Soluciones del Examen Eliminatorio Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2008.

1. **(d)** La caja 4 debe quedarse con I, y entonces la 5 con E, de donde la 3 debe quedarse con $U.$ De aquí tenemos que la 2 se queda con O (y la 1 con A).

2. **(b)** Observemos que José no puede ser el último pues 14 no es múltiplo de 3; tampoco puede ser el primero pues $3\times 3=9$ cuya diferencia con 14 es más que 2 o 1. El caso Nico, José, Paz da: $(3-1)\times 3-1=8.$ El caso Paz, José, Nico da $(3+2)\times 3-1=14.$

3. **(c)** Como 35 y 63 están en el mismo renglón, deben tener un factor común, así que éste debe ser 1 o 7. Análogamente 35 y 30 deben tener factor común. Entonces la tabla se completa de la siguiente manera:

×	5	9
7	35	63
6	30	54

4. **(c)** El médico no es Ford (por ser más joven) ni tampoco es Sáez (porque no tiene hermanos), así que su nombre es Ríos. También sabemos que Ford no es ingeniero, así que debe ser músico. Finalmente tenemos que Sáez debe ser ingeniero.

5. **(d)** Como el radio es 6, la distancia de Q a P es 18. La altura en R es el lado vertical del rectángulo, el cual mide 12. entonces el área es $\dfrac{12\times 18}{2}=108.$

6. **(c)** Digamos que las dimensiones del rectángulo original son a y b y que $a>b.$ Entonces, al cortar, los perímetros son $2(\frac{b}{2}+a)=50$ y $2(\frac{a}{2}+b)=40.$ Al resolver este sistema tenemos $a=20$ y $b=10.$

7. **(a)** Como dos días consecutivos (jueves y viernes) dice la verdad, y no hay dos respuestas juntas iguales, entonces uno de los días que falta es jueves o viernes. Si el que falta es jueves, entonces la primera respuesta fue en viernes, su nombre sería Mario y en martes habría dicho Pedro, así que, efectivamente, habría mentido el martes. Por otro lado, si al final fue viernes, entonces su última respuesta habría sido verdadera así que su nombre sería Beto, pero la respuesta del martes anterior habría sido también Beto, de manera que no habría mentido en martes y esto es imposible.

8. **(d)** Al unir los centros de los círculos nos queda un triángulo de lados 3, 4 y 5, así que es un triángulo rectángulo con el ángulo recto en el centro del círculo pequeño. Entonces la longitud buscada es ¾ del perímetro de ese círculo.

9. **(d)** Si ponemos los números por parejas, la suma debe ser la misma. Esto se logra con $14+11=12+13.$ Entonces el acomodo es $BCAD$ (o viceversa), y la distancia mayor es, precisamente, la suma.

10. **(e)** En total, entre los dos, sus monedas valen $9\times 2+8\times 5=58.$ Se quiere que tengan 29 cada uno. En cada intercambio Daniel obtiene 3 más y, como al principio tiene 18 que es múltiplo de 3, siempre tendrá un valor múltiplo de 3, pero 29 no lo es, así que es imposible.

11. **(d)** Como las dos cartas de Carla suman un número par, ambas deben ser pares o ambas impares, eso quiere decir que las restantes, que no tiene María son todas de la misma paridad; esto sólo es posible si María tomó las tres pares y entonces la suma es $2+4+6=12.$

12. **(d)** La respuesta es $\frac{1}{3}+\frac{\frac{2}{3}\times 1}{4}=\frac{4+2}{12}=\frac{1}{2}.$

13. **(a)** Trazando dos paralelas a los lados que están a 60^o y que pasan por los centros de los hexágonos, se parte la figura en 8 medios hexágonos de los cuales 4 están sombreados.

14. **(e)** Los números que cumplen la condición y que empiezan con 1 son 8, los que empiezan con 2 son 7 y así sucesivamente. Entonces en total son $8+7+6+5+4+3+2+1=36.$

15. **(a)** Como QPB es un triángulo rectángulo con el ángulo $\sphericalangle QPB=40^o,$ entonces $\sphericalangle QBP=50^o$. Ahora, $\sphericalangle QPA=180^o-(120^o+40^o)=20^o$, y así $\sphericalangle QAP=180^o-(90^o+20^o)=70^o$, de donde $\sphericalangle ABC=\frac{1}{2}(180^o-70^o)=55^o$ y de aquí que $\sphericalangle PBC=55^o-50^o=5^o$.

16. **(d)** Observemos que 15 ≤ n ≤ 16 pues n tiene tres 5's como factores y no tiene a 17 como factor. En ambos $n=15$ o $n=16$ el número de 3's es 6: $3, 3\times 2, 3\times 3=9, 3\times 4=12$ y $3\times 5=15.$ Ahora veamos cuántos 2's hay en ambos: Hay uno en cada uno de 2, 6, 10 y 14, dos en cada uno de 4 y 1, y tres en 8, así que hasta 15 hay once, pero en $16!$ hay cuatro más.

17. **(a)** Completemos en el orden siguiente:

$$
\begin{array}{r}
\times\quad * * * \\
1 * * \\ \hline
2 2 * * \\
+\quad 9 0 * \\
4 5 2 \\ \hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\quad 4 5 2 \\
1 * * \\ \hline
2 2 * * \\
+\quad 9 0 * \\
4 5 2 \\ \hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\quad 4 5 2 \\
1 * 5 \\ \hline
2 2 6 0 \\
+\quad 9 0 * \\
4 5 2 \\ \hline
5 6 * * *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\quad 4 5 2 \\
1 2 5 \\ \hline
2 2 6 0 \\
+\quad 9 0 4 \\
4 5 2 \\ \hline
5 6 5 0 0
\end{array}
$$

18. **(b)** El que cada problema deba revisarse por 2 jueces puede pensarse como si fueran 12 problemas y cada juez revisara sólo 1; los 24 problemas deben dividirse en grupos de 3.

19. **(c)** Buscamos dos enteros a y b sin factores en común y tales que $.45<\frac{a}{b}<.5.$ Analizamos las distintas posibilidades: $\frac{2}{6}<\frac{2}{5}=.4<.45;$ $\frac{3}{8}<\frac{3}{7}<.43<.45;$ $\frac{4}{10}<\frac{4}{9}<.45,$ pero $.46<\frac{5}{11}=.47.$

20. **(d)** Observemos que exactamente uno de los cuadrados no debe estar junto a un triángulo (lo cual ocurre en todas las figuras). Si en ese cuadrado dibujamos una flecha del centro a cada uno de los cuadros con los que debe pegarse, la flecha debe dirigirse hacia el triángulo que está pegado con el otro cuadrado; con esta observación es fácil ver que son los desarrollos 3 y 5 los que no cumplen esto (por ejemplo, el 3 en el cuadro superior y el 5 en el cuadro a la izquierda).

21. **(c)** Sea x el ancho usado. Entonces $\frac{x}{4}=\frac{9}{16}$, así que $x=\frac{9}{4}$. Entonces la parte no usada tiene ancho $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$. La parte no usada tiene área $\frac{3}{4}\times 4=3$, así que la respuesta es $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$.

22. **(a)** Multipliquemos las dos ecuaciones dadas: $x^3y^3z^3=7^{12}$. Entonces $xyz=7^4$.

23. **(a)** Observemos que la diferencia entre cualquier pareja de A, B, D, F es múltiplo de 3 así que todos son múltiplos de 3 o ninguno de ellos. Por otro lado, C y E tienen diferencia 5, así que no pueden ser ambos múltiplos de 3. De aquí concluimos que todos A, B, D y F son múltiplos de 3. y C y E no lo son. Un razonamiento análogo nos lleva a los múltiplos de 5 son A, C, E y F. Entonces los múltiplos de 15 son A y F.

24. **(e)** Como sólo son dos pares y se forman tres parejas, la suma debe ser par; entonces 0 y -4 van juntos y la suma de las parejas debe ser -4. Las únicas otras posibilidades de lograr -4 son juntando -9 con 5, y -1 con -3. Sobra -5.

25. **(e)** Como $2008=8\times 251$, tenemos que $a^2=8(251-b)=4\times 2(251-b)$. Entonces $251-b=2x^2$, de donde b es impar y $\frac{251-b}{2}=125$. Como b es entero positivo, $251-b$ es un entero entre 1 y 125; los cuadrados en este rango son: $1^2, 2^2, \ldots, 11^2$.

26. **(b)** Sean $a=12c$ y $b=12d$. Entonces el mínimo común múltiplo de a y b es $12cd=3\times 4cd$. Entonces exactamente uno de c o d es un cuadrado multiplicado por 3 y el otro es un cuadrado (no divisible por 3); digamos que $c=3e^2$ y $d=f^2$. Entonces $\frac{a}{3}=4c$, no cuadrado; $\frac{b}{3}=4d$, cuadrado; $\frac{a}{4}=3c$, cuadrado; $\frac{b}{4}=3d$, no cuadrado, y $a\times b=144cd$, no cuadrado.

27. **(a)** Tenemos que área $(AOB)=\frac{1}{4}$, así que área $(OAL)=\frac{1}{8}$. Si llamamos X al punto medio de OL y trazamos las rectas KX y RX, entonces el triángulo AOL queda partido en 4 triángulos iguales, tres de los cuales forman el cuadrilátiero $KRLO$, así que el área de $KRLO$ es ¾ del área de OAL, es decir, $\frac{3}{32}$. Finalmente multiplicamos por 4.

28. **(b)** Conviene hacer un esquema llamando d a la distancia entre r y s.

$$\begin{array}{ccccccc} & d & & d & & 2d & \\ r & \text{-----------} & s & \text{-----------} & t & \text{----------------------} & u \end{array}$$

Entonces el punto medio entre s y u es $s+\frac{3d}{2}$ o, equivalentemente, $t+\frac{d}{2}=t+\frac{s-r}{2}$. (Del esquema es fácil ver que las demás respuestas son todas distintas de $t+\frac{d}{2}$.)

29. **(e)** Los múltiplos de 17 de dos cifras son: 17, 34, 51, 68 y 85. Los de 23 son: 23, 46, 69 y 92. Queremos juntar los números de esta lista para formar uno de 2007 cifras. Observemos que ningún número empieza en 7 así que no es posible usar el 17; por esta misma razón no es posible usar el 1 y entonces tampoco el 5 y de aquí que tampoco el 8. Los que sobran son: 34, 23, 46, 69 y 92. Al juntar éstos logramos 346, 234, 469, 692 y 923. Ahora, para juntar dos de éstos las posibilidades son: 2346, y 6923. Aquí ya vemos que al repetir cíclicamente 23469 formamos un número como el buscado y lo mismo con 34692, 46923, 69234 y 92346.

30. **(e)** Como $CP=1=PD$ y $BQ=QA=1$, tenemos que los triángulos CPD y BQA son equiláteros de lado 1. Sus alturas miden $\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Entonces $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-PQ=1$ (la distancia del lado CD al lado AB). En conclusión $PQ=\sqrt{3}-1$.