TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2013, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2013.

Contenido

Presentación

Tzaloa, Año 2013, Número 4

Como cada fin de año, este número de tu revista Tzaloa se ve enriquecido con la sección *Una vida, un matemático*. En esta ocasión decidimos dedicar este espacio para recordar al Dr. Francisco Raggi Cárdenas, matemático mexicano de primer nivel y amplio reconocimiento internacional, quien lamentablemente falleció el año pasado. Raggi dedicó su vida a las matemáticas y su legado no sólo incluye importantes resultados en álgebra, sino que más allá de ello, sigue vigente en el quehacer cotidiano de las muchas generaciones de matemáticos mexicanos que recibieron parte importante de su formación al transitar por sus clases. Es así, que expresamos nuestro más profundo agradecimiento a la Dra. María José Arroyo Paniagua, investigadora de la UAM Iztapalapa, quien fue alumna de Francisco Raggi y amablemente accedió a compartir con nosotros una visión más que matemática, humana, de Francisco Raggi.

El *Artículo de Matemáticas* de este número lo dedicamos a la teoría de números: *Congruencias lineales y el teorema chino del residuo*. En sus páginas se abordan las dificultades que implica la resolución de sistemas de congruencias lineales y se presenta el uso del *teorema chino del residuo*. Consideramos que este material te permitirá profundizar o reforzar tus habilidades y conocimientos sobre el álgebra de las congruencias. ¡Gracias! Jacob por preparar y compartir con nosotros esta excelente colaboración.

Además, como en todos los números, encontrarás 20 *Problemas de práctica* con sus correspondientes *Soluciones*, así como los 10 nuevos *Problemas de entrenamiento* que están esperando para que tú los resuelvas. Desde luego que tampoco olvidamos publicar las soluciones de los *Problemas de entrenamiento* que plantemos en Tzaloa, año 2013, número 1.

En la sección de concursos nacionales, presentamos los exámenes con soluciones de la *Etapa Final Estatal de la* 26^a *OMM* y por último, en la sección internacional, incluimos los problemas sin solución de la *XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe*, de la *Competencia Internacional de Matemáticas (IMC)* y de la 54^a *Olimpiada*

Internacional de Matemáticas (IMO).
Recuerda que al final de la revista encontrarás toda la *Información Olímpica* así como el calendario con las actividades programadas para los próximos meses. Ahí también se incluye el directorio completo y actualizado del *Comité Organizador de la OMM.*

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Hace más de 26 años que la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Desde sus inicios, este programa se ha visto fortalecido gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado inumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

27ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1994. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2013-2014 y, para el 1° de julio de 2014, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 24 al 30 de noviembre de 2013 en el estado de Hidalgo. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección de las delegaciones que representarán a México en las distintas Olimpiadas Internacionales del año 2014: la XXVI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico, que se llevará a cabo en el mes de marzo; la XVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se celebrará en el mes de junio en Costa Rica; la 55ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se llevará a cabo en Sudáfrica en el mes de julio, y la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se realizará en el mes de septiembre en Honduras.

Congruencias lineales y el teorema chino del residuo

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

Congruencias lineales

Una de las ecuaciones más simples de resolver en álgebra elemental es la ecuación $ax = b$, cuya única solución es $x = \frac{b}{a}$ suponiendo que $a \neq 0$. De manera análoga, podemos preguntarnos cuándo tiene solución la congruencia lineal $ax \equiv b \pmod{m}$, y en caso de tener solución, cómo son todas sus soluciones. Esperaríamos que la solución sea también una congruencia, esto es, de la forma $x \equiv r \pmod{m}$ para algún entero r. Por ejemplo, si $5x \equiv 7 \pmod{12}$, entonces una solución es $x = 11$ ya que $5 \cdot 11 - 7 = 48$, la cual es divisible entre 12. Pero otras soluciones son $x = 23$, o $x = -13$, o más generalmente, $x = 11 + 12k$ para cualquier entero k. De hecho, si x_0 es una solución de $ax \equiv b \pmod{m}$ y $x \equiv x_0 \pmod{m}$, entonces $ax \equiv ax_0 \equiv b \pmod{m}$. Esto significa que x también es solución de la congruencia. Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1 *La congruencia $ax \equiv b$ (mod m) tiene una solución si y sólo si el máximo común divisor de a y m es un divisor de b, esto es, si $d = mcd(a, m)$, entonces la congruencia tiene una solución si y sólo si $d \mid b$. Si hay una solución x_0, entonces el conjunto de todas las soluciones es el conjunto de todos los x tales que $x \equiv x_0$ (mod $\frac{m}{d}$).*

Demostración. Sea $d = \text{mcd}(a, m)$. Supongamos que la congruencia $ax \equiv b \pmod{m}$ tiene una solución x_0. Entonces, m divide a $ax_0 - b$. Como $d \mid m$, se sigue que d divide a $ax_0 - b$ y como $d \mid a$, resulta que $d \mid b$.
Recíprocamente, supongamos que $d \mid b$. Tenemos que $a = da'$, $m = dm'$ y $b = db'$ para algunos enteros a', m' y b', con a' y m' primos relativos. Entonces, existen enteros r y s tales que $a'r + m's = 1$. Multiplicando esta ecuación por db' obtenemos que

$a(rb') + m(sb') = b$, esto es, $a(rb') \equiv b \pmod{m}$ y por lo tanto rb' es solución de la congruencia $ax \equiv b \pmod{m}$.
Supongamos que x_0 es solución de la congruencia $ax \equiv b \pmod{m}$. Si x es otra solución, entonces $ax \equiv ax_0 \pmod{m}$ y por lo tanto $x \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{d}}$ donde $d = \text{mcd}(a, m)$. Recíprocamente, si $x \equiv x_0 \pmod{\frac{m}{d}}$, con d como antes, entonces $ax \equiv ax_0 \pmod{m}$ y por lo tanto $ax \equiv b \pmod{m}$, pues $ax_0 \equiv b \pmod{m}$.

Supongamos, por ejemplo, que queremos resolver la congruencia $15x \equiv 33 \pmod{69}$. Como $\text{mcd}(15, 69) = 3$ y $3 \mid 33$, sabemos que existe una solución. Luego, la congruencia es equivalente a la ecuación $15x + 69y = 33$. No nos interesamos en y excepto porque nos ayudará a determinar el valor de x. Tenemos que

$$x = \frac{33 - 69y}{15} = 2 - 4y + \frac{3 - 9y}{15}.$$

Luego, $\frac{3-9y}{15}$ debe ser un entero también, digamos que $\frac{3-9y}{15} = z$. Repitiendo el proceso anterior tenemos que

$$15z + 9y = 3 \Rightarrow y = \frac{3 - 15z}{9} = -z + \frac{3 - 6z}{9}$$

de donde $\frac{3-6z}{9} = w$ para algún entero w. De aquí, $9w + 6z = 3$, la cual tiene la solución obvia $w = 1$, $z = -1$. Entonces, $y = 2$ y $x = -7$. Luego, todas las soluciones de la congruencia están dadas por $x \equiv -7 \pmod{23}$, que es lo mismo a $x \equiv 16 \pmod{23}$.

El teorema chino del residuo

Supongamos, que por alguna razón, queremos resolver la complicada congruencia $5x^2 + 6x + 7 \equiv 0 \pmod{35}$. Observemos que si a es solución de esta congruencia, entonces $5a^2 + 6a + 7 \equiv 0 \pmod{35}$, y ya que $5(a + 35k)^2 + 6(a + 35k) + 7 = 5a^2 + 6a + 7 + 35(10ka + 175k^2 + 6k)$, se sigue que $a + 35k$ también satisface la congruencia inicial, para cualquier entero k.
Regresando a nuestro problema, no podemos usar la fórmula cuadrática debido a que las raíces cuadradas son un problema con la aritmética modular (pues necesitamos enteros). Una manera de aproximarnos a la solución es tratando con $x \equiv 0, x \equiv 1, x \equiv 2, \ldots, x \equiv 34$, cada una módulo 35. Otra manera más sofisticada, podría ser simplificando el problema: Si $5x^2 + 6x + 7$ es divisible por 35, entonces es divisible por 5 y 7. En lugar de trabajar módulo 35, analizaremos las congruencias $5x^2 + 6x + 7 \equiv 0 \pmod{5}$ y $5x^2 + 6x + 7 \equiv 0 \pmod{7}$. La primera congruencia se puede simplificar a $x + 2 \equiv 0 \pmod{5}$, o bien $x \equiv 3 \pmod{5}$. La segunda congruencia es equivalente a $5x^2 + 6x \equiv 0 \pmod{7}$, la cual tiene la solución trivial $x \equiv 0 \pmod{7}$ y otra no trivial $x \equiv 3 \pmod{7}$. ¿Cómo usaremos estas soluciones para resolver el problema original? Lo que necesitamos son números que sean congruentes con 3 módulo 5, y también a 0 o 3 módulo 7. Una manera simple de encontrar tales números es la siguiente: comenzando con 3 módulo 5, tenemos la sucesión aritmética

$$3, 8, 13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, \ldots.$$

Los números que son 0 módulo 7 pertenecen a la sucesión

$$0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, \ldots.$$

Si buscamos traslapes, obtenemos al 28 y al 63. Ya que suponemos encontrar soluciones módulo 35, esto significa que $x \equiv 28 \pmod{35}$ es una solución. De hecho todo lo que necesitábamos era calcular parte de la sucesión entre 0 y 35 para ver las coincidencias. De manera análoga, si $x \equiv 3 \pmod 7$, entonces x pertenece a la sucesión $3, 10, 17, 24, 31, \ldots$, y obtenemos una segunda solución $x \equiv 3 \pmod{35}$. Estas soluciones ya son fáciles de verificar, por ejemplo $5 \cdot 28^2 + 6 \cdot 28 + 7 = 4095 = 117 \cdot 35$.

Sería bueno si pudiéramos trabajar con congruencias pequeñas para obtener congruencias grandes por algún método más eficiente que el anterior. Por ejemplo, supongamos que tenemos la congruencia $71x^2 + 72x + 73 \equiv 0 \pmod{5183}$. En este caso $5183 = 71 \cdot 73$, de modo que este ejemplo es similar al anterior, pero las congruencias son más grandes. Si trabajamos módulo 71, obtenemos $x + 2 \equiv 0 \pmod{71}$, o $x \equiv -2 \pmod{71}$. La segunda congruencia es $71x^2 + 72x \equiv 0 \pmod{73}$, la cual tiene la solución trivial $x \equiv 0 \pmod{73}$. De hecho, podemos encontrar una segunda solución: si $x \not\equiv 0 \pmod{73}$, entonces podemos cancelar x para obtener $71x + 72 \equiv 0 \pmod{73}$, la cual es equivalente con $-2x - 1 \equiv 0 \pmod{73}$, o $2x \equiv -1 \equiv 72 \pmod{73}$. Luego, $x \equiv 36 \pmod{73}$. Ahora lo que necesitamos es un número x tal que $x \equiv -2 \pmod{71}$ y $x \equiv 0 \pmod{73}$, y un segundo número x tal que $x \equiv -2 \pmod{71}$ y $x \equiv 36 \pmod{73}$. Sin embargo, buscar por inspección la intersección en las sucesiones aritméticas podría ser muy tedioso.

Existe una aproximación sistemática a la solución de este problema, dada por un resultado conocido como el *teorema chino del residuo*. La razón del nombre se debe a que hay una referencia a este tipo de problemas desde la antigua China. En los escritos de Sun Tsu, está la pregunta de determinar un número que dejara residuo 2 al dividirse entre 3, dejara residuo 3 al dividirse entre 5 y dejara otra vez residuo 2 al dividirse entre 7. En notación de congruencias, Sun Tsu buscaba números x que satisfagan simultáneamente el sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3, \\ x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 2 \pmod 7. \end{aligned}$$

Teorema 2 (Teorema chino del residuo) *Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ enteros positivos primos relativos por parejas. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cualesquiera números enteros. Entonces, existe un entero x tal que*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \ (mod\ m_1), \\ x &\equiv a_2 \ (mod\ m_2), \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \ (mod\ m_n). \end{aligned}$$

Además, si $M = m_1 m_2 \cdots m_k$, entonces x es único módulo M.

Demostración. Daremos una demostración poco constructiva cuyo interés es más teórico que práctico. Esto es, demostraremos la existencia de tal entero x. Después de esta demostración veremos un ejemplo de cómo obtener una solución.

La idea es resolver primero casos especiales, donde exactamente uno de los a_i's es 1 y los otros son 0. Comencemos definiendo para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, el entero P_i como el producto $m_1 m_2 \cdots m_n$ sin el factor m_i, es decir, $P_i = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{m_i}$. Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$, los enteros P_i y m_i son primos relativos, ya que cada m_i es primo relativo con m_j para todo $j \neq i$. Luego, por el Teorema 1, la congruencia $P_i x \equiv 1 \pmod{m_i}$ tiene solución, esto es, existe un entero c_i ($0 < c_i < m_i$) tal que $c_i P_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Si ahora, $N_i = c_i P_i$, entonces $N_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ y $N_i \equiv 0 \pmod{m_k}$ para $k \neq i$ ya que $P_i \equiv 0 \pmod{m_k}$.

Finalmente, usamos las soluciones $N_1, N_2, \ldots, N_n$ obtenidas en los casos especiales para formar el número $x = a_1 N_1 + a_2 N_2 + \cdots + a_n N_n$. Ahora, es fácil ver que la expresión para x satisface cada una de las congruencias del teorema.

Para ver que x es único módulo M, supongamos que y también es una solución. Entonces $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ y $y \equiv a_1 \pmod{m_1}$, de modo que $x \equiv y \pmod{m_1}$. De manera análoga tenemos que $x \equiv y \pmod{m_i}$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Esto significa que $x - y$ es divisible entre cada uno de $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Como los m_i's son primos relativos por parejas, $x - y$ es divisible entre $m_1 m_2 \cdots m_n = M$ y por lo tanto $x \equiv y \pmod{M}$.

En la demostración anterior, aunque puede resultar tedioso encontrar los números c_i, lo que sabemos es que existe una solución $x = a_1 c_1 P_1 + \cdots + a_n c_n P_n$.

Existe otra aproximación para resolver sistemas de congruencias. Supongamos que queremos resolver el problema de Sun Tsu. A partir de la congruencia $x \equiv 2 \pmod 3$, sabemos que $x = 2 + 3k$ para algún entero k. Sustituyendo esta igualdad en la segunda congruencia obtenemos que $2 + 3k \equiv 3 \pmod 5$ y tratamos de resolver esta congruencia para k. Sumando 3 a cada lado y simplificando, obtenemos $3k \equiv 1 \pmod 5$. Esta es una congruencia lineal como las descritas al inicio de este escrito. Podríamos trabajar con la ecuación equivalente $3k + 5y = 1$, o sólo notar que $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5$. Usando esto, multiplicamos la congruencia por 2 y obtenemos que $k \equiv 2 \pmod 5$. Esto significa que $k = 2 + 5j$ para algún entero j, de modo que $x = 2 + 3k = 2 + 3(2 + 5j) = 8 + 15j$. Ahora sabemos que la solución al sistema de dos congruencias $x \equiv 2 \pmod 3$ y $x \equiv 3 \pmod 5$ es $x \equiv 8 \pmod{15}$. Ahora vamos a la tercera congruencia con $8 + 15j \equiv 2 \pmod 7$. Reduciendo módulo 7 obtenemos $1 + j \equiv 2 \pmod 7$, de donde $j \equiv 1 \pmod 7$. Escribiendo $j = 1 + 7k$ tenemos que $x = 8 + 15(1 + 7k) = 23 + 105k$, y de aquí $x \equiv 23 \pmod{105}$. La solución $x = 23$ fue la que Sun Tsu dió como respuesta.

¿Qué sucede si los m_i's no son primos relativos? Pueden suceder varias cosas. En primer lugar, el sistema de congruencias podría no tener solución. En segundo lugar, el sistema podría tener solución, en cuyo caso las soluciones x satisfarán las congruencias, pero no módulo el producto de los m_i's. Veamos un par de ejemplos. Primero consideremos el sistema

$$x \equiv 8 \pmod{12},$$
$$x \equiv 5 \pmod{9},$$
$$x \equiv 14 \pmod{15}.$$

Comenzando con la primera congruencia, escribimos $x = 8 + 12k$. Sustituyéndola en la segunda, obtenemos $8 + 12k \equiv 5 \pmod{9}$. Luego, $3k \equiv -3 \pmod{9}$, de donde $k \equiv -1 \equiv 2 \pmod{3}$, o bien, $k = 2 + 3j$ para algún entero j. Esto significa que la solución a las primeras dos congruencias es $x = 8 + 12(2 + 3j) = 32 + 36j$, que es lo mismo que $x \equiv 32 \pmod{36}$. Observemos que 36 es menor que el producto $12{\cdot}9 = 108$. Esto se debe a que 12 y 9 no son primos relativos. Continuando, sustituyendo en la tercera congruencia obtenemos $32+36j \equiv 14 \pmod{15}$, de donde $2+6j \equiv 14 \pmod{15}$. Simplificando llegamos a $6j \equiv 12 \pmod{15}$ y por lo tanto $j \equiv 2 \pmod{5}$, donde hemos usado el Teorema 1. Ahora, $j = 2 + 5m$ para algún entero m, de modo que $x = 32 + 36(2 + 5m) = 104 + 180m$, lo que significa que 104 es una solución, y las soluciones son únicas módulo 180 en lugar de $12 \cdot 9 \cdot 15 = 1620$.

Como segundo ejemplo, consideremos el sistema de congruencias

$$x \equiv 8 \pmod{12},$$
$$x \equiv 5 \pmod{9},$$
$$x \equiv 13 \pmod{15},$$

donde la única congruencia que cambió fue la última. De lo hecho previamente, tenemos que $x = 32 + 36j$ a partir de las primeras dos congruencias. Sin embargo, ahora cuando la sustituimos en la tercera, obtenemos $32 + 36j \equiv 13 \pmod{15}$, de donde $6j \equiv 11 \pmod{15}$ la cual no tiene solución según el Teorema 1, ya que $\mathrm{mcd}(6, 15) = 3 \nmid 11$. Esto significa que el sistema inicial de congruencias no tiene solución.

Una aplicación: La función ϕ de Euler

En esta sección veremos una bonita aplicación del teorema chino del residuo a la función ϕ de Euler. Si n es un entero positivo, $\phi(n)$ denota el número de enteros positivos menores o iguales que n que son primos relativos con n. Por ejemplo, $\phi(1) = 1$, $\phi(2) = 1$, $\phi(3) = 2$, $\phi(4) = 2$, $\phi(5) = 4$, etc. El objetivo es determinar una manera fácil para calcular $\phi(n)$. En general, no hay una manera fácil de hallar $\phi(n)$ para valores grandes de n, pues $\phi(n)$ depende de cómo se factoriza n. Si factorizar n es difícil, entonces determinar $\phi(n)$ también es difícil. Sin embargo, en el caso en que la factorización de n sea relativamente sencilla, podemos decir mucho.

Teorema 3 *Si m y n son enteros positivos primos relativos, entonces $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$.*

Demostración. Primero, notemos que hay una correspondencia uno a uno entre los números x tales que $0 \leq x \leq mn - 1$ y las parejas ordenadas (a, b) con $0 \leq a \leq m - 1$ y $0 \leq b \leq n - 1$. Esto es, dado un número x ($0 \leq x \leq mn - 1$), podemos elegir a y

b haciendo $a \equiv x \pmod{m}$ y $b \equiv x \pmod{n}$. Para el recíproco, el teorema chino del residuo es la clave: dados a, b, debemos hallar el correspondiente x. Y por supuesto, hay mn valores posibles de x y mn posibles parejas ordenadas (a, b).
Veamos qué sucede cuando m y n son primos relativos. En este caso, hay $\phi(mn)$ valores de x con $0 \leq a \leq mn - 1$ y $\text{mcd}(x, mn) = 1$. Hay $\phi(m)\phi(n)$ parejas ordenadas (a, b) que satisfacen $0 \leq a \leq m - 1$, $0 \leq b \leq n - 1$, $\text{mcd}(a, m) = 1$ y $\text{mcd}(b, n) = 1$. ¿Cómo se relaciona (a, b) con x? Nuevamente, dado x, podemos elegir a y b usando $a \equiv x \pmod{m}$ y $b \equiv x \pmod{n}$. Si $\text{mcd}(x, mn) = 1$ entonces $\text{mcd}(a, m) = 1$ y $\text{mcd}(b, n) = 1$ (ejercicio). Esto demuestra que $\phi(mn) \leq \phi(m)\phi(n)$. Recíprocamente, dados a y b con $0 \leq a \leq m - 1$ y $0 \leq b \leq n - 1$, podemos usar el teorema chino del residuo para encontrar un x tal que $0 \leq x \leq mn - 1$ y $x \equiv a \pmod{m}$, $x \equiv b \pmod{n}$. Más aún, si $\text{mcd}(m, a) = 1$ y $\text{mcd}(n, b) = 1$, se sigue que $\text{mcd}(mn, x) = 1$ (ejercicio). Esto nos da la otra desigualdad $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$, y por lo tanto estas dos expresiones deben ser iguales.

Estamos listos para dar una fórmula para $\phi(n)$. Usaremos el siguiente resultado, fácil de probar: *Si p es un número primo, entonces $\phi(p^n) = p^{n-1}(p - 1)$ para todo entero positivo n.* Su demostración se deja de ejercicio al lector.

Dado un entero positivo n, consideremos su descomposición canónica $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ donde $p_1, \ldots, p_k$ son números primos distintos, y $a_1, \ldots, a_k$ son enteros positivos. Entonces, usando el Teorema 3 y la fórmula para $\phi(p^n)$ obtenemos

$$\phi(n) = p_1^{a_1-1}(p_1 - 1)p_2^{a_2-1}(p_2 - 1) \cdots p_k^{a_k-1}(p_k - 1).$$

Usualmente, escribimos la fórmula anterior de manera más compacta. Observemos que $p-1 = p(1-\frac{1}{p})$ y $p^{a-1}(p-1) = p^a(1-\frac{1}{p})$. Si hacemos esto con cada factor en la fórmula anterior, entonces el producto de las potencias de primos es de nuevo n, y obtenemos que

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Así por ejemplo, si $n = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, entonces

$$\phi(360) = 360\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 360 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 96.$$

Resolución de problemas de olimpiada

En esta sección veremos algunas aplicaciones del teorema chino del residuo en la resolución de problemas de olimpiada.

Problema 1. Sea p un número primo. Demuestre que hay una infinidad de enteros positivos n tales que p divide a $2^n - n$.

Solución. Si $p = 2$, todo número n par cumple que p divide a $2^n - n$.
Supongamos que $p \geq 3$. Por el pequeño teorema de Fermat[1], $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Luego,

[1] Ver en el apéndice el teorema 4.

si $n \equiv 0 \pmod{p-1}$, tenemos que $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Y si $n \equiv 1 \pmod{p}$ tenemos que $2^n \equiv n \pmod{p}$. Por lo tanto, basta garantizar la existencia de una infinidad de enteros n tales que $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ y $n \equiv 1 \pmod{p}$. El teorema chino del residuo nos garantiza la existencia de un entero positivo N tal que $N \equiv 0 \pmod{p-1}$ y $N \equiv 1 \pmod{p}$. Por lo tanto, todos los números n tales que $n \equiv N \pmod{p(p-1)}$, satisfacen el problema en este caso.

Problema 2. (IMO, 1989) Demuestre que para cada entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos, ninguno de los cuales es la potencia de un número primo.

Solución. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ números primos distintos. Ya que $p_1p_2, p_3p_4, \ldots, p_{2n-1}p_{2n}$ son primos relativos por parejas, el teorema chino del residuo implica que existe un entero positivo N tal que

$$\begin{aligned} N &\equiv -1 \pmod{p_1p_2}, \\ N &\equiv -2 \pmod{p_3p_4}, \\ &\vdots \\ N &\equiv -n \pmod{p_{2n-1}p_{2n}}. \end{aligned}$$

Luego, cada uno de los n enteros consecutivos $N+1, N+2, \ldots, N+n$ es divisible por más de un número primo, y por lo tanto, cada uno de ellos no puede ser la potencia de un número primo.

Solución alternativa. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{[(n+1)!]^2 + 2, [(n+1)!]^2 + 3, \ldots, [(n+1)!]^2 + (n+1)\right\}.$$

Cada entero del conjunto S es de la forma $[(n+1)!]^2 + k$ donde $k \geq 2$ y k es un divisor de $(n+1)!$. Luego, k^2 divide a $[(n+1)!]^2$ y para algún entero positivo t tenemos que

$$[(n+1)!]^2 + k = k^2t + k = k(kt+1),$$

donde k y $kt+1$ son primos relativos. Ya que cada uno de estos factores es mayor que 1, éstos aportan al menos dos divisores primos distintos del número $[(n+1)!]^2 + k$, haciendo imposible para el número ser una potencia de un número primo.

Problema 3. Demuestre que para todos los enteros positivos n y k, existe un conjunto de n enteros consecutivos tal que cada uno de los elementos de este conjunto es divisible por k primos distintos ninguno de los cuales divide a los otros elementos del conjunto.

Solución. Consideremos $k \cdot n$ números primos distintos

$$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1k}; p_{21}, p_{22}, \ldots, p_{2k}; \ldots; p_{n1}, p_{n2}, \ldots, p_{nk}$$

cada uno mayor o igual que n.

Por el teorema chino del residuo, existe un número entero N tal que

$$\begin{array}{cccc}
N \equiv 0 \pmod{p_{11}}, & N \equiv 0 \pmod{p_{12}}, & \dots, & N \equiv 0 \pmod{p_{1k}}, \\
N \equiv -1 \pmod{p_{21}}, & N \equiv -1 \pmod{p_{22}}, & \dots, & N \equiv -1 \pmod{p_{2k}}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
N \equiv -n+1 \pmod{p_{n1}}, & N \equiv -n+1 \pmod{p_{n2}}, & \dots, & N \equiv -n+1 \pmod{p_{nk}}.
\end{array}$$

Ahora, $N, N+1, \dots, N+n-1$ son n enteros consecutivos que satisfacen el problema.

Solución alternativa. La demostración la haremos por inducción sobre k. Si $k = 1$, se deja al lector demostrar que cada uno de los números del conjunto

$$\{n!+2, n!+3, \dots, n!+n\}$$

es divisible por un primo que no divide a ningún otro elemento del conjunto.
Supongamos que el resultado es cierto para $k \geq 1$, es decir, existen enteros $A+1, A+2, \dots, A+n$ que satisfacen la condición del problema con k divisores primos. Sean $P = (A+n)!$ y $B = P + A$. Consideremos los números

$$B+1, B+2, \dots, B+n.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$, tenemos que $A+i \mid B+i$. También, si $p \mid A+i$ donde p es uno de esos divisores primos, entonces $p \mid P$, de modo que $p \mid B+j$ si y sólo si $p \mid A+j$ si y sólo si $i = j$. Así, esos k divisores primos funcionan. Debemos determinar otro divisor primo para cada $B+i$.
Supongamos que, para algún i, $B+i$ no tiene ningún divisor primo (distinto de los k mencionados previamente) que no divida a ningún otro $B+j$. Entonces, no debe tener divisores primos mayores que $A+n$, ya que los k primos originales son menores o iguales que $A+i$ (pues cada uno de ellos divide a $A+i$), y cualquier primo que divide a $B+i$ y a $B+j$ debe dividir a $i-j$, y en consecuencia ser menor que n.
Supongamos ahora que p es uno de los primos que no cumplen, es decir, $p \mid B+i$ y $p \mid B+j$. Entonces $p < n < A+n$. Ya que $(A+n)! = P$ y $p \mid (A+n)!$, tenemos que $p \mid A+i$ y $p \mid A+j$. Se sigue que todos los primos que no cumplen para $B+i$ también dividen a $A+i$. Luego, será suficiente determinar un primo p tal que divide a $B+i$ pero no divide a $A+i$. Supongamos que no existe tal primo p. Entonces, como antes, existe un primo p que divide a $A+i$ tal que $p(A+i) \mid B+i$ (pues $B+i$ es mayor que $A+i$). Por otra parte, si $p \neq A+i$ tenemos que $p(A+i) \mid P$, y por lo tanto $p(A+i) \mid A+i$, lo cual es un absurdo. De esta manera tenemos que $A+i = p$. Esto implica que $k = 1$. Si nuestros números $A+1, \dots, A+n$ para $k = 1$ fueron $(n+2)!+2, \dots, (n+2)!+(n+2)$, entonces todos ellos eran compuestos, lo que significa que $A+i = p$ es imposible.

Problema 4. (Lista corta, IMO 2005) Sean a y b enteros positivos tales que $a^n + n$ divide a $b^n + n$ para todo entero positivo n. Demuestre que $a = b$.

Solución. Tomando $n = 1$ tenemos que $a+1 \mid b+1$, lo cual implica que $b \geq a$. Supongamos que $b > a$. Sea $p > b$ un número primo. Por el Teorema Chino del residuo existe un entero positivo N tal que

$$N \equiv 1 \pmod{p-1} \quad \text{y} \quad N \equiv -a \pmod{p}.$$

Aplicando ahora el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ y de aquí $a^N = a(a^{p-1} \cdots a^{p-1}) \equiv a \pmod{p}$. Por lo tanto, $a^N + N \equiv a - a \equiv 0 \pmod{p}$. De esta manera tenemos que p divide al número $a^N + N$, y en consecuencia divide también a $b^N + N$. Por otra parte, usando nuevamente el pequeño teorema de Fermat, obtenemos de manera análoga que $b^N \equiv b \pmod{p}$. Como $b^N + N \equiv 0 \pmod{p}$, concluimos que $0 \equiv b^N + N \equiv b - a \pmod{p}$, y en consecuencia $p \leq b - a < b < p$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a = b$.

Problema 5. Demuestre que para cada entero positivo n, existen enteros a y b tales que $4a^2 + 9b^2 - 1$ es divisible entre n.

Solución. Supongamos primero que n es impar. En este caso, sea $b = 0$ y sea a cualquier entero tal que $2a \equiv 1 \pmod{n}$. Entonces, tenemos que

$$4a^2 + 9b^2 - 1 = 4a^2 - 1 = (2a - 1)(2a + 1),$$

el cual es divisible entre n.
Supongamos ahora que n no es divisible entre 3. En este caso, sea $a = 0$ y sea b cualquier entero tal que $3b \equiv 1 \pmod{n}$. Entonces, tenemos que

$$4a^2 + 9b^2 - 1 = 9b^2 - 1 = (3b - 1)(3b + 1),$$

el cual es divisible entre n.
Finalmente, consideremos el caso general. Escribamos n en la forma $n_1 n_2$, donde n_1 no es divisible entre 2, n_2 no es divisible entre 3, y n_1 y n_2 son primos relativos (por ejemplo, tomamos n_2 como la potencia de 2 en la factorización en primos de n, y n_1 es $\frac{n}{n_2}$). Por lo demostrado previamente, sabemos que existen enteros a_1 y b_1 tales que $4a_1^2 + 9b_1^2 - 1$ es divisible entre n_1, y existen enteros a_2 y b_2 tales que $4a_2^2 + 9b_2^2 - 1$ es divisible entre n_2. Como n_1 y n_2 son primos relativos, el teorema chino del residuo implica que existen enteros a y b tales que $a \equiv a_1 \pmod{n_1}$, $a \equiv a_2 \pmod{n_2}$, $b \equiv b_1 \pmod{n_1}$ y $b \equiv b_2 \pmod{n_2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4a^2 + 9b^2 - 1 &\equiv 4a_1^2 + 9b_1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n_1}, \\ 4a^2 + 9b^2 - 1 &\equiv 4a_2^2 + 9b_2^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n_2}. \end{aligned}$$

Luego, $4a^2 + 9b^2 - 1$ es divisible entre n_1 y n_2. Como n_1 y n_2 son primos relativos, se sigue que $4a^2 + 9b^2 - 1$ es divisible entre $n_1 n_2 = n$.

Para finalizar, dejamos unos ejercicios al lector.

Ejercicios

1. Resuelve la congruencia $35x \equiv 56 \pmod{77}$.

2. Resuelve el sistema de congruencias

$$x \equiv 3 \pmod 5,$$
$$x \equiv 2 \pmod 7,$$
$$x \equiv 3 \pmod 9.$$

3. Sean p y n enteros positivos con p número primo. Demuestra que $\phi(pn) = p\phi(n)$ si $p \mid n$, y que $\phi(pn) = (p-1)\phi(n)$ si $p \nmid n$.

4. Sean m y n enteros positivos. Si d es el máximo común divisor de m y n, demuestra que $\phi(mn) = \frac{d\phi(m)\phi(n)}{\phi(d)}$.

5. ¿Existen $1,000,000$ de enteros consecutivos, cada uno divisible por el cuadrado de un número primo?

6. Sin usar el teorema chino del residuo, demuestra que para cada entero positivo n existen n enteros positivos consecutivos que no son números primos.

7. Resuelve el ejercicio anterior usando el teorema chino del residuo.

8. Sea $n \geq 2$ un entero. Demuestra que cada uno de los elementos del conjunto

$$\{n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n\}$$

es divisible por un primo que no divide a ningún otro elemento del conjunto.

9. Un entero m es una *potencia perfecta* si existen enteros positivos a y n con $n > 1$ tales que $m = a^n$. Demuestra que existe un conjunto A de 2013 enteros positivos distintos tal que los elementos de cada subconjunto de A suman una potencia perfecta.

10. Decimos que un entero positivo n es *sorprendente* si existen enteros positivos a, b y c tales que $n = (b,c)(a,bc) + (c,a)(b,ca) + (a,b)(c,ab)$. Demuestra que existen 2013 enteros positivos consecutivos sorprendentes.
(Nota: (m,n) denota el máximo común divisor de los enteros positivos m y n.)

11. Sean k y n enteros positivos tales que $k \mid n$. Demuestra que para cada entero positivo a menor que k y primo relativo con k, existe un entero positivo b menor que n y primo relativo con n tal que $a \equiv b \pmod k$.

Bibliografía

1. Andreescu, T., Gelca, R. *Putnam and Beyond.* Springer, 2007.

2. Ireland K., Rosen M. *A Classical Introduction to Modern Number Theory.* Springer-Verlag, Second Edition, 1992.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 nuevos problemas cuya selección fue hecha pensando en nuestros lectores de todos los niveles. Estamos seguros que con ellos, estudiantes con diversos grados de experiencia podrán encontrar interesantes retos con los cuales poner a prueba todos sus concocimientos y habilidades.

Aunque en la siguiente sección puedes encontrar las soluciones de todos ellos, te recomendamos no rendirte antes de tiempo. Considera que resolver problemas es una habilidad que sólo se perfecciona con práctica y dedicación, por lo que consultar las soluciones anticipadamente no es lo mejor para desarrollar al máximo todo tu potencial.

Por último, te invitamos a contribuir para mejorar nuestra revista. Si conoces algún problema interesante y te interesa compartirlo y publicarlo, ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus aportaciones para esta u otra sección.

Problema 1. Los círculos S_1 y S_2 se intersectan en los puntos P y Q. Las rectas l_1 y l_2 son paralelas y pasan por P y Q, respectivamente. La recta l_1 corta a S_1 en A_1 y a S_2 en A_2, con A_1 y A_2 diferentes de P y la recta l_2 corta a S_1 en B_1 y a S_2 en B_2, con B_1 y B_2 diferentes de Q. Demuestra que los perímetros de los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son iguales.

Problema 2. Cada uno de los números $x_1, x_2, \ldots, x_{150}$ es igual a $\sqrt{2}-1$ o a $\sqrt{2}+1$. Sea

$$S = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{149}x_{150}.$$

¿Se pueden elegir los números tales que $S = 121$? ¿y para $S = 111$?

Problema 3. Encuentra todos los enteros a y b tales que $(a+b^3)(a^3+b) = (a+b)^4$.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle ADC = \angle BCD > 90°$. Sea E el punto de intersección de AC con la paralela a AD que pasa por B y sea F el punto de intersección de BD con la paralela a BC que pasa por A. Demuestra que EF es paralela a CD.

Problema 5. Demuestra que si n divide a $a - b$ entonces n^2 divide a $a^n - b^n$. ¿Es cierto el recíproco?

Problema 6. Los números del 1 al 500 están escritos en un pizarrón. Los jugadores A y B juegan alternadamente comenzando con A. En cada turno pueden borrar uno de los números y el juego termina cuando quedan solo dos números. B gana si la suma de los dos números es divisible entre 3 y A gana si no. Demuestra que B tiene una estrategia ganadora y descríbela.

Problema 7. Determina todos los números reales a tales que para cada entero positivo n, el número $an(n + 2)(n + 4)$ es un número entero.

Problema 8. Demuestra que el número 2022 se puede escribir en la forma $x^2 + 4xy + y^2$ con x, y números enteros, pero no así el 11.

Problema 9. Sean $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y P y Q puntos en los lados AB y AD, respectivamente, tales que $AP = CD$ y $AQ = BC$. Si M es el punto de intersección de AC y PQ, muestra que M es el punto medio de PQ.

Problema 10. Encuentra todas las ternas (x, y, z) de enteros positivos que satisfacen la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1$.

Problema 11. Cuatro enteros están marcados en un círculo. Simultáneamente en cada paso, y moviéndose en sentido de las manecillas del reloj, se reemplaza cada número por la diferencia entre dicho número y el siguiente número del círculo. Es decir, los números a, b, c, d se reemplazan por $a - b$, $b - c$, $c - d$ y $d - a$. ¿Es posible después de 2013 de tales pasos obtener los números a, b, c, d tales que $|bc - ad|$, $|ac - bd|$ y $|ab - cd|$ sean números primos?

Problema 12. Sea ABC un triángulo cuyos ángulos en B y C satisfacen $C = 90° + \frac{1}{2}B$. Sean M el punto medio de BC y $\mathcal{C}$ el círculo con centro en A y radio AM. Si $\mathcal{C}$ intersecta nuevamente a BC en D, prueba que $MD = AB$.

Problema 13. En la escuela de un pequeño pueblo hay 20 niños. Cualesquiera dos niños tienen un abuelo en común. Probar que algún abuelo no tiene menos de 14 nietos en la escuela.

Problema 14. Sea $n > 2$ un número entero. Si $x_1 - x_2 = 1$, resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1} = \cdots = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + \cdots + x_{n-1}}.$$

Problema 15. Manuel distribuye un montón de galletas en varias cajas y en una lista registra el número de galletas que guarda en cada caja. Si el mismo número figura más de una vez, entonces sólo se registra una vez. Después José toma una galleta de cada caja y las pone en un primer plato. Luego vuelve a tomar una galleta de cada caja no vacía y las pone en un segundo plato. José continúa de esta forma hasta que todas las cajas quedan vacías. Luego José hace una lista registrando el número de galletas que hay en cada plato y al igual que Manuel si algún número aparece más de una vez, sólo lo registra una vez. Demuestra que la lista de Manuel contiene el mismo número de registros que la de José.

Problema 16. Cinco enteros positivos distintos forman una sucesión aritmética. ¿Es posible que su producto sea a^{2013} para algún entero positivo a?

Problema 17. Sobre un tablero de ajedrez infinito hay colocadas varias piezas rectangulares cuyos lados coinciden exactamente con las líneas de la cuadrícula. Cada una de las piezas rectangulares está formada por un número impar de cuadrados y cualesquiera dos de ellas no se traslapan. Demuestra que las piezas pueden ser coloreadas con 4 colores distintos de tal forma que 2 piezas con colores distintos no compartan puntos comunes en sus fronteras.

Problema 18. Cada una de 10 cajas contiene un número distinto de pelotas. En cada caja, todas las pelotas son de colores distintos. Muestra que siempre es posible escoger una pelota de cada caja de manera que todas ellas sean de colores distintos.

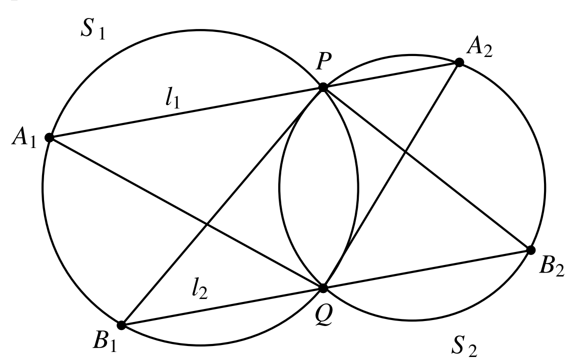
Problema 19. Un triángulo $A_1A_2A_3$ está inscrito en un círculo de radio 2 cm. Demuestra que siempre es posible escoger puntos B_1, B_2 y B_3 sobre los arcos $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$ y $\widehat{A_3A_1}$ respectivamente, tales que el valor numérico del área (en cm^2) del hexágono $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ es igual al valor numérico del perímetro (en cm) del triángulo $A_1A_2A_3$.

Problema 20. Demuestra que es posible colorear todos los puntos del plano de coordenadas enteras, usando dos colores, de manera que ningún rectángulo con vértices de coordenadas enteras del mismo color y lados paralelos a los ejes, tenga área un número del conjunto $\{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots\}$.

Soluciones a los problemas de práctica

A continuación se presentan las soluciones que el equipo editorial de Tzaloa preparó para los 20 problemas de práctica que figuran en este número de tu revista. Date cuenta que en la solución de cada uno de ellos siempre se incluye la explicación que justifica su validez y además observa que la argumentación siempre se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos. Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, por lo que si tú tienes otra solución y la quieres compartir con nosotros, te invitamos para que la envíes a nuestro buzón electrónico `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto la estaremos analizando para darte nuestra opinión.

Solución del problema 1. Como las rectas l_1 y l_2 son paralelas tenemos que $\angle A_1PB_1 = \angle PB_1Q$ y por ángulos inscritos tenemos que $\angle A_1PB_1 = \angle A_1QB_1$ y $\angle PA_1Q = \angle PB_1Q$, de donde B_1QPA_1 es un trapecio isósceles y $A_1Q = B_1P$. Análogamente $\angle PA_2Q = \angle PB_2Q$ y $PB_2 = QA_2$. Luego, los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 son congruentes y en particular tienen el mismo perímetro.



Solución del problema 2. Cada uno de los productos $x_{2i-1}x_{2i}$ tiene tres opciones:

$$x_{2i-1}x_{2i} = \begin{cases} 3+2\sqrt{2} & \text{si } x_{2i-1} = x_{2i} = \sqrt{2}+1, \\ 3-2\sqrt{2} & \text{si } x_{2i-1} = x_{2i} = \sqrt{2}-1, \\ 1 & \text{si } x_{2i-1} \neq x_{2i}. \end{cases}$$

Luego, sean a, b y c el número de parejas (x_{2i-1}, x_{2i}) tales que $x_{2i-1} \cdot x_{2i}$ es igual a $3+2\sqrt{2}$, $3-2\sqrt{2}$ y 1, respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned} a+b+c &= 75, \\ a(3+2\sqrt{2}) + b(3-2\sqrt{2}) + c &= 121. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación tenemos que $\sqrt{2}(2a-2b) = 121 - c - 3a - 3b$. Si $2a - 2b \neq 0$ tendríamos que $\sqrt{2}$ es racional, lo cual es falso. Luego, $a = b$. El sistema queda

$$\begin{aligned} 2a+c &= 75, \\ 6a+c &= 121. \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones obtenemos que $4a = 46$, de donde a no es entero y concluimos que no se pueden elegir los números en este caso. Si $S = 111$ el sistema queda

$$\begin{aligned} 2a+c &= 75, \\ 6a+c &= 111. \end{aligned}$$

Cuya solución es $a = 9$ y $c = 57$, por lo tanto sí se pueden elegir los números en este caso.

Solución del problema 3. Desarrollando y cancelando términos llegamos a la ecuación

$$a^3b^3 + ab = 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3.$$

Si a o b es igual a 0 tenemos la igualdad. Si son diferentes de cero llegamos a

$$a^2b^2 + 1 = 4a^2 + 6ab + 4b^2.$$

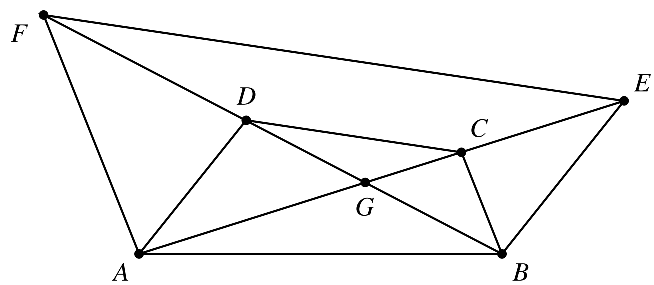
Sumando $2ab$ a cada lado y factorizando, obtenemos $(ab+1)^2 = (2a+2b)^2$, de donde $ab + 1 = \pm(2a+2b)$. Veamos los dos casos.

- $ab+1 = 2a+2b$. Despejando a tenemos que $a = \frac{2b-1}{b-2} = 2 + \frac{3}{b-2}$ de donde $b = -1$, 1, 3, 5 (y respectivamente a es igual a 1, -1, 5 y 3).

- $ab+1 = -(2a+2b)$. Despejando a tenemos que $a = \frac{-2b-1}{b+2} = -2 + \frac{3}{b+2}$ de donde $b = -5, -3, -1, 1$ (y respectivamente a es igual a -3, -5, 1 y -1).

Por lo tanto, las soluciones son $(a, b) = (1,-1), (-1,1), (5,3), (3,5), (-3,-5)$ y $(-5,-3)$.

Solución del problema 4. Sea G el punto de intersección de las diagonales.



Como las rectas AD y BE son paralelas, tenemos que los triángulos ADG y EBG son semejantes, de donde $\frac{GA}{GE} = \frac{GD}{GB}$ o $GA \cdot GB = GE \cdot GD$. Análogamente tenemos que $GA \cdot GB = GC \cdot GF$. Igualando obtenemos que $GE \cdot GD = GC \cdot GF$ o $\frac{GE}{GC} = \frac{GF}{GD}$. Por el teorema de Thales, las rectas DC y EF son paralelas.

Solución del problema 5. Como n divide a $a - b$ debe existir un entero c tal que $a = b + cn$. Luego,

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (b + cn)^n - b^n \\ &= \binom{n}{1} b^{n-1} cn + \binom{n}{2} b^{n-2} c^2 n^2 + \cdots + \binom{n}{n} c^n n^n \\ &= n^2 \left(b^{n-1} c + \binom{n}{2} b^{n-2} c^2 + \cdots + \binom{n}{n} c^n n^{n-2} \right), \end{aligned}$$

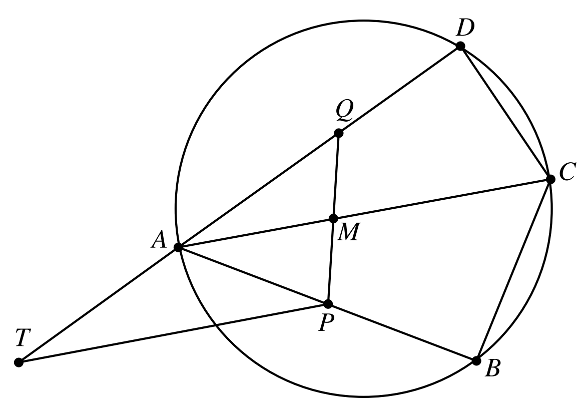
de donde n^2 divide a $a^n - b^n$.
El recíproco no siempre es cierto. Por ejemplo, si $a = 3$, $b = 1$ y $n = 4$ se tiene que 16 divide a $3^4 - 1^4 = 80$ y 4 no divide a $3 - 1$.

Solución del problema 6. De entre los números del 1 al 500 hay 166 que son múltiplos de 3, 167 que dejan residuo 1 y 167 que dejan residuo 2 al dividirse entre 3. B jugará de la siguiente manera: Si en el turno anterior A quitó el número a, B quitará un número b tal que $a + b$ es múltiplo de 3. Es decir, si A quita un múltiplo de 3, B también quitará un múltiplo de 3, si A quita uno que deja residuo 1, B quitará uno que deje residuo 2 y viceversa.
Veamos que siempre será posible que B juegue de esta manera. Como hay un número par de múltiplos de 3, después de cada ronda volverá a haber un número par. Así, si A quita un múltiplo de 3, B podrá quitar otro. Por otro lado, notemos que en una ronda se quita uno que deja residuo 1 si y solo si se quitó uno que deja residuo 2. Como al inicio hay la misma cantidad de múltiplos de estos, después de cada ronda habrá la misma cantidad y si A quitó uno de un tipo, B podrá quitar del otro.
Notamos que en cada ronda la suma fue reducida en un múltiplo de 3 y como en la primera ronda la suma era $\frac{500 \cdot 501}{2}$, cuando queden dos números, estos sumarán un múltiplo de 3 y B ganará.

Solución del problema 7. Si $n = 1$ o $n = 2$ tenemos que $an(n+2)(n+4)$ es igual a $15a$ y $48a$, respectivamente. Si cada uno de $15a$ y $48a$ es un entero, entonces $48a-3\cdot 15a = 3a$ también es un entero. Luego, $a = \frac{k}{3}$ con k entero. Como $n(n+2)(n+4)$ es múltiplo de 3 para todo entero positivo n (basta checar cada una de las congruencias: $n \equiv 0, 1$ o 2 módulo 3), tenemos que $an(n+2)(n+4) = k \cdot \frac{n(n+2)(n+4)}{3}$ es un entero para todo entero positivo n. Por lo tanto, los números reales a que satisfacen el problema son los números de la forma $\frac{k}{3}$ con k entero positivo.

Solución del problema 8. Supongamos que $y = 1$, entonces $x^2 + 4xy + y^2 = 2022$ es equivalente a $x^2+4x = 2021$, o $(x+2)^2 = 2025$. Como $2025 = 45^2$, entonces $x = 43$ es una solución. Entonces $(x, y) = (43, 1)$ es solución de la ecuación $x^2+4xy+y^2 = 2022$. Ahora supongamos que $x^2 + 4xy + y^2 = 11$ para algunos enteros x, y. Entonces, $(x + y)^2 + 2xy = 11$.
Como $(x + y)^2 = 11 - 2xy$, y el lado derecho de la igualdad es impar, entonces $(x + y)^2$ es impar, y por lo tanto $x + y$ también lo es. Luego, alguno de los números x y y es impar y el otro es par. Entonces $2xy$ es múltiplo de 4, digamos que $2x = 4k$ para cierta k. También, como $x + y$ es impar, $(x + y)^2 = 4q + 1$, dado que si $n = 2m + 1$, entonces $n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1$ que es de la forma $4q + 1$.
Así tenemos que, $(x + y)^2 + 2xy = 11$, implica que, $4q + 1 + 4k = 11$, de donde, $4(k + q) = 10$, que es una contradicción porque 10 no es múltiplo de 4. Por lo tanto, 11 no se puede escribir en la forma $x^2 + 4xy + y^2$ con x, y números enteros.

Solución del problema 9. Sea T el punto en la prolongación de AD tal que $AT = BC$.



Como $AT = BC$, $AP = CD$ y $\angle TAP = \angle TAB = \angle BCD$, tenemos que los triángulos ATP y CBD son semejantes, entonces $\angle ATP = \angle CBD$.
Como $\angle CBD = \angle CAD$, tenemos que, $\angle ATP = \angle CAD$. Entonces la recta TP es paralela a la recta AC, es decir, TP es paralela a AM. Luego, por el teorema de Thales, tenemos que $\frac{PM}{MQ} = \frac{TA}{AQ} = \frac{BC}{AQ} = 1$. Por lo tanto, $PM = MQ$ y M es punto medio de PQ.

Solución del problema 10. Sea (x, y, z) una solución de la ecuación. Entonces,

$$yz + 2xz = xyz + 3xy.$$

Supongamos que $x \geq 3$ y $y \geq 3$, entonces $y(x-1) \geq 3(x-1) \geq 2x$. Luego,

$$xyz + 3xy > xyz = yz + (x-1)yz \geq yz + 2xz,$$

lo que contradice la igualdad $yz + 2xz = xyz + 3xy$. Por lo tanto, $x < 3$ o $y < 3$.
Supongamos primero que $y \geq 3$. Luego, $x = 1$ o $x = 2$.
Si $x = 1$, tenemos que $2z = 3y$, luego $(x, y, z) = (1, 2a, 3a)$, con a un entero tal que $a \geq 2$, dado que $y \geq 3$.
Si $x = 2$, tenemos que $yz + 6y = 4z$. Luego, $(y-4)(z+6) = -24$. Así $y - 4 \geq -1$ y $z + 6 \geq 7$, entonces $y - 4 = -1$ y $z + 6 = 24$. Por lo tanto, $(x, y, z) = (2, 3, 18)$ es una solución.
Ahora supongamos que $y = 2$, entonces tenemos que, $3x = z$. Luego las tripletas de enteros $(b, 2, 3b)$, con $b > 0$ son solución (observemos que recuperamos el caso $a = 1$ del caso anterior).
Si $y = 1$, tenemos que, $3x = z + xz$, de donde $(x+1)(3-z) = 3$, con $x + 1 \geq 2$. Entonces, $x + 1 = 3$ y $3 - z = 1$, lo que implica que $(2, 1, 2)$ es solución.
Por lo tanto, las soluciones son: $(1, 2a, 3a)$, $(a, 2, 3a)$, donde a es un entero tal que $a > 0$, $(2, 1, 2)$ y $(2, 3, 18)$.

Solución del problema 11. Veamos que no es posible, después de cualquier número de pasos.
Supongamos que después de k etapas, con k número natural distinto de cero, tenemos los números a, b, c y d. Llamemos m,n p y q los enteros precedentes con $a = m - n$, $b = n - p$, $c = p - q$ y $d = q - m$. Entonces, $a + b + c + d = 0$, de donde, $-d = a + b + c$. Luego, tenemos que,

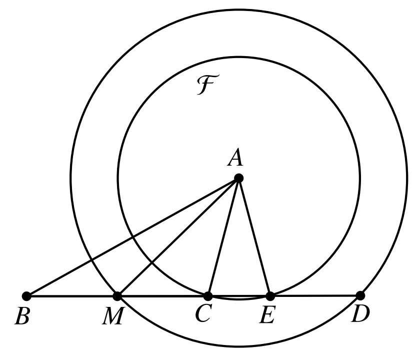
$$\begin{aligned} bc - ad &= bc + a(a + b + c) = (a + b)(a + c) \\ ac - bd &= ac + b(a + b + c) = (a + b)(b + c) \\ ab - cd &= ab + c(a + b + c) = (a + c)(b + c), \end{aligned}$$

de donde,

$$|bc - ad||ac - bd||ab - cd| = [(a + b)(b + c)(c + a)]^2.$$

Sin embargo, el producto de tres números primos no puede ser un cuadrado perfecto. Por lo tanto, no es posible obtener dichos números.

Solución del problema 12. Sea $\mathcal{F}$ el círculo con centro A y radio AC y E el otro punto de intersección de $\mathcal{F}$ y BC. Entonces $\angle AEC = \angle ACE$, de donde, $\angle AED = \angle ACM$. También $AD = AM$ y $\angle ADE = \angle AMC$, luego los triángulos ADE y AMC son semejantes. Entonces $DE = CM$. Pero $CM = MB$, de donde $DE = MB$, lo que implica que, $MD = BE$.

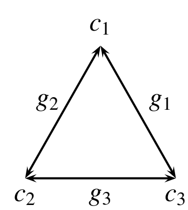


Observemos que, $\angle AEC = \angle ACE = 90^\circ - \frac{1}{2}B$. Entonces,

$$\angle BAE = 180^\circ - \left(\angle B + 90^\circ - \frac{1}{2}B\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}B.$$

Luego, $AB = BE$ y por lo tanto, $MD = AB$.

Solución del problema 13. Denotemos por $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{20}$ a los niños. Para un abuelo g_k denotamos por $G_k = \{c_i \mid c_i \text{ es un nieto de } g_k\}$. Como el número de niños en la escuela es finito, entonces también lo es el número de abuelos.
Supongamos que g_1 tiene n_1 nietos y que n_1 es máximo, es decir, G_1 es el conjunto con más elementos. Claramente $n_1 \geq 2$.
Supongamos que $n_1 \leq 13$.
Sea $c_1 \in G_1$. Existe un niño, digamos c_2, tal que c_2 no está en G_1 y c_1 y c_2 tienen un abuelo en común, digamos g_2, donde $g_1 \neq g_2$. Si cada nieto de g_1 también tuviera a g_2 como abuelo, entonces $G_1 \cup \{c_2\} \subset G_2$. Luego, en G_2 habría más niños que en G_1, lo que contradice que G_1 es el conjunto con más elementos. Así, existe un nieto de g_1, digamos c_3, que no es nieto de g_2. Luego, c_2 y c_3 tienen un abuelo en común, digamos g_3, y $g_3 \notin \{g_1, g_2\}$



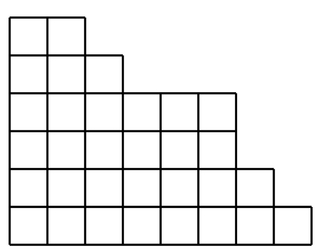
Para $i \geq 4$, c_i tiene un abuelo en común con cada uno de los niños c_1, c_2, c_3. Entonces los dos abuelos de c_i están en el conjunto $\{g_1, g_2, g_3\}$.
Se deduce entonces que los 40 abuelos de los c_i forman el conjunto $\{g_1, g_2, g_3\}$. Como $40 = 3 \times 13 + 1$ tenemos que, por el principio de las casillas, al menos uno de los abuelos g_1, g_2, g_3 tiene al menos 14 nietos. Luego, $n_1 \geq 14$ lo que es una contradicción dado que supusimos que $n_1 \leq 13$.
Por lo tanto, $n_1 \geq 14$.

Observemos que 14 no puede ser superado. Si $c_1, c_2, \ldots, c_{14}$ tienen a g_1 como abuelo; $c_1, c_2, \ldots, c_7$ tienen a g_2; $c_8, c_9, \ldots, c_{14}$ tienen a g_3; y $c_{15}, c_{16}, \ldots, c_{20}$ tienen a g_2 y g_3. Entonces, $n_1 = 14$ y $n_2 = n_3 = 13$.

Solución del problema 14. Consideremos la ecuación $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3 + \cdots + x_n + x_1}$ y primero la elevamos al cuadrado, después restamos de ambos lados la suma $x_1 + \cdots + x_n$ y finalmente volvemos a elevar al cuadrado. De lo anterior obtenemos que $x_1(x_2 + \cdots + x_n) = x_2(x_3 + \cdots + x_n + x_1)$, de donde se sigue que $(x_1 - x_2)(x_3 + \cdots + x_n) = 0$. Dado que $x_1 - x_2 = 1$, tenemos que $x_3 + \cdots + x_n = 0$. Dado que las ecuaciones contienen las raíces cuadradas de $x_3, \ldots, x_n$, tenemos que esos números no pueden ser negativos y dado que su suma es igual a cero, entonces cada uno de ellos es igual a cero, $x_3 = \cdots = x_n = 0$.
Por último, de la ecuación $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2 + \cdots + x_n} = \sqrt{x_n} + \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}$ tenemos que $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1 + x_2}$, de donde, elevando al cuadrado, se sigue que $\sqrt{x_1 x_2} = 0$, por lo tanto $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$. Como ambos son no negativos y además $x_1 - x_2 = 1$, tenemos que $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$. En resumen, la única solución del sistema es $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Solución del problema 15. Comenzamos ordenando las cajas en una hilera, de manera que el número de galletas que contienen decrezca de izquierda a derecha. En una hoja de papel cuadriculado dibujamos una *escalera* en la cual la altura de la primera columna (de ancho un cuadrito) sea igual al número de galletas de la primera caja (izquierda), la altura de la segunda columna corresponda al número de galletas de la segunda caja y así sucesivamente. Sea el primer escalón el formado por la(s) columna(s) de mayor altura y el último el formado por las columna más baja. De esta forma, el número de registros de la lista de Manuel es igual al número de escalones de nuestra escalera (las cajas con el máximo de galletas corresponden a las columnas que forman el primer escalón y así sucesivamente).

En la siguiente figura se ilustra la escalera correspondiente al caso particular donde Manuel ha rellenado 8 cajas con 6, 6, 5, 4, 4, 4, 2 y 1 galletas respectivamente. Nótese que en este caso la lista de registros de Manuel consta de 5 números, a saber: 6, 5, 4, 2 y 1.



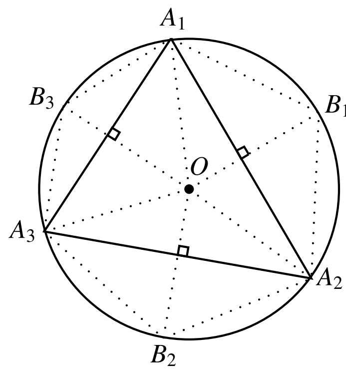
Ahora, observamos que en el modelo, tomar una galleta de cada caja es equivalente a cortar la fila de hasta abajo de nuestra escalera. Entonces, al terminar de rellenar los platos con el máximo número de galletas habremos removido las filas que forman el último escalón, de forma que éste desaparece, quedando entonces una escalera con 1 escalón menos. Procediendo de esta manera, al llenar la siguiente ronda de platos con el siguiente máximo número de galletas, removeremos el siguiente escalón y así sucesivamente. Ahora es evidente que el número de registros de la lista de José, al igual que el de la lista de Manuel, coincide pues en ambos casos es igual al número de escalones de nuestra escalera.

Solución del problema 16. Tomamos una sucesión aritmética de cinco enteros positivos distintos, por ejemplo, $1, 2, 3, 4, 5$. Su producto es 120 que no es igual a la potencia 2013 de ningún entero positivo. Ahora multiplicamos cada uno de esos números por 120^n para obtener: $120^n, 2 \cdot 120^n, 3 \cdot 120^n, 4 \cdot 120^n, 5 \cdot 120^n$. Al igual que la sucesión original, los nuevos números forman una sucesión aritmética y su producto es igual a 120^{5n+1}. Ahora, sólo falta escoger n de manera $5n + 1$ sea divisible entre 2013. Finalmente, observamos que esto es posible, dado que 5 y 2013 son primos relativos. Sólo necesitamos escoger y y n de forma que $5n + 1 = 2013y$. Si tomamos $y = 2$ y $n = 805$, entonces el producto es igual a la potencia 2013 de 120^2.

Solución del problema 17. Podemos representar el problema sobre una hoja cuadriculada de longitudes infinitas. Dividimos la hoja en cuadrados de 2×2 y numeramos los cuadraditos que los forman $1, 2, 3, 4$ a partir de la celda de hasta arriba y a la izquierda, siguiendo la dirección de las manecillas del reloj. Dado que ambos lados de cada rectángulo son de longitudes impares, las celdas de sus 4 esquinas están marcadas todas con el mismo número. Finalmente, asociamos 4 colores distintos con los números $1, 2, 3, 4$ y pintamos cada rectángulo según el color que señalan sus esquinas. Es claro que los números en las esquinas de dos rectángulos adyacentes son distintos y por lo tanto sus colores son también diferentes.
(Este problema es un caso particular del teorema de los cuatro colores, el cual es uno de los teoremas más famosos en matemáticas, enunciado en 1852 y demostrado en 1970. Este teorema afirma que cualquier mapa puede ser coloreado con a lo más cuatro colores de manera que cualesquiera dos regiones vecinas queden coloreadas con diferente color.)

Solución del problema 18. Ordenamos en una hilera las cajas según el número de pelotas que contienen de forma creciente de izquierda a derecha. De esta forma la primera caja contiene al menos 1 pelota, la segunda al menos 2 y así sucesivamente, de tal forma que la última contiene al menos 10 pelotas. Entonces, comenzamos tomando una pelota de la primera caja. Dado que la segunda caja contiene pelotas de al menos dos colores, escogemos la pelota de la segunda caja de color distinto a la escogida de la primera. La tercer caja contiene al menos 3 pelotas de distintos colores y por lo tanto podemos escoger la tercer pelota de color diferente a las escogidas de las dos cajas anteriores. Es claro que siguiendo este procedimiento obtenemos el resultado buscado.

Solución del problema 19. Sean B_1, B_2 y B_3 los puntos medios de los arcos $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{A_2A_3}$ y $\widehat{A_3A_1}$, respectivamente.



El área del hexágono $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ es la suma de las áreas de los cuadriláteros $OA_1B_1A_2$, $OA_2B_2A_3$ y $OA_3B_3A_1$, donde O es el centro del círculo. Ahora, observamos que cada uno de esos cuadriláteros tiene sus digonales perpendiculares, por lo tanto el área de cada cuadrilátero es el semi-producto de sus diagonales. Entonces, la suma de esas áreas es igual a

$$\frac{1}{2}OB_1 \cdot A_1A_2 + \frac{1}{2}OB_2 \cdot A_2A_3 + \frac{1}{2}OB_3 \cdot A_3A_1.$$

Dado que $OB_1 = OB_2 = OB_3 = 2\,cm$ por las hipótesis del problema, entonces esta suma y el área del hexágono es igual a $A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1$, que es también el perímetro del triángulo $A_1A_2A_3$.

Solución del problema 20. Vamos a colorear de rojo los puntos (x, y) tales que $x + y \not\equiv 1 \pmod 3$ y todos los otros puntos de blanco.
Caso 1. Sea W un rectángulo con todos sus vértices blancos y con lados paralelos a los ejes. Sean (a, b) y (a, d) dos vértices adyacentes. Entonces $a + b \equiv a + d \equiv 1 \pmod 3$, de donde $b - d \equiv 0 \pmod 3$. Luego, el área de W, la cual es un múltiplo de $b - d$, es divisible por 3, de donde su área no puede ser una potencia de 2.
Caso 2. Sea R el rectángulo con todos sus vértices rojos y lados paralelos a los ejes. Sean $(a, b), (a, d), (c, d), (c, b)$ sus vértices con $c > a$ y $d > b$. Sea $x = a + b$, y supongamos que el área de W es una potencia de 2. Se sigue que $c = a + 2^p$ y $d = b + 2^q$ para algunos enteros no negativos p y q. Entonces, como los cuatro vértices son rojos, tenemos que

$$\begin{aligned}
x &\not\equiv 1 \pmod 3,\\
x + (-1)^p &\not\equiv 1 \pmod 3,\\
x + (-1)^q &\not\equiv 1 \pmod 3,\\
x + (-1)^p + (-1)^q &\not\equiv 1 \pmod 3.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, módulo 3, tenemos que $\{x, x + (-1)^p\} = \{0, 2\} = \{x, x + (-1)^q\}$. De aquí, $x + (-1)^p \equiv x + (-1)^q \pmod 3$ de donde p y q tienen la misma paridad. Esto nos lleva a que x, $x + (-1)^p$ y $x + (-1)^p + (-1)^q$ son distintos módulo 3. En particular, uno de ellos es congruente con 1 módulo 3, lo que es una contradicción.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 4.

Problema 1. Demuestra que para cualesquiera números reales positivos x, y, z, se cumple la desigualdad $\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Problema 2. Encuentra una construcción con regla y compás, de manera que dado un segmento cualquiera AB y una recta l paralela a él, permita localizar un punto C sobre l tal que el producto $AC \cdot BC$ sea mínimo.

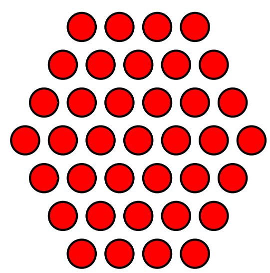
Problema 3. En un incio se escriben en el pizarrón el 1 y los números positivos x y y. En cada paso está permitido tomar dos números (no necesariamente distintos) del pizarrón y entonces escribir su suma o su diferencia en el pizarrón. También es posible escoger del pizarrón cualquier número distinto de cero y entonces escribir su recíproco en el pizarrón.

1. ¿Es posible obtener al número x^2 al término de una sucesión finita de pasos?

2. ¿Es posible obtener al número $x \cdot y$ al término de una sucesión finita de pasos?

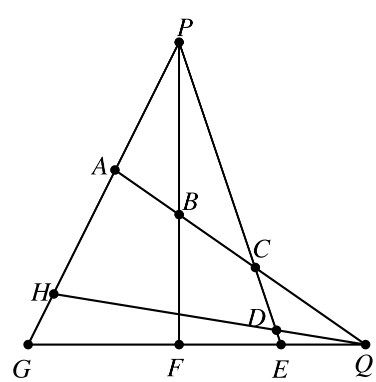
Problema 4. Encuentra todos los enteros positivos de dos dígitos $n = 10a + b$ tales que para cualquier entero x la diferencia $x^a - x^b$ es divisible por n.

Problema 5. Cierto número de tubos se agrupan en forma hexagonal. El número de tubos agrupados puede ser: 1, 7, 19, 37 (como se muestra en la figura), 61, 91, ... Si se continúa la sucesión, se observa que el número total de tubos es en varias ocasiones un número que termina en 69. ¿Cuál es el término número 69 de la sucesión que termina en 69?



Problema 6. Encuentra todos los enteros positivos k tales que para todos los enteros positivos n los números $4n + 1$ y $kn + 1$ son primos relativos.

Problema 7. En la figura, F se encuentra en GE y Q en la extensión de GE. Además, A y H están en PG de manera que QA intersecta a PF en B, QA intersecta a PE en C, y QH intersecta a PE en D. Demuestra que $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA} = 1$.



Problema 8. Sean a y b números reales positivos. Demuestra que

$$(a-b)^{2013}(a+b)^{2013}(b-a)^{2013} \geq (a^{2013}-b^{2013})(a^{2013}+b^{2013})(b^{2013}-a^{2013}).$$

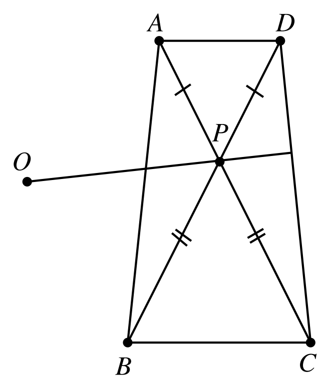
Problema 9. Sea ABC un triángulo isósceles con $AC = BC$. El incírculo de ABC intersecta a AB en D y a BC en E. Una recta por A que es distinta a la recta AE intersecta al incírculo en F y G. Sean K y L las intersecciones de AB con EF y EG. Demuestra que D es el punto medio de KL.

Problema 10. Se tiene un tablero de ajedrez de $n \times n$. ¿De cuántas maneras podemos colocar $2n-2$ piedras en algunos de los cuadrados de tal manera que no haya dos de ellas en la misma diagonal del tablero de ajedrez? (dos piedras están en la misma diagonal del tablero de ajedrez si el segmento que forman es paralelo a una de las dos diagonales del tablero).

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 1.

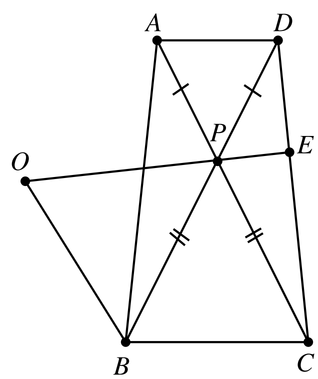
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2013. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2013, por lo que todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. Los segmentos AC y BD se intersectan en un punto P tal que $PA = PD$ y $PB = PC$. Sea O el circuncentro del triángulo PAB. Demuestra que los segmentos OP y CD son perpendiculares.



Solución. Los triángulos APB y DPC son congruentes dado que $PA = PD$, $PB = PC$ y $\angle APB = \angle DPC$. Luego, $\angle BAP = \angle CDP$. Observemos que al menos uno de los ángulos, $\angle PAB$ o $\angle PBA$, es agudo, luego sin pérdida de generalidad supongamos que es $\angle PAB$. Como O es el circuncentro del triángulo PAB, tenemos que $OB = OP$ y $\angle BOP = 2\angle BAP$, entonces,

$$\angle OPB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BOP = 90^\circ - \angle BAP.$$



Sea E la interseccin de OP y CD. Entonces $\angle EPD = \angle OPB$. Luego, $\angle EPD = 90^\circ - \angle CDP$. Así $\angle EPD + \angle EDP = \angle EPD + \angle CDP = 90^\circ$. Por lo tanto, OP y CD son perpendiculares.

Problema 2. ¿Cuántos enteros positivos de seis dígitos hay que son cuadrados perfectos con la propiedad de que si a cada dígito se le suma 1, el número resultante es también un cuadrado perfecto de seis dígitos?

Solución. Supongamos que el número de seis dígitos que es un cuadrado perfecto es,

$$m^2 = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f,$$

luego,

$$n^2 = 10^5(a + 1) + 10^4(b + 1) + 10^3(c + 1) + 10^2(d + 1) + 10(e + 1) + (f + 1),$$

de modo que $n^2 - m^2 = 111,111 = 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$.
Como $111,111$ es el producto de 5 primos distintos, entonces tiene 32 divisores positivos. Sean d_i, $i = 1, 2, \ldots, 32$, los divisores positivos de $111,111$. Entonces, $n + m = d_i$ y $n - m = \frac{111,111}{d_1}$. Como se debe tener que $d_i > \frac{111,111}{d_i}$, entonces hay a lo sumo 16 soluciones dadas por $m = \frac{1}{2}\left(d_i - \frac{111,111}{d_i}\right)$. Como m^2 es un número de 6 dígitos se debe tener además que $632.46 \approx 200\sqrt{10} < 2m < 2000$. Revisando los divisores existen 4 soluciones:

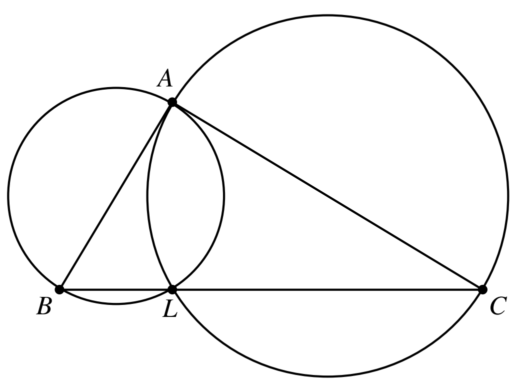
d_i	m	m^2	n^2	n
$3 \times 7 \times 37 = 777$	317	100, 489	211, 600	460
$3 \times 13 \times 37 = 1443$	683	466, 489	577, 600	760
$3 \times 11 \times 37 = 1221$	565	319, 225	430, 336	656
$7 \times 11 \times 13 = 1001$	445	198, 025	309, 136	556

Problema 3. Nos dan tres números reales distintos de cero de forma que si los usamos como coeficientes de trinomios cuadráticos, cada uno de esos trinomios tiene una raíz real. ¿Es cierto que cada uno de estos trinomios tiene una raíz positiva?

Solución. La respuesta es afirmativa. Dado que los coeficientes a, b y c son distintos de cero, ninguno de los seis trinomios posibles tiene raíces iguales a cero. Además, como cada trinomio tiene una raíz real, la otra raíz también lo es. Ahora procedemos por reducción al absurdo.
Supongamos que el trinomio ax^2+bx+c tiene dos raíces reales negativas $-r$ y $-s$ donde r y s son números positivos. Entonces $ax^2+bx+c = a(x+r)(x+s)$, donde $b = a(r+s)$ y $c = ars$ tienen el mismo signo que a. Por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que a, b y c son positivos. Además, $b^2 \geq 4ac$, $c^2 \geq 4ab$ y $a^2 \geq 4bc$, ya que las raíces de cada trinomio son reales. Multiplicando estas desigualdades obtenemos que $(abc)^2 \geq (8abc)^2$, es decir, $63(abc)^2 \leq 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, cada uno de los seis trinomios debe tener al menos una raíz real.

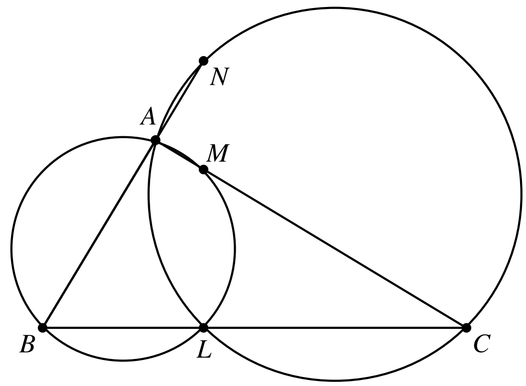
Problema 4. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 90°$. Sobre el lado BC se encuentra un punto L. El circuncírculo del triángulo ABL intersecta nuevamente a la recta AC en M y el circuncírculo del triángulo ACL intersecta nuevamente a la recta AB en N. Demuestra que los puntos L, M y N son colineales.

Solución. Supongamos que el circuncírculo del triángulo ALC es tangente a la recta AB. Se tiene que $N = A$.



Como AC es perpendicular a AB, AC es diámetro del circuncírculo del triángulo ALC y $\angle ALC = 90°$. Luego, AB es diámetro del circuncírculo del triángulo ABL, el cual

sería tangente a la recta AC y $M = A$. Luego, como M y N coinciden, M, N y L están en una misma recta.
En el otro caso:



Como C, A, L y N están en una misma circunferencia y $\angle CAN = 90°$, tenemos que NC es un diámetro de dicha circunferencia y $\angle CLN = 90°$. De la misma manera, como B, L, M y A están en una misma circunferencia y $\angle BAM = 90°$, tenemos que MB es un diámetro de dicha circunferencia y $\angle BLM = 90°$.
Luego, como $\angle BLM = \angle CLN = 90°$, se tiene que L, M y N son colineales.

Problema 5. En un tablero de ajedrez de 15×15 hay colocadas 15 torres que no se atacan entre sí. A continuación, cada torre hace un movimiento como caballo. Muestra que después de esto necesariamente tiene que haber al menos un par de torres que se atacan entre sí.

Solución. Comenzamos numerando renglones y columnas del 1 al 15 de forma que cada casilla queda definida por una pareja (a, b), donde $a, b \in \{1, \ldots, 15\}$. Sea (a_k, b_k) la casilla donde se ubica la k-ésima torre. Dado que en la posición inicial ninguna pareja de torres se ataca entre sí, entonces en cada columna y renglón hay exactamente 1 torre colocada. Es así que los números $a_1, \ldots, a_{15}$ son, en algún orden, los números del 1 al 15, y lo mismo sucede con los números $b_1, \ldots, b_{15}$. De lo anterior, concluimos que si las torres no se atacan entre sí, entonces la suma $S = a_1 + \cdots + a_{15} + b_1 + \cdots + b_{15} = 15 \cdot 16$ es par.
Ahora veremos que después de que cada torre hace un movimiento como caballo, la suma S se vuelve impar. De hecho, observamos que cuando la k-ésima torre se mueve como caballo, a_k cambia en ± 2 y b_k cambia en ± 1 o a_k cambia en ± 1 y b_k cambia en ± 2. Entonces, $a_k + b_k$ cambia en ± 1 ó ± 3. Dado que tenemos un número impar de torres, la suma S se vuelve impar una vez que todas las torres se han movido. Esto implica que al menos un par de torres se ataca entre sí, pues de otra forma, como hemos probado, la suma S sería par.

Problema 6. Alma y Brenda parten de los puntos A y B respectivamente y se mueven simultáneamente acercándose una hacia la otra hasta encontrarse. Sus velocidades son constantes pero no necesariamente iguales. Si Alma hubiera empezado a moverse 30 minutos antes se hubieran encontrado en un punto 2 kilómetros más cercano a B. Si en lugar de eso, Brenda hubiera empezado a moverse 30 minutos antes, entonces se hubieran encontrado a una distancia d más cerca de A. ¿Serán suficientes los datos para determinar el valor de d?

Solución. Supongamos que la distancia entre A y B es de x kilómetros. Sean a y b las velocidades, en kilómetros por hora, de Alma y Brenda respectivamente. Entonces la distancia que recorre Alma es $\frac{ax}{a+b}$ y la de Brenda es $\frac{bx}{a+b}$. Cuando Alma recorre 2 kilómetros más y Brenda 2 kilómetros menos, la diferencia de sus tiempos es de $\frac{1}{2}$ hora. Lo anterior implica que,

$$\frac{1}{a}\left(\frac{ax}{a+b}+2\right)-\frac{1}{b}\left(\frac{bx}{a+b}-2\right)=\frac{1}{2}$$

y simplificando obtenemos que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$. Análogamente,

$$\frac{1}{b}\left(\frac{bx}{a+b}+d\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{ax}{a+b}-d\right)=\frac{1}{2}$$

y de aquí $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2d}$. Por lo tanto, $d=2$.

Problema 7. Sean d y d' divisores positivos de un entero positivo n. Si $d'>d$, demuestra que $d'>d+\frac{d^2}{n}$.

Solución. Si d y d' son divisores positivos de un entero positivo n, con $d'>d$, tenemos que $n=dk$ y $n=d'k'$ con $k>k'$. Entonces,

$$k^2>(k+1)(k-1)\geq(k+1)k'$$

ya que $k-1\geq k'\Leftrightarrow k\geq k'+1\Leftrightarrow k>k'$. Luego, $\frac{1}{k'}>\frac{k+1}{k^2}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}$ y por lo tanto,

$$d'=\frac{n}{k'}>\frac{n}{k}+\frac{n}{k^2}=d+\frac{n}{(\frac{n}{d})^2}=d+\frac{d^2}{n}.$$

Problema 8. Pablo tiene suficientes fichas rojas, blancas y azules. Él desea colocar fichas en cada una de las casillas de un tablero de ajedrez. De entre todas las maneras en que puede hacerlo, ¿habrá más con un número par de fichas rojas o con un número impar de fichas rojas?

Solución. Sea n un entero entre 0 y 64. El número de maneras en las que Pablo puede poner n fichas rojas en las 64 casillas del tablero de ajedrez es igual a $\binom{64}{n}$. Sobran $64-n$ casillas, las cuales deben tener fichas de color blanco o azul. Como cada una de esas casillas tiene 2 posibilidades, hay 2^{64-n} formas de llenar las casillas restantes. Luego, el número de arreglos que contienen exactamente n fichas rojas es igual a $\binom{64}{n}2^{64-n}$. Así, el número de arreglos que contienen un número par de fichas de color rojo es

$$P = \binom{64}{0}2^{64} + \binom{64}{2}2^{62} + \binom{64}{4}2^{60} + \cdots + \binom{64}{62}2^{2} + \binom{64}{64}2^{0}$$

y el número de arreglos que contienen un número impar de fichas de color rojo es

$$I = \binom{64}{1}2^{63} + \binom{64}{3}2^{61} + \binom{64}{5}2^{59} + \cdots + \binom{64}{61}2^{3} + \binom{64}{63}2^{1}.$$

Por otro lado, por el teorema del binomio, tenemos que

$$1 = (2-1)^{64} = \binom{64}{0}2^{64} - \binom{64}{1}2^{63} + \binom{64}{2}2^{62} + \cdots + \binom{64}{64}2^{0} = P - I.$$

Luego, el número de arreglos con un número par de fichas rojas es uno más que el número de arreglos con un número impar de fichas rojas.

Problema 9. Supongamos que en una cinta infinita escribimos todos los números naturales en orden y sin dejar espacios: 1234567891011121314. . .. Después cortamos la cinta en tiras de 7 dígitos de largo.
Demuestra que todo número de 7 dígitos:
(a) aparecerá en al menos una de las tiras,
(b) aparecerá en un número infinito de tiras.

Solución. (a) Sea n un número cualquiera de 7 dígitos. Consideramos los 7 números consecutivos de 8 dígitos $10n, 10n+1, \ldots, 10n+6$. Dado que 7 y 8 son primos relativos, alguna de las tiras tiene que comenzar justo con uno de esos números y esa es la tira en la que está el número n.
(b) De manera similar, podemos considerar a los 7 enteros consecutivos de 9 dígitos: $100n, 100n+1, \ldots, 100n+6$, a los 7 números consecutivos de 10 dígitos: $1000n, 1000n+1, \ldots, 1000n+6$, y así sucesivamente. Para cada cantidad de dígitos no divisible entre 7, obtenemos una tira con el número n.

Problema 10. Los números p y q son números primos que satisfacen,

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

para algún entero positivo n. Determina todos los valores posibles de $q-p$.

Solución. Tenemos que $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2pq+p+q+1}{q(p+1)}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2pq+p+q+1}{q(p+1)} = \frac{2n}{n+2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2pq+p+q+1}{q(p+1)} - 2 = \frac{2n}{n+2} - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{p-q+1}{q(p+1)} = \frac{-4}{n+2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{q}{q(p+1)} - \frac{p+1}{q(p+1)} = \frac{4}{n+2} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2}.
\end{aligned}$$

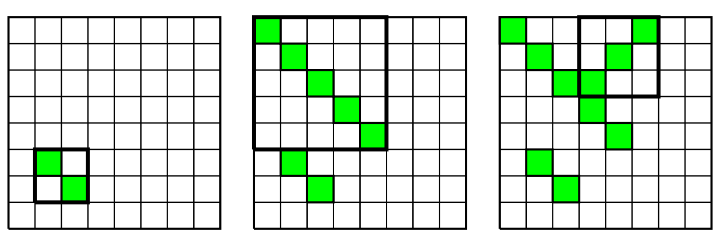
Como n es positivo, tenemos que $q > p+1$. Luego, $q \nmid p+1$ y por lo tanto q y $p+1$ son primos relativos ya que q es primo. Realizando la suma del lado izquierdo de la última igualdad, obtenemos la igualdad equivalente

$$(q-p-1)(n+2) = 4q(p+1).$$

Ahora, $(q, q-p-1) = (q, p+1) = 1$ y $(p+1, q-p-1) = (p+1, q) = 1$, de modo que $q-p-1$ y $q(p+1)$ son primos relativos. En consecuencia, $q-p-1$ debe dividir a 4. Como $q-p-1$ es positivo, las posibilidades son 1, 2 o 4, de donde $q-p = 2$, 3 o 5. Cada uno de estos valores se puede obtener con $(p, q, n) = (3, 5, 78)$, $(2, 5, 28)$ y $(2, 7, 19)$, respectivamente. Por lo tanto, los valores posibles de $q-p$ son 2, 3 y 5.

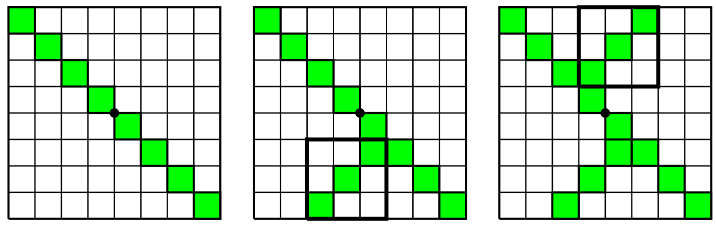
Etapa Final Estatal de la 26ª OMM

Problema 1. Dos jugadores A y B juegan alternadamente en una cuadrícula de $n \times n$. Una tirada consiste en escoger un entero $2 \leq m \leq n$ y una subcuadrícula de $m \times m$ contenida en la cuadrícula inicial, y pintar todos los cuadraditos de 1×1 que están en una de las dos diagonales de dicha subcuadrícula. Además se tiene la restricción de que no se puede escoger una subcuadrícula que contenga cuadraditos pintados previamente (ver el ejemplo que se ilustra abajo en la figura). Pierde el jugador que ya no puede realizar una tirada. Si A es el primero en tirar, ¿quién de A o B puede asegurar que ganará si juega apropiadamente? ¿Cómo debe hacer para asegurar su triunfo?



jugada de A, $m = 2$ jugada de B, $m = 5$ jugada de A, $m = 3$

Solución. Veamos que A puede asegurar su triunfo. En su primer turno A escoge $m = n$ y pinta todos los cuadraditos de una de las diagonales. Después de que B juegue, A sólo refleja la jugada de B con respecto al centro del cuadrado de $n \times n$ (ver ilustración abajo).



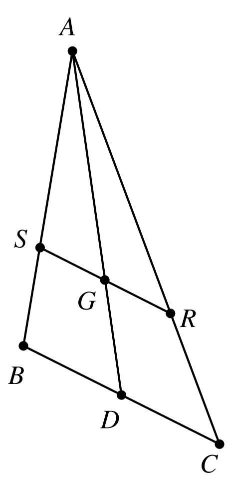
jugada de A, $m = n = 8$ jugada de B, $m = 3$ jugada de A, $m = 3$

Claramente A siempre podrá hacer esto puesto que B no puede escoger una subcuadrícula con cuadraditos ya pintados (es decir, B se ve obligado a tirar en uno de los dos lados que determinó A en su primer turno). Por lo tanto, si B puede pintar cuadraditos en su turno, entonces también puede hacerlo A y así, el primero en no poder pintar cuadraditos es B.

Problema 2. ¿Existe un triángulo ABC y un punto P en su interior que cumplan que toda recta que pasa por P divide a ABC en dos figuras de igual área?

Solución. La respuesta es no. Toda recta que pasa por A y un punto interior del triángulo divide a este en dos triángulos, y la única recta con la propiedad de que estos tengan la misma área es la mediana. Como esto mismo sucede con los otros dos vértices, concluimos que el único candidato para ser el punto P es el centroide G del triángulo. Sin embargo podemos ver que la recta paralela a BC que pasa por G no divide al triángulo en dos figuras de igual área. En efecto, sean R y S los puntos de intersección de esta recta con AC y AB, respectivamente y sea D el punto medio de BC; para un triángulo XYZ, denotemos por (XYZ) su área. Entonces

$$\frac{(ASR)}{(ABC)} = \left(\frac{AG}{AD}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{1}{2}.$$



Problema 3. Se tienen 11 tarjetas numeradas del 1 al 11. Determinar todas las formas de distribuir las tarjetas en 3 montones de tal manera que la suma de las tarjetas de cada montón sea 22 y que en ninguno de los montones haya dos tarjetas, una de las cuales tenga un número primo y la otra esté numerada con un número múltiplo de ese primo (por ejemplo, la tarjeta que lleva el 10 no puede estar en el mismo montón que la que lleva el 5).

Solución. Primero observemos que la máxima suma que se logra con dos números es $10 + 11 = 21$; de aquí que los montones deben tener tamaños $3, 4, 4$ o $3, 3, 5$. Como la tarjeta con el 2 no puede estar en el mismo montón que otra par, y la suma 22 es par, entonces 2 debe estar en un montón con 2 impares o con 4 impares.
Primer caso. La tarjeta 2 con dos impares. La única posibilidad de que las otras dos sumen 20 es con 9 y 11. Ahora, como 3 y 6 no pueden estar juntas y lo mismo ocurre con 5 y 10, tenemos dos posibilidades: 6 y 10 juntas (y entonces 3 y 5 juntas en el otro montón) o 5 y 6 juntas (y entonces 3 y 10 juntas en el otro montón). Las tarjetas que pueden combinarse con ellas son las restantes: 1, 4, 7, 8. En el primer caso, en el montón de 6 y 10 faltaría agregar tarjetas que sumaran 6, lo cual es imposible con las que están disponibles. En el segundo caso, cuando 5 y 6 están juntas, en su montón falta agregar tarjetas que sumen 11 y esto sólo puede lograrse con 4 y 7. Concluimos entonces que una posibilidad de distribución es $\{2, 9, 11\}$, $\{1, 3, 8, 10\}$ y $\{4, 5, 6, 7\}$.
Segundo caso. La tarjeta 2 está en un montón con 4 impares. Queremos lograr suma 20 con 4 de los números 1, 3, 5, 7, 9 y 11. Es claro que no pueden usarse simultáneamente 9 y 11 y también, por las condiciones del problema, no pueden quedar juntas 3 y 9. Además, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ así que forzosamente una de 9 u 11 debe usarse. La única posibilidad es poniendo las tarjetas 1, 3, 5 y 11 con la número 2. Ahora sobran las tarjetas 4, 6, 7, 8, 9 y 10 y éstas deben distribuirse en dos montones; en esta colección hay dos impares y, como la suma 22 es par, 7 y 9 deben quedar en el mismo montón; la que se necesita para completar los 22 con ellas es la tarjeta 6. Concluimos entonces que la otra posibilidad de distribución es $\{1, 2, 3, 5, 11\}$, $\{6, 7, 9\}$ y $\{4, 8, 10\}$.

Problema 4. Encontrar todos los enteros positivos a, b y p, con p número primo que satisfagan la igualdad

$$a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1.$$

Solución. La ecuación original se puede reescribir como $a^3b^2 - a^3 - b^2 + 1 = pa^3$ que es equivalente a $(a^3 - 1)(b^2 - 1) = pa^3$. Por lo anterior, $a^3 - 1$ es un factor de pa^3; pero $a^3 - 1$ y a^3 no pueden tener factores en común mayores que 1, así que $a^3 - 1$ es divisor de p; luego, como p es primo, tenemos que $a^3 - 1 = 1$ o $a^3 - 1 = p$. En el primer caso no hay solución entera, por lo tanto debe ocurrir la igualdad $a^3 - 1 = p$, que es equivalente con $(a - 1)(a^2 + a + 1) = p$, pero de nuevo, por ser p primo, tenemos que $a - 1 = 1$ puesto que $a - 1 < a^2 + a + 1$; entonces $a = 2$ y $p = 7$. En este caso $b = 3$.

Problema 5. Mostrar que el siguiente tablero de 5×5 no se puede completar con los números del 1 al 25 (usando exactamente una vez cada uno) de modo que en cada columna y en cada renglón la suma sea la misma.

7		17		3
5		9		13
15		1		11

Solución. Como la suma en cada renglón debe ser la misma, entonces debe ser $\frac{1}{5}$ de $1 + 2 + \cdots + 25 = 325$, es decir, es 65. Para completar las filas y columnas que ya están, se necesitan seis parejas que sumen 38 (pues todas las que tienen números suman 27), pero las parejas que suman 38 son $(25, 13)$, $(24, 14)$, $(23, 15)$, $(22, 16)$, $(21, 17)$ y $(20, 18)$, de las cuales sólo se pueden usar tres porque 13, 15 y 17 ya fueron usados y no deben repetirse números.

Problema 6. Encontrar todas las parejas de enteros positivos $a \leq b$ que satisfagan la siguiente igualdad

$$a!b! = a^2b^2.$$

Solución. La ecuación es equivalente a $(a-1)!(b-1)! = ab$. Observemos que para $a = 1$ se tiene que $(b-1)! = b$, así que una solución es $a = 1$ y $b = 1$. Supongamos ahora que $2 \leq a \leq b$ y observemos que si $2 \leq x \leq 3$ entonces $(x-1)! < x$, mientras que si $x > 3$ entonces $(x-1)! > x$ pues $(x-1)! > (x-1)(x-2) = x^2-3x+2 \geq 4x-3x+2 = x+2 > x$. De aquí tenemos $a \leq 3$ (o sea, $a = 2$ o $a = 3$) y $b \geq 4$. Analicemos en qué se convierte la ecuación para los distintos valores de a.

- Si $a = 2$, la ecuación queda $(b-1)! = 2b$; esta no tiene solución pues si $b = 4$ entonces $(b-1)! = 6$ y $2b = 8$, y para $b \geq 5$ se tiene que

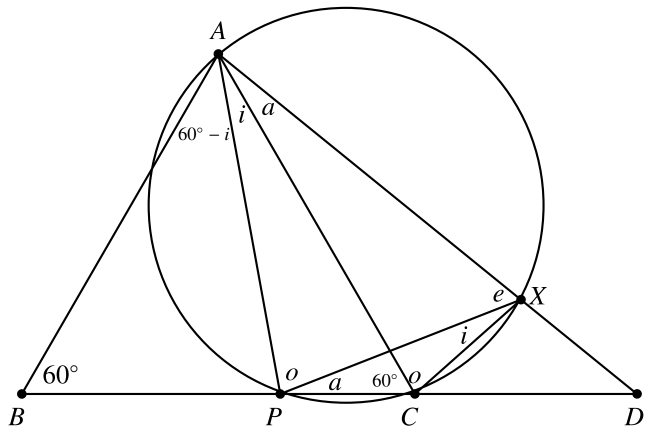
$$\frac{1}{2}(b-1)! \geq \frac{1}{2}(b-1)(b-2) = \frac{1}{2}(b^2 - 3b + 2) \geq \frac{1}{2}(5b - 3b + 2) = b + 1 > b.$$

- Si $a = 3$, la ecuación es $2(b-1)! = 3b$, que tiene por única solución a $b = 4$ pues para $b \geq 5$, $\frac{2}{3}(b-1)! > \frac{1}{2}(b-1)!$ que, como vimos arriba, es mayor que b.

Entonces las únicas parejas (a, b) que cumplen la igualdad son $(1, 1)$ y $(3, 4)$.

Problema 7. Sea ABC un triángulo equilátero y sea D cualquier punto en la prolongación del lado BC (con C entre B y D). Sea P la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle BAD$ con BC. Sea X la intersección del circuncírculo del triángulo APC con AD. Probar que $AX = AC$.

Solución. Usando que los ángulos que abarcan el mismo arco en un círculo son iguales y que el triángulo ABC es equilátero (sus ángulos miden 60°), consideremos los ángulos marcados en la figura.



Queremos entonces probar que $o = e + i$, pues esto nos dirá que el triángulo AXC es isósceles y así $AX = AC$.
Por ser AP bisectriz, tenemos que $60° - i = i + a$, de donde

$$i = 30° - \frac{a}{2}. \tag{1}$$

Por ser $APCX$ cíclico, sus ángulos opuestos suman 180°, lo cual nos da las dos ecuaciones:

$$o + a + e + i = 180°, \tag{2}$$

$$i + a + 60° + o = 180°, \tag{3}$$

y estas dos nos dicen que

$$e = 60°. \tag{4}$$

Por otro lado, sustituyendo en (2) los valores encontrados de i y e en (1) y (4) obtenemos

$$o + a + 60° + 30° - \frac{a}{2} = 180°,$$

la cual es equivalente a

$$o + \frac{a}{2} = 90°. \tag{5}$$

Finalmente,

$$o \underset{(5)}{=} 90° - \frac{a}{2} \underset{(1)}{=} 60° + i \underset{(4)}{=} e + i,$$

que era lo que queríamos demostrar.

Problema 8. Sea $\mathcal{P}$ un polígono regular de 20 lados. Determinar cuántos triángulos T con vértices en los vértices de $\mathcal{P}$ cumplen que ningún lado de T es también lado de $\mathcal{P}$.

Solución. Podemos trabajar más en general con n lados. Numeremos los vértices de $\mathcal{P}$ en forma consecutiva: $1, 2, \ldots, n$. Veamos dos formas distintas de proceder:
Primera forma. Contemos los triángulos que tienen por vértice al que lleva el número 1, y sean $a < b$ los otros vértices. Si $a = 3$, entonces b se puede escoger de $n-5$ formas (del 5 al $n-1$); si $a = 4$, entonces b se puede escoger de $n-6$ formas (del 6 al $n-1$), etc. (laúltima posibilidad es $a = n-3$ y entonces b sólo tiene $1 = n-(n-1)$ posibilidad (b debe ser igual a $n-1$). Entonces, los triángulos que tienen como vértice al 1 son: $(n-5)+(n-6)+\cdots+1 = \frac{(n-4)(n-5)}{2}$. Hacemos esto para cada uno de los vértices multiplicando por n y entonces debemos dividir entre 3 porque cada triángulo se cuenta tres veces (una por cada vértice). El resultado general es

$$\frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

En el caso particular de $n = 20$ tenemos que el resultado es $\frac{20\cdot16\cdot15}{6} = 800$.

Segunda forma. Buscamos ternas (a, b, c) de elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de manera que $a+1 < b$, $b+1 < c$ y $(a, c) \neq (1, n)$. Sin considerar la última condición tenemos $\binom{n-2}{3}$ posibilidades puesto que esto nos cuenta las formas de escoger números $a' < b' < c'$ dentro de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, y una elección de éstos determina la de a, b, c (y recíprocamente) haciendo $a' = a$, $b'+1 = b$ y $c'+2 = c$. Ahora sólo tenemos que restar las ternas en que aparecen juntos 1 y n; éstas son $n-4$ (pues el otro vértice debe ser uno de $3, 4, \ldots, n-2$). Entonces la fórmula que nos cuenta el número de triángulos es

$$\binom{n-2}{3} - (n-4).$$

Para $n = 20$ tenemos el resultado: $\frac{18\cdot17\cdot16}{6} - 16 = 800$.

Concursos Internacionales

XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, se realizó del 22 al 30 de junio de 2013 en la ciudad de Managua, Nicaragua. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Luis Xavier Ramos Tormo, de Yucatán; y Jorge Pat De la Torre Sánchez, de Coahuila. Los tres participantes obtuvieron medalla de oro y México ocupó el primer lugar entre los 13 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Miguel Raggi Pérez (líder) y David Guadalupe Torres Flores (colíder).

A continuación presentamos los problemas de la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente:

1. Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda.

2. Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto.

Pruebe que, repitiendo este procedimiento, llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio del lado AB. La circunferencia que pasa por D y es tangente al lado AB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente al lado AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se intersecan en un punto que pertenece a la mediatriz del lado AB. Demuestre que A, E y C son colineales si y sólo si B, F y D son colineales.

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se sobreponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe una estrategia ganadora para alguna jugadora?

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A corta a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y sólo si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que

$$p(x) - q(x) = 1.$$

Competencia Internacional de Matemáticas

La Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se realiza en el mes de julio. La participación es por invitación y cada país invitado puede asistir con un máximo de dos equipos, los países que han sido sede o lo serán próximamente pueden llevar hasta cuatro equipos y el país sede hasta diez. Cada equipo consiste de 4 estudiantes, un tutor y un líder. Hay dos categorías: primaria y secundaria, México sólo ha participado en la categoría de secundaria.

La IMC es muy diferente a las otras olimpiadas internacionales de matemáticas en las que participa México ya que hay participación individual y por equipo y los exámenes son el mismo día. La prueba individual consiste de un examen de 15 preguntas, las primeras doce son de respuesta sin justificación y las últimas tres son de argumentación completa, las primeras valen 5 puntos y las últimas 20 puntos cada una por lo que 120 es la máxima puntuación. El examen dura dos horas. En este examen se otorgan medalla de oro, medalla de plata, medalla de bronce, mención honorífica y constancia de participación en razón 1:2:3:4:5. De esta manera aproximadamente el 40 % de los alumnos reciben medalla y dos terceras partes reciben distinción.

El examen por equipos tiene muchas especificaciones pero esencialmente son 10 problemas a resolver en una hora, en algunos momentos individualmente y en otros de manera colectiva, cada problema vale 40 puntos por lo que 400 es la máxima puntuación del equipo. Antes del examen se hace un sorteo en donde los equipos son agrupados en bloques (se trata de que estén cerca de 15 países por bloque). Se otorga un oro, dos platas y tres bronces por bloque.

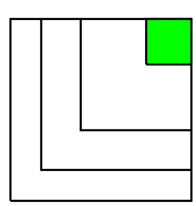
Este año, la Competencia Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 30 de junio al 5 de julio en Burgas, Bélgica. Se participó con dos equipos. El equipo A estuvo integrado por Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Olga Medrano Martín del Campo, de Jalisco; Antonio López Guzmán y Arturo Arenas Esparza, ambos de Chihuahua. El equipo B estuvo integrado por Karol José Gutiérrez Sánchez, Sergio Felipe López Robles, ambos de Colima; José Nieves Flores Máynez, de Chihuahua; y Juan Carlos Castro Fernández, de Morelos. Por equipos, México A obtuvo medalla de plata y México B medalla de bronce. Individualmente, Kevin William obtuvo medalla de plata, Arturo obtuvo medalla de bronce y Olga, Karol José, Antonio y Sergio Felipe obtuvieron mención honorífica. Acompañaron a los equipos: Fernando Campos García, Eréndira Jiménez Zamora, Martín Eliseo Isaías Castellanos y Hugo Villanueva Méndez.

Examen individual

Sección A

Problema 1. En este problema, letras distintas representan dígitos distintos y letras iguales representar al mismo dígito. El número de tres cifras ABB es 25 unidades menor que el número de tres cifras CDC. Si el número $ABBCDC$ es el cuadrado de un entero positivo, ¿cuál es este entero positivo?

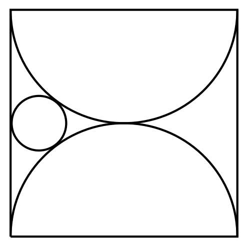
Problema 2. Una casa de $30\,m \times 30\,m$ está en la esquina noreste de una granja de $120\,m \times 120\,m$. El propietario quiere dividir, utilizando dos vallas en forma de V, la parte restante es tres parcelas con forma de V que tengan la misma área, como se muestra en la figura. Cada segmento de la valla es perpedicular al lado del terreno y dos segmentos de la misma valla, tienen la misma medida. ¿Cuántos metros mide el lado de la valla más pequeña?



Problema 3. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las seis letras de la palabra MOUSEY en un arreglo, de manera que no contengan la palabra YOU o la palabra ME? Por ejemplo, la palabra MOUSEY es uno de los arreglos posibles.

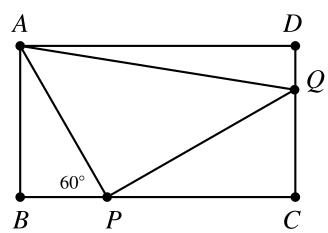
Problema 4. ¿Cuántas parejas (a, b) de enteros positivos existen tales que $a \leq b$ y $2\left(\sqrt{\frac{15}{a}} + \sqrt{\frac{15}{b}}\right)$ es un entero?

Problema 5. La figura muestra un cuadrado cuyo lado mide $80\,cm$. Contiene dos semicírculos que se tocan el uno al otro en el centro del cuadrado y un pequeño círculo que es tangente al cuadrado y a los semicírculos. ¿Cuántos centímetros mide el radio del círculo pequeño?



Problema 6. ¿Cuál es la longitud más grande de un bloque de enteros positivos consecutivos, cada uno de los cuales es la suma de los cuadrados de dos enteros positivos?

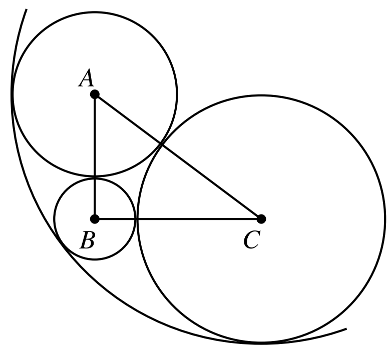
Problema 7. El triángulo rectángulo isósceles APQ está inscrito en el rectángulo $ABCD$, de manera que el vértice P del ángulo recto está en BC y Q en CD. Si $BP = 1\,cm$ y $\angle APB = 60°$, ¿cuántos centímetros cuadrados mide el área del triángulo ADQ?



Problema 8. Lea tiene un anillo de diamantes, uno de oro y otro de marfil. Se los puso en la mano derecha y cada anillo puede estar en cualquiera de los cinco dedos. Cuando hay dos o tres anillos en el mismo dedo, si el orden en que están puestos es diferente, entonces se cuentan como maneras distintas de ponérselos. ¿De cuántas maneras diferentes puede Lea ponerse los anillos?

Problema 9. Sean a, b y c enteros positivos. Si el máximo común divisor de $b+c$, $c+a$ y $a+b$ es k veces el máximo común divisor de a, b y c, ¿cuál es el máximo valor de k?

Problema 10. En el triángulo ABC, $BC = 4\,cm$, $CA = 5\,cm$ y $AB = 3\,cm$. Tres círculos con centros en A, B y C, respectivamente, son tangentes entre sí. Un cuarto círculo es tangente a estos tres círculos y los contiene a todos, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio del cuarto círculo?



Problema 11. Los enteros positivos $a < b$ son tales que $\frac{a+b}{2}$ y $\sqrt{ab}$ son números enteros positivos con los mismos dos dígitos pero en orden inverso. ¿Cuál es el menor valor para a?

Problema 12. Una fábrica produce piezas de metal de dos formas. La primera consiste en un cuadrado de 2×2. La segunda forma, como se muestra en la figura siguiente, es un cuadrado de 2×2 a la que le falta una de las cuatro celdas. Estas piezas de distinta forma se cortan de una hoja metálica de 7×7 y ninguna de las 49 celdas puede ser desperdiciada. ¿Cuál es el menor número de piezas de la segunda forma que se pueden obtener de una hoja metálica de 7×7?

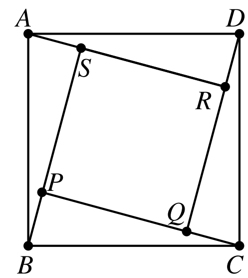
Sección B

Problema 1. Considera la expresión,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Empezando en el segundo paréntesis, la expresión se obtiene quitando el primer sumando de la expresión al interior del paréntesis anterior. ¿Cuál es el valor de la expresión cuando $n = 2013$?

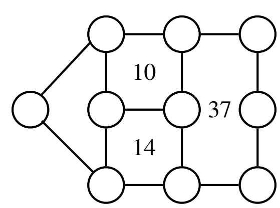
Problema 2. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y $\angle PCB = \angle QDC = \angle RAD = \angle SBA$. Si el área de $ABCD$ es el doble del área de $PQRS$, ¿cuántos grados mide $\angle PCB$?



Problema 3. Hay ocho monedas en una fila todas mostrando águila. En cada movimiento, se pueden voltear dos monedas adyacentes siempre que ambas muestren águila o ambas muestren sol. ¿Cuántos arreglos distintos de águila y sol se pueden obtener después de cierto número de movimientos?

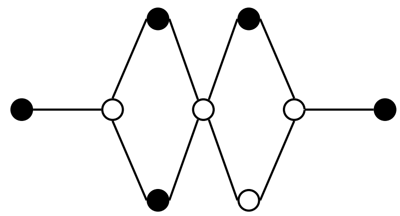
Examen en equipo

Problema 1. Coloca los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 en cada uno de los círculos del siguiente diagrama. Números consecutivos no pueden estar en círculos que estén conectados por un segmento. La suma de los números que están en los círculos dentro del perímetro de cada rectángulo debe ser igual al número indicado al interior de él.

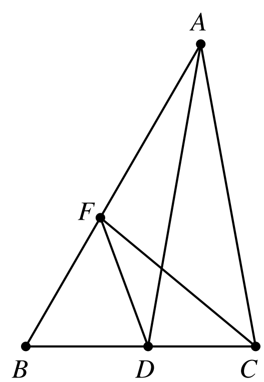


Problema 2. Las medidas de los lados, en centímetros, de un triángulo rectángulo son enteros primos relativos. La recta que une al centroide y al incentro es perpendicular a uno de los lados. ¿Cuál es el mayor perímetro, en centímetros, que puede tener dicho triángulo?

Problema 3. Una ficha se coloca aleatoriamente en alguno de los nueve círculos del siguiente diagrama. Después se mueve aleatoriamente a otro círculo siguiendo una línea. ¿Cuál es la probabilidad de que después de este movimiento la ficha esté en un círculo negro?



Problema 4. En el triángulo ABC, $\angle A = 40°$ y $\angle B = 60°$. La bisectriz de $\angle A$ corta a BC en D, y F es el punto en AB tal que $\angle ADF = 30°$. ¿Cuántos grados mide $\angle DFC$?

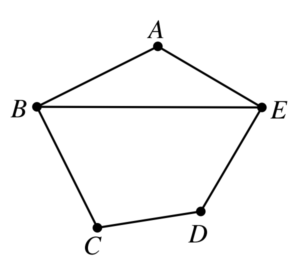


Problema 5. El primer dígito de un entero positivo con 2013 cifras es 5. Cualesquiera dos dígitos adyacentes forman un múltiplo de 13 o de 27. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores del último dígito de dicho número?

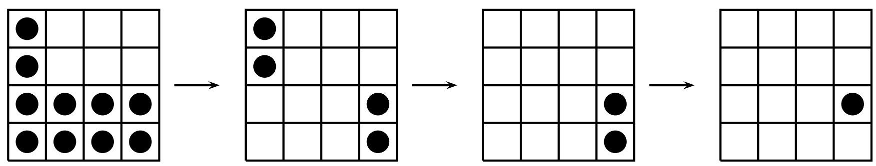
Problema 6. En un torneo, cualesquiera dos participante juegan entre sí. Ningún juego puede terminar en empate. El registro del torneo muestra que para cualesquiera dos participantes X y Y, existe un jugador Z que le ganó a ambos. En tal torneo,

1. prueba que no puede haber seis participantes;
2. muestra que puede haber siete participantes.

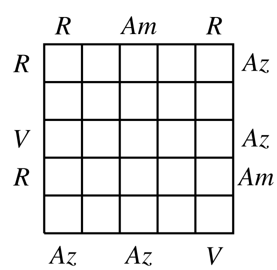
Problema 7. En un pentágono $ABCDE$, $\angle ABC = 90° = \angle DEA$, $AB = BC$, $DE = EA$ y $BE = 100\,cm$. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide el área de $ABCDE$?



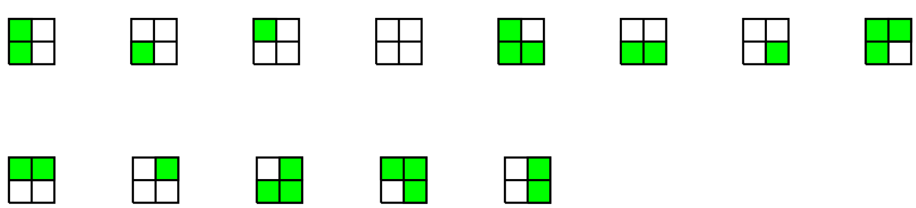
Problema 8. Un juego entre dos jugadores comienza con una ficha en cada una de las casillas de un tablero de 100×100. En cada jugada, el jugador en turno tiene que quitar un número positivo de fichas, que deberán proceder de los cuadrados que formen una región rectángular que no podrá tener ningún cuadrado vacío. El jugador que quite la última ficha, pierde. A continuación se muestra un ejemplo de una partida en un tablero de 4×4, donde el primer jugador perdió. ¿Qué jugador tiene la estrategia ganadora, el primer jugador o el segundo?



Problema 9. En una vitrina de 5×5 hay 20 gemas: 5 rojas, 5 amarillas, 5 azules y 5 verdes. En cada fila y en cada columna hay una casilla vacía y las otras cuatro contienen gemas de distinto color. Doce personas están admirando las gemas. Mirando a lo largo de una fila o una columna, cada persona informa el color de la gema en la primera casilla, o si la casilla está vacía, el color de la gema en la segunda casilla. Sus informes se registran en el siguiente diagrama, donde R, Am, Az y V corresponden a rojo, amarillo, azul y verde, respectivamente. En el diagrama que se te dió para registrar tu respuesta, escribe R, Am, Az o V en 20 de las 25 casillas para indicar el color de la gema que está en ella.



Problema 10. Cuatro estampas diferentes están en un bloque de 2×2. La figura muestra los 13 posibles sub-bloques adyacentes que se pueden obtener de este bloque si se quitan 0 o más estampas. Los cuadros sombreados representan estampas que se quitaron. ¿Cuántos sub-bloques adyacentes de estampas distintos se pueden obtener de un bloque de 2×4 con ocho estampas diferentes?



54ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo en Santa Marta, Colombia, del 18 al 28 de julio de 2013, con la participación de 528 estudiantes provenientes de 97 países. México ocupó el 17^o lugar, siendo este el mejor lugar que México ha ocupado en esta olimpiada. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Juan Carlos Ortiz Rothon y Adán Medrano Martín del Campo, ambos de Jalisco; Diego Alonso Roque Montoya, Kevin William Beuchot Castellanos, ambos de Nuevo León; Enrique Chiu Han del Distrito Federal y Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán. En esta ocasión Enrique, Juan Carlos y Diego obtuvieron medalla de plata y Luis Xavier, Kevin William y Adán obtuvieron medalla de bronce. Los profesores que acompaãron a la delegación fueron Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (líder), Rogelio Valdez Delgado (colíder) y David Cossío (Observador B).

A continuación presentamos los problemas de la 54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Demostrar que para cualquier par de enteros positivos k y n, existen k enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (no necesariamente distintos) tales que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

(Problema sugerido por Japón)

Problema 2. Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama *colombiana*. Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es *buena* para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de k tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de k rectas.

(Problema sugerido por Australia)

Problema 3. Supongamos que el excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_1. Análogamente, se definen los puntos B_1 en CA y C_1 en AB, utilizando los excírculos opuestos a B y C respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

El excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C. Análogamente se definen los excírculos opuestos a los vértices B y C.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre el lado BC, estrictamente entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN, y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1. Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM, y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos X, Y y H son colineales.

(Problema sugerido por Tailandia)

Problema 5. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

1. $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
2. $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
3. existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

(Problema sugerido por Bulgaria)

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado $n + 1$ puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números $0, 1, \ldots, n$ de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama *bonita* si, para cualesquiera cuatro etiquetas $a < b < c < d$, con $a + d = b + c$, la cuerda que une los puntos etiquetados a y d no corta la cuerda que une los puntos etiquetados b y c. Sea M el número de distribuciones bonitas y N el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos tales que $x + y \leq n$ y $\operatorname{mcd}(x, y) = 1$. Demostrar que

$$M = N + 1.$$

(Problema sugerido por Rusia)

Una vida dedicada a la matemática: Francisco Federico Raggi Cárdenas (1940-2012)

Por María José Arroyo Paniagua

UAM, Unidad Iztapalapa, Departamento de Matemáticas

Se me ha muerto como del rayo a quien tanto quería,
un manotazo duro, un golpe helado,
un hachazo invisible y homicida,
un empujón brutal le ha derribado.

A las aladas almas de las rosas,
del almendro de nata te requiero,
que tenemos que hablar de muchas cosas,
compañero del alma, compañero.

Elegía.
Miguel Hernández.

Como muestra del afecto que Francisco Raggi podía despertar en sus amigos matemáticos, los fragmentos del poema que anteceden este primer párrafo fueron incluidos en los correos electrónicos que los algebristas Sergio López-Permouth de la Universidad de Ohio y Blas Torrecillas Jover de la Universidad de Almería me enviaron al conocer la noticia de su fallecimiento.
Francisco Federico Raggi Cárdenas nació y vivió toda su vida en la Ciudad de México, creció en una familia de siete hijos, él fue el cuarto. Siempre platicaba del gran amor

que tenía por su familia, su origen italiano proviene de su abuelo paterno, un escultor que vino a México para colaborar con Adamo Boari en su obra más sobresaliente, el Palacio de las Bellas Artes, que se encuentra en el Centro Histórico de nuestra capital.
Siempre hablaba orgulloso de su padre, quien para mantener a su familia, tuvo que trabajar mucho tiempo sin descanso, de lunes a viernes por la mañana era empleado de Ferrocarriles de México, por las tardes en la Hemeroteca de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) y los sábados y domingos en un cine de la ciudad. Tal vez fue por eso que a Francisco le nació su gusto por el cine, de joven era asiduo a asistir a las funciones de ese tiempo, en las que había permanencia voluntaria y pasaban varias películas en un día, podríamos decir que era un cinéfilo, en particular disfrutaba mucho de las películas de ciencia ficción.
Su madre se dedicó a las labores de ama de casa, quien hizo que sus siete hijos, cuatro hombres y tres mujeres, aprendieran a cocinar, a coser y a realizar las demás labores de la vida cotidiana, de ella aprendió el gusto por el buen sazón de la comida mexicana y a disfrutar de una buena comida.
Sus padres procuraron que la familia Raggi-Cárdenas tuviera una convivencia muy cercana con sus familiares y así Francisco, al igual que sus hermanos, compartió con abuelos, padres, tíos y primos las celebraciones familiares y las fiestas decembrinas que los reunían a festejar con alegría.
Durante su vida, Francisco vio crecer y cambiar a la Ciudad de México, que era muy diferente a como es ahora, los jóvenes pueden darse hoy en día una idea de la transformación que ésta ha tenido en el Facebook *La Ciudad de México en el tiempo*.
Francisco siempre estudió en escuelas públicas, ingresó a la UNAM desde el bachillerato en la Escuela Nacional Preparatoria Plantel Número 1 ubicada en lo que ahora es el Museo Antiguo Colegio de San Ildefonso, en ese entonces compartía las instalaciones con la Preparatoria 3 en el turno de la tarde y los estudios de preparatoria duraban solamente dos años. Desde muy chico compartió los estudios con el deporte, el baloncesto fue de los primeros deportes que practicó además del tenis, el frontón, el squash y el beisbol. También amaba el campismo, un lugar en el que le gustaba hacerlo con su esposa Mimi, sus hijas Emilia y Adriana, familiares y amigos era la Peñita de Jaltemba en la Riviera de Nayarit.
Su carácter bromista, a veces un poco o un mucho irreverente, se dio desde muy temprana edad, gustaba de pensar, reflexionar y analizar todas las cosas, cuentan quienes le conocieron en su juventud, que desde entonces fue muy crítico y bastante mordaz.
Su amor por la matemática se consolidó en la época de estudiante de bachillerato, su profesor Agustín Domínguez quien impartía la clase de geometría analítica, le cautivó con su cátedra, esto me lo comentó Alejandro Odgers, matemático mexicano que compartió con Francisco sus estudios desde esa época y hasta la Facultad de Ciencias de la UNAM, así como muchos años de trabajo en el Instituto de Matemáticas de la UNAM (IMATE). Contaba que Francisco al escuchar cómo el maestro de geometría analítica trataba de convencer a Alejandro Odgers que estudiara matemáticas y le explicaba lo que era ser matemático, Francisco interrumpió al maestro diciéndole: yo quiero ser matemático, a lo que el maestro le respondió al alumno siempre inquieto e hiperactivo: eso es para personas serias. ¡Qué bueno que Francisco no tomó en cuenta ese comentario! Desde ese momento decidió estudiar en la Facultad de Ciencias y dedicarse con gran pasión a estudiar la matemática, pese a que su familia, preocupada por su porvenir

quería que estudiara contabilidad.

Su gusto y pasión por la matemática lo transmitió primeramente a sus hermanos menores, la convivencia diaria con Francisco a través de sus pláticas y juegos hizo que Guadalupe, Javier y Gerardo estudiaran también la carrera de Matemáticas en la Facultad de Ciencias.

Al iniciar en 1959 sus estudios en la Facultad de Ciencias, el plan de estudios de la carrera de matemáticas incluía en forma obligatoria cursos de Física y sus periodos eran anuales, las vacaciones eran en los meses de diciembre, enero y febrero, el Director de la Facultad de Ciencias era el notable físico Carlos Graef y el Secretario Guillermo Torres.

Francisco, al igual que sus compañeros de generación, entre los que se encontraban, Alejandro Odgers, Andrés Sestier, Adalberto García Maynes y Paloma Zapata, conoció y tuvo como maestros a excelentes matemáticos entre los que se encontraban: Humberto Cárdenas, Emilio Lluis Riera, Roberto Vázquez, Guillermo Torres, Francisco Tomás, Nápoles Gándara, Félix Recillas, Carlos Imaz, José Adem y Enrique Valle Flores.

Al terminar el primer año de la carrera, Humberto Cárdenas invitó a Francisco y a varios de sus compañeros, entre ellos a Alejandro, a un Seminario en las vacaciones, estudiaban álgebra lineal y ecuaciones diferenciales con unas notas escritas por Norman Steenrod y otros. El Seminario fue tan exitoso que Francisco junto con Alejandro continuaron estudiando con Humberto Cárdenas los temas de topología de conjuntos, teoría de las categorías y álgebra homológica; para ello, estudiaron el libro clásico de Cartan-Eilemberg. Al terminar cada sesión había café y galletas para continuar charlando informalmente de matemáticas, Humberto Cárdenas importó esa buena práctica de la Universidad de Princeton.

La inmensa relación de pertenencia que Francisco tuvo con el IMATE, que entonces ocupaba el edificio de la actual Torre de Humanidades II en Ciudad Universitaria, nació en esa época, en 1962. Sin haber concluido la carrera ingresó como el primer Ayudante de Profesor para trabajar con Humberto Cárdenas y Emilio Lluis; Alejandro Odgers fue el segundo y trabajó con Nápoles Gándara y Francisco Tomás.

En el año de 1963, al terminar y estar trabajando en sus tesis de licenciatura, Francisco y Alejandro fueron nombrados Investigadores de Tiempo Completo, del IMATE. Es muy posible que no se quería perder más talentos, dado que se acababa de fundar el CINVESTAV y se ofrecían plazas de trabajo; varios matemáticos como Carlos Imaz y José Adem se fueron a trabajar a esa institución.

También en el año de 1963, Francisco al igual que varios de sus compañeros se fueron a estudiar el posgrado al extranjero, Francisco se fue a la Universidad de Berkeley, California, con el Profesor John Tate. Como Tate cambió de trabajo a la Universidad de Harvard, invitó a Francisco a seguirle y fue así que obtuvo la maestría en la Universidad de Harvard. Posteriormente, obtuvo su doctorado en la UNAM, realizando su primera aportación al álgebra. Su trabajo de investigación lo hizo en cuatro vertientes, estudió la teoría aritmética de los anillos, las retículas asociadas a la categoría de módulos sobre el anillo, las teorías de dimensión en anillos definidos por diversas clases de módulos y la gran retícula de los prerradicales sobre un anillo. Muchos de sus trabajos fueron publicados en español en los anales del IMATE y varios de ellos fueron citados por diversos autores, entre otros, Karpilovsky, Sehgal y J. Golan.

Francisco publicó durante su vida 38 artículos de investigación, dirigió treinta y tres tesis de licenciatura, una de maestría y cuatro tesis de doctorado, al momento de fallecer estaba dirigiendo tres tesis de doctorado y trabajando en dos artículos con su grupo de colaboradores, los que aparecerán en la literatura en forma póstuma. La dirección de los alumnos a los que les estaba dirigiendo las tesis de doctorado la continuó José Ríos Montes, matemático del IMATE en quien Francisco encontró al gran amigo y colega, una parte muy importante de su trabajo de investigación la hicieron juntos.

Mi encuentro con Francisco se dio en el año de 1974. Ivonne Villalobos, Cecilia Herrera y yo, entramos al salón de clase de la vieja Facultad de Ciencias en la que íbamos a iniciar los estudios de matemáticas, la clase de las 9 a.m. era Álgebra Superior I. Llegó al salón el profesor vestido con un pantalón a rayas y una playera, usaba el cabello largo hasta los hombros y una banda en la cabeza y barba; además de constatar que era único en su forma de vestir, al poco tiempo, nos dimos cuenta también que era único en su forma de ser. Empezó por hacernos una novatada, al finalizar la clase nos dijo que la mayoría de los alumnos reprobaban y de los que aprobaban, la mitad no entendía nada; estábamos perplejas, en la clase siguiente que dio inicio formal al curso, nos dijo que el texto sería el que escribió con Humberto Cárdenas Trigos, Emilio Lluis Riera y Francisco Tomás Pons, matemáticos muy queridos y respetados por Francisco. De ese texto, todos sabemos que ha sido utilizado en miles de cursos introductorios al álgebra en todo el país.

Como sus alumnas nos encontramos con su energía avasallante, casi intimidante, sus exposiciones siempre claras y rigurosas, tal vez demasiado para muchos de nosotros jóvenes e inexpertos. Al pasar de los días, encontramos el carácter enriquecedor de sus clases, plantándose como maestro y mostrando una sutil pero firme autoridad. Aquellos que nos mantuvimos cercanos, encontramos también a un ser abierto, flexible, vital, dispuesto siempre a resolver dudas de sus alumnos y también ofreciendo su amistad. Muchos años después, Marcela González me contó que ella y sus compañeros vivieron una experiencia similar unos años antes, variaba el tipo de aula, a ellos les tocaron clases en auditorios que se albergaban en la vieja Facultad de Ciencias.

Para muchos, que como yo iniciamos los estudios con escasa visión de lo que significaba ser matemático, el amor, la pasión de Francisco Raggi por las matemáticas y en especial por el álgebra que admiramos, nos influenció y marcó gratamente en nuestras vidas.

Francisco siempre disfrutó el quehacer docente en todos sus aspectos. Por ello, la UNAM, en el año 2007, le otorgó el Premio Universidad Nacional en el área de Docencia en Ciencias Exactas.

Cuando Francisco falleció, me hice dos preguntas, una fue ¿cómo crece una amistad a lo largo de la vida a partir de la relación profesor-alumno?, mi amistad y la de muchos de sus amigos creció de esta manera, la otra ¿cómo se establecen y mantienen los lazos de amistad por años entre los colegas?

Francisco Raggi me dio la respuesta, él tenía la cualidad de hacer estos afectos, las razones son varias: era sincero, directo y sin tapujos, y por lo tanto una persona confiable, también era leal y cultivaba la libertad de pensamiento de todos y cada uno y, al confrontar posiciones, siempre era firme con sus creencias y duro como madera de chechen, nunca se dejaba convencer. Con gran fuerza defendió sus posiciones e impulsó con su trabajo matemático, lo que a él le parecía era importante y contribuía al crecimiento de la teoría de anillos, de módulos y de retículas, Francisco siempre optó por dedicar su trabajo en los temas y problemas que creía importantes y a los que le intrigaba resolver, independientemente de la opinión de otros.

También, ante muy diversas situaciones que compartí con él a través de 38 años, fue genuino, autocrítico y, con sencillez y sin aspavientos ni mayores manifestaciones, nos impulsó a todos los que estuvimos cerca de él a incursionar en diferentes horizontes. Para mí siempre fue una persona que la sabes cerca, solidaria, con la mano extendida para apoyar y, al mismo tiempo, estableciendo un espacio, una distancia para que cada quien buscara sus nichos propios donde florecer, con nuestros hijos, nuestras familias, nuestras propias experiencias. Podíamos dejar de vernos hasta meses y, siempre al encontrarnos, era como si hubiéramos estado juntos todo el día anterior, hablando de nuestros trabajos y hasta de los nietos.

Su partida me permitió constatar que, así como fue conmigo y mis compañeros y amigos, seguía siendo con los jóvenes matemáticos a quienes les dio clase en los últimos años, o les estaba dirigiendo una tesis, entre ellos, José Simental, Frank Murphy, Fernando Cornejo, Juan Orendain y otros más de los que desconozco sus nombres, con los que compartía el álgebra, su gusto por el cine, la lectura, las exposiciones de arte, la política, la naturaleza; el mismo Blas Torrecillas, que mencioné al inicio, recordó que al mismo tiempo de charlar de matemáticas con Francisco mientras paseaban por los parajes desérticos de Cabo de Gata, Raggi le comentó que era sorprendente de los falsos pimenteros el que se adaptaran a vivir al nivel del mar; él era así, todo con pequeños y grandes detalles en los que versaron tantas charlas en la facultad o en su cubículo del Instituto de Matemáticas.

Su cubículo, también era distinto, tenía su sello, desde sus plantas, los dibujos de sus hijas de cuando eran pequeñas, sus baleros y trompos y un pizarrón de cristal de los que ya no se fabrican, que él mismo se ocupó de trasladar de la antigua Torre de Ciencias hasta las instalaciones que le dieron al IMATE en 1976. En ese pizarrón se escribieron conjeturas, teoremas y sin fin de demostraciones y se expusieron un gran número de tesis. Para mí y creo que para mis colegas también, era sorprendente su forma de trabajar, Francisco utilizaba algunas veces hojas sueltas de papel, lápiz y pluma, aunque siempre en sus viajes llevaba un cuaderno en el que escribía con letra pequeña sus teoremas y demostraciones.

Siempre fue constante con sus seminarios y sus citas de trabajo, podía olvidársele que habíamos quedado de vernos para comer en un restaurant pero nunca dejaba de asistir a un seminario.

En su madurez, su vitalidad le daba tiempo para todo, Francisco era disciplinado y metódico, respetaba sus horarios de trabajo, durante muchos años llegó siempre a las 9 de la mañana al IMATE, pero antes, constante con el deporte, ya había jugado basketball, frontón o squash, deportes que le gustaban y practicaba, y durante un tiempo, hasta en los fines de semana se daba el tiempo para trabajar con sus colegas José Ríos y Luis Colavita en la madera y la mecánica automotriz.

Tuve la fortuna de vivir con José Ríos, muy de cerca, la forma en la que él se relacionaba con algebristas de diferentes partes de México y del mundo. En algunas ocasiones su esposa Mimi le acompañaba, en otras, estuvieron algunos amigos y colegas como Hugo Rincón, Rogelio Fernández, Carlos Signoret y Marcela González.

Francisco compartió con nosotros tanto la admiración por sus maestros, como a sus amigos y colegas de otros países y culturas, de los primeros que recuerdo, Mark Teply y Pere Menal, que como él, ya se nos adelantaron.

Con Mark Teply, Robert Wisbauer, Alberto Facchini, Sergio López-Permouth, Toma Albu, Dolors Herbera, John Dauns y Blas Torrecillas, entre otros, no solamente se cultivaban las matemáticas, se cultivaban relaciones estrechas y duraderas de amistad; en esas vivencias que guardo en mi memoria, comíamos en un pueblito, a orillas del mar, en restaurantes adornados de papel picado, sombreros, jarritos y platos de barro, al visitar ruinas arqueológicas, en Tepoztlán, Malinalco, Teotihuacán, Oaxaca, Yucatán, como también en visitas a Guanajuato y Zacatecas, llenándonos de los ricos aromas y sabores de la comida mexicana, una rica barbacoa, escamoles, moles, tamales, chocolates, tortillas hechas a mano, comidas en las que Francisco tenía sin duda una participación importante para mostrar y hacer partícipes de la cultura mexicana a nuestros queridos amigos. Francisco amaba a su país. Tariq Rizvi me comentó al saber de su partida que disfrutaba siempre de su naturaleza alegre y, es cierto, nos brindó siempre su alegría por la vida.

Generoso, casi lo define, generoso con sus alumnos, con sus colegas, con amigos y con la UNAM. Dedicó su trabajo y compromiso en docencia e investigación a la formación de jóvenes que decidieron seguir el camino de la Matemática, parte fundamental de su vida. Amigos y colegas lo despedimos con cariño, tanto de su querida UNAM y en otras instituciones dentro y fuera del país. Dolors Herbera me comentó que conoció a Francisco en una reunión en Oberwolfach, Alemania en el verano de 1993, ella se había escapado de su puesto de becaria postdoctoral en la Universidad de Rutgers para volver a Europa y formar parte por una semana de aquella congregación de especialistas de teoría de anillos y teoría de módulos de todo el mundo. Ella reconoció que un lugar con tanta tradición matemática y la compañía de grandes matemáticos que asistieron le impresionaron mucho, y fue Francisco, con su sencillez el que le ayudó a sentirse una más de aquella comunidad.

En el homenaje póstumo que la Sociedad Matemática Mexicana organizó por el fallecimiento de Francisco en el Congreso Nacional en Querétaro en el año 2012, Sergio López- Permouth comentó con orgullo de un artículo que hizo con un estudiante de Francisco, José Eduardo Simental en su pasar por la Universidad de Ohio: nuestro artículo fue un producto hecho en los Estados Unidos, con mano de obra mexicana y guatemalteca y materia prima ¡sumamente mexicana!, Jose Eduardo y yo, al igual que nuestros otros colaboradores en este momento, sabemos del impacto del trabajo de Francisco y su grupo.

Cuando me invitaron a escribir estas líneas, no dudé en aceptar, sin temor a equivocarme, ellas no solamente hablan por mí y del cariño que le tuve, lo hacen por muchos que pudieron conocerle y como yo, también le quisieron.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de octubre a diciembre de 2013.

Octubre

Publicación del vigésimo número de la revista "Tzaloa".

Noviembre, 24 al 30, Huasca, Hidalgo

27° Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Diciembre, del 12 al 21, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamiento a la preselección nacional.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad) *Si a y b son enteros, se dice que a es divisible entre b si $a = bq$ para algún entero q, y se denota por $b \mid a$.*

Definición 2 (Congruencias) *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 3 (Propiedades de las congruencias) *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 4 (Pequeño teorema de Fermat) *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 5 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 6 (Principio de las casillas) *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene al menos $k + 1$ objetos. En particular, si $n + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica) *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 9 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 10 (Puntos y rectas notables de un triángulo)

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*
5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*
6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*
7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*
8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 11 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 12 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos por LLL.*

Criterio 13 (Criterio de congruencia LAL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos lados correspondientes iguales y el ángulo comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Criterio 14 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con dos ángulos correspondientes iguales y el lado comprendido entre ellos igual, entonces los triángulos son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos por ALA.*

Definición 15 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 16 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como ángulo-ángulo y lo denotamos por AA.*

Criterio 17 (Criterio de semejanza LAL) *Si dos triángulos tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo entre dichos lados igual, entonces los triángulos son semejantes. A este criterio de semejanza se le conoce como lado-ángulo-lado y lo denotamos por LAL.*

Teorema 18 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 19 (Teorema de Menelao) *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 20 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 22 *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ está circunscrito a una circunferencia (es decir, sus lados son tangentes a una misma circunferencia), si y sólo si $AB + CD = BC + DA$.*

Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, segunda edición, 2005.

[5] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[6] I. Martin Isaacs. *Geometría Universitaria.* International Thompson Editores, S.A. de C.V., 2002.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[9] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
Sistemas de Inteligencia Territorial Estrátegica
lcruzromo@gmail.com

José Antonio Climent Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
antoniocliment@ciencias.unam.mx

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
fuerunt@gmail.com

Samantha Lizette Flores López
Instituto Tecnológico de Colima
samflo_12@hotmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
garcia.lm@gmail.com

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás
de Hidalgo
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Universidad de Sonora
hamsteritokeweb@hotmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Instituto de Matemáticas, UNAM
hvillan@matem.unam.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://www.ommenlinea.org`

¡Síguenos en facebook!