Enero

Publicación del treceavo número de la revista "Tzaloa".

Enero, 19 al 29 de 2012, Colima, Colima

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento y de los exámenes AMC.

Febrero, primera quincena

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico, nombramiento de delegado).

Marzo, primera quincena

Envío a los estados del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Marzo, del 4 al 11, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen AIME y del examen de la XXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Marzo, 16 y 17

Aplicación en los estados resgistrados con este propósito del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Marzo y abril, 29, 30, 31 y 1, CIMAT, Guanajuato

Curso de Entrenadores.

Abril

Publicación del décimo cuarto número de la revista "Tzaloa".

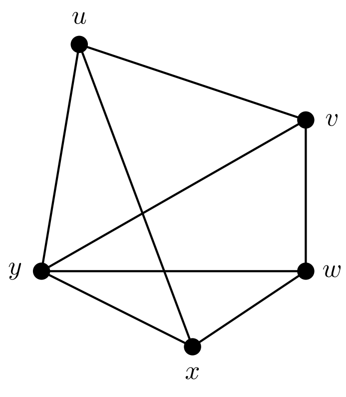
Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad del 3 y 9) *Un número entero es divisible,*

- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

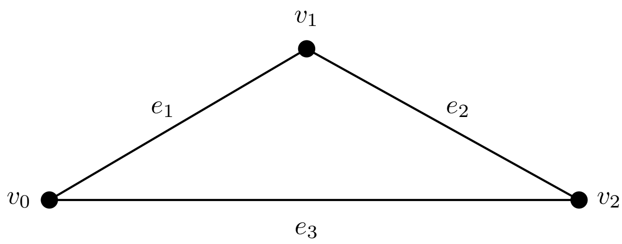
Ver [6].

Definición 2 *Un grafo es un conjunto de puntos, que llamamos vértices, unidos por segmentos de rectas que llamamos aristas. Decimos que dos vértices son adyacentes si hay una arista entre ellos. Si* v *y* w *son dos vértices adyacentes de un grafo* G*, escribimos* $e = vw$ *para denotar la arista que une a* v *con* w*.*
En el siguiente grafo, los vértices u *y* w *no son adyacentes ya que no hay ninguna arista entre ellos. Sin embargo,* u *es adyacente con los vértices* v*,* x*,* y*.*



Un ciclo es una sucesión finita de vértices y aristas $C = v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ *cuyos términos son alternadamente vértices y aristas, donde* $v_0 = v_k$*, los vértices*

$v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ son distintos, y las aristas $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son distintas. El entero k es la longitud del ciclo C. Dos ciclos son disjuntos si no tienen aristas en común.



Ciclo $C = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_0$ de longitud 3

Ver [3].

Teorema 3 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*
Ver [1].

Teorema 4 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*
Ver [1, 5].

Definición 5 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*
Ver [1].

Criterio 6 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*
Ver [1].

Definición 7 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Ver [1].

Criterio 8 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*
Ver [1].

Definición 9 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*
Ver [1].

Teorema 10 (Bisectrices) *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*
Ver [1].

Teorema 11 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*
Ver [1].

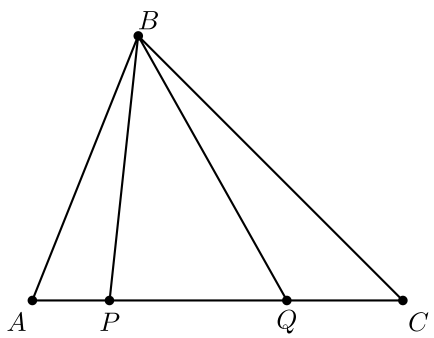
Definición 12 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*
Ver [1].

Teorema 13 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Ver [1].

Definición 14 (Rectas isogonales) *Dado un triángulo ABC y puntos P y Q en el lado AC, decimos que las rectas BP y BQ son isogonales si $\angle ABP = \angle QBC$.*

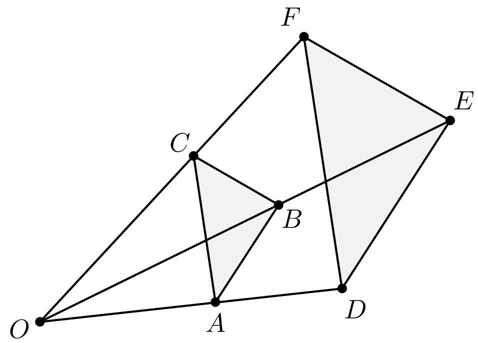


Definición 15 (Simediana) *Una simediana es la recta isogonal de la mediana.*

Definición 16 (Eje radical) *Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ con centros O, Q y radios r, s, respectivamente, el eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ es el lugar geométrico de los puntos P que satisfacen $PO^2 - PQ^2 = r^2 - s^2$.*
Ver [1, 2].

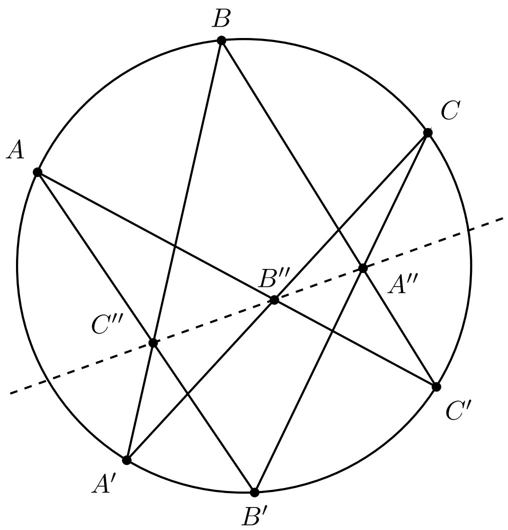
Teorema 17 (Eje radical) *El eje radical de dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ con centros O y Q, respectivamente, es una recta perpendicular a OQ. Además, cada punto P del eje radical de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ cumple que las longitudes de las tangentes desde P a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, cuando existen, son iguales.*
Ver [1, 2].

Definición 18 (Triángulos homotéticos) *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \| DE$, $BC \| EF$ y $CA \| FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de 1, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Ver [1, 7].

Teorema 19 (Teorema de Pascal) *Si los puntos A, B y C; y A', B' y C' están sobre una circunferencia Γ y se consideran los puntos $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = AC' \cap A'C$ y $C'' = AB' \cap A'B$, estos están alineados.*



Ver [1, 7].

Bibliografía

[1] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[2] J.A. Gómez Ortega. *Algunas maneras de usar la potencia*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 4, 2009.

[3] J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[4] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[5] A. Rechtman Bulajich. *Algunas demostraciones del teorema de Pitágoras.* Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 1, 2010.

[6] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[7] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[8] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Castillo Flores Sandra Lilia*
ITESM Campus Aguascalientes,
Av. Augenio Garza Sada #1500, CP 20328, Aguascalientes, Aguascalientes,
(449) 9 100 900 ext 5401,
(449) 148 42 22,
sandra.castillo@itesm.mx.

Baja California–*Yee Romero Carlos*
Universidad Autónoma de Baja California,
Km 106 carretera Tijuana Ensenada,
Facultad de Ciencias,
646 1745925 ext 116,
646 1170470,
646 1744560,
carlos.yee@uabc.edu.mx,
cyeer.mxl@gmail.com,
http://www.ommbc.org.

Baja California Sur–*Ríos Torres Jesús Eduardo*
CBTIS #62,
Jalisco y Melitón Albañez,
(612) 1226876,
(612) 1229976,
(612) 1416591,
eduardo.rios.73@gmail.com,
jerios@yahoo.com.mx,
www.institutomardecortes.edu.mx,

Campeche–*Moncada Bolón Juan Jesús*
Universidad Autónoma de Campeche, facultad de Ingeniería,
Av. Agustín Melgar s/n entre Juan de la Barrera y calle 20,
Colonia Lindavista, CP 24039,
981 8119800 ext. 70000,
981 8116885,
981 117 5207,
jjmb72@gmail.com,
jjmoncad@uacam.mx,
www.pythagoras.com.mx,

Chiapas–*Soler Zapata María del Rosario*
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
de la Universidad Autónoma de Chiapas (CEFyMAP-UNACH),
4ta. Oriente 1428 (Entre 13 y 14 Norte) Barrio La Pimienta,
C.P. 29034, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas,
96161 83430 ext 112,
961 127 10 17,
msolerza@unach.mx,
mrsolerz@yahoo.com.mx.

Chihuahua–*Salgado Armendáriz Ernesto*
Universidad Autonoma de Ciudad Juárez,
Henri Dunant 4016, Zona Pronaf. C.P. 32315,
6566882124,
6566888887,
6561440251,
esalgado@ommch.org,
esalgado@uacj.mx,
http://ommch.org.

Coahuila–*Morelos Escobar Silvia Carmen*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila,
Edificio D, Unidad Camporredondo, Saltillo, Coahuila, 25000,
844 4144739,
844 4148869,
844 4377219,
844 4118257,
silvia.morelos@gmail.com,
smorelos2002@yahoo.com.mx.

Colima–*Isaías Castellanos Luis Ángel*
Facultad de Ciencias, Universidad de Colima,
Av. Bernal Daz Del Castillo No. 340, Villa San Sebastián,
(312) 3161135,
(312) 1595749,
(312) 3194730,
ommcol@ucol.mx,
luisangel030891@hotmail.com,
ommcolima.ucol.mx.

Distrito Federal–*Bravo Mojica Alejandro*
Facultad de Ciencias, UNAM,
Ciudad Universitaria,
5556224864,
5556596718,
5538763571,
abm@ciencias.unam.mx.

Durango–*Mata Romero Armando*
Universidad Juárez del Estado de Durango,
Constitución #404 Sur Zona Centro C.P. 34000 Durango, Dgo.,
(618) 1301139,
(618) 8188292,
(618) 8408077,
angelhiram@hotmail.com.

Estado de México–*Martínez Salgado Benito Fernando*
Facultad de Ciencias, UAEMex,
Instituto Literario No. 100, Col. Centro, Toluca Estado de México CP 50000,
722 2965556,
722 2079808,
55 31920503,
722 2965554,
masabemx@yahoo.com.mx.

Guanajuato–*Cruz López Manuel*
Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato,
Jalisco S/N Valenciana Guanajuato,
(473) 1 02 61 02 Ext. 1221,
(473) 1 02 61 03 Ext. 1202,
(473) 1 29 66 17,
direc.demat@ugto.mx,
www.ommgto.wordpress.com.

Guerrero–*Delgado Espinoza Gonzalo*
Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas,
Carlos E. Adame 54. Colonia Garita, Acapulco Guerrero,
744 4 30 9254,
deggonzalo@yahoo.com.mx.

Hidalgo–*Itzá Ortiz Benjamín Alfonso*
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA,
Carretera Pachuca-Tulancingo Km. 4.5 Mineral de la Reforma Hidalgo,
7717172000 ext 6163,
7717478089,
7717172109,
itza@uaeh.edu.mx,

Jalisco–*Guzmán Flores María Eugenia*
Universidad de Guadalajara CUCEI,
Av. Revolución 1500, Col. Olímpica, C.P. 44430, Guadalajara, Jal,
(33)13785900 ext 27753 y 27755,
(33)10955163,
floresguz55@yahoo.com.mx,
marugeniag@gmail.com.

Michoacán–*Sepúlveda López Armando*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana,
Francisco J. Mújica s/n, Ciudad Universitaria, Edificio Nuevo (Alfa),
4433223500 Ext. 1225,
4433157923,
4432029466,
asepulve@live.com.mx,
asepulve@umich.mx.

Morelos–*Sbitneva Tavdishvili Larissa*
Universidad Autónoma del Estado de Morelos,
Av. Universidad 1001, Colonia Chamilpa, 62209, Cuernavaca, Morelos,
7773297020,
7773134466,
7771090682,
7773297040,
larissa@uaem.mx,
larissasbitneva@hotmail.com.

Nayarit–*Jara Ulloa Francisco Javier*
Universidad Autónoma de Nayarit,
Cd. de la Cultura Amado Nervo S/N,
311 7998552,
311 2118809,
3111217251,
jaraulloa@gmail.com,
jaraulloa@hotmail.com.

Nuevo León–*Alanís Durán Alfredo*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Nuevo León,
Cd. Universitaria, Apartado postal 101-F San Nicolás de los Garza NL,
(81)83294030,
(81)83131626,
8115287582,
(81)83522954,
aalanis56@hotmail.com,
serolfrotceh@googlemail.com,
https://sites.google.com/site/eommnl.

Oaxaca–*Carrillo Uribe Sara*
Academia de Matemáticas, Escuela de Ciencias,
Universidad Autónoma 'Benito Juárez'de Oaxaca,
Independencia No. 43, San Sebastian Tutla, Oaxaca, C. P. 71246,
951 1980514,
(915) 1 44 80 56,
sara.carrillo.u@gmail.com,
mushewini@hotmail.com.

Puebla–*Juárez Ramírez María Araceli*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,
Ave San Claudio y Rio Verde s/n CU San Manuel CP 72570 Puebla, Pue.,
2222295500 ext 7557, 7554, 7578,
2222458773,
2221333689,
2222295636,
arjuarez@fcfm.buap.mx,
jilecara@hotmail.com.

Querétaro–*Valerio López Teresa de Jesús*
Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería,
Cerro de las Campanas s/n, Col. Centro, C.P. 76100, Querétaro, Querétaro,
(442) 1 92 12 00 ext 6015,
valeriotere@gmail.com,
teresa.valerio@webtelmex.net.mx.

Quintana Roo–*Ramón Barrios Alicia*
Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel Cancún dos,
Region 102, ruta 4 primera entrada. Cancún, Quintana Roo.,
(998) 1 74 01 56,
(998) 8 88 72 04,
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com,
tita1970@hotmail.com.

San Luis Potosí–*Flores Alatorre Eugenio Daniel*
Casa Olímpica,
Juan de O'Donojú #425, Col Virreyes, San Luis Potosí, SLP,
(444) 8118922,
(444) 1896756,
floreseugenio@hotmail.com,
ommslp@gmail.com.

Sinaloa–*Russell Noriega Maria Guadalupe*
Universidad Autónoma de Sinaloa,
Angel Flores y Riva Palacios s/n, col centro, Culiacán Sinaloa,
(667) 7161154,
(667) 1750329,
mgrussell@uas.uasnet.mx,
mgrusselln@gmail.com.

Sonora–*Avendaño Camacho Misael*
Universidad de Sonora,
Blvd. Rosales Y Luis Encinas s/n Col Centro, Hermosillo, Sonora,
6622592155,
6621936631,
6622592219,
misaelave@mat.uson.mx,
misaelave@gmail.com.

Tabasco–*López López Jorge*
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Km 1 Carretera Cunduacán-Jalpa, A.P. 24, C.P. 86690, Cunduacán, Tab.,
(914) 3360928,
(914) 1001886,
loppital1@hotmail.com,
jorge.lopez@ujat.mx.

Tamaulipas–*Llanos Portales Ramón Jardiel*
Universidad Autónoma de Tamaulipas,
Centro Universitario Victoria, Cd. Victoria Tam.,
834-3120279,
8341381723,
8341385818,
rjardiel5@hotmail.com,
rllanos@uat.edu.mx,
www.matetam.com.

Tlaxcala–*Cano Hernández Saúl*
Universidad Autónoma de Tlaxcala,
Calzada Apizaquito S/N; Apizaco, Tlaxcala; Apartado Postal 140.,
CP 90300,
01 241 4172544,
2461050122,
scanohernandez@hotmail.com.

Veracruz–*Toledo Hernández Porfirio*
Universidad Veracruzana,
Lomas del Estadio s/n Zona Universitaria, CP 91090 Xalapa, Ver.,
012288421745,
012281411035,
2281267938,
ptoledo@uv.mx,
portoledoz@gmail.com.

Yucatán–*Solís Gamboa Didier Adán*
Universidad Autónoma de Yucatán,
Periférico Norte, Tablaje 13615. Mérida, Yucatán,
9999423140,
9991955789,
9991891707,
didier.solis@uady.mx,
quijo77@gmail.com,
www.matematicas.uady.mx.

Zacatecas–*Calvillo Guevara Nancy Janeth*
UAZ - Unidad Académica de Matemáticas,
Calzada Solidaridad esq. Camino a la Bufa,
492 922 99 75,
492 923 94 07,
458 100 09 42,
ncalvill@mate.reduaz.mx,
nancycalvillo@gmail.com,
matematicas.reduaz.mx.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM,
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
ITESM, Campus Ciudad Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial
Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería,
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Eréndira Jiménez Zamora
Instituto Superior de Educación
Normal de Colima
ere_sweet@hotmail.com

Leonardo Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Yucatán
jacob.rubio@gmail.com

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas,
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Elena Ruiz Velázquez
eleniux@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del Estado
de Morelos
valdez@uaem.mx

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.omm.unam.mx/`