TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2013, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Abril de 2013.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1] es la revista trimestral de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Su publicación es una iniciativa más de la Sociedad Matemática Mexicana (SMM) para contribuir al fortalecimiento del movimiento olímpico y su objetivo es brindar un órgano de difusión adecuado para satisfacer las necesidades de profesores y estudiantes de nivel medio superior, que cada año se preparan y participan en los distintos concursos de matemáticas que se realizan tanto dentro como fuera de nuestro país.

Aunque la selección de los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que presentamos se realiza pensando especialmente en la comunidad olímpica, sus contenidos resultan también de interés para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos excesivos y el uso de matemática simple, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes y en general, para cualquier aficionado a las matemáticas.

Tzaloa, Año 2013, Número 2

La selección del material que preparamos para este segundo número del año 2013 busca satisfacer las necesidades de nuestros lectores de todos los niveles. Es así, que las secciones *Problemas de Práctica* y *Problemas de Entrenamiento* están conformadas, en su mayoría, con material clasificado en la categoría intermedio. Se buscó que la variedad de temas de estos problemas fuera equilibrada y esperamos haber cumplido nuestra meta.

Bajo el título *Contando con dos dígitos*, Marco Antonio Figueroa nos comparte un excelente artículo donde trabaja con suficiente amplitud y un enfoque poco usual el tema de los sistemas binarios. A través de sus páginas podremos recordar la estructura básica de los sistemas posicionales y profundizaremos en las características particulares de los

[1]Tzaloa es un vocablo náhuatl cuyo significado es: *aprender*.

sistemas binarios (base 2), incluyendo, entre otros, importantes resultados de divisibilidad. Estamos seguros que muchos de nuestros lectores apreciarán este material, pues es difícil conseguir bibliografía con el nivel y sobre todo, con el enfoque adecuado para su aplicación en la resolución de problemas de olimpiada.

Con el fin de brindar un mayor apoyo a los estudiantes y profesores que participarán en los concursos estatales de este año 2013, incluimos el examen de la etapa semifinal estatal que se aplicó el año pasado, en el marco de la 26^a OMM. Examen elaborado por María Luisa Pérez y Miguel Raggi.

Además, como todos los años, publicamos el examen completo con soluciones del Concurso Nacional 2012. Al incio de la sección correspondiente, incluimos los resultados por estados de la república y mencionamos los nombres de todos los ganadores. Asimismo, publicamos algunas de las soluciones más destacadas que se presentaron durante el concurso.
Por último, en el ámbito internacional presentamos el examen del concurso *AMC* 10 de este año y el examen de la XXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico, así como el examen con soluciones correspondiente a la XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, concurso donde México obtuvo el sexto lugar.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 26 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado inumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1994. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2013-2014 y, para el 1° de julio de 2014, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 24 al 30 de noviembre de 2013 en el estado de Hidalgo. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2014: la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Costa Rica; la 55ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Sudáfrica en el mes de julio, y la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Honduras.

Contando con dos dígitos

Por Marco Antonio Figueroa Ibarra

Nivel Intermedio

¿Alguna vez te has preguntado por qué usamos diez dígitos para escribir los números? ¿Se podrán escribir usando más o usando menos de diez dígitos? Si es así, ¿por qué no escribimos los números con menos dígitos? Así nos tendríamos que aprender menos dígitos en la primaria.

Ciertamente se pueden escribir todos los números con cualquier número de dígitos (a partir de dos dígitos). Por ejemplo, el sistema de numeración maya consistía en escribir los números del 0 al 19 (los cuales pueden ser considerados dígitos) y con ellos construían su sistema de base 20 (inspirados en la astronomía, contaban con 18 meses de 20 días y 5 días sobrantes al año). En este artículo nos enfocaremos principalmente en un sistema de numeración muy importante y útil: el sistema binario, en el cual se escriben los números con los dígitos 0 y 1 solamente. Una aplicación muy importante de este sistema numérico es que es usado por todas las computadoras. Es por ello que las memorias USB, las memorias RAM y demás memorias de computadora vienen en potencias de 2. ¿O has visto alguna memoria USB de 3, 5 o 6 gigabytes?

Antes de comenzar, recordemos: ¿en qué consiste el sistema de numeración decimal que siempre utilizamos? El sistema de numeración decimal consiste en un método de númeración posicional tal que cada posición vale 10 veces más que la de su derecha. Es decir, la posición de las unidades vale 1, la posición de las decenas vale 10, la de las centenas vale 100, etc. En cada posición ponemos un dígito del 0 al 9 y con esto podemos representar cualquier número usando sólo 10 dígitos.

Notamos que no usamos nada en particular del número 10. Podemos hacer el mismo planteamiento y numerar todos los números con d dígitos, donde d es cualquier entero mayor que 1. El valor de cada posición (contando de derecha a izquierda) está dado por la siguiente tabla.

Posición	k	...	4	3	2	1
Valor	d^{k-1}	...	d^3	d^2	d^1	d^0

Ya que tenemos los valores de las distintas posiciones, necesitamos tener d dígitos diferentes. Si $d \leq 10$, podemos usar los mismos dígitos: 0, 1, 2,..., $d-1$. Pero si $d > 10$, podemos usar los 10 dígitos que ya conocemos y agregar unos nuevos. Por ejemplo, en base 16 es usual usar los diez dígitos conocidos y las letras A, B, C, D, E y F. En base dos es usual usar el 0 y el 1. Así, un número n está escrito en base dos $n = a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0$ si

$$n = a_k 2^k + a_{k-1} 2^{k-1} + a_{k-2} 2^{k-2} + \cdots + a_1 2^1 + a_0 2^0.$$

Donde cada a_i es 0 o 1. Por ejemplo, el número 13 queda de la forma

$$13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0,$$

por lo que su representación en base dos es 1101_2 (a veces se agrega el sufijo dos para distinguir la base: 1101_2). Un buen ejercicio es hacer la lista de los números del 1 al 32 en base dos. Nota que, de la misma manera que en base 10 un número es múltiplo de 10 si y sólo si termina en 0, un número escrito en base 2 será par si y sólo si termina en 0. ¿Cómo se verán los múltiplos de 4 y de 8 en base dos? ¿Cómo se verán los que dejan residuo 2 al ser divididos entre 4? ¡Es muy fácil deducirlo al tener la lista de los primeros números en base dos!

¿Has notado que en algunos aparatos electrónicos como computadoras o celulares, el botón de encendido tiene un dibujo formado por un círculo con un palito dentro de él? Ese símbolo es una aplicación muy sencilla del sistema binario, el cual representa un 1 dentro de un 0. El 0 indica apagado y el 1 indica encendido. Así, dicho botón sirve para cambiar de apagado a encendido y viceversa.

Cómo convertir a base dos

Para comprender bien qué es el sistema binario es necesario saber cómo podemos pasar de un número escrito en binario al mismo número en decimal y viceversa.
Para convertir un número binario a decimal, digamos el $n = 1011001_2$ primero notamos que tiene siete dígitos. Así, las posiciones valen 64, 32, 16, 8, 4, 2 y 1 y el número buscado es

$$1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 64 + 16 + 8 + 1 = 89.$$

Por otro lado, para convertir un número escrito en base diez a base dos hay dos maneras muy sencillas de hacerlo. Veámoslo con el mismo ejemplo, $n = 89$. Primero lo dividimos entre 2:

$$89 = 2(44) + 1$$

obteniendo 44 de cociente y 1 de residuo. Como 2(44) es par, su representación binaria termina en 0. Luego, la representación binaria de $89 = 2(44) + 1$ debe terminar en 1. ¡Hemos encontrado el primer dígito de n! Ahora, el número 44, al ser escrito en binario, es el mismo que el 89 en binario pero sin el el dígito de la derecha. Así, podemos volver a dividir entre 2 para encontrar el siguiente dígito.

$$89 = 2(2(22) + 0) + 1 = 2^2(22) + (0)2^1 + (1)2^0$$

Luego, la representación binaria de 89 debe terminar en 01 y tenemos que continuar con el 22. Así, llegamos a

$$\begin{aligned} 89 &= 2(2(22) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(11) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(5) + 1) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(2(2) + 1) + 1) + 0) + 0) + 1 \\ &= 2(2(2(2(2(2(1) + 0) + 1) + 1) + 0) + 0) + 1. \end{aligned}$$

Luego, la representación binaria de 89 es 1011001_2. Para ello sólo usamos algunas divisiones entre 2.

Otra forma de obtener la representación binaria de un número es usando el siguiente resultado: dado que, en la representación en base dos sólo se usan los dígitos 0 y 1; y que cada posición es una potencia distinta de 2, obtenemos que todo número tiene una única representación como suma de potencias distintas de 2. Así, escribiremos al 89 como suma de potencias de 2. La más grande que no se pasa es 64 y la consideraremos (es fácil ver que si no la usamos, no alcanzaremos el número deseado) y tenemos que $89 = 64+25$, luego, la potencia más grande que no se pasa de 25 es 16 y $89 = 64+16+9$. Luego, elegimos la potencia 8 y queda 1, que es potencia de 2. Con esto, obtenemos que

$$\begin{aligned} 89 &= 64 + 16 + 8 + 1 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0. \end{aligned}$$

Luego, la representación de 89 en base dos es 1011001_2.
Notemos que el número 89 tiene 7 dígitos en base dos y sólo 2 dígitos en base 10. Así, la numeración binaria tiene su pro (sólo me tengo que aprender dos dígitos) y su contra (los números resultan grandes). Por otro lado, si uso más de diez digitos, el pro será que los números resultan pequeños y el contra será que me tengo que aprender más dígitos. Podemos pensar que el sistema decimal es algo intermedio entre estos dos extremos.
Al pensar en la representación en base 2 del número 2 me acordé de un chiste: “hay 10 tipos de personas: las que saben contar en binario y las que no”.
Independientemente de la representación en base dos, podemos demostrar que todo número tiene una única representación como suma de potencias de 2. Es parte del siguiente

Teorema. Todo entero positivo n se puede escribir de manera única como suma de potencias distintas de 2.

Demostración. Primero demostremos que todo entero tiene al menos una representación como suma de potencias distintas de 2. Lo haremos con inducción, demostrando que todo número del 1 al $2^n - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.
La base de inducción es $n = 1$. El 1 se puede escribir como suma de potencias de 2: $1 = 2^0$.
La hipótesis de inducción nos dice que todo número entre 1 al $2^n - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2.
A partir de esto, tenemos que demostrar que todo número entre 2^n y $2^{n+1} - 1$ se puede escribir como suma de potencias distintas de 2. Ya sabemos escribir todos los números entre el 0 y el $2^n - 1$ como suma de potencias distinas de 2 y ninguna de estas potencias es 2^n. Así, si a cada una de estas representaciones le sumamos 2^n obtenemos sumas de potencias distintas de 2 para los números entre 2^n y $2^{n+1} - 1$. Esto concluye la inducción.
Ahora resta demostrar que la representación es única. Esto se deja como ejercicio al lector.

Contando con las manos

¿Cuántos números podemos contar con nuestras dos manos? Para muchos, la respuesta natural es que podemos contar hasta el número 10. Pero en verdad, podemos contar hasta el número 1023, y eso que comenzamos en 0. ¿Cómo se logra esto?
Al contar del 0 al 10 con las manos lo hacemos pensando que cada uno de nuestros diez dedos vale 1. Eso, si bien es sencillo, no resulta muy conveniente. Por ejemplo hay muchas maneras de representar al número 2, pues hay $\binom{10}{2} = 45$ maneras de elegir dos dedos de nuestras manos. Veamos si podemos darle valores que eviten representar a un número de más de una manera.
Comencemos con el primer dedo. Como queremos poder representar el número 1, haremos que ese primer dedo valga 1. Ahora, si hacemos que el segundo dedo también valga 1 ya podemos representar el número dos, levantando los dos primeros dedos. Pero, por otro lado, ya tenemos dos representaciones para el número 1: levantar sólo el primero o levantar sólo el segundo dedo. Así, estamos desperdiciando una representación. ¿Qué tal si hacemos que el segundo dedo valga 2? Así, con sólo dos dedos podemos representar cuatro números: los números del 0 al 3. Ya es ganancia, ¿no?
Continuemos el proceso. Es fácil ver que si el tercer dedo vale 1, 2 o 3 volvemos a tener números con más de una representación. Luego, intentamos darle el valor 4 y resulta que si toma ese valor, podemos representar con sólo tres dedos, 8 números: del 0 al 7. Notamos que el valor de cada dedo resulta una potencia de dos.
Seguimos esta construcción: el siguiente dedo vale $2^3 = 8$, el siguiente $2^4 = 16$ hasta llegar a que el décimo dedo tiene que valer $2^9 = 512$. Con ello, podemos representar cualquier número entre el 0 y el 1023 con nuestros diez dedos.
¡Esta representación coincide con la numeración binaria! Pues estamos usando el hecho de que todos los números tienen una única representación como suma de potencias distintas de 2.
¿Podremos lograr más? ¡Veamos que no! Supongamos que le puedes dar valores a los diez dedos de tal manera que con ellos puedas representar más de 1024 números. ¿Cuántas maneras diferentes hay de elegir los dedos que vas a levantar? Como cada

dedo puede estar levantado o no, y hay diez, hay exactamente $2^{10} = 1024$ maneras diferentes de elegir los dedos a levantar. Si logro representar más de 1024 números, por el principio de las casillas, habrá dos números con la misma representación, ¡esto contradice nuestra suposición! Luego, la manera que habíamos elegido es óptima.

Números fraccionaros y divisibilidad

Ya hemos dicho que no tiene nada de especial el haber elegido el número 10 para nuestro sistema de numeración. Así que varios de los resultados que en base 10 tenemos, deben conservarse en base 2. Por ejemplo el siguiente: un número es racional si y sólo si su expansión decimal es finita o infinita periódica. Por ejemplo, el número 1.5 es igual a 1.1 en base 2, el $\frac{8}{3}$ es igual a $10.1010101010\ldots$ y π es igual a

$$11.0010010000\,1111110110\,1010100010\,0010000101\,10100011\ldots$$

Por otro lado, las reglas de divisibilidad entre 2, 5, 9, 10 y 11 que resultan tan útiles por lo sencillas que son, sí usan que la base sea 10. En base dos, algunas reglas de divisibilidad son:

- Un número en base 2 es múltiplo de 2 si y sólo si termina en 0.
- Un número en base 2 es múltiplo de 4 si y sólo si termina en 00.
- Un número en base 2, digamos $a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_1 a_0$ es múltiplo de 3 si y sólo si 3 divide a $a_k - a_{k-1} + a_{k-2} - \cdots + (-1)^k a_0$.

Así que la regla de divisibilidad por 3 en base 2 es exactamente la misma que la regla de divisibilidad por 11 en el sistema decimal. De hecho la demostración es exactamente la misma.

Algunos ejercicios resueltos

Hay muchos problemas de olimpiada, tanto de teoría de números como de combinatoria, que pueden resolverse considerando la representación binaria de algún número o alguna idea similar. Presentamos algunos ejemplos resueltos al lector.

Ejemplo 1. Demuestra que entre cualesquiera $n + 1$ enteros del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ existen dos números, digamos a y b, tales que a divide a b.

Solución. Escribamos cada uno de los enteros del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ en la forma $k = 2^x y$ con x un entero no negativo e y un entero positivo impar (nota que el número al ser escrito en binario termina en exactamente x ceros).
Como y es un impar menor o igual a k, y tiene que ser un impar entre el 1 y el $2n - 1$. Luego, hay n posibles valores para y. Como tengo que elegir $n+1$ números del conjunto, por el principio de las casillas, habrá dos de ellos con la misma y. Es decir, dos de los números serán $2^x y$ e $2^z y$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x < z$ de donde $2^x y$ divide a $2^z y$.

Ejemplo 2. Si escribimos en base dos todos los números del 1 al 1023, inclusive. ¿Cuántos unos usamos?

Solución. Primero notamos que la representación binaria de 1023 es 1111111111, que es el número más grande que ocupa 10 dígitos en binario. Luego, todos los números del 0 al 1023 se pueden escribir con exactamente 10 dígitos, si permitimos que hayan ceros a la izquierda cuando sean necesarios.
Por otro lado, cualquier combinación de diez dígitos, cada uno de ellos 1 o 0 nos dará la representación binaria de cada número entre 0 y 1023. Hay exactamente 2^{10} de estas combinaciones y se usan $10 \cdot 2^{10}$ dígitos. Por simetría, debe haber la misma cantidad de unos que de ceros (pues están consideradas todas las posibilidades). Luego, se usaron $5 \cdot 2^{10}$ unos.

Ejemplo 3. Sea n un entero positivo y sea 2^m la máxima potencia de 2 que divide a $n!$. Demuestra que el número de unos en la representación binaria de n es $n - m$.

Solución. Recordemos que el exponente de la máxima potencia de 2 que divide a $n!$ es

$$\left\lfloor \frac{n}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots$$

Si $a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 a_2 a_1$ es la representación binaria de n notamos que, por la fórmula de arriba, obtenemos que m es (en base dos)

$$m = a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 a_2 + a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 + \cdots + a_k a_{k-1} + a_k.$$

Ahora, volviendo a decimal y agrupando las a_i

$$\begin{aligned} m &= a_k(2^{k-2} + 2^{k-3} + \cdots + 2^0) + a_{k-1}(2^{k-3} + 2^{k-4} + \cdots + 2^0) + \cdots + a_2(2^0) \\ &= a_k(2^{k-1}) + a_{k-1}(2^{k-2} - 1) + \cdots + a_2(2^1 - 1) + a_1(2^0 - 1) \\ &= (a_k 2^{k-1} + a_{k-1} 2^{k-2} + \cdots + a_2 2^1 + a_1 2^0) - (a_k + a_{k-1} + \cdots + a_2 + a_1) \\ &= n - m, \end{aligned}$$

ya que la suma de los dígitos en binario es exactamente el número de unos.

Ejemplo 4. Demuestra que es posible elegir 2^k enteros del conjunto $\{0, 1, 2, \dots, 3^k - 1\}$ tales que no haya tres de ellos en progresión aritmética.

Solución. De la misma manera que en el Ejemplo 2, los números $0, 1, 2, \dots, 3^k - 1$ son todos los que se pueden escribir con k dígitos en base 3 si permitimos que haya ceros a la izquierda cuando sea necesario. De entre todos ellos, elegiremos los que sólo usan los dígitos 0 y 1. Como tenemos k posiciones, hay exactamente 2^k de estos números. Veamos que no hay tres números en progresión aritmética.
Tres números $a < b < c$ están en progresión aritmética si $c - b = b - a$, o equivalentemente, si $a + c = 2b$. Veamos que esto no sucede entre los números que elegimos.
Supongamos que hay tres números de entre los que elegimos, $a < b < c$ tales que $a + c = 2b$. Denotemos los tres números en binario

$$\begin{aligned} a &= a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1, \\ b &= b_k b_{k-1} \dots b_2 b_1, \\ c &= c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1. \end{aligned}$$

Como todos los dígitos a_i, b_i son ceros o unos, al hacer la suma $a + b$ en base tres, en cada posición la suma de los dos dígitos no se pasa de 2 y la suma en base tres tendrá exactamente los dígitos $a_k + b_k, a_{k-1} + b_{k-1}, \ldots, a_2 + b_2$ y $a_1 + b_1$. Por otro lado, los dígitos de $2c$ son exactamente $2c_k, 2c_{k-1}, \ldots, 2c_2$ y $2c_1$, pues cada $2c_i$ es 0 o 2. Luego, para cada i se tiene que $a_i + b_i = 2c_i$. Como a_i, b_i y c_i sólo pueden ser ceros o unos, la única manera que esto suceda es que $a_i = b_i = c_i$. Luego, $a = b = c$, lo cual es una contradicción y concluimos que no hay tres enteros en progresión aritmética entre los 2^k números elegidos.

Ejemplo 5 (IMO 2011). Sea $n > 0$ un entero. Se tiene una balanza y n pesas con pesos $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{n-1}$. Se van a poner cada una de las pesas sucesivamente en uno de los dos platillos de tal manera que el de la derecha siempre pese más. ¿De cuántas maneras se puede hacer esto?

Solución. Sea A_n el número que buscamos. Digamos que en algún momento ya pusimos la pesa que pesa 2^0 y al menos una más. En ese momento, si ignoramos esa pesa la diferencia entre los pesos de los platillos debe ser par positivo. Así, es irrelevante dónde esté la pesa que pesa 2^0, pues si el platillo de la derecha pesa más sin considerar la pesa que pesa 2^0, seguirá pesando más si la ponemos en la derecha o en la izquierda. Ahora, si ignoramos la pesa que pesa 2^0 obtenemos exactamente un acomodo válido para $n - 1$ pesas (simplemente consideramos que cada pesa pese la mitad de lo que pesa). Sabemos que eso se puede hacer de A_{n-1} maneras. Ahora, la pesa que pesa 2^0 puede ser puesta en cualquier momento, salvo que cuando se pone la primera pesa, no podemos poner esta pesa en el platillo de la izquierda. Así, hay $2n - 1$ posibilidades para poner esa pesa (1 poniéndola la primera vez y 2 en cada una de los siguientes turnos).
Luego, $A_n = (2n - 1)A_{n-1}$. Como $A_1 = 1$ y $A_2 = 3$, una sencilla inducción muestra que A_n es el producto de todos los impares desde 1 hasta $2n - 1$.

A continuación dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Escribe cada número del 1 al 32 en binario. ¿Cómo sabemos si un número en binario es múltiplo de 4 u 8? ¿Cómo son los que dejan residuo 2 al ser divididos entre 4?

2. Sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_l$ enteros no negativos tales que

$$2^{a_0} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} = 2^{b_0} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_l}.$$

   Demuestra que $k = l$ y que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_k = b_k$.

3. Determina una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 1$ y

$$f(n) = \begin{cases} 1 + f\left(\frac{n-1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 + f\left(\frac{n}{2}\right) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

4. Encuentra los últimos ocho dígitos de la representación binaria de 27^{1986}.

5. Demuestra que para cualquier entero positivo n se cumple que

$$\left\lfloor \frac{n+2^0}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2^1}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2^2}{2^3} \right\rfloor + \cdots = n.$$

6. Martín tiene la lista de todos los números de 25 dígitos que se pueden formar utilizando sólo los dígitos $1, 2, 3$ y 4 y que tienen la misma cantidad de dígitos 1 que de dígitos 2. Jorge tiene la lista de todos los números de 50 dígitos formados por 25 dígitos 1 y 25 dígitos 2. Demuestra que la lista de Martín tiene la misma cantidad de números que la de Jorge.

7. Demuestra que cada entero positivo se puede escribir como

$$a_0 \cdot 3^0 + a_1 \cdot 3^1 + a_2 \cdot 3^2 + \cdots + a_k \cdot 3^k$$

para cierto entero positivo k, donde cada a_i vale -1, 0 o 1.

8. Hay 2^n soldados formados en fila, donde n es un entero positivo. Los soldados se reacomodan en otra fila de la siguiente manera: Los soldados que estén en posición impar se van al frente de la fila, conservando su lugar entre ellos; los soldados en posición par se van al final de la fila, respetando los lugares entre ellos. Por ejemplo, si hay ocho soldados formados a, b, c, d, e, f, g, h, después del reacomodo obtenemos la fila a, c, e, g, b, d, f, h. Demuestra que después de n reacomodos los soldados estarán formados como al inicio.

9. Demuestra que existe un entero n tal que es múltiplo de 2004 y al ser escrito en base dos tiene exactamente 2004 ceros y 2004 unos.

10. (OMM, 2011) Una cuadrícula con lados de longitudes $(2^n - 1)$ y $(2^n + 1)$ se quiere dividir en rectángulos ajenos con lados sobre líneas de la cuadrícula y con un número de cuadraditos de 1×1 dentro del rectángulo igual a una potencia de 2. Encuentra la menor cantidad de rectángulos en los que se puede dividir la cuadrícula. (*Nota: El* 1 *es considerado una potencia de* 2 *pues* $2^0 = 1$.)

11. Demuestra que hay una infinidad de potencias de 2 de la forma $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$.

12. Sea n un entero positivo. Determina la cantidad de números que escritos en base 2 tienen exactamente $2n$ dígitos y son tales que la suma de los dígitos en las posiciones pares es igual a la suma de los dígitos de las posiciones impares.

13. La sucesión de Fibonacci se define por $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ para todo $n \geq 0$. Demuestra que todo entero n se puede escribir como suma de números diferentes de Fibonacci tales que no hay dos de ellos consecutivos.

14. Comenzamos con el estado inicial (a, b) donde a y b son enteros positivos. A partir de este estado incial se aplica el siguiente algoritmo siempre que $a > 0$.

   - Si $b > a$ cambiamos (a, b) por $(2a, b - a)$.

- En otro caso, cambiamos (a, b) por $(a-b, 2b)$.

¿Para qué estados iniciales el algoritmo termina? Si termina, ¿en cuántos pasos termina? ¿Qué sucede si a y b no son enteros?

15. Supón que f es una función definida en el conjunto de los enteros positivos tal que $f(2k) = 2f(k)-1$ y $f(2k+1) = 2f(k)+1$. Si a es un entero positivo arbitrario cuya representación en base dos está dada por $a = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$, demuestra que
$$f(a) = b_n \cdot 2^n + b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \cdots + b_1 \cdot 2 + b_0,$$
donde
$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i = 1, \\ -1 & \text{si } a_i = 0. \end{cases}$$

16. Sea f una función que a cada entero entre 0 y 2013 le asigna un número entero no negativo tal que
$$\begin{aligned} f(3m) &= f(m), \\ f(3m+1) &= f(3m)+1, \\ f(3m+2) &= f(3m). \end{aligned}$$
Si $f(0) = 0$, determina el valor máximo que puede tomar f.

Bibliografía

1. Arthur Engel. *Problem Solving Strategies.* Springer-Verlag, 1998.

2. Titu Andreescu, Răzvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges.* Birkhäuser, 2000.

3. Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng. 104 *Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, 2007.

Problemas de práctica

Para este segundo número del año hemos incrementado un poco la dificultad de los problemas, sin embargo, la mayor parte del material sigue correspondiendo a la categoría principiante. Otra diferencia con respecto al número anterior, es que abandonamos el formato de *opción múltiple*, que se usa en las etapas inciales, para adoptar el formato de *pregunta abierta* que caracteriza a las etapas más avanzadas de los concursos olímpicos.

Ahora, te invitamos a poner en práctica todas tus habilidades y usar todos tus conocimientos para encontrar la solución de los 20 problemas de práctica de este número. Aunque en la siguiente sección podrás encontrar las respuestas de todos ellos, te recomendamos que no la consultes sino hasta después que hayas llegado por ti mismo a tu propia solución.

Problema 1. Un triángulo tiene dos ángulos que miden $30°$ y $105°$, y el lado entre ellos mide $2\,cm$. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

Problema 2. Ana, Beto y Carmen juegan un juego en el que el perdedor tiene que triplicar el dinero de los otros dos jugadores (el perdedor paga). Se jugaron tres rondas y los perdedores sucesivos fueron Ana, Beto, y Carmen en ese orden. Si cada jugador terminó con \$27, ¿cuánto dinero tenía cada persona al inicio?

Problema 3. Sea n un número entero tal que $0 < n < 100$. Diariamente, los precios de las acciones de cierta empresa se incrementan o decrementan en $n\,\%$. ¿Existe algún valor de n, tal que después de algunos días, el precio de la acción vuelva a ser el mismo?

Problema 4. Utilizando cada uno de los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 una sola vez se van a formar números primos cuya suma sea lo menor posible. Da todas las listas de números primos con esta propiedad.

Problema 5. ¿En qué base (entera) el número 221 es un divisor de 1215?

Problema 6. Una circunferencia C_1 con centro O_1, pasa por O_2, que es el centro de otra circunferencia C_2. Desde el punto C, sobre C_1, trazamos las rectas tangentes a C_2 y llamamos A y B a los puntos (distintos de C) donde estas rectas cortan de nuevo a C_1. Demuestra que AB es perpendicular a O_1O_2.

Problema 7. Encuentra todos los números de la sucesión $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n-1}$, para n entero positivo, que son cuadrados perfectos.

Problema 8. Si a, b y c son números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, demuestra que,

$$-\frac{1}{2} \leq ab + bc + ca \leq 1.$$

Problema 9. Una cremería dispone de 20 kilogramos de queso para la venta. Supongamos que varios clientes hacen cola para comprar ese producto. Al terminar de despachar a cada cliente, la encargada hace los cálculos y anuncia la cantidad exacta de personas a las que podrá surtir una porción de exactamente el mismo peso que el promedio despachado por cliente hasta ese momento. ¿Es posible que la encargada siempre anuncie que resta el queso exacto para 10 clientes? y en este caso ¿cuánto queso queda después de despachar a los primeros 10 clientes?

Problema 10. Los puntos A, B y C están sobre el borde de un estanque circular, ubicados de forma que B está justo al oeste de C y ABC es un triángulo equilátero de 86 metros de lado. Una persona parte nadando desde A en línea recta hacia B y después de recorrer x metros da vuelta hacia el oeste y alcanza la orilla tras recorrer una distancia de y metros. Suponiendo que tanto x como y son ambos enteros positivos, determina el valor de y.

Problema 11. Decimos que dos números de 10 dígitos son *vecinos* si difieren en exactamente uno de sus dígitos (por ejemplo, 1234567890 y 1234507890 son números vecinos). Encuentra la máxima cantidad de números que puede tener un conjunto de números de 10 dígitos tal que no existan en él dos que sean vecinos.

Problema 12. Sean a, b y c números reales diferentes entre sí y diferentes de 0 tales que

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}.$$

Demuestra que $|abc| = 1$.

Problema 13. Sea ABC un triángulo rectángulo en C y sean P, Q y R puntos sobre la hipotenusa AB tales que $AP = PQ = QR = RB = \frac{AB}{4}$. Demuestra que la intersección M (diferente de C) de los circuncírculos de los triángulos APC y BRC es el punto medio de CQ.

Problema 14. Encuentra todas las parejas (x, y) de números enteros tales que

$$x^3 + y^3 = (x + y)^2.$$

Problema 15. En el inicio, las nueve casillas de un cuadrado de 3×3 contienen un 0. En cada paso, es posible elegir dos casillas que compartan un lado y sumarles 1 o -1 a ambas. ¿Será posible llegar, después de algunos pasos, a tener los nueve números iguales a 2?

Problema 16. Al inicio de un juego entre dos jugadores, se escribe en el pizarrón el número 2013!. Los jugadores, por turno, deben escoger un número entero positivo menor al del pizarrón y divisible por a lo más 20 primos. El número escogido, se resta del escrito en el pizarrón, que entonces es reemplazado por la diferencia así obtenida. Gana el primer jugador que logre obtener 0 al término de su turno. ¿Cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora garantizada? En su caso, descríbela.

Problema 17. Sean ABC un triángulo con área S; y D, E y F los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Sean U un punto dentro del triángulo DEF; y G, H e I las reflexiones de los puntos A, B y C sobre el punto U, respectivamente. Demuestra que el área del hexágono $AIBGCH$ es $2S$.

Problema 18. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ su divisor impar más grande. Encuentra la suma

$$d(1) + d(2) + d(3) + \cdots + d(1024).$$

Problema 19. El público barajea un mazo de 36 cartas, mismo que está formado por 4 grupos, de 9 cartas cada uno, con las figuras: espadas, oro, bastos y copas. El mago va prediciendo, una por una, la figura de cada carta, comenzando con la que está hasta arriba del mazo, e inmediatamente después de hacer cada predicción, ve la carta. El diseño de la parte de atrás de las cartas es una flecha. Un asistente puede examinar todo el mazo previamente y sin cambiar el orden, puede acomodar cada carta de manera que la flecha de la parte trasera apunte hacia el mago o en sentido contrario, según un sistema acordado previamente con el mago. Encuentra un sistema que garantice al mago acertar la predicción en por lo menos 19 de las 36 cartas del mazo. ¿Se podrá diseñar un sistema para garantizar el acierto en por lo menos 20 ocasiones?

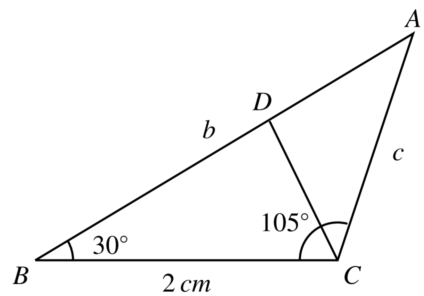
Problema 20. Doce chapulines están ubicados en 12 puntos distintos sobre una circunferencia. Estos puntos dividen a la circunferencia en 12 arcos. Al sonido de la señal, los chapulines brincan simultáneamente, de forma que cada uno salta, en dirección de las manecillas del reloj, desde el extremo de su arco al punto medio de este. A partir de la nueva posición, cuando vuelve a sonar la señal, los chapulines vuelven a saltar siguiendo el mismo patrón y así sucesivamente continuarán saltando con cada sonido de la señal. ¿Es posible que algún chapulín regrese a su posición original después de 12 saltos?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección te presentamos las soluciones que hemos preparado para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que para cada problema se incluye la explicación que justifica su validez. Observa que, en todos los casos, la argumentación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos y que para ningún problema la solución se presenta sin sustento.

Como siempre, las soluciones que presentamos no son necesariamente las únicas y probablemente tampoco son las mejores, por lo que es muy posible que tú hayas encontrado una solución distinta pero igualmente válida. Si este es el caso y no estás muy seguro de su validez o simplemente la quieres compartir con nosotros te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Sea D el pie de la altura desde C. Como BCD es un triángulo que es la mitad de un equilátero, es fácil ver que $CD = 1\, cm$ y $DB = \sqrt{3}\, cm$. Además, el triángulo DCA es rectángulo e isósceles. Luego, $DA = 1\, cm$ y $AC = \sqrt{2}\, cm$. Por lo tanto, el perímetro del triángulo es $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\, cm$.



Solución del problema 2. Sean A_n, B_n y C_n las cantidades de dinero que tienen Ana, Beto y Carmen después de la n-ésima ronda, respectivamente. Tenemos que $A_3 = B_3 =$

$C_3 = 27$. Entonces, $A_2 = \frac{27}{3} = 9$, $B_2 = \frac{27}{3} = 9$ y $C_2 = 27 + 18 + 18 = 63$, de donde $A_1 = \frac{9}{3} = 3$, $C_1 = \frac{63}{3} = 21$ y $B_1 = 9 + 6 + 42 = 57$. Por lo tanto, $B_0 = \frac{57}{3} = 19$, $C_0 = \frac{21}{3} = 7$ y $A_0 = 3 + 38 + 14 = 55$, lo que significa que Ana inició con \$55, Beto con \$19 y Carmen con \$7.

Solución del problema 3. Supongamos que existe tal entero n y que el precio de la acción es el mismo después de a incrementos y b caídas. Si x es el valor inicial de la acción, es fácil ver que el valor final será igual a $\left(1 + \frac{n}{100}\right)^a \left(1 - \frac{n}{100}\right)^b x$.
Igualando este valor a x y multiplicando por 100^{a+b} obtenemos que

$$(100 + n)^a(100 - n)^b = 100^{a+b}.$$

Es claro que los únicos divisores primos del lado derecho son 2 y 5, por lo tanto lo mismo aplica para el lado izquierdo. Como $100 + n > 100$ y $100 - n < 200$, veamos cuántos números entre 101 y 199 son divisibles únicamente entre los números primos 2 y 5.

- La única potencia de 2 entre 101 y 199 es 128.
- El único número entre 101 y 199 que es igual a 5 veces una potencia de 2, es $5 \times 32 = 160$.
- No hay números entre 101 y 199 que sean 25 veces una potencia de 2.
- El único número entre 101 y 199 que es múltiplo de 125, es el mismo 125.

Por lo tanto, los valores posibles de n son 25, 28 y 60, de donde $100 - n = 75$, 72 y 40, respectivamente. Como 75 y 72 son divisibles entre 3, no son soluciones válidas. Si $n = 60$, entonces $160^a 40^b = 100^{a+b}$, pero esto no puede ser ya que la factorización en primos del lado izquierdo tiene más doses que cincos y la del lado derecho tiene igual número de cincos que de doses. Por lo tanto, no existe ningún valor de $0 < n < 100$ para el cual se repitan los precios.

Solución del problema 4. Una posible solución es: $2, 3, 5, 41, 67$ y 89, cuya suma es 207. Veamos que no podemos obtener una suma menor que esta. Notemos que los dígitos $4, 6$ y 8 no pueden ser dígitos de las unidades de los primos. Luego, cada uno de estos dígitos contribuirá con al menos $40, 60$ y 80 a la suma final (esto, si aparecen en las decenas; si aparecen en otro lugar, la suma sería mayor). Los otros 6 dígitos contribuirán con al menos $1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 9 = 27$ a la suma final (esto si aparecen en las unidades; si aparecen en otro lugar, la suma sería mayor). Luego, la menor suma será cuando $4, 6$ y 8 aparezcan en las decenas y los otros seis en las unidades. Como el ejemplo de arriba cumple eso, 207 es la menor suma. Ahora sólo falta ver cuántas opciones hay tales que $4, 6$ y 8 son dígitos de las decenas y todos los demás dígitos son de las unidades.
Entre los primos con dos dígitos hay tres que comienzan con 4: 41, 43 y 47; dos que comienzan con 6: 61 y 67; y dos que comienzan con 8: 83 y 89. Como 9 no es primo, debe ser el dígito de las unidades de uno de estos primos. Como el único que cumple eso es el 89, debe ser uno de los primos. El 1 tampoco es primo, así que tenemos que tener al 41 o al 61. Veamos estos dos casos.

1. Usamos al 41. Como ya fue usado el 1, tenemos que usar el 67 y queda la lista: 2, 3, 5, 41, 67 y 89.
2. Usamos al 61. En este caso podemos usar tanto el 43 como el 47. Si usamos el 43 tenemos la lista 2, 5, 7, 43, 61 y 89. Si usamos el 47 obtenemos la lista 2, 3, 5, 47, 61 y 89.

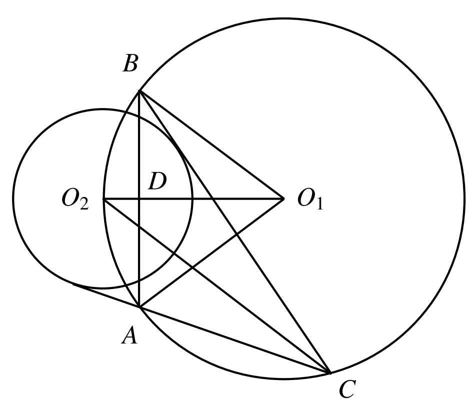
Luego, la menor suma es 207 y se logra con las tres listas ya descritas.

Solución del problema 5. Denotemos por a a la base buscada. Luego, tenemos que 1215 escrito en base a es $a^3 + 2a^2 + a + 5$ y 221 es $2a^2 + 2a + 1$. Es claro que $a \neq 1$. Como $2a^2 + 2a + 1$ debe ser divisor de $a^3 + 2a^2 + a + 5$, también $2a^2 + 2a + 1$ debe ser divisor de $2a^3 + 4a^2 + 2a + 10$. Entonces, al dividir $2a^3 + 4a^2 + 2a + 10$ entre $2a^2 + 2a + 1$ el residuo debe ser 0. Dividiendo, obtenemos que

$$2a^3 + 4a^2 + 2a + 10 = (2a^2 + 2a + 1)(a + 1) + (-a + 9).$$

Es fácil probar (ejercicio) que $|-a + 9| \leq 2a^2 + 2a + 1$ si $a > 1$. Luego, por el algoritmo de la división[2], $-a+9$ es el residuo de la división de $2a^3+4a^2+2a+10$ entre $2a^2+2a+1$. Por lo tanto, $-a + 9 = 0$ y de aquí $a = 9$. Finalmente, es fácil ver que el número 221 en base 9 es divisor de 1215 en base 9. Así, la respuesta es 9.

Solución del problema 6. Como CA y CB son tangentes a C_2, tenemos que $\angle ACO_2 = \angle BCO_2$. Además, como el ángulo inscrito $\angle ACO_2$ y el ángulo central $\angle AO_1O_2$ comprenden el mismo arco, tenemos que $\angle AO_1O_2 = 2\angle ACO_2 = 2\angle BCO_2 = \angle BO_1O_2$.



Ahora, si llamamos D al punto de intersección de AB con O_1O_2, tenemos que $O_1A = O_1B$ y $O_1D = O_1D$ y por el criterio de congruencia LAL, concluimos que los triángulos O_1AD y O_1BD son congruentes. Por lo tanto, $\angle ADO_1 = \angle BDO_1$ y como su suma es igual a 180°, cada uno de ellos es igual a 90°. Por lo tanto O_1O_2 es perpendicular a AB.

Solución del problema 7. Tenemos que $a_1 = 4$ y $a_2 = 29$. Para toda $n \geq 3$ tenemos que $3^{2n-1} \equiv 3 \pmod 4$ y $2^{n-1} \equiv 0 \pmod 4$. Entonces $3^{2n-1} + 2^{n-1} \equiv 3 \pmod 4$ si

[2] Ver en el apéndice el teorema 2.

$n \geq 3$. Como todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4, tenemos que $a_1 = 4$ es el único cuadrado perfecto de la sucesión.

Solución del problema 8. Tenemos que,

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\geq 0 \\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac &\geq 0 \\ 1+2(ab+bc+ca) &\geq 0 \\ ab+bc+ca &\geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 &\geq 0 \\ 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac) &\geq 0 \\ 1-(ab+bc+ca) &\geq 0 \\ ab+bc+ca &\leq 1. \end{aligned}$$

Solución del problema 9. Sea a_k la cantidad de queso que compró el k-ésimo cliente, entonces $\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}$ es la cantidad de queso promedio despachada a los primeros k clientes y $20-(a_1+\cdots+a_k)$ la cantidad de queso que resta. Si después de despachar a los primeros k clientes la despachadora declara que resta el queso exacto para despachar a 10 clientes más tenemos que

$$20-(a_1+\cdots+a_k) = 10\left(\frac{a_1+\cdots+a_k}{k}\right),$$

de donde se sigue que

$$a_1+\cdots+a_k = \frac{20k}{k+10}.$$

Y dado que esto sucede para cada k, también tenemos que

$$a_1+\cdots+a_{k-1} = \frac{20(k-1)}{k+9}.$$

Restando ambas expresiones tenemos que

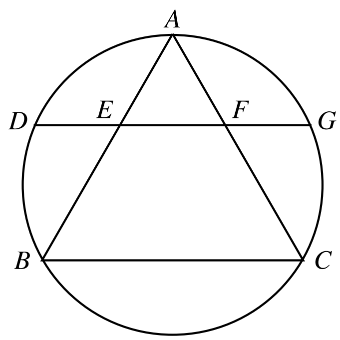
$$a_k = \frac{200}{(k+9)(k+10)} > 0.$$

Entonces si el k-ésimo cliente compra exactamente esa cantidad de queso, la condición del problema se satisface. Bajo esta suposición tenemos que

$$a_1+\cdots+a_{10} = \frac{20\cdot 10}{11+9} = 10.$$

Por lo tanto, quedan $20-10 = 10kg$ de queso.

Solución del problema 10. Sea E el punto sobre AB donde el nadador viró hacia el oeste para alcanzar la orilla en D. Trazamos la recta DE y la prolongamos hasta cortar al lado AC en F y llegar a la otra orilla del estanque en G. Entonces, como DE es paralela con BC, tenemos que AEF es un triángulo equilátero y $EF = AE = x$. Además, por simetría tenemos que $DE = GF = y$.



Por la potencia de E con respecto de la circunferencia, tenemos que $AE \cdot EB = DE \cdot EG$, es decir, $x(86 - x) = y(x + y)$. Si suponemos que x es impar, entonces $x(86 - x)$ también es impar, lo cual es imposible pues, al mismo tiempo, $y(x + y)$ sería par. Por lo tanto, x debe ser par. Ahora, como x es par, entonces tenemos que y también lo es, y la ecuación se reduce a

$$x_1(43 - x_1) = y_1(x_1 + y_1),$$

donde $x_1 = \frac{x}{2}$ y $y_1 = \frac{y}{2}$. Sea $d = \text{mcd}(x_1, y_1)$, $x_1 = dx_2$ y $y_1 = dy_2$, entonces

$$x_2(43 - dx_2) = dy_2(x_2 + y_2).$$

Como $\text{mcd}(x_2, y_2) = 1$, la última ecuación nos dice que d es divisible entre x_2. Por lo tanto, existe un entero d_1 tal que $d = x_2 d_1$ y

$$43 - x_2^2 d_1 = y_2 d_1(x_2 + y_2)$$

de donde se sigue que

$$43 = \left(x_2^2 + y_2 x_2 + y_2^2\right) d_1.$$

Como 43 es primo, concluimos que $d_1 = 1$ y que

$$43 = x_2^2 + y_2 x_2 + y_2^2.$$

Finalmente, por inspección simple, es fácil ver que las únicas soluciones enteras positivas posibles son $x_2 = 1$, $y_2 = 6$ o $x_2 = 6$, $y_2 = 1$, en cualquiera de los casos, obtenemos $y = 12$.

Solución del problema 11. Comenzamos observando que en total hay 9×10^9 números distintos de 10 dígitos. Si dos de ellos son *no-vecinos*, entonces sus primeros 9 dígitos no pueden ser todos iguales. Por lo tanto, la cantidad de números de 10 dígitos que

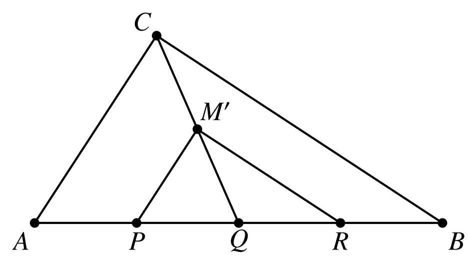
podemos escoger (sin tomar dos que sean vecinos) no es mayor que la cantidad total de números de 9 dígitos cualesquiera, la cual es 9×10^8.
Por otro lado, para cada número de 9 dígitos, podemos agregar al final un único décimo dígito de forma que la suma de los 10 dígitos resulte múltiplo de 10. Observemos que si dos de los números obtenidos de esta forma, difieren entre sí en uno sólo de sus dígitos, entonces no es posible que la suma de los dígitos sea, en ambos casos, múltiplo de 10. Por lo tanto, en el conjunto así formado no existen números vecinos y entonces podemos concluir que el máximo es 9×10^8.

Solución del problema 12. Tenemos que $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c}$. Luego,

$$a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b - c}{bc}.$$

Análogamente tenemos que $b - c = \frac{c-a}{ca}$ y $c - a = \frac{a-b}{ab}$. Multiplicando estas tres igualdades y usando que $a - b$, $b - c$ y $c - a$ son diferentes de 0, llegamos a que $(abc)^2 = 1$. Luego, $|abc| = 1$.

Solución del problema 13. Sea M' el punto medio de CQ.



Como $\angle BCA = 90°$, Q es el circuncentro del triángulo ABC y los triángulos AQC y CQB son isósceles. Como M' y P son los puntos medios de QC y QA, respectivamente, el cuadrilátero $APM'C$ es un trapecio isósceles y por lo tanto, cíclico. De la misma manera, el cuadrilátero $CM'RB$ también es un trapecio isóceles y por lo tanto, cíclico. Luego, $M' = M$ y M es el punto medio de QC.

Solución del problema 14. Factorizando $x + y$ de ambos lados, obtenemos que

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)(x + y),$$

luego, si $x = -y$ siempre se cumple la igualdad. Por otro lado, si $x + y \neq 0$, podemos cancelar $x + y$ y obtenemos

$$x^2 - xy + y^2 = x + y,$$

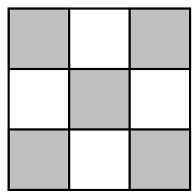
completando cuadrados, esta última igualdad es equivalente a

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = 2.$$

Ahora, la única manera de que 2 sea igual a la suma de tres cuadrados de enteros es $2 = 1 + 1 + 0$. Si $(x - 1)^2 = (y - 1)^2 = 1$ y $(x - y) = 0$ obtenemos las soluciones

$(x, y) = (2, 2)$ y $(0, 0)$. Si $(x-1)^2 = (x-y)^2 = 1$ y $(y-1)^2 = 0$ obtenemos las soluciones $(2, 1)$ y $(0, 1)$. Finalmente, si $(y-1)^2 = (x-y)^2 = 1$ y $(x-1)^2 = 0$ obtenemos las soluciones $(1, 2)$ y $(1, 0)$.
Por lo tanto, las soluciones son $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ y $(x, -x)$ para todo entero x.

Solución del problema 15. Coloreamos las casillas como un tablero de ajedrez.



Al inicio hay puros ceros, así que la suma de los números en las casillas negras es igual a la suma de números en las casillas blancas. Además, notemos que cada vez que hacemos un cambio, se afectan exactamente un número en casilla negra y un número en casilla blanca. Así, la suma de los números en casillas blancas siempre será igual a la suma de los números en casillas negras. Si el cuadrado llegara a tener puros números 2, la suma en casillas negras será 10 y la suma en casillas blancas será 8. Luego, no es posible llegar a tener puros números iguales a 2.

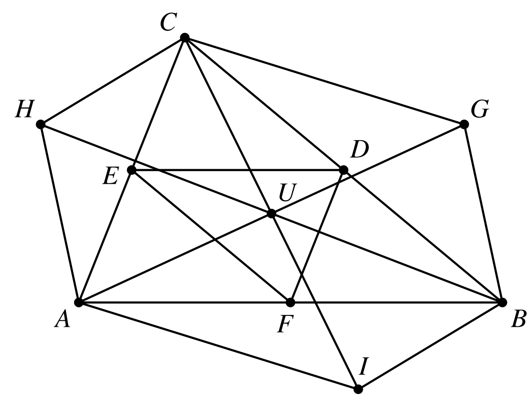
Solución del problema 16. Sea P el producto de los primeros 21 números primos. Veremos que si el segundo jugador juega de forma que, al término de cada turno, siempre deja a su oponente un múltiplo de P, entonces tiene grantizada su victoria. Primero, observamos que al incio del juego, el primer jugador recibe el número $2013!$, mismo que es múltiplo de P. Ahora, si en cualquier turno el primer jugador recibe el juego con un número múltiplo de P, digamos nP, entonces no puede dejar al termino de su turno otro múltiplo de P. Para ver esto, llamamos m al número que escoge el primer jugador y d a la diferencia que, en consecuencia, deja al segundo jugador. La única forma de que d sea múltiplo de P, es que m también sea un múltiplo de P, pero eso es imposible ya que m es, a lo más, divisible entre 20 primos distintos. Por lo tanto, al finalizar su turno, el primer jugador no podría dejar una diferencia d, múltiplo de P.
Por otro lado, dividimos d entre P y tomamos el residuo $r < P$. Dado que P es el menor número que tiene 21 divisores primos distintos, entonces r tiene, a lo más, 20 divisores primos distintos. Entonces el segundo jugador puede escoger r y el primer jugador siempre recibe $d - r$, que es múltiplo de P. Por último, dado que el primer jugador no puede dejar 0 después de su primer movimiento, siguiendo esta estrategia el segundo jugador garantiza la victoria, pues al término de su turno siempre deja un múltiplo de P, cada vez menor y eventulamente terminará dejando 0 y ganando el juego.

Solución del problema 17. Como U es el punto medio de AG, los triángulos AUC y UGC tienen la misma área (pues $AU = UG$). De la misma manera, los triángulos AUB

y UGB tienen la misma área. Sumando estas dos igualdades, obtenemos que

$$(CGBU) = (ACUB) = (CAU) + (ABU),$$

donde $(CGBU)$ denota el área del cuadrilátero $CGBU$.



Análogamente, tenemos que $(AHCU) = (ABU)+(BCU)$ y $(BIAU) = (BCU)+(CAU)$. Luego,

$$\begin{aligned}(AIBGCH) &= (CGBU) + (AHCU) + (BIAU)\\ &= (ACUB) + (AHCU) + (BIAU)\\ &= 2[(ABU) + (BCU) + (CAU)] = 2(ABC) = 2S.\end{aligned}$$

Solución del problema 18. Si n es impar, se tiene que $d(n) = n$. Si n es par, se tiene que $d(n) = d(\frac{n}{2})$. Luego,

$$\begin{aligned}d(1) + d(2) + \cdots + d(1024) &= 1 + 3 + \cdots + 1023 + d(2) + d(4) + \cdots + d(1024)\\ &= 512^2 + d(1) + d(2) + \cdots + d(512).\end{aligned}$$

Y con el mismo argumento,

$$\begin{aligned}d(1) + d(2) + \cdots + d(1024) &= 512^2 + 256^2 + d(1) + d(2) + \cdots + d(128)\\ &= 512^2 + 256^2 + 128^2 + \cdots + 2^2 + d(1) + d(2)\\ &= 1 + 4^0 + 4^1 + \cdots + 4^9 = 1 + \frac{4^{10} - 1}{3} = \frac{4^{10} + 2}{3}.\end{aligned}$$

Solución del problema 19. En el caso de 19 cartas sí es posible. Es fácil diseñar un sistema con el que, por cada 2 cartas, el asistente da indicaciones exactas sobre la figura que tiene la segunda carta, pues el número de formas en que las primeras dos flechas pueden estar es igual a $2 \cdot 2 = 4$. Esto permite al mago garantizar el acierto en todas las cartas pares hasta la 34. Pero además, como el mago conoce la composición global del mazo, si las dos últimas cartas tienen la misma figura, el mago puede detectarlo y sin necesidad de ayuda puede predecirlas con seguridad. En caso de que sus figuras sean distintas, al haber ya sólo dos posibilidades, el asistente puede usar la flecha de la carta 35 para indicar, su propia figura. De esta manera, se garantiza el acierto en todas las cartas pares más el de la carta 35, registrando con seguridad un mínimo de 19 aciertos. Para el caso de 20 cartas, también es posible, ahora veremos un método que garantiza al menos 22 aciertos. El asistente examina todas las cartas impares, excepto la número 1. Como en total tenemos 17 cartas y 4 figuras, por el principio de las casillas, al menos 5 de ellas tienen la misma figura, digamos x. Ahora, el asistente puede usar las flechas de las cartas 1 y 2 para indicar cuál es esa figura x. Entonces, si el mago siempre dice la figura x para las cartas impares, garantiza 5 aciertos. Para las cartas pares, a partir de la cuarta, se puede usar el mismo sistema del caso anterior. De esta forma se garantizan $5 + 17 = 22$ aciertos.

Solución del problema 20. La respuesta es que no. Llamemos a cada salto simultáneo de los chapulines un *turno*. Supongamos que algún chapulín, C_1, regresó a su punto inicial, digamos A, después de 12 turnos. Observamos que el orden en que están colocados los chapulines sobre el círculo no cambia. Entonces, cada uno de los otros 11 chapulines tiene que haber saltado sobre el punto A (al menos una vez) antes de que el chapulín C_1 regrese a él. Pero, en cada turno es imposible que más de un chapulín pase o brinque sobre A y si además consideramos que en el primer turno ningún chapulín pasó sobre A, podemos concluir que en 12 turnos, a lo más 11 chapulines han pasado sobre A. Por lo tanto, 12 turnos no son suficientes para que el chapulín C_1 regrese a su posición inicial A.

Problemas de Entrenamiento

Tzaloa se construye con el esfuerzo de toda la comunidad olímpica y esta sección está especialmente diseñada para la paticipación de sus lectores. De esta manera, en cada número presentamos 10 problemas sin solución e invitamos a nuestros lectores para que preparen y nos envíen sus soluciones con el fin de publicarlas.

Para dar suficiente tiempo a la preparación, envío y análisis de las soluciones, las respuestas de los problemas de entrenamiento de cualquier número de la revista, se publican con tres números de diferencia. Es así, que en este número (Tzaloa 2, año 2013), encontrarás las respuestas de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2012. Las respuestas de los problemas de entrenamiento propuestos en esta ocasión, se publicarán en Tzaloa 1, año 2014, por lo que aún tienes tiempo para preparar y enviarnos tu trabajo. Recuerda que nuestra dirección electrónica es `revistaomm@gmail.com` y que a través de ella estaremos recibiendo con gusto todas las contribuciones que nos lleguen desde cualquier rincón del país.

Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 2.

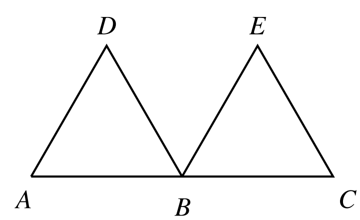
Los siguientes 10 problemas están buscando las soluciones que sólo con tu participación podrán ser halladas. Considera que estos problemas son una magnífica oportunidad para imponerte el reto de que la solución salga publicada con tu nombre impreso. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Problema 1. En el triángulo rectángulo ABC, M es el punto medio de la hipotenusa BC y H es el pie de la altura trazada desde A, sobre BC. Consideramos a la recta que pasa por M y es perpendicular con AC y nos fijamos en su intersección P con la circunferencia circunscrita del triángulo AMC. Si BP corta a AH en K, demuestra que $AK = KH$.

Problema 2. Hay 13 monedas idénticas en apariencia pero sólo 12 de ellas pesan lo mismo, y no se sabe si la décimo tercera moneda pesa más o menos que las demás. Muestra que es posible determinar la moneda diferente utilizando tres pesadas en una balanza de platillos.

Problema 3. Un entero positivo n es *bueno* si es divisible entre todos sus factores primos al cuadrado. Por ejemplo, el 72 es bueno ya que sus factores primos son 2 y 3, y 72 es múltiplo de 2^2 y de 3^2. Demuestra que hay una infinidad de parejas de números enteros consecutivos buenos.

Problema 4. En la figura, AC mide $2\,cm$, B es el punto medio de AC y los triángulos ABD y BCE son equiláteros. Si P y Q son los centros de ABD y BCE, respectivamente, encuentra el radio de la circunferencia que pasa por P, Q y B.



Problema 5. Durante el año 2011 una librería, que abría los siete días de la semana, vendió por lo menos un libro por día y un total de 600 libros en el año. Demuestra que existe necesariamente un periodo de días consecutivos donde se hayan vendido exactamente 129 libros.

Problema 6. Sean ABC un triángulo acutángulo y J un punto en su interior. Supongamos que las reflexiones de H sobre cada uno de los lados del triángulo están sobre el circuncírculo de ABC. Demuestra que J es el ortocentro de ABC.

Problema 7. Se tienen 14 cartas. Cada una de ellas tiene escrito un $+1$ o un -1. Luego, las cartas se meten en 14 sobres. Si es posible preguntar cuál es el producto de los números contenidos en tres sobres, ¿cuál es el mínimo número de preguntas que se necesitan hacer para saber el producto de los 14 números?

Problema 8. Demuestra que si (x, y, z) es una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y &= x^2 + px + q, \\ z &= y^2 + py + q, \\ x &= z^2 + pz + q, \end{aligned}$$

para ciertos valores de p y q, entonces $x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2z + y^2x + z^2y$.

Problema 9. Cada lado de un cuadrado de 1×1 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo externo. Sean A, B, C y D los vértices de estos triángulos rectángulos y sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los incentros de dichos triángulos. Demuestra que:

- El área del cuadrilátero $ABCD$ es menor que 2.
- El área del cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ es menor que 1.

Problema 10. Para cada entero positivo n sea $P(n)$ el número de polinomios cuadráticos $p(x) = ax^2 + bx + c$ cuyas raíces son números enteros y los coeficientes a, b, c son números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Demuestra que $n < P(n) < n^2$ para todo $n \geq 4$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2012 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2012. En esta ocasión publicamos los trabajos de: José Ramón Tuirán Rangel, quien nos envió sus soluciones para los problemas 1 y 2; Germán Puga Castillo, quien nos comparte su solución para el problema 3; Gerardo Pérez Suárez quien resuelve los probelmas 4, 7 y 10; así como Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán quien nos envío, no una, sino dos soluciones para el problema 4. A todos ellos **Muchas Felicidades** y a nombre de la comunidad olímpica, nuestro respeto y más profundo agradecimento por compartirnos su original trabajo.

Recuerda que en el próximo número publicaremos las soluciones de los problemas propuestos en Tzaloa 4, año 2012, así que ésta es la última llamada. ¿Qué estás esperando?, prepara tus soluciones y envíalas a `revistaomm@gmail.com`. Todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. (Intermedio) Encuentra todas las funciones $f(x)$ con las siguientes propiedades:

1. $f(x)$ es una función cuadrática.
2. $f(x + 2) = f(x) + x + 2$.
3. $f(2) = 2$.

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Veamos que 0 es una raíz de $f(x)$, pues

$$2 = f(2) = f(0 + 2) = f(0) + 0 + 2 = f(0) + 2 \Rightarrow f(0) = 0.$$

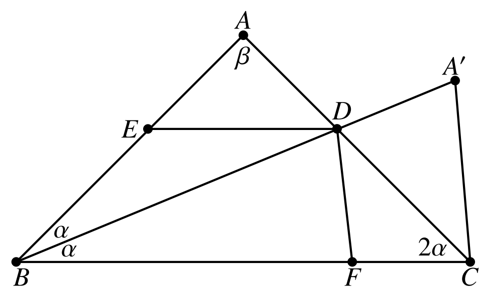
Como $f(0) = c$, concluimos que $c = 0$. Así $f(x) = ax^2 + bx$.
Por otra parte tenemos que $f(4) = f(2+2) = f(2)+2+2 = 6$ (pues $f(2) = 2$). Entonces $f(4) = 6$ y $f(2) = 2$. Como $f(4) = 16a+4b$ y $f(2) = 4a+2b$, tenemos que $16a+4b = 6$ y $4a + 2b = 2$. Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos $a = \frac{1}{4}$ y $b = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ y es fácil ver que $f(x)$ satisface las condiciones del problema.

Problema 2. (Intermedio) Cada entero positivo se colorea con uno de dos colores: verde o rojo, de tal manera que hay al menos un número de cada color. Además, se cumple que la suma de dos números con colores diferentes es verde y su producto es rojo. ¿De qué color es el producto de dos números rojos?

Solución de José Ramón Tuirán Rangel. Sean a y b dos números rojos y sea r un número verde. Entonces $a + r$ es verde y $(a + r)b$ es rojo así como también es rojo br. Si ab fuera verde, tendríamos que $ab + br = (a + r)b$ sería verde, lo que es una contradicción. Por lo tanto, ab es rojo. Luego, el producto de dos números rojos es rojo.

Problema 3. (Intermedio) Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Si la bisectriz del ángulo en B intersecta a AC en el punto D de tal manera que $BC = BD+AD$, ¿cuánto mide el ángulo en A?

Solución de Germán Puga Castillo. Sea A' un punto sobre la extensión del segmento BD (con D entre B y A') tal que $DA' = DA$. Sean $\beta = \angle BAC$ y $2\alpha = \angle ABC = \angle BCA$. Llamemos E a la intersección del lado AB con la paralela a BC que pasa por D y F a la intersección del lado BC con la paralela a CA' que pasa por D.



Como $BD + DA = BC$, entonces $BD + A'D = BC$, luego el triángulo $BA'C$ es isósceles con $BA' = BC$. Para que la suma de los ángulos en ese triángulo sea 180°, tenemos que $\angle BCA' = \angle BA'C = \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, ya que, $4\alpha + \beta = 180°$.

Por otra parte, FD es paralela a $A'C$ y ED es paralela a BC entonces $FC = DA' = AD = AE$ y $\angle ADE = \angle AED = 2\alpha$. Además, $\angle BED = 2\alpha + \beta$, pero $\angle EBD = \alpha$, entonces $\angle BDE = \alpha$. Por lo tanto, el triángulo EBD es isósceles con $BE = ED$. Como el triángulo ABC es isósceles y ED es paralela a BC, entonces $BE = DC$, de donde $BE = ED = DC$. Por lo tanto, los triángulos ADE y FCD son congruentes (por el criterio de congruencia LAL). Luego, $\angle DFC = \angle EAD$.

Como $\angle DFC$ es externo al triángulo DFB, $\angle DFC = \angle DBF + \angle BDF = \alpha + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$. Igualando con $\angle EAD$ tenemos que $\frac{5}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta$, de donde $\beta = 5\alpha$. Sustituyendo este valor en $4\alpha + \beta = 180°$ llegamos a que $\alpha = 20°$ y $\beta = 100°$.

Problema 4. (Intermedio) Demuestra que el dígito de las decenas de cada potencia de 3 es par.

Solución de Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán. Trabajamos módulo 100 y observamos que el ciclo de las potencias de 3 es

$$1, 3, 9, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49, 47, 41, 23, 69, 7, 21, 63, 89, 67, 1, \ldots$$

el cual se repite cada 20 números. Como estamos trabajando módulo 100, estos 20 números son precisamente los dos últimos dígitos de cada potencia de 3, donde los números de un dígito tienen su dígito de las decenas igual a 0. Por lo tanto, el dígito de las decenas de cada potencia de 3 es par.

Solución alternativa de Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán. Módulo 10 podemos ver que el dígito de las unidades de las potencias de 3 es 1, 3, 9 o 7. Procedamos por inducción. Caso base $3^0 = 1 = 01$ y el dígito de las decenas es par. Supongamos que el dígito de las decenas de 3^n es par para algún $n > 0$ y consideremos el número 3^{n+1}. Sean a y b los últimos dos dígitos (decenas y unidades, respectivamente) de 3^n y sea N el número que se obtiene borrando esos dígitos de 3^n. Entonces,

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3(N \cdot 100 + 10a + b) = 3 \cdot N \cdot 100 + 3(10a) + 3b.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos que a es par, de modo que $3a$ es par. Ahora, puede suceder que $3b \geq 10$ o bien $3b < 10$. Si $3b < 10$, terminamos ya que los dígitos se mantienen intactos en paridad. Si $3b \geq 10$ entonces $3b = 10c + d$. Ya que el dígito de las unidades de una potencia de 3 es $1, 3, 9$ o 7, para que $3b \geq 10$, debemos tener que $b = 9$ o 7, y por lo tanto $c = 2$. Entonces, al dígito de las decenas que era par le sumamos un par (c), manteniendo intacta la paridad, lo que concluye la inducción.

Solución de Gerardo Pérez Suárez. Sea n un número natural y sea a el dígito de las unidades de 3^n. Como $3^n \equiv a \pmod{10}$, basta demostrar que $3^n - a$ divisible entre 4 para garantizar que el dígito de las decenas de 3^n es par. Consideremos 4 casos.

1. $n = 4k$ con k entero no negativo. Tenemos que $3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$ implica que $3^{4k} \equiv 1 \pmod{10}$, es decir, el dígito de las unidades de 3^{4k} es 1. Luego, $3^{4k} - 1 = (3^{2k} + 1)(3^{2k} - 1) = (3^{2k} + 1)(3^2 - 1)(3^{2(k-1)} + 3^{2(k-2)} + \cdots + 1)$ es divisible por 4.

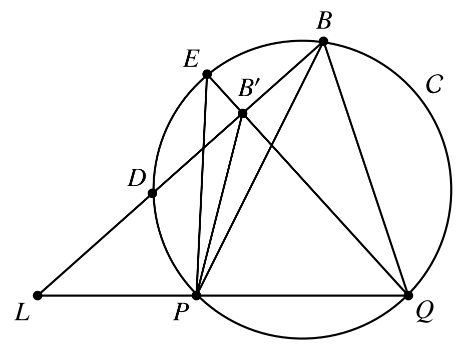
2. $n = 4k + 1$ con k entero no negativo. Tenemos que $3^{4k+1} = 3(3^{4k}) \equiv 3 \pmod{10}$. Luego, $3^{4k+1} - 3 = 3(3^{4k} - 1)$ es divisible por 4 por el caso 1.

3. $n = 4k+2$ con k entero no negativo. Tenemos que $3^{4k+2} = 3^2(3^{4k}) \equiv 3^2 \pmod{10}$. Luego, $3^{4k+2} - 9 = 3^2(3^{4k} - 1)$ es divisible por 4 por el caso 1.

4. $n = 4k + 3$ con k entero no negativo. Tenemos que $3^{4k+3} = 3^3(3^{4k}) \equiv 3^3 \equiv 7 \pmod{10}$. Luego, $3^{4k+3} - 7 = 3^3(3^{4k} - 1) + 20$ es divisible entre 4 por el caso 1.

Problema 5. (Intermedio) Dos caminos rectos parten de un punto L formando un ángulo agudo entre ellos. Sobre dos puntos P y Q de uno de los caminos se encuentran dos buzones tales que $LP = 40$ metros y $LQ = 90$ metros. Bianca se encuentra sobre un punto B en el otro camino y ve los dos buzones formando un ángulo $\angle PBQ$. ¿Qué tan lejos está Bianca de L si el ángulo $\angle PBQ$ tiene la máxima medida posible?

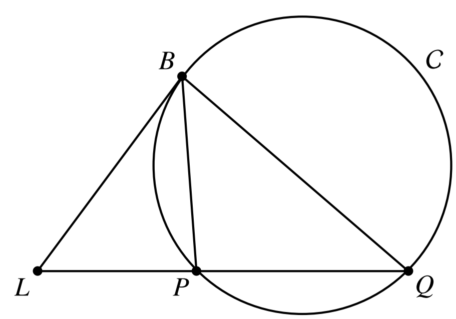
Solución. Sea C el circuncírculo del triángulo PQB. Veamos que LB tiene que ser tangente a C.



Si no es tangente, sea D el otro punto donde LB corta a C. Tomemos un punto B' en el interior del segmento DB y sea E la otra intersección de QB' con C. Como $EPQB$ es cíclico, tenemos que $\angle PEQ = \angle PBQ$, pero por otro lado,

$$\angle PB'Q > \angle PEQ = \angle PBQ.$$

Esto es una contradicción, pues queríamos que $\angle PBQ$ tenga la mayor medida posible. Luego, LB tiene que ser tangente a C.



Como LB es tangente a C tenemos que $\angle LQB = \angle PBL$ y los triángulos LQB y LBP son semejantes, de donde $\frac{LB}{LP} = \frac{LQ}{LB}$ y $LB^2 = LP \cdot LQ = 40 \cdot 90 = 3600$, de donde $LB = 60\,m$ (esto último también se puede ver aplicando la potencia de L con respecto al círculo C).

Problema 6. (Intermedio) Encuentra el menor entero positivo de la forma,

$$\frac{A * B}{B},$$

donde A y B son enteros de tres dígitos y $A * B$ denota al entero que se forma al colocar A al lado de B.

Solución. Veamos que 121 es el menor entero que cumple la condición del problema.

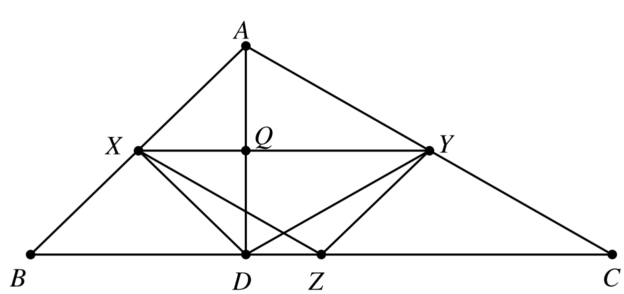
Observemos que,
$$\frac{A * B}{B} = \frac{1000A + B}{B} = \frac{1000A}{B} + 1.$$
Demostremos ahora que si $E = \frac{1000A}{B}$ es un entero, entonces $E \geq 120$. Sea $B = GX$, donde G es el máximo común divisor de B y 1000, luego demostraremos que si $\frac{A}{X}$ es un entero, entonces $F = \left(\frac{1000}{G}\right)\left(\frac{A}{X}\right) \geq 120$.
Como $B < 1000$ tenemos que $X < \frac{1000}{G}$, y recordemos que sólo estamos interesados en los casos en los que $\frac{A}{X}$ es un entero.

1. Si $G = 1, 2, 4, 5$ u 8, entonces, $\frac{1000}{G} > 120$ y ya está.
2. Si $G = 10$, entonces $X < 100$ y $\frac{A}{X} \geq 2$. Luego, $F \geq 200$.
3. Si $G = 20$, entonces $X < 50$ y $\frac{A}{X} \geq 3$. Luego, $F \geq 150$.
4. Si $G = 25$, entonces $X < 40$ y $\frac{A}{X} \geq 3$. Luego, $F \geq 120$.
5. Si $G = 40$, entonces $X < 25$ y $\frac{A}{X} \geq 5$. Luego, $F \geq 125$.
6. Si $G = 50$, entonces $X < 20$ y $\frac{A}{X} \geq 6$. Luego, $F \geq 120$.
7. Si $G = 100$, entonces $X < 10$ y $\frac{A}{X} \geq 12$. Luego, $F \geq 120$
8. Si $G = 125$, entonces $X < 8$ y $\frac{A}{X} \geq 15$. Luego, $F \geq 120$.
9. Si $G = 200$, entonces $X < 5$ y $\frac{A}{X} \geq 25$. Luego, $F \geq 125$
10. Si $G = 250$, entonces $X < 4$ y $\frac{A}{X} \geq 34$. Luego, $F \geq 136$.

Por lo tanto, si $\frac{A}{X}$ es un entero, entonces $F = \left(\frac{1000}{G}\right)\left(\frac{A}{X}\right) \geq 120$.
Finalmente observemos que si $A = 114$ y $B = 950$, entonces $\frac{A*B}{B} = \frac{114950}{950} = 121$.

Problema 7. (Intermedio) En un triángulo ABC sean X, Y los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Sea D un punto sobre el segmento BC, distinto de su punto medio, tal que $\angle XDY = \angle BAC$. Demuestra que AD es perpendicular a BC.

Solución de Gerardo Pérez Suárez. Sea Z el punto medio de BC. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que D está entre B y Z. Sea Q la intersección de AD con XY. Como $XY \parallel BC$, $XZ \parallel AC$ y $ZY \parallel AB$, tenemos que los triángulos ABC y ZYX son semejantes, de modo que $\frac{XY}{BC} = \frac{XZ}{AC} = \frac{ZY}{AB} = \frac{AQ}{AD} = \frac{1}{2}$.



Notemos que el cuadrilátero $XDZY$ es cíclico ya que $\angle YZX = \angle XAY = \angle XDY$. Demostraremos que los triángulos XYZ y XDY son congruentes. Usando que $XDZY$ es cíclico y que $XY \parallel BC$, tenemos que

$$\angle YXD = 180^\circ - \angle YZD = \angle YZC = \angle XYZ$$

y

$$\angle YXZ = \angle YDZ = \angle XYD.$$

Como XY es un lado común de los triángulos XYZ y XDY, se sigue que son congruentes por el criterio de congruencia ALA[3]. De aquí, $XD = YZ = \frac{AB}{2} = AX$, de donde se sigue que el triángulo AXD es isósceles y Q es punto medio de AD. Por lo tanto, AD y XY son perpendiculares y en consecuencia AD y BC también, como se quería.

Problema 8. (Intermedio) Determina todos los conjuntos finitos no vacíos X de números reales con la siguiente propiedad: $x + |x| \in X$ para todo $x \in X$.

Solución. Sea $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ donde $n \geq 1$ y $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$.
Si $x_n > 0$, entonces $x_n + |x_n| = 2x_n \in X$, lo cual es una contradicción ya que $x_n < 2x_n$ y x_n es el mayor elemento de X. Por lo tanto, $x_n \leq 0$.
Si $x_1 < 0$, entonces $x_1 + |x_1| = x_1 - x_1 = 0 \in X$. Luego, debemos tener que $x_n = 0$, y por lo tanto $x_i + |x_i| = x_i - x_i = 0 \in X$ para cualquier $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Por lo tanto, los conjuntos que satisfacen la condición del problema son los subconjuntos finitos del intervalo $(-\infty, 0]$ que contienen al número 0.

Problema 9. (Avanzado) Demuestra que para cada entero $n > 0$, el número,

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 2^2)(2^n - 2^3)\cdots(2^n - 2^{n-1})$$

es divisible entre $n!$. (Nota: $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1$).

Solución. Sea $n > 0$ un entero y sea p un número primo tal que $p \leq n$. Denotaremos por $v_p(n)$ al exponente de p en la factorización canónica de n como producto de potencias de primos distintos, y por $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2^n - 2^k)$ al producto

$$(2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 2^2)(2^n - 2^3)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

Observemos primero que,

$$v_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots \leq \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \cdots$$

donde $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x. Observe que estas sumas son finitas ya que a partir de cierto sumando todos los sumandos son iguales a 0.
Luego, esta suma (finita) es menor que la suma infinita

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \frac{n}{p^3} + \cdots = \frac{n}{p}\left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1},$$

[3] Ver en el apéndice el criterio 17.

donde la segunda igualdad se sigue de la fórmula $1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$ válida si $|x|<1$. Así, $v_p(n!)<\frac{n}{p-1}$, y como $v_p(n!)$ es un entero, concluimos que

$$v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor.$$

Si $p=2$, entonces $v_2(n!)<n$ y por lo tanto $v_2(n!)\leq n-1$. Por otra parte, tenemos que

$$v_2\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\right)=\sum_{k=0}^{n-1}v_2(2^n-2^k)\geq n-1$$

ya que 2^n-2^k es par si $k\geq 1$. Por lo tanto, la mayor potencia de 2 que divide a $n!$ divide a la mayor potencia de 2 que divide al producto $\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)$.
Supongamos ahora que $p>2$. Por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que p divide a $2^{p-1}-1$, de modo que p divide también a $2^{k(p-1)}-1$ para todo $k\geq 1$. Como,

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{k=1}^{n}(2^k-1)$$

tenemos que

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\right)=\sum_{k=1}^{n}v_p(2^k-1)\geq\sum_{1\leq k(p-1)\leq n}v_p(2^{k(p-1)}-1)\geq|\{k\mid 1\leq k(p-1)\leq n\}|$$

donde $|A|$ denota la cardinalidad del conjunto A.
Como $|\{k\mid 1\leq k(p-1)\leq n\}|=\left\lfloor\frac{n}{p-1}\right\rfloor$, se sigue que

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\right)\geq\left\lfloor\frac{n}{p-1}\right\rfloor.$$

Por lo tanto,

$$v_p\left(\prod_{k=0}^{n-1}(2^n-2^k)\right)\geq v_p(n!),$$

de donde se sigue el resultado.

Problema 10. (Avanzado) Sean a,b y c números reales positivos tales que $abc=1$. Demuestra que,

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geq\frac{3}{4}$$

y determina cuándo se verifica la igualdad.

Solución de Gerardo Pérez Suárez. Aplicando la desigualdad MA-MG[4] a los números a, b y c, tenemos que $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}=1$ con la igualdad si y sólo si $a=b=c$. De

[4]Ver en el apéndice el teorema 10.

aquí, $a+b+c \geq 3$. Aplicando ahora la desigualdad MA-MG a los números ab, bc y ca, tenemos que $\frac{ab+bc+ca}{3} \geq \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)} = \sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 1$ con la igualdad si y sólo si $ab = bc = ca$. De aquí, $ab + bc + ca \geq 3$.
Por otra parte, tenemos que

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} = \frac{ca+a+ab+b+bc+c}{(a+1)(b+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4}$$

si y sólo si

$$4ca + 4a + 4ab + 4b + 4bc + 4c \geq 3(abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1)$$

es decir, $ab + bc + ca + a + b + c \geq 3abc + 3 = 3 + 3 = 6$ lo cual es cierto por lo que probamos al inicio.
Por último, la igualdad se cumple si y sólo si $a = b = c$ y $ab = bc = ca$. Entonces $1 = abc = a^3$ de donde $a = 1$ y por lo tanto $a = b = c = 1$.
Este problema también lo resolvieron José Ramón Tuirán Rangel y Siddhartha Emmanuel Morales Guzmán.

Etapa Semifinal Estatal de la 26ª OMM

Como mencionamos en la Presentación, en esta sección publicamos el examen de la etapa semifinal estatal del año 2012. Esta etapa consta de un examen con 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4 horas.
Esperando poder publicar tus soluciones en el siguiente número, recuerda que puedes escribirnos a la dirección `revistaomm@gmail.com` donde con gusto estaremos recibiendo todas las contribuciones de los lectores.

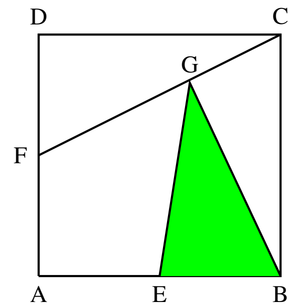
Problema 1. Se tienen 2012 tarjetas numeradas del 1 al 2012, en orden, en una fila. Se van recogiendo algunas cartas en forma alternada como sigue: Se recoge la 1 y se deja la 2 en la fila, se recoge la 3 y se deja la 4 en la fila, etc. Luego se vuelve a comenzar con las cartas que quedan en la fila, así que se recoge la 2 y se deja la 4, se recoge la 6 y se deja la 8 y así sucesivamente. Cuando se llega al final de la fila, se vuelve a empezar. ¿Cuántas cartas quedan en la fila en el momento que se recoge la carta 2012? (Por ejemplo, si sólo hubiera cartas de la 1 a la 6 y se preguntara por cuántas cartas quedan al recoger la carta 6, la respuesta sería 1 pues se habrían recogido, en orden, las cartas con números $1, 3, 5, 2$ y 6 así que sólo quedaría la 4.)

Problema 2. En la mesa hay tres montones de piedras. El montón A tiene 52 piedras, el montón B tiene 40 y el montón C tiene 1. En cada momento Esteban puede hacer uno de los siguientes movimientos:

- Quitar 5 piedras de A y ponérselas a B.
- Quitar 4 piedras de B y ponérselas a C.
- Quitar 3 piedras de A y ponérselas a C.

¿Cuántos movimientos necesita hacer Esteban para lograr que en todos los montones haya el mismo número de piedras?

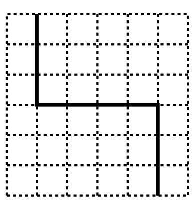
Problema 3. El cuadrado $ABCD$ tiene lados de longitud $2\,cm$. E y F son los puntos medios de los lados AB y AD, respectivamente, y G es un punto en CF tal que $3 \cdot CG = 2 \cdot GF$. ¿Cuál es el área del triángulo BEG?

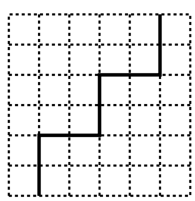


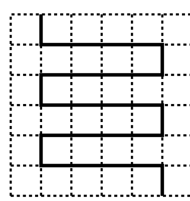
Problema 4. Un rectángulo se parte en 5 rectángulos de lados enteros de áreas 3, 4, 7, 10 y 12 centímetros cuadrados. Determinar todos los posibles perímetros del rectángulo.

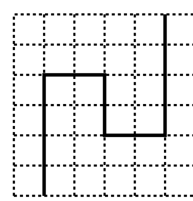
Problema 5. Determinar todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que $a \leq b$ y $a + b + ab = 134$.

Problema 6. ¿De cuántas maneras es posible cortar un papel cuadriculado de 6×6 empezando en la parte inferior del papel y llegando a la parte superior si sólo se puede cortar sobre las líneas de la cuadrícula? Las dos piezas en que quede partido deben ser iguales y no se puede cortar hacia abajo. (Nota: Dos piezas se consideran iguales si se puede colocar una sobre la otra y ajustan perfectamente.)


corte válido


corte válido


corte válido


corte inválido

Problemas y Soluciones del Concurso Nacional 2012

Del 11 al 16 de noviembre de 2012 se llevó a cabo en Guanajuato, Guanajuato, el Concurso Nacional de la 26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República. Además, se contó con la participación (fuera del concurso) de un equipo de cuatro estudiantes de los Estados Unidos.

Los 17 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Erick Rosete Beas (Baja California)
Luis Enrique Chacón Ochoa (Chihuahua)
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua)
Enrique Chiu Han (Distrito Federal)
Joshua Ayork Acevedo Carabantes (Guanajuato)
Ramón Iván García Álvarez (Guanajuato)
Adán Medrano Martín del Campo (Jalisco)
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco)
Diego Terán Ríos (Morelos)
José Alberto De la Paz Espinosa (Nayarit)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Raúl Arturo Hernández González (Nuevo León)
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León)
Demian Espinosa Ruiz (San Luis Potosí)
Carlos Alejandro Hernández Gómez (San Luis Potosí)
Axel Omer Gómez Cásarez (Sonora)
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán)
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León)
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila)
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro)
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos)
Antonio López Guzmán (Chihuahua)
Juan Luis García Guerrero (San Luis Potosí)
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco)

En esta ocasión, el estudiante Miguel Ángel Reyes Badilla del Estado de Sinaloa, se hizo acreedor al premio especial de solución creativa, por su solución del problema 3. Este premio no se daba desde la 14^a Olimpiada en el año 2000.

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado a cabo los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que ocuparon los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 26^a OMM.

1. Jalisco
2. Nuevo León
3. San Luis Potosí
4. Morelos
4. Yucatán
6. Guanajuato
7. Distrito Federal
8. Chihuahua
9. Baja California
9. Sonora

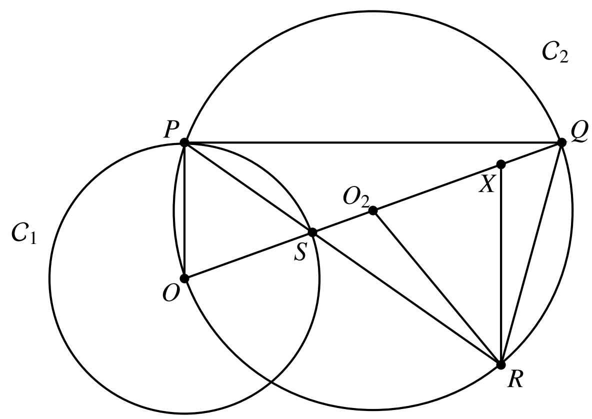
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Kuanasï Uato Karharani**" y fue ganado por el Estado de México. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon, Coahuila y Guerrero, respectivamente. Jalisco se llevó el primer lugar general por estados, Nuevo León se llevó el segundo lugar y San Luis Potosí el tercero.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones del examen del Concurso Nacional 2012. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sean C_1 una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y l la recta tangente a C_1 en P. Considera un punto Q sobre l, distinto de P, y sea C_2 la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ intersecta a C_1 en S y la recta PS intersecta a C_2 en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de C_1 y C_2, respectivamente, muestra que $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.

(Sugerido por Marco Antonio Flores Martínez)

Solución de María Cecilia Rojas Cuadra. Sean O_2 el centro de C_2 y X el punto de intersección de SQ con la paralela a OP que pasa por R. Sea $\alpha = \angle RSQ$.



Por ser opuestos por el vértice, $\angle OSP = \angle RSQ = \alpha$ y como O es el centro de C_1 el triángulo OSP es isósceles y $\angle SPO = \angle OSP = \alpha$. Las rectas OP y XR son paralelas, por lo que $\angle XRS = \angle SPO = \alpha$. Por suma de ángulos en el triángulo SRX tenemos que $\angle RXS = 180° - 2\alpha$.
Como el cuadrilátero $PORQ$ es cíclico, $\angle OQR = \angle OPR = \alpha$. Y como O_2 es el centro de C_2 el triángulo O_2RQ es isósceles y $\angle O_2RQ = \angle RQO_2 = \alpha$ y por suma de ángulos en el triángulo O_2RQ tenemos que $\angle QO_2R = 180° - 2\alpha$. Luego, el triángulo O_2RX es isósceles y $XR = O_2R = r_2$. Además, el triángulo SRX es isósceles con $XR = XS$. Por el Teorema de Thales obtenemos que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{SO}{SX} = \frac{SO}{XR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Problema 2. Sea $n \geq 4$ un número par. Considera una cuadrícula de $n \times n$. Dos celdas (cuadraditos de 1×1) son vecinas si comparten un lado, si están en extremos opuestos de un mismo renglón o si están en extremos opuestos de una misma columna. De esta forma, toda celda en la cuadrícula tiene exactamente cuatro celdas vecinas.
En cada celda está escrito un número del 1 al 4 de acuerdo con las siguientes reglas:

- Si en una celda está escrito un 2 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 3 entonces en dos o más celdas vecinas está escrito un 1.
- Si en una celda está escrito un 4 entonces en las cuatro celdas vecinas está escrito un 1.

Entre los acomodos que cumplan las condiciones anteriores, ¿cuál es el máximo número que se puede obtener sumando los números escritos en todas las celdas?

(Sugerido por Ricardo Chávez Cáliz y Arturo Antonio Martínez Rodríguez)

Solución de Antonio López Guzmán. Primero veamos la máxima suma posible en un subcuadrado de 2×2. Veamos algunos casos.

- Si en ese cuadrado aparece algún 4, como tiene puras casillas vecinas 1 y en el cuadrado de 2×2 cada casilla tiene dos vecinas, debe haber dos unos en ese cuadrado. El número en la última casilla puede valer a lo más 4 y tenemos que la máxima suma es 10.
- Si no hay 4 pero hay un 3, en alguna de sus casillas vecinas dentro del subcuadrado tiene que estar un 1. En las otras dos puede haber a lo más un 3 y un 2, por lo que la suma en este caso es a lo más 9.
- Si no hay 4 ni 3, lo máximo que puede valer la suma es 8 (teniendo cuatro doses).
- Finalmente, si sólo hay unos, la suma es 4.

Luego, la máxima suma en cada subcuadrado de 2×2 es 10. Como n es par, puedo dividir la cuadrícula en $\frac{n^2}{4}$ subcuadrados de 2×2, como en cada uno de ellos la suma es a lo más 10, obtenemos que la suma total es a lo más $\frac{10n^2}{4} = \frac{5n^2}{2}$. Para ver que siempre es posible este máximo, basta considerar el acomodo que alterna unos y cuatros como un tablero de ajedrez.

Problema 3. Muestra que entre cualesquiera 14 números enteros positivos consecutivos siempre hay 6 números tales que cualesquiera dos de ellos son primos relativos.
Nota: Dos números a, b son primos relativos si su único divisor común positivo es el 1.

(Sugerido por Garaev Moubariz)

Solución de Miguel Ángel Reyes Badilla. Primero notamos que siempre que n sea de la forma $6k + 3$, los números

$$n - 4, n - 2, n, n + 2, n + 4$$

son todos impares y el único múltiplo de 3 es n. Como las únicas diferencias entre estos números son 2, 4, 6 y 8, estos números son coprimos por parejas.
Ahora, si los 14 números son $a, a + 1, \dots, a + 13$, basta elegir a n como el único $6k + 3$ de entre $a + 4, a + 5, \dots, a + 9$, para que los cinco números elegidos estén entre los 14. Resta elegir un sexto número. Si $n - 4$ no es múltiplo de 5, podemos elegir a $n + 1$. Este número tiene diferencias 5, 3, 1, 1 y 3 con los números elegidos anteriormente. Como no es múltiplo de 3 y $n-4$ no es múltiplo de 5, no comparte factores primos con ninguno y terminamos. Por otro lado, si $n-4$ es múltiplo de 5, $n+4$ no lo es y elegimos a $n - 1$, el cual funciona por el mismo argumento.

Problema 4. A cada entero positivo se le aplica el siguiente proceso: al número se le resta la suma de sus dígitos, y el resultado se divide entre 9. Por ejemplo, el resultado del proceso aplicado a 938 es 102, ya que $(938 - (9 + 3 + 8))/9 = 102$. Aplicando dos veces el proceso a 938 se llega a 11, aplicado tres veces se llega a 1, y aplicado cuatro

veces se llega al 0.
Cuando a un entero positivo n se le aplica el proceso una o varias veces, se termina en 0. Al número al que se llega antes de llegar al cero, lo llamamos la *casa* de n. ¿Cuántos números menores que 26000 tienen la misma casa que el 2012?

(Sugerido por David Cossío Ruiz)

Solución de Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri. Veamos cuál es la casa de 2012. Es fácil ver que el 2012 genera al 223, este al 24, este al 2 y este último al 0, por lo que la casa de 2012 es 2. Como 26000 tiene cinco dígitos, separamos en cinco casos.

1. n tiene un dígito. Claramente sólo $n = 2$ funciona. Sea $A_1 = \{2\}$.

2. n tiene dos dígitos. Si $n = 10a + b$ (a y b dígitos)
$$\frac{(10a + b) - (a + b)}{9} = \frac{9a}{9} = a,$$
como a es dígito se tiene que el siguiente número es $\frac{a-a}{9} = 0$. Luego, a tiene que ser 2 y obtenemos los números del conjunto $A_2 = \{20, 21, 22, \ldots, 29\}$.

3. n tiene tres dígitos. Digamos que $n = 100a + 10b + c$. Tenemos que
$$\frac{(100a + 10b + c) - (a + b + c)}{9} = \frac{99a + 9b}{9} = 11a + b.$$
Si $a \leq 8$ o $a = 9$ y $b = 0$, este último número tendrá 2 dígitos y tendrá que estar en A_2. Para que eso suceda, a puede valer 1 o 2. Si $a = 1$, b tiene que ser 9 y obtenemos los números $190, 191, 192, \ldots, 199$. Si $a = 2$, b puede ser a lo más 7 y generan los números del 200 al 279. En conjunto, tenemos como solución a $A_3 = \{190, 191, 192, \ldots, 279\}$.

   Ahora, si $a = 9$ y $b \geq 1$, el número $11a + b$ tiene tres dígitos, su expansión decimal es $100(1) + 10(0) + b'$, el cual genera al número
$$\frac{(100(1) + 10(0) + b') - (1 + b')}{9} = \frac{99}{9} = 11.$$
Como 11 no está en A_2, no se generan más soluciones.

4. n tiene cuatro dígitos, digamos $n = 1000a + 100b + 10c + d$, luego
$$\frac{(1000a + 100b + 10c + d) - (a + b + c + d)}{9} = \frac{999a + 99b + 9c}{9} = 111a+11b+c.$$
Si $a \leq 8$ o $a = 9$, $d = c = 0$, $111a + 11b + c$ tiene tres dígitos. Para que esté en A_3, tiene que pasar que $a = 1$, $b = 7$ y $c \geq 2$; o $a = 1$, $b \geq 8$; o $a = 2$, $b \leq 4$; o $a = 2$, $b = 5$, $c \leq 2$. Como d no importa, obtenemos como solución $A_4 = \{1720, 1721, 1722, \ldots, 2529\}$.

   En otro caso, $111a+11b+c$ tiene cuatro dígitos. El cual puede ser de dos formas: $1000(1)+100(1)+10(0)+c'$, el cual genera a 122, o de la forma $1000(1)+100(0)+10b' + c'$, el cual genera a $111 + b' \leq 120$. Como todos los números en A_3 son mayores a estos, no se generan más soluciones.

5. n tiene cinco dígitos, digamos $n = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e$, con $a \leq 2$ (pues sólo tenemos que considerar hasta el 26000). Este número genera al $1111a + 111b + 11c + d$. Como $a \leq 2$, este número tiene exactamente cuatro dígitos y tiene que estar en A_4. Tenemos los siguientes casos

   - Si $a = 1$ y $b = 5$. Para que $1111a + 111b + 11c + d$ sea mayor o igual que 1720 necesitamos que $c \geq 5$ y d no importa.
   - Si $a = 1$, $b \geq 6$, c y d pueden ser lo que sea.
   - Si $a = 2$ y $b \leq 1$, c y d no importan, $1111a + 111b + 11c + d$ será menor o igual que 2529.
   - Si $a = 2$, $b = 2$, $c \leq 6$, entonces d puede ser lo que sea.
   - Si $a = 2$, $b = 2$ y $c = 7$, entonces para no pasarnos $d \leq 8$.

   Obteniendo el conjunto $A_5 = \{15500, 15501, 15502, \ldots, 22789\}$.

Sumando el número de soluciones de cada caso, obtenemos 8201 números menores a 26000 con la misma casa que el 2012.

Problema 5. Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces

- Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\times$.
- Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con $\circ$.

		$\times$		$\circ$		
	$\circ$				$\times$	
			#			
	$\times$				$\circ$	
		$\circ$		$\times$		

Diremos que dos ranas (de cualquier color) *se pueden encontrar en una casilla* si ambas pueden llegar hasta tal casilla saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

a) Muestra que si ponemos 6 ranas, entonces hay al menos 2 que se pueden encontrar en una casilla.

b) ¿Para qué valores de k es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente k casillas en las que estas ranas se pueden encontrar?

(Sugerido por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval)

Solución de Axel Omer Gómez Cásarez.

a) Nos fijamos en las casillas según la congruencia módulo 5 de la columna en la que estén. Una rana roja tiene cuatro posibles movimientos. Los numeramos como sigue.

	3			
				1
		#		
2				
			4	

Notamos que los movimientos 1 y 2, así como los movimientos 3 y 4 son inversos entre sí. Luego, si x es igual al número de movimientos 1 menos el número de movimientos 2 y z es igual al número de movimientos 3 menos el número de movimientos 4, tenemos que la rana roja se movió $x + 2z$ casillas verticalmente (donde un número positivo indica hacia arriba y uno negativo hacia abajo) y $2x - z$ casillas horizontalmente (donde un número positivo indica hacia la derecha y uno negativo hacia la izquierda). Si el movimiento vertical es cero, $x + 2z = 0$ se tiene que el movimiento horizontal será $2x - z = -5z$, lo que significa que, si la rana volvió a su misma fila, su posición en la fila cambió en un múltiplo de 5. Para ver que todas estas casillas son alcanzables, basta ver que con los movimientos 1, 4 y 1 se mueve 5 casillas a la derecha y con los movimientos 2, 3 y 2 se mueve 5 casillas a la izquierda.

Ahora, si $x + 2z = 1$ tenemos que $2x - z = 2 - 5z$, por lo que, si subimos una fila, la congruencia de la posición vertical aumentó en 2. Si consideramos 5 filas consecutivas, donde la congruencia de la posición vertical en la última fila es r, en las siguientes filas podrá llegar a las posiciones $r + 2$, $r + 4$, $r + 1$ y $r + 3$, respectivamente. Por lo que en 5 filas consecutivas la rana roja está en cada una de las congruencias módulo 5. Notemos que hay tres columnas congruentes a 1 módulo 5 y dos de las otras cuatro congruencias módulo 5. Entonces, si nos tomamos las 10 primeras filas, la rana roja puede llegar a $2 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 22$ casillas y en la otra fila llega al menos a 2, por lo que cualquier rana roja puede llegar a al menos 24 casillas.

Análogamente, la rana verde tampoco cambia de congruencia en la misma fila y al subir su congruencia disminuye en 2, por lo que de la misma manera en 5 filas consecutivas está exactamente una vez en cada congruencia y puede llegar a al menos 24 casillas.

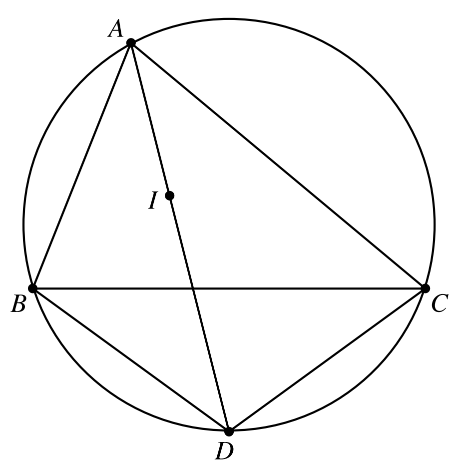
Entonces, si tenemos 6 ranas, éstas llegan al menos a $6 \cdot 24 = 144$ casillas y como el tablero sólo tiene 121 casillas, por el principio de las casillas hay al menos una casilla a la que pueden llegar dos ranas.

b) Notemos que la congruencia de una rana en dos filas a distancia 5 es la misma. También que una rana roja y otra verde se encuentran siempre y exactamente en una fila por cada 5 filas consecutivas. Esto pasa por lo siguiente: consideramos 5 filas consecutivas, donde la congruencia de la rana roja en la última fila es r y de la verde v, entonces las congruencias de la roja en las demás filas son $r+2$, $r+4$, $r+1$, $r+3$ y las de la verde v, $v+3$, $v+1$, $v+4$, $v+2$ en ese orden. Y siempre sucede que exactamente una de las siguientes congruencias es cierta: $r \equiv v$, $r+2 \equiv v+3$, $r+4 \equiv v+1$, $r+1 \equiv v+4$, $r+3 \equiv v+2$, todas ellas módulo 5 y se demuestra el resultado.
Entonces, tenemos que en 11 filas las ranas se pueden encontrar en 2 filas o en 3 y que las congruencias en las que se encuentran son la misma. Por lo tanto, se pueden encontrar en $2 \cdot 2$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 2$ o $3 \cdot 3$ casillas, por lo que $k = 4$, 6 o 9.

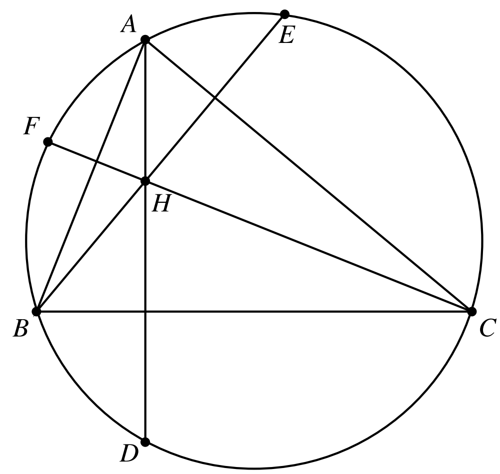
Problema 6. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente; la recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

(Sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

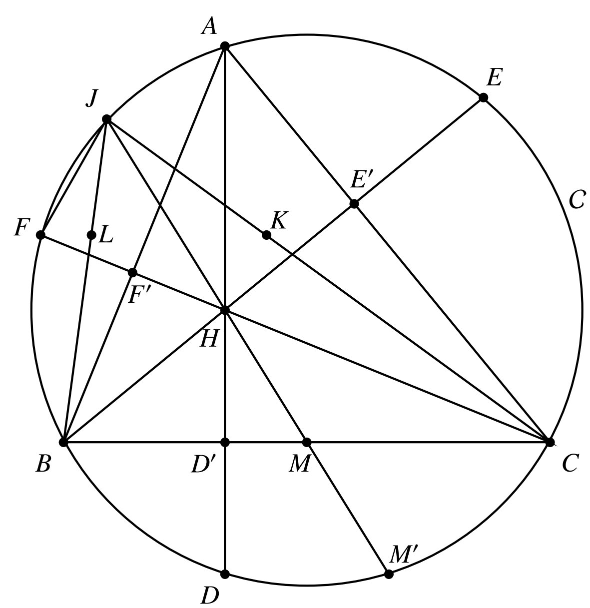
Solución de José Alberto De la Paz Espinosa. Primero recordemos el siguiente resultado. En todo triángulo ABC si I es su incentro y D es la otra intersección de la bisectriz por A con el circuncírculo del triángulo, se tiene que D es el circuncentro del triángulo BIC.



Otro resultado que usaremos es que en cualquier triángulo ABC el reflejado del ortocentro H sobre cada uno de los lados está sobre el circuncírculo. Por ejemplo, en el siguiente dibujo se tiene que las reflexiones de H sobre BC, CA y AB son D, E y F, respectivamente.



El otro resultado que usaremos es que la circunferencia de los 9 puntos[5] y el circuncírculo del triángulo son homotéticos[6] desde el ortocentro H. Sean D', E' y F' los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente y sea M' la otra intersección de la recta HM con el circuncírculo $\mathcal{C}$.



[5] Ver en el apéndice el teorema 27.
[6] Ver en el apéndice la definición 22.

Como H es el ortocentro, tenemos que $\angle FCB = \angle BCD$, por lo que B está en el punto medio del arco $\widehat{FD}$. Sabemos que la bisectriz interna del $\angle FJD$ pasa por el incentro del triángulo FJD (que es L) y por el punto medio del arco $\widehat{FD}$. Luego, los puntos J, L y B son colineales. Análogamente los puntos J, K y C son colineales.
Como L es el incentro del triángulo FJD tenemos que $BF = BL = BD$. Como K es el incentro del triángulo DEJ tenemos que $CE = CK = CD$. Además, como H es el ortocentro, $BH = BD$ y $CH = CD$, de donde $BL = BH$ y $CH = CK$.
Por ángulos inscritos tenemos que los triángulos JBH y $EM'H$ son semejantes. También lo son los triángulos JCH y $FM'H$. Luego

$$\frac{\frac{JB}{LB}}{\frac{JC}{KC}} = \frac{\frac{JB}{BH}}{\frac{JC}{CH}} = \frac{\frac{EM'}{M'H}}{\frac{FM'}{M'H}} = \frac{EM'}{FM'}.$$

Como la circunferencia de los 9 puntos y el circuncírculo C son homotéticos desde H y las rectas HF', HM y HE' intersectan a C en los puntos F, M' y E', tenemos que los triángulos $F'ME'$ y $FM'E$ son semejantes. Luego,

$$\frac{\frac{JB}{LB}}{\frac{JC}{KC}} = \frac{EM'}{FM'} = \frac{E'M}{F'M}.$$

Como $\angle BF'C = \angle BE'C = 90°$, la circunferencia con centro BC pasa por E' y F'. Como su centro es M se tiene que $ME' = MF'$, de donde

$$\frac{\frac{JB}{LB}}{\frac{JC}{KC}} = \frac{E'M}{F'M} = 1.$$

Luego, $\frac{JB}{LB} = \frac{JC}{KC}$ lo cual implica, por el Teorema de Thales, que LK es paralela a BC.

Olimpiadas Internacionales

American Mathematics Competition (AMC 10)

El examen AMC 10 es uno de los primeros exámenes de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos. A diferencia de muchos otros exámenes, en cada problema hay que elegir como respuesta uno de los incisos y no se pide justificación alguna. En años anteriores se ha permitido la participación de un equipo mexicano en este examen y lo presentaban los ganadores del primer lugar nacional durante el entrenamiento nacional de enero. A pesar de que este año México no presentó dicho examen, presentamos los problemas del examen AMC 10, pues los consideramos adecuados para entrenar.

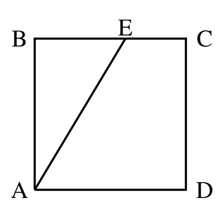
Problema 1. Un servicio de taxi cuesta \$1.50 más \$0.25 por milla recorrida. ¿Cuánto cuesta un servicio de taxi de 5 millas?

(a) \$2.25 (b) \$2.50 (c) \$2.75 (d) \$3.00 (e) \$3.25

Problema 2. Alicia está haciendo galletas y necesita $2\frac{1}{2}$ tazas de azúcar. Desafortunadamente, en la taza medidora que utiliza únicamente cabe $\frac{1}{4}$ de taza de azúcar. ¿Cuántas veces debe llenar Alicia esa taza medidora para obtener la cantidad correcta de azúcar?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) 20

Problema 3. Los lados del cuadrado $ABCD$ tienen longitud 10. El punto E está sobre el lado BC, y el área del triángulo ABE es 40. ¿Cuál es la longitud de BE?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 4. Un equipo de softbol jugó diez partidos, obteniendo $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ y 10 carreras. Dicho equipo perdió por una carrera en exactamente cinco partidos. En cada uno de los otros partidos, el equipo obtuvo exactamente el doble de carreras que su oponente. ¿Cuántas carreras en total obtuvieron sus oponentes?

(a) 35 (b) 40 (c) 45 (d) 50 (e) 55

Problema 5. Tom, Dorothy y Sammy hicieron un viaje de vacaciones y acordaron compartir los gastos en partes iguales. Durante el viaje Tom gastó \$105, Dorothy gastó \$125 y Sammy gastó \$175. Para repartir los gastos igualitariamente, Tom le dió t dólares a Sammy y Dorothy le dió d dólares a Sammy. ¿A qué es igual $t - d$?

(a) \$15 (b) \$20 (c) \$25 (d) \$30 (e) \$35

Problema 6. Joey y sus cinco hermanos tienen $3, 5, 7, 9, 11$ y 13 años de edad. Una tarde dos de sus hermanos cuyas edades suman 16 años fueron al cine, dos hermanos menores de 10 fueron a jugar beisbol, y Joey y su hermano de 5 años se quedaron en casa. ¿Cuántos años tiene Joey?

(a) 3 (b) 7 (c) 9 (d) 11 (e) 13

Problema 7. Un estudiante debe elegir cuatro cursos entre Inglés, Álgebra, Geometría, Historia, Arte y Latín. Entre los elegidos debe estar Inglés y al menos un curso de matemáticas. ¿De cuántas maneras puede hacer la elección?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 16

Problema 8. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{2^{2014} + 2^{2012}}{2^{2014} - 2^{2012}}$?

(a) -1 (b) 1 (c) $\frac{5}{3}$ (d) 2013 (e) 2^{4024}

Problema 9. En un juego reciente de baloncesto, Shenille hizo únicamente lanzamientos de tres y de dos puntos. Ella logró encestar en 20 % de sus lanzamientos de tres puntos y en 30 % de sus lanzamientos de dos puntos. Shenille hizo 30 lanzamientos. ¿Cuántos puntos acumuló?

(a) 12 (b) 18 (c) 24 (d) 30 (e) 36

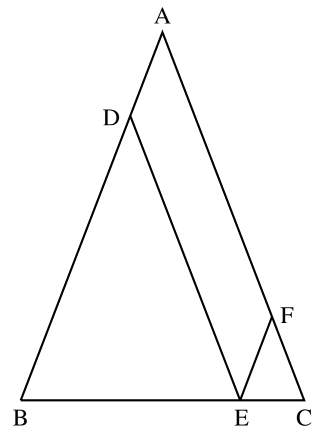
Problema 10. Un ramo de flores contiene rosas rosadas, rosas rojas, claveles rosados y claveles rojos. Un tercio de las flores rosadas son rosas, tres cuartos de las flores rojas son claveles y seis décimos de las flores son rosadas. ¿Qué porcentaje de las flores son claveles?

(a) 15 (b) 30 (c) 40 (d) 60 (e) 70

Problema 11. Un consejo estudiantil debe seleccionar entre sus miembros a un comité de bienvenida de dos personas y a un comité de planeación de tres personas. Hay exactamente 10 maneras de seleccionar el equipo de dos personas para el comité de bienvenida. Es posible que haya estudiantes que estén en ambos comités. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar el comité de planeación de tres personas?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 25

Problema 12. En un triángulo ABC, $AB = AC = 28$ y $BC = 20$. Los puntos D, E y F yacen en los lados AB, BC y AC, respectivamente, de tal manera que DE y EF son paralelos a AC y a AB, respectivamente. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo $ADEF$?



(a) 48 (b) 52 (c) 56 (d) 60 (e) 72

Problema 13. ¿Cuántos números de tres dígitos que no son divisibles por 5, tienen dígitos que suman menos que 20 y tienen el primer dígito igual al tercer dígito?

(a) 52 (b) 60 (c) 66 (d) 68 (e) 70

Problema 14. Se quita un cubo sólido con arista de longitud 1 de cada esquina de un cubo sólido con arista de longitud 3. ¿Cuántas aristas tiene el sólido resultante?

(a) 36 (b) 60 (c) 72 (d) 84 (e) 108

Problema 15. Dos lados de un triángulo tienen longitudes 10 y 15. La longitud de la altura al tercer lado es la media aritmética de las longitudes de las alturas a los dos lados dados. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 18

Problema 16. Se refleja un triángulo con vértices $(6, 5)$, $(8, -3)$ y $(9, 1)$ alrededor de la recta $x = 8$ para formar un segundo triángulo. ¿Cuál es el área de la figura formada por los dos triángulos?

(a) 9 (b) $\frac{28}{3}$ (c) 10 (d) $\frac{31}{3}$ (e) $\frac{32}{3}$

Problema 17. Daphne recibe periódicamente la visita de sus tres mejores amigas: Alice, Bety y Claire. Alice la visita cada tercer día, Bety cada cuarto día y Claire cada quinto día. Las tres visitaron a Daphne ayer. ¿En cuántos días del siguiente periodo de 365 días visitarán a Daphne exactamente dos de sus amigas?

(a) 48 (b) 54 (c) 60 (d) 66 (e) 72

Problema 18. Consideremos los puntos $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$, $C = (3, 3)$ y $D = (4, 0)$. Una recta que pasa por A corta al cuadrilátero $ABCD$ en pedazos de igual área. Esta recta intersecta a CD en el punto $(\frac{p}{q}, \frac{r}{s})$, donde estas fracciones están simplificadas. ¿Cuál es el valor de $p + q + r + s$?

(a) 54 (b) 58 (c) 62 (d) 70 (e) 75

Problema 19. En base 10 el número 2013 termina en el dígito 3. Por otro lado, en base 9, el mismo número se escribe como $(2676)_9$ y termina en el dígito 6. ¿Para cuántos enteros positivos b sucede que la representación en base b de 2013 termina en el dígito 3?

(a) 6 (b) 9 (c) 13 (d) 16 (e) 18

Problema 20. Se rota un cuadrado unitario por un ángulo de 45° alrededor de su centro. ¿Cuál es el área de la región barrida por el interior del cuadrado?

(a) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ (c) $2 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}$ (e) $1 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{8}$

Problema 21. Un grupo de 12 piratas acuerda repartir un cofre de monedas de oro entre ellos como sigue. El pirata k-ésimo, en su turno, toma $\frac{k}{12}$ de las monedas que permanezcan en su cofre. El número de monedas que están en el cofre es el más pequeño para el cual este arreglo permite que cada pirata reciba un número entero de monedas. ¿Cuántas monedas recibe el pirata 12-ésimo?

(a) 720 (b) 1296 (c) 1728 (d) 1925 (e) 3850

Problema 22. Seis esferas de radio 1 están ubicadas de tal manera que sus centros están en los vértices de un hexágono regular de lado de longitud 2. Las seis esferas son tangentes internamente a una esfera más grande cuyo centro está en el centro del hexágono. Una octava esfera es tangente exteriormente a las seis esferas más pequeñas y tangente interiormente a la esfera más grande. ¿Cuál es el radio de la octava esfera?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 2

Problema 23. En un triángulo ABC, $AB = 86$ y $AC = 97$. Un círculo con centro A y radio AB intersecta a BC en los puntos B y X. Además BX y CX tienen longitudes enteras. ¿Cuánto mide BC?

(a) 11 (b) 28 (c) 33 (d) 61 (e) 72

Problema 24. La Escuela Central High está compitiendo contra la Escuela Northern High en un torneo de backgammon. Cada escuela tiene tres competidores y las reglas del torneo requieren que cada competidor juegue dos partidos contra cada uno de los competidores de la otra escuela. El torneo tiene lugar en seis rondas, jugándose tres partidos de manera simultánea en cada ronda. ¿De cuántas maneras distintas se puede programar el torneo?

(a) 540 (b) 600 (c) 720 (d) 810 (e) 900

Problema 25. Se dibujan todas las diagonales en un octágono regular, 20 en total. ¿En cuántos puntos distintos en el interior del octágono (no en el borde) se intersectan dos o más diagonales?

(a) 49 (b) 65 (c) 70 (d) 96 (e) 128

XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1991, los ganadores del Concurso Nacional participan anualmente en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, APMO, por sus siglas en inglés. A diferencia de otros exámenes de olimpiadas, éste consiste en un único examen con 5 problemas para resolver en un máximo de 4 horas.
En el mes de marzo, se aplicó el examen de la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos que en ese momento formaban parte de la preselección nacional. Dicho examen se aplicó y calificó en México y los 10 mejores exámenes se enviaron a Kazajistán para ser evaluados por el comité organizador. Los resultados de dicho concurso se publicarán en el próximo número de Tzaloa, junto con las mejores soluciones de los participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con alturas AD, BE y CF, y sea O el centro del circuncírculo de ABC. Muestre que los segmentos OA, OF, OB, OD, OC, OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos, en donde cada par de triángulos tienen la misma área.

Problema 2. Determine todos los enteros positivos n que cumplen que $\dfrac{n^2+1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 + 2}$ es un entero. (*Aquí* $\lfloor r \rfloor$ *denota el mayor entero menor o igual a* r.)

Problema 3. Para $2k$ números reales $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$ se define la sucesión de números X_n por

$$X_n = \sum_{i=1}^{k} \lfloor a_i n + b_i \rfloor, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si la sucesión X_n forma una progresión aritmética, muestre que la suma $\sum_{i=1}^{k} a_i$ debe ser un entero.
Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a r.

Problema 4. Sean a y b enteros positivos, y sean A y B conjuntos finitos de enteros que satisfacen:

1. A y B son ajenos,
2. si un entero i pertenece a A o a B, entonces o bien $i + a$ pertenece a A o bien $i - b$ pertenece a B.

Muestre que $a\,|A| = b\,|B|$.
Aquí $|X|$ denota el número de elementos del conjunto X.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω, y sea P un punto sobre la extensión de AC de manera que PB y PD son tangentes a ω. La tangente en C interseca a PD en Q y a la recta AD en R. Sea E el segundo punto de intersección de AQ con ω. Muestre que B, E y R son colineales.

Problemas y Soluciones de Olimpiadas Internacionales

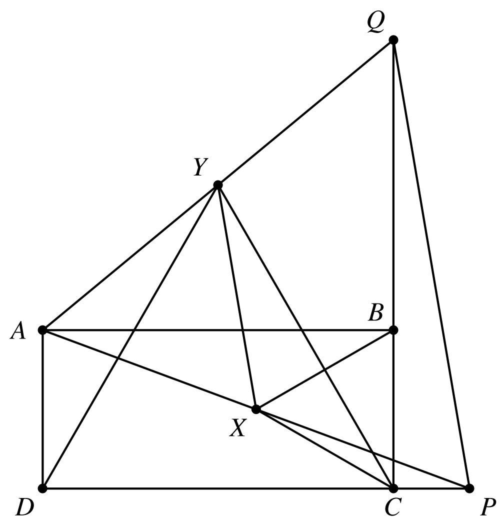
XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

La XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se realizó del 29 de septiembre al 6 de octubre, en Cochabamba, Bolivia. Los alumnos que concursaron fueron: Adán Medrano Martín del Campo y Juan Carlos Ortiz Rhoton, ambos de Jalisco, Enrique Chiu Han del Distrito Federal y Julio César Díaz Calderón de Oaxaca. Julio César obtuvo una medalla de plata y Adán, Juan Carlos y Enrique obtuvieron cada uno una medalla de bronce. En esta ocasión México ocupó el sexto lugar de entre los 19 países que participaron. En esta competencia dos de los seis problemas fueron inventados por mexicanos: el segundo por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval y el quinto por Eduardo Velasco Barreras.

A continuación presentamos los problemas y sus soluciones de la XXVII Olimpiada Iberoamericana. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $ABCD$ un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas AX y CD se cortan en P, y las rectas AY y BC se cortan en Q. Probar que el triángulo APQ es equilátero.

Solución de Enrique Chiu Han. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $AB \geq BC$. El punto X está en la mediatriz del segmento BC ya que $XB = XC$ por ser equilátero el triángulo BCX. Como $ABCD$ es un rectángulo, lo anterior implica que X también está en la mediatriz de DA. Se sigue que X es circuncentro del triángulo rectángulo APD por estar sobre la hipotenusa y en la mediatriz de un cateto; en particular $AX = XP$. Procediendo de manera análoga se concluye que $AY = YQ$, por lo tanto los triángulos AXY y APQ son semejantes por el criterio LAL.



Para concluir la solución, probaremos que el triángulo AXY es equilátero. Notemos que $\angle CDY = 60^\circ = \angle XBC$ porque estos son ángulos internos de los triángulos equiláteros DCY y BCX, respectivamente; también se tiene que $\angle CDA = \angle ABC = 90^\circ$, de modo que $\angle YDA = \angle ABX = 30^\circ$. Por otra parte, $DA = BC = BX$ y $DY = DC = BA$, así que los triángulos ADY y XBA son congruentes por el criterio LAL, y en consecuencia $AX = AY$. Denotemos $\alpha = \angle AYD = \angle XAB$. Por la suma de ángulos en el triángulo ADY, tenemos que $\angle YAD = 150^\circ - \alpha$, de donde

$$\angle YAB = \angle YAD - \angle BAD = (150^\circ - \alpha) - 90^\circ = 60^\circ - \alpha.$$

Por lo tanto, $\angle XAY = \angle BAX + \angle YAB = 60^\circ$ y con esto termina la solución.

Problema 2. Decimos que un entero positivo es *brillante* si puede ser escrito como la suma de dos enteros no necesariamente distintos a y b con la misma suma de dígitos. Por ejemplo, 2012 es brillante ya que $2012 = 2005 + 7$ y 2005 y 7 tienen la misma suma de dígitos. Determinar todos los enteros positivos que no son brillantes.

Solución de Julio César Díaz Calderón. Para cada entero positivo x, sea $S(x)$ la suma de sus dígitos. Demostremos que

$$x_1 = x999\cdots9$$

con x un dígito par y tal que hay una cantidad impar de nueves y

$$x_2 = x999\cdots9$$

con x un dígito impar y tal que hay una cantidad par de nueves, no son brillantes.
Comencemos con x_1. Sea s la cantidad de nueves que tiene (dicha cantidad es impar). Supongamos que x_1 es brillante, luego,

$$x_1 = a_k a_{k-1}\cdots a_1 + b_r b_{r-1}\cdots b_1$$

donde los a_i y los b_i son dígitos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_r$. Como estos suman x_1, se tiene que $a_1 + b_1 \equiv 9 \pmod{10}$, además, como son dígitos, $a_1 + b_1 \leq 9 + 9 = 18 < 19$, de donde $a_1 + b_1 = 9$. De la misma manera llegamos a que $a_2 + b_2 = 9$, $a_3 + b_3 = 9, \ldots, a_s + b_s = 9$. En particular, hemos demostrado que a_i y b_i tienen distinta paridad para $1 \leq i \leq s$ (algunos de estos podrían ser 0). Ahora, $a_{s+1} + b_{s+1} = x$, el cual es par, de donde a_{s+1} y b_{s+1} tienen la misma paridad.
Como s es impar, el número de dígitos impares del conjunto $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_r\}$ es impar y $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b_1 + b_2 + \cdots + b_r$ es impar. Por otro lado, $a_1 + a_2 + \cdots + a_k + b_1 + b_2 + \cdots + b_r = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ el cual es par. Esto es una contradicción y x_1 no es brillante.
De una manera muy parecida se demuestra que x_2 no es brillante. Ahora demostraremos que todos los demás números son brillantes. Procederemos con inducción fuerte sobre el número de dígitos de z, un número que no es de la forma x_1 o x_2.
La base de inducción es que z tiene un dígito. Si z fuera impar, sería de la forma x_2 (con cero nueves). Luego, z es par, $z = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}$, $S(\frac{z}{2}) = S(\frac{z}{2})$ y z es brillante. La hipótesis de inducción es que si z tiene entre 1 y k dígitos y no es de la forma x_1 o x_2, entonces z es brillante.
Sea $z = a_1a_2 \ldots a_{k+1}$ y tal que no es de la forma x_1 o x_2. Consideremos varios casos:

1. Si a_{k+1} es par, $z = \frac{z}{2} + \frac{z}{2}$, $S(\frac{z}{2}) = S(\frac{z}{2})$ y z es brillante.

2. Si a_{k+1} es impar, consideramos dos casos:

   a) a_k es impar. Si $a_1a_2 \ldots a_{k-1}$ no es de la forma x_1 o x_2, por la hipótesis de inducción, existen enteros z_1 y z_2 tales que $a_1a_2 \ldots a_k = z_1 + z_2$ y $S(z_1) = S(z_2)$. Definimos

   $$\begin{aligned} z_1' &= 100z_1 + 10\left(\frac{a_k - 1}{2}\right) + \left(\frac{a_{k+1} + 1}{2}\right), \\ z_2' &= 100z_2 + 10\left(\frac{a_k + 1}{2}\right) + \left(\frac{a_{k+1} - 1}{2}\right). \end{aligned}$$

   Se tiene que $z_1' + z_2' = 100(z_1 + z_2) + 10a_k + a_{k+1} = a_1a_2 \ldots a_ka_{k+1} = z$. Además

   $$S(z_1') = S(z_1) + \frac{a_k - 1}{2} + \frac{a_{k+1} + 1}{2} = S(z_2) + \frac{a_k + 1}{2} + \frac{a_{k+1} - 1}{2} = S(z_2')$$

   y z es brillante.
   Por otro lado, si $a_1a_2 \ldots a_{k-1}$ es de la forma x_1 o x_2, tenemos que a_k y a_{k+1} no son ambos nueves (de otra forma, z sería de la forma x_1 o x_2). Consideramos, nuevamente, dos casos:

   - a_k no es 9. Si $a_1a_2 \ldots a_{k-1}$ es de la forma x_1 consideramos

   $$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{x}{2}\right) 4545 \ldots 454 \left(\frac{10 + a_k - 1}{2}\right) \left(\frac{a_{k+1} + 1}{2}\right), \\ z_2 &= \left(\frac{x}{2}\right) 5454 \ldots 544 \left(\frac{10 + a_k + 1}{2}\right) \left(\frac{a_{k+1} - 1}{2}\right), \end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones requeridas.

Por otro lado, si $a_1a_2\ldots a_{k-1}$ es de la forma x_2 consideramos

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{x+1}{2}\right)4545\ldots4544\left(\frac{10+a_k-1}{2}\right)\left(\frac{a_{k+1}+1}{2}\right),\\ z_2 &= \left(\frac{x-1}{2}\right)5454\ldots5454\left(\frac{10+a_k+1}{2}\right)\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones requeridas.

- a_k es 9 y a_{k+1} no es 9. Si $a_1a_2\ldots a_{k-1}$ es de la forma x_1 consideramos

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{x}{2}\right)4545\ldots4544\left(\frac{10+a_{k+1}+1}{2}\right),\\ z_2 &= \left(\frac{x}{2}\right)5454\ldots5454\left(\frac{10+a_{k+1}-1}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones requeridas.

Por otro lado, si $a_1a_2\ldots a_{k-1}$ es de la forma x_2 consideramos

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{x+1}{2}\right)4545\ldots454\left(\frac{10+a_{k+1}-1}{2}\right),\\ z_2 &= \left(\frac{x-1}{2}\right)5454\ldots544\left(\frac{10+a_{k+1}+1}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones requeridas.

b) a_k es par. Si $k=1$, z tiene dos dígitos. En este caso elegimos

$$\begin{aligned} z_1 &= 10\left(\frac{a_k-2}{2}\right)+\left(\frac{11+a_{k+1}}{2}\right),\\ z_2 &= 10\left(\frac{a_k}{2}\right)+\left(\frac{9+a_{k+1}}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones. Ahora, consideremos que a_{k-1} existe (es decir, $k\geq 2$).

Si $a_1a_2\ldots a_{k-2}$ (podría ser cero) no es de la forma x_1 o x_2, existen enteros positivo z_1, z_2 tales que $z_1+z_2=a_1a_2\ldots a_{k-2}$ y $S(z_1)=S(z_2)$.

Si a_{k-1} es par, consideramos

$$\begin{aligned} z_1' &= 1000z_1+100\left(\frac{a_{k-1}}{2}\right)+10\left(\frac{10+a_k}{2}\right)+\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),\\ z_2' &= 1000z_2+100\left(\frac{a_{k-1}-2}{2}\right)+10\left(\frac{10+a_k}{2}\right)+\left(\frac{a_{k+1}+1}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones. Por otro lado, si a_{k-1} es impar,

$$\begin{aligned} z_1' &= 1000z_1+100\left(\frac{a_{k-1}-1}{2}\right)+10\left(\frac{a_k}{2}\right)+\left(\frac{a_{k+1}+1}{2}\right),\\ z_2' &= 1000z_2+100\left(\frac{a_{k-1}+1}{2}\right)+10\left(\frac{a_k}{2}\right)+\left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),\end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones.

Ahora, si $a_1a_2\dots a_{k-2}$ es de la forma x_1 o x_2. Si a_{k-1} es impar, el proceso es el mismo que en el caso donde a_{k+1} y a_k eran impares, solo que en este caso, z_1 y z_2 tendrán a $\frac{a_k}{2}$ en sus decenas.

Por último, si $a_1a_2\dots a_{k-2}$ es de la forma x_1 o x_2 y a_{k-1} es par. Sea $w = a_1a_2\dots a_{k-2}$. Como es de la forma x_1 o x_2, entonces es impar. Luego, elegimos

$$z_1 = 1000\left(\frac{w-1}{2}\right) + 100\left(\frac{10+a_{k-1}}{2}\right) + 10\left(\frac{10+a_k}{2}\right) + \left(\frac{a_{k+1}-1}{2}\right),$$

$$z_2 = 1000\left(\frac{w-1}{2}\right) + 100\left(\frac{8+a_{k-1}}{2}\right) + 10\left(\frac{10+a_k}{2}\right) + \left(\frac{a_{k+1}+1}{2}\right),$$

que cumplen las condiciones. Esto concluye la inducción.

Problema 3. Sea n un entero positivo. Dado un conjunto de enteros $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, donde $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ para todo i, asociamos a cada uno de sus subconjuntos la suma de sus elementos; en el caso particular del conjunto vacío dicha suma es 0. Decimos que $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es n-completo si todas estas sumas son diferentes módulo 2^n. Determinar el número de conjuntos n-completos en función de n.

Solución. La mejor manera de resolver este problema es checando primero casos pequeños, por ejemplo $n = 3$, el cual debería darnos suficiente información para establecer una conjetura razonable. Aún si no visualizamos un patrón, podemos conjeturar que o bien

1. 2^{n-1} siempre pertenece al conjunto, o
2. siempre hay exactamente un número impar en el conjunto.

La siguiente solución, basada en el punto 1, es la que hicieron la mayor parte de los participantes que resolvieron el problema. Después daremos una segunda solución basada en el punto 2.

Demostraremos primero el siguiente resultado.

Lema. *Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es un conjunto n-completo, entonces $2^{n-1} \in A$.*

Prueba. Consideremos el polinomio $p(x) = (1 + x^{a_1})(1 + x^{a_2})\cdots(1 + x^{a_n})$. Es claro que si $s_1, s_2, \dots, s_{2^n}$ son todas las posibles sumas de los subconjuntos de A, entonces $p(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + \cdots + x^{s_{2^n}}$. Luego, si los s_k son todos distintos módulo 2^n, tenemos que $p(\omega) = 0$, donde $\omega = e^{2\pi i/2^n}$ es el número complejo $\cos(\frac{2\pi}{2^n}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{2\pi}{2^n})$. Esto significa que $p(\omega) = (1 + \omega^{a_1})(1 + \omega^{a_2})\cdots(1 + \omega^{a_n}) = 0$, lo cual implica que existe j tal que $1 + \omega^{a_j} = 0$. Sustituyendo ω, llegamos a que $e^{2\pi i a_j/2^n} = -1$, es decir, $\cos(\frac{2\pi a_j}{2^n}) = -1$. Luego, $\frac{a_j}{2^{n-1}}$ debe ser un entero impar y como $0 \leq a_j < 2^n$, se sigue que $2^{n-1} \leq a_j < 2^n$, de donde $a_j = 2^{n-1}$ lo que significa que 2^{n-1} pertenece al conjunto A.

Ahora, sea $f(n)$ el número de conjuntos n-completos. Demostraremos que $f(n) = 2^{n(n-1)/2}$ por inducción fuerte[7] en n. El caso base $n = 1$ es inmediato ya que el único conjunto 1-completo es $\{1\}$, así que supondremos que el resultado es cierto para todo $k < n$. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto n-completo. Por el lema anterior tenemos que $A = \{2^{n-1}\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, y si A es n-completo, entonces $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ debe ser $(n-1)$-completo, pues en caso contrario existirían dos subconjuntos de A distintos, digamos A_1 y A_2 tales que

$$s(A_1) \equiv s(A_2) \pmod{2^{n-1}},$$

donde $s(X)$ denota la suma de los elementos de X.
Pero entonces, o bien $A_1 \equiv A_2 \pmod{2^n}$, lo que es una contradicción, o bien $A_1 \equiv A_2 + 2^{n-1} \pmod{2^n}$, que también es una contradicción ya que tendríamos $s(A_1 \cup \{2^{n-1}\}) \equiv s(A_2) \pmod{2^n}$ (abusando de la notación, $A_1 \equiv A_2 \pmod{2^n}$ significa que los elementos de A_1 son congruentes módulo 2^n con los elementos de A_2 en algún orden).
Por lo tanto, para algún conjunto $(n-1)$-completo $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ debemos tener que los elementos del conjunto $A \setminus \{2^{n-1}\}$ son congruentes módulo 2^{n-1} con los elementos del conjunto B en algún orden. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_i \equiv b_i \pmod{2^{n-1}}$. Ya que $0 \leq a_i \leq 2^n - 1$ y $0 \leq b_i \leq 2^{n-1} - 1$, debemos tener que $a_i = b_i$ o $a_i = b_i + 2^{n-1}$.
Demostraremos que cada conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tal que $a_n = 2^{n-1}$ y $a_i = b_i$ o $a_i = b_i + 2^{n-1}$ para $1 \leq i \leq n-1$, es n-completo, donde $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}\}$ es un conjunto $(n-1)$-completo. Supongamos que esto no es así. Entonces, existen dos subconjuntos de A tales que sus elementos tienen los mismos residuos cuando se dividen entre 2^n, y por lo tanto también tienen los mismos residuos cuando se dividen entre 2^{n-1}. Una vez que $a_n = 2^{n-1}$, podemos suponer que este elemento no está en cualquiera de los dos conjuntos. Esto implica que B no es un conjunto $(n-1)$-completo.
Por lo tanto, todas las sumas de los subconjuntos de $A \setminus \{2^{n-1}\}$ son distintas módulo 2^{n-1}, lo que significa que todas las sumas de los subconjuntos de A son distintas módulo 2^n, y por lo tanto A es un conjunto n-completo.
De esta manera todos los conjuntos n-completos se forman sumando 2^{n-1} a cada elemento de un conjunto $(n-1)$-completo o no, y agregando 2^{n-1}.
Entonces, por cada conjunto $(n-1)$-completo tenemos 2^{n-1} conjuntos n-completos. Luego, si $f(n-1) = 2^{(n-1)(n-2)/2}$ es el número de conjuntos $(n-1)$-completos, tenemos que

$$f(n) = 2^{n-1} f(n-1) = 2^{n-1} \cdot 2^{(n-1)(n-2)/2} = 2^{n(n-1)/2}.$$

A continuación daremos una solución basada en el punto 2. Al igual que en la solución anterior, haremos la demostración por inducción[8] en n. El caso $n = 1$ es inmediato. Supongamos que el resultado se cumple para algún $n \geq 1$ y haremos la prueba para $n + 1$. En lo que sigue todas las sumas se consideran módulo 2^{n+1}. Sea

[7] Ver en el apéndice el teorema 8.
[8] Ver en el apéndice el teorema 7.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ un conjunto $(n+1)$-completo. Observemos primero que alguno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ es impar, pues alguna suma de la forma $\sum a_i$ debe ser congruente a 1 módulo 2^{n+1}. Sin pérdida de generalidad, supongamos que a_{n+1} es impar. Sea $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y sea S el conjunto de todas las sumas de los elementos de los subconjuntos de B. Sea

$$T = \{s + a_{n+1} \mid s \in S\}.$$

Observemos que las sumas de los elementos de los subconjuntos de A son exactamente aquellas en $S \cup T$, y que S y T no tienen elementos en común.
Ya que a_{n+1} es primo relativo con 2^{n+1}, tenemos que

$$\{0, 1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1\} \equiv \{0, a_{n+1}, 2a_{n+1}, \ldots, (2^{n+1} - 1)a_{n+1}\} \pmod{2^{n+1}}.$$

Ahora $0 \in S$ y $a_{n+1} \in T$. Supongamos que $2a_{n+1} \in T$. Entonces, borrando el término a_{n+1} de esta suma en T obtenemos que $2a_{n+1} - a_{n+1} = a_{n+1}$ está en S, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $2a_{n+1} \in S$. Ahora, sumando a_{n+1} a esta suma, se sigue que $2a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_{n+1}$ pertenece a T. De manera similar se demuestra que $4a_{n+1}$ está en S. Continuando de esta manera, deducimos que S consiste exactamente de todas aquellas sumas de la forma ma_{n+1} donde m es par, $0 \le m \le 2^{n+1} - 1$, y T consiste exactamente de todas aquellas sumas de la forma ma_{n+1} donde m es impar, $0 \le m \le 2^{n+1} - 1$. Pero es claro que

$$\{0, 2a_{n+1}, 4a_{n+1}, \ldots, (2^{n+1} - 2)a_{n+1}\} \equiv \{0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2\} \pmod{2^{n+1}}$$

y también

$$\{1, 3a_{n+1}, 5a_{n+1}, \ldots, (2^{n+1} - 1)a_{n+1}\} \equiv \{1, 3, 5, \ldots, 2^{n+1} - 1\} \pmod{2^{n+1}}.$$

Por lo tanto, tenemos que $S = \{0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$ y $T = \{1, 3, 5, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. En particular, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ deben ser todos pares. De este modo, si consideramos los números $a'_i = \frac{a_i}{2}$, $1 \le i \le n$, entonces el conjunto $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ es n-completo (observe que $a'_i = \frac{a_i}{2} \le \frac{2^{n+1}-2}{2} = 2^n - 1$ para todo i), y sus subconjuntos tienen sumas $\{\frac{0}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{2}, \ldots, \frac{2^{n+1}-2}{2}\} = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ módulo 2^n.
Además, si el conjunto $\{a'_1, a'_2, \ldots, a'_n\}$ es n-completo y a_{n+1} es impar, con $0 \le a_{n+1} \le 2^{n+1} - 1$, entonces se sigue fácilmente que $S = \{0, 2, 4, \ldots, 2^{n+1} - 2\}$ y en consecuencia $T = \{1, 3, 5, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$, de donde $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ es $(n+1)$-completo (observe que $2a'_i \le 2(2^n - 1) = 2^{n+1} - 2$ para todo i).
Ya que hay exactamente $2^{n(n-1)/2}$ conjuntos n-completos por la hipótesis de inducción, y hay exactamente 2^n formas de elegir a_{n+1} el cual es un número impar entre 0 y $2^{n+1} - 1$ inclusive (y es distinto de los restantes a_i por ser impar), se sigue que hay exactamente $2^{n(n-1)/2} \cdot 2^n = 2^{n(n+1)/2}$ conjuntos $(n+1)$-completos.

Comentario: Con el argumento inductivo anterior es fácil caracterizar a todos los conjuntos n-completos. Son aquellos de la forma

$$\{2m_1 + 1, 4m_2 + 2, 8m_3 + 4, \ldots, 2^n m_n + 2^{n-1}\}$$

donde $0 \le m_i < 2^{n-i}$ para $i = 1, \ldots, n$. Para cada i hay exactamente 2^{n-i} valores posibles de m, y como es claro que todos estos a_i son distintos, se sigue que hay exactamente $2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdots 2 = 2^{n(n-1)/2}$ conjuntos n-completos.

Problema 4. Sean a, b, c, d enteros tales que $a - b + c - d$ es impar y divide a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$. Probar que para todo entero positivo n, $a - b + c - d$ divide a $a^n - b^n + c^n - d^n$.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Como $a-b+c-d \mid a^2-b^2+c^2-d^2$ tenemos que $a^2+c^2 \equiv b^2+d^2 \pmod{a-b+c-d}$. También tenemos que $a-b+c-d \mid a-b+c-d$ por lo que $a + c \equiv b + d \pmod{a - b + c - d}$, luego

$$(a^2 + c^2) + 2ac \equiv (a + c)^2 \equiv (b + d)^2 \equiv (b^2 + d^2) + 2bd \pmod{a - b + c - d}$$

de donde $2ac \equiv 2bd \pmod{a - b + c - d}$. Como $a - b + c - d$ es impar, esto implica que

$$ac \equiv bd \pmod{a - b + c - d}. \tag{1}$$

Ahora, procedemos por inducción, asumiendo que la proposición es cierta para $n = m - 1$ y $n = m$, demostraremos que se cumple para $n = m + 1$. Para ello necesitamos una base de inducción doble: los casos base, $m = 1$ y $m = 2$, que son ciertos por hipótesis. Ahora, hagamos el paso inductivo.

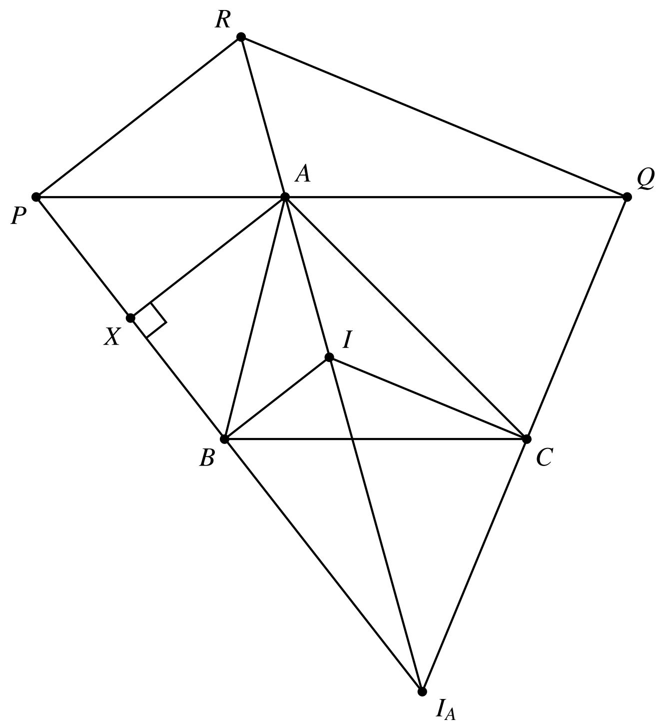
Por la hipótesis de inducción, tenemos que $a^m + c^m \equiv b^m + d^m \pmod{a - b + c - d}$ y $a^{m-1} + c^{m-1} \equiv b^{m-1} + d^{m-1} \pmod{a-b+c-d}$. Ahora, módulo $a-b+c-d$ vemos que,

$$\begin{aligned} a^{m+1} + c^{m+1} &\equiv (a^m + c^m)(a + c) - ac(a^{m-1} + c^{m-1}) \\ &\equiv (b^m + d^m)(b + d) - bd(b^{m-1} + d^{m-1}) \\ &\equiv b^{m+1} + d^{m+1} \end{aligned}$$

por (1) y la hipótesis de inducción.
Luego, $a - b + c - d \mid a^{m+1} - b^{m+1} + c^{m+1} - d^{m+1}$, lo que concluye la inducción.

Problema 5. En un triángulo ABC, sean P y Q las intersecciones de la paralela a BC por A con las bisectrices exteriores de los ángulos B y C, respectivamente. La perpendicular a BP por P y la perpendicular a CQ por Q se cortan en R. Si I es el incentro de ABC, demostrar que $AI = AR$.

Solución de Adán Medrano Martín del Campo. Primero notemos que las rectas BP y BI son perpendiculares por ser bisectriz exterior e interior, respectivamente, de $\angle ABC$, así que BI es paralela a PR. De manera similar CI es paralela a QR y, por construcción, BC es paralela a PQ. Resulta entonces que los triángulos BIC y PRQ son homotéticos por tener sus respectivos lados paralelos. Denotemos I_a al excentro de ABC correspondiente al vértice A. Por un lado sabemos, que PB, QC y AI se intersectan en I_a; por otra parte, como los triángulos BIC y PRQ son homotéticos, las rectas PB, CQ y RI son concurrentes. Entonces llegamos a que R, A, I e I_a son colineales.



Los ángulos $\angle ABP$ y $\angle CBI_a$ miden lo mismo porque PI_a es bisectriz externa de $\angle B$; también se tiene que $\angle CBI_a = \angle APB$ por las paralelas PQ y BC, por lo que se sigue que es isósceles el triángulo ABP. Consideremos el punto medio X de PB. Las rectas RP, AX e IB son paralelas por ser perpendiculares a PB. Aplicando el teorema de Thales y recordando que $XP = XB$ obtenemos

$$\frac{AR}{AI} = \frac{XP}{XB} = 1.$$

Por lo tanto, $AR = AI$.

Problema 6. Demostrar que para todo entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es divisible por la suma de sus respectivos dígitos.

Solución. Daremos una demostración constructiva. La idea es la siguiente: Dado un número natural n, elegimos n números primos mayores que n, digamos $p_1, \ldots, p_n$. Demostraremos que existe un número K divisible por cada uno de estos primos tal que cada número de la forma $K00\ldots0 + i$, $1 \leq i \leq n$, tenga suma de dígitos divisible entre p_i, respectivamente. Luego, ninguno de estos números es divisible por la suma de sus respectivos dígitos, pues si hubiera uno de ellos que fuera divisible por la suma de sus dígitos, tendríamos un i tal que p_i divide a $K00\ldots0 + i$ y por lo tanto p_i dividiría a i (pues p_i divide a K), lo cual es una contradicción.

Así que tratemos determinar el número K. Sea $P = p_1 \cdots p_n$ y consideremos el número $A = 100\ldots0100\ldots0100\ldots0$ el cual tiene dígitos 1 en las posiciones $10^{j\varphi(P)}$ donde $1 \leq j \leq P - 10$ (de hecho A tiene $P - 10$ dígitos 1). Más precisamente,

$$A = 10^{\varphi(P)} \cdot \frac{10^{(P-10)\varphi(P)} - 1}{10^{\varphi(P)} - 1},$$

donde $\varphi(P)$ denota el número de enteros positivos menores o iguales que P y que son primos relativos con P.
Denotemos por $S(m)$ a la suma de los dígitos de m. Tenemos que $S(A) = P - 10$ y $A \equiv -10 \pmod{P}$. Entonces, si consideramos el número $B = A + 10$, este número satisface que $S(B) = P - 9$ y $B = A + 10 \equiv 0 \pmod{P}$. Sea $C = BB\ldots B$ el número formado concatenando copias del número B un total de t veces para algún número natural t. Consideremos los números $10^x C + i$, $1 \leq i \leq n$, para valores grandes de x. La suma de los dígitos de cada uno de estos números es $S(10^x C + i) = S(C) + S(i) = t(P-9) + S(i)$. Por el teorema chino del residuo[9], el sistema de congruencias

$$\begin{aligned}
t(P-9) + S(1) &\equiv 0 \pmod{p_1},\\
t(P-9) + S(2) &\equiv 0 \pmod{p_2},\\
&\vdots\\
t(P-9) + S(n) &\equiv 0 \pmod{p_n},
\end{aligned}$$

tiene solución t (observe que $1 \leq S(i) \leq i < p_i$ y que $P - 9$ y p_i son primos relativos para cada $i = 1, \ldots, n$). Para este valor de t, demostraremos que los números $10^x C + i$, $1 \leq i \leq n$, satisfacen el problema y por lo tanto nuestro número K buscado será C. En efecto, para cada i la suma de los dígitos de $10^x C + i$ es divisible entre p_i como consecuencia del sistema anterior de congruencias. También, C es divisible entre p_i ya que B es divisible entre p_i. Luego, si alguno de estos números fuera divisible por la suma de sus dígitos, tendríamos que $p_i \mid i$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, estos n números satisfacen el problema.

[9] Ver en el apéndice el teorema 6.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de abril a julio de 2013.

Abril

Publicación del décimo octavo número de la revista "Tzaloa".

9 de Abril

Envío a los estados del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

13 de Abril

Aplicación en los estados registrados con este propósito del primer examen de práctica propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

Mayo, del 1 al 11, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 54^a Olimpiada Internacional (6 participantes), la delegación que representará a México en la XV Olimpiada Centroamericana y del Caribe (3 participantes) y la preselección para la XXVIII Olimpiada Iberoamericana.

5 de junio

Envío a los estados del examen semifinal estatal propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

8 de junio

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen semifinal estatal propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

Junio, Managua, Nicaragua

XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

Junio y julio, del 30 al 5, Burgas, Bulgaria

Competencia Internacional de Matemáticas.

Julio, 11 al 20, Morelia, Michoacán

Entrenamientos para los seleccionados nacionales para asistir a la 54^a Olimpiada Internacional.

Julio

Publicación del décimo noveno número de la revista "Tzaloa".

Julio, 18 al 28, Santa Marta, Colombia

54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad) *Si a y b son enteros, se dice que b divide a si $a = bq$ para algún entero q, y se denota por $b \mid a$.*

Teorema 2 (Algoritmo de la división) *Si a y b son enteros con $b \neq 0$, entonces existen enteros q y r tales que $a = bq + r$ donde $0 \leq r < |b|$. Los enteros q y r son únicos, y son llamados cociente y residuo, respectivamente.*

Definición 3 (Congruencias) *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 4 (Propiedades de las congruencias) *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 5 (Pequeño teorema de Fermat) *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 6 (Teorema chino del residuo) *Sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ números naturales, primos relativos por parejas. Sea $n = n_1 n_2 \cdots n_k$ y sean $r_1, r_2, \ldots, r_k$ enteros. Entonces, el sistema lineal de congruencias dado por,*

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \pmod{n_1}, \\ x &\equiv r_2 \pmod{n_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv r_k \pmod{n_k}, \end{aligned}$$

tiene solución y cualesquiera dos soluciones difieren por un múltiplo de n.

Teorema 7 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 8 (Inducción fuerte) *El método de inducción fuerte se utiliza para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que la proposición $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(m)$ para todo entero m tal que $k_0 \leq m < n$.*
3. *Se demuestra que la proposición $P(n)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 9 (Principio de las casillas) *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene al menos $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 10 (Desigualdad media aritmética - media geométrica (MA-MG)) *Si x_1, $x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 11 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 12 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 13 (Puntos y rectas notables de un triángulo)

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*

3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*
5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*
6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*
7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*
8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 14 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 15 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos por LLL.*

Criterio 16 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Criterio 17 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos por ALA.*

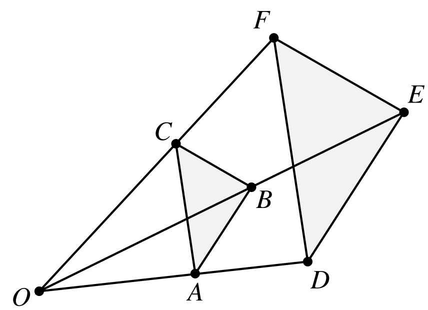
Definición 18 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 19 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como ángulo-ángulo y lo denotamos por AA.*

Criterio 20 (Criterio de semejanza LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Teorema 21 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Definición 22 (Triángulos homotéticos) *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \| DE$, $BC \| EF$ y $CA \| FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de* 1*, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Teorema 23 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Teorema 24 (Potencia de un punto)

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 25 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 26 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 27 (Circunferencia de los 9 **puntos)** *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Definición 28 (Excírculo) *Decimos que una circunferencia $\mathcal{C}$ está exinscrita en el triángulo ABC respecto al ángulo BCA, si $\mathcal{C}$ es tangente a los lados del ángulo BCA y al lado AB por fuera del triángulo dado. También se dice que $\mathcal{C}$ es el excírculo del triángulo ABC respecto al ángulo BCA.*

Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[5] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[6] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[9] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook!