TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2014, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2014.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2014, Número 1

Tzaloa recibe el nuevo año con optimismo y llena de ese sano espíritu renovador que impulsa los grandes cambios. Con este número Tzaloa inicia su sexto año de publicaciones trimestrales ininterrupidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es otro ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida tanto a Luis Eduardo García Hernández como a Eduardo Velasco Barreras, quienes desde ahora se integran al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida tanto a Anne Alberro Semerena como a Francisco Ruiz Benjumeda, quienes habiendo sido miembros del Comité Editorial desde el incio del proyecto, decidieron ceder el espacio a la renovación y el cambio.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

Pasando al contenido, destaca el artículo: *Un problema de geometría*, contribución de Héctor Flores Cantú. En él y a propósito de un problema de geometría, el principiante encontrará una eficaz guía para comenzar a adentrarse en el fascinante mundo de la resolución de problemas. Asimismo, los profesores que trabajan en la preparación de estudiantes para la participación en concursos de matemáticas, encontrarán en el enfoque y la propuesta didáctica un recurso valioso.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en ti.
De tal forma, que estando todo listo, sólo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2014.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

28ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1995. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2014-2015 y, para el 1° de julio de 2015, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 9 al 14 de noviembre de 2014 en Toluca, Estado de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2014 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Tailandia, julio de 2015) y a la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Puerto Rico, septiembre de 2015).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2015).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la IV Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO)[2] a celebrarse en el mes de abril de 2015.

[2]La Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas nace en 2012 como una manera de estimular la participación femenil en olimpiadas de matemáticas, siguiendo el ejemplo de China que ya contaba con una olimpiada exclusiva para mujeres. El modelo de competencia de esta olimpiada es el mismo que el de la IMO, con la diferencia de que las delegaciones nacionales son de cuatro participantes en lugar de seis. A pesar de que la olimpiada es europea, es posible la participación de equipos no europeos por invitación. La primera EGMO se llevó a Cabo en Inglaterra en 2012. La tercera edición se llevará a cabo en Turquía en el mes de abril de 2014. Ésta será la primera participación de México en esta olimpiada.

Un problema de geometría:

Entrenamientos del equipo de Nuevo León de la

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Por Héctor Raymundo Flores Cantú

Nivel Introductorio

Estas notas reflejan algunas de las sesiones de entrenamiento del equipo de seleccionados de Nuevo León. El enfoque de aprendizaje está basado en problemas y las herramientas teóricas se van explicando a la par de los problemas. En particular, el objetivo de esta sesión es iniciar con el análisis de problemas menos directos que requieren una mayor concentración, reconocimiento de patrones y un análisis considerable de alternativas.

La discusión está dirigida al nivel que llamamos "Matemáticos" donde el objetivo es empezar a formalizar el lenguaje matemático y el uso de conceptos y teoremas de forma correcta. Usaremos algunos problemas de los concursos nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

El problema

Empezaremos con un problema de geometría del examen del concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas del año 2012. Aunque este es el problema 1 del examen, realmente no era "fácil".

Problema 1 *Sean $\mathcal{C}_1$ una circunferencia con centro O, P un punto sobre ella y ℓ la recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en P. Considera un punto Q sobre ℓ, distinto de P y sea $\mathcal{C}_2$ la circunferencia que pasa por O, P y Q. El segmento OQ interseca a $\mathcal{C}_1$ en S y la recta*

PS interseca a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P. Si r_1 y r_2 son las longitudes de los radios de $\mathcal{C}_1$ y de $\mathcal{C}_2$, respectivamente, muestra que

$$\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Los problemas de la olimpiada de matemáticas no son sencillos. Si tú eres de los que sólo con leer el problema ya tienes una idea del tipo de solución, entonces este problema es una pérdida de tu tiempo. Estas notas están dirigidas para aquellos que tienen incluso dificultades para entender con claridad lo que se está pidiendo o para aquellos que aun si entienden, no tienen idea de cómo empezar.

Paso 1: LEER

Una vez dicho esto... empecemos a pensar.

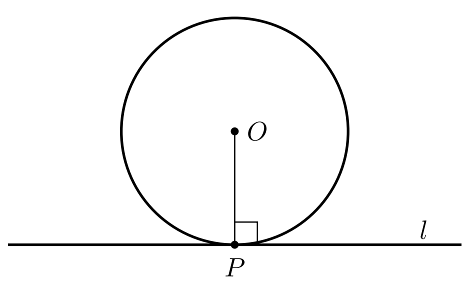
El primer paso siempre es LEER el problema y tristemente no todos saben leer. Por "leer" no me refiero a recitar lo que dice el problema, sino a realmente pensar mientras vas leyendo. Para leer de esta forma, necesitamos hacerlo poco a poco, oración por oración.
La primera oración dice:

SEAN $\mathcal{C}_1$ UNA CIRCUNFERENCIA CON CENTRO O,
P UN PUNTO SOBRE ELLA Y ℓ LA RECTA TANGENTE A $\mathcal{C}_1$ EN P.

Antes de seguir leyendo vamos a asegurarnos de habernos familiarizado con esta oración. Si aquí hay alguna duda, ¿para qué perdemos el tiempo siguiendo con la lectura?

Investigando la primera oración

En esta frase nos hablan de la existencia de una circunferencia que llamaremos $\mathcal{C}_1$, el centro de esa circunferencia se llama O y P es un punto sobre ella (o sea sobre la circunferencia). Esto es suficiente para hacer la siguiente figura. Podemos elegir cualquier punto en la circunferencia, pero usualmente conviene elegir un punto especial en el dibujo. Por ejemplo nosotros elegiremos el punto de abajo. Luego nos dicen que se traza una recta tangente a la circunferencia por el punto P que se llama ℓ. Esto significa que la recta "toca" a la circunferencia exactamente en el punto P.



De esta figura, podemos ya empezar a decir algo. En particular sabemos que...

Patrón 1

...una recta tangente a una circunferencia
siempre es perpendicular
al radio que va del centro al punto de tangencia.

Es decir, en nuestra figura la recta hace un ángulo de $90°$ con el radio del círculo. Como no se nos ocurre nada más qué decir, debemos seguir con la lectura.

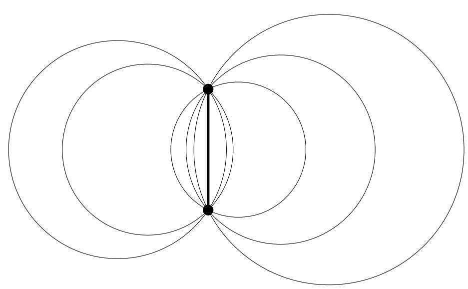
Investigando la segunda oración

La segunda oración dice:

CONSIDERA UN PUNTO Q SOBRE ℓ, DISTINTO DE P Y
SEA $\mathcal{C}_2$ LA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR O, P Y Q.

Ahora debemos pensar en otro punto Q sobre la recta y nos piden que imaginemos una circunferencia que pasa por los tres puntos que hasta ahora hemos definido. Trazar una circunferencia por tres puntos no es algo fácil, así que nos detendremos un momento para seguir pensando antes de seguir leyendo.

El punto Q podría ser cualquiera en la recta, conviene que pensemos cómo se ve la figura al considerar diferentes opciones para este punto. Si suponemos que los otros dos puntos O y P están fijos entonces, ¿qué podemos decir sobre las circunferencias que pasan por esos dos puntos? Olvidemos por un momento la circunferencia $\mathcal{C}_1$, veamos solo O y P.
Las circunferencias que pasan por dos puntos fijos se ven de la siguiente forma.

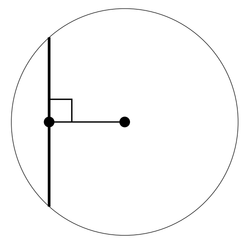


Si aún no tienes respuesta a la pregunta anterior, entonces marca los centros de los círculos. ¿Qué podemos decir sobre esos centros?
No es muy difícil sospechar que todos esos centros estarán en una recta que es perpendicular y pasa por el punto medio del segmento. De hecho es posible que ya sepas lo siguiente.

Patrón 2

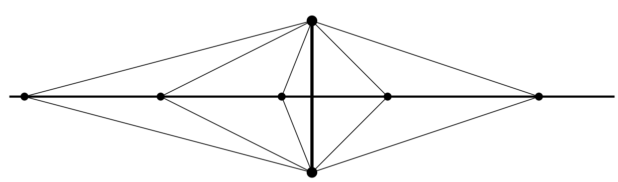
En una circunferencia, una cuerda es perpendicular
al segmento que va de su punto medio al centro.

La figura correspondiente es la siguiente.



Este hecho geométrico nos permite asegurar que los centros de todos los círculos que pasan por dos puntos forman una recta que es perpendicular al segmento y pasa por el punto medio. Esta recta es tan especial que tiene nombre, se llama *MEDIATRIZ* del segmento.

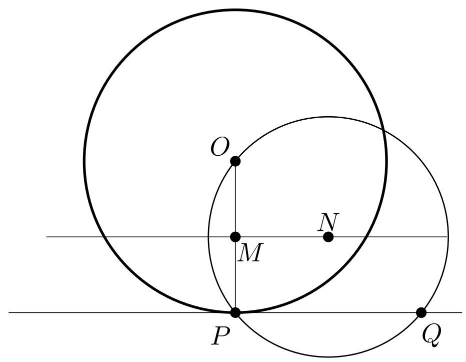
Definición 1 *Dado un segmento, la recta que es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio, se llama* mediatriz del segmento.



Esta recta es el eje de simetría del segmento y tiene varias propiedades que suelen ser muy útiles en los problemas. Por ejemplo, otra cosa que no debemos olvidar es que los triángulos formados por la cuerda y el centro de un círculo son siempre isósceles. Con esto tenemos siempre dos lados iguales y dos ángulos iguales que pueden servirnos.

Pero antes de seguir con la lectura del problema, conviene que nos detengamos a pensar. ¿Qué podemos decir si consideramos todo lo que sabemos hasta ahora? Como ejercicio, mira la figura y trata de descubrir cosas que no habíamos dicho antes.

Ahora podemos regresar al problema. Retomando las dos partes que hemos analizado obtenemos la siguiente figura.

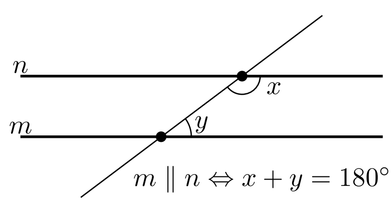


Si llamamos N al centro de la circunferencia $\mathcal{C}_2$, podemos por ejemplo darnos cuenta de que la recta que pasa por M y N es paralela a la recta ℓ. ¿Cómo justificas eso?

Esto es verdadero debido a que ambas son perpendiculares al segmento OP, pero la idea más general que sirve mucho en problemas de geometría es la siguiente. Si necesitas demostrar que dos rectas son paralelas, fíjate en los ángulos que forman con una tercera recta.

Patrón 3

Si tenemos tres rectas,
la tercera forma un ángulo ***x*** *con la primera recta*
y además un ángulo ***y*** *con la segunda,*
entonces la primera y segunda recta son paralelas
si y sólo si ***x+y***$= 180^o$.



Éste es un resultado muy conocido sobre ángulos entre paralelas, así que no nos detendremos mucho con esto. Porque aún no hemos terminado con la figura de nuestro problema.

Observa los puntos O, Q y N. ¿Qué puedes decir acerca de ellos?

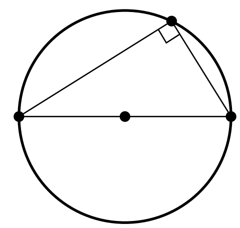
Parece que los tres están sobre una misma línea. De hecho es posible que sospeches que OQ es diámetro de la circunferencia $\mathcal{C}_2$. Pero, ¿cómo podemos estar seguros de eso?

Nada de lo que hemos hecho hasta ahora nos indica que OQ sea un diámetro. Para esto necesitaremos otro patrón geométrico que es muy importante reconocer.

Patrón 4

El ángulo que inscribe una cuerda en una circunferencia
es de $90°$ *si y sólo si la cuerda es un diámetro.*

Geométricamente el patrón se ve así.



Este resultado se conoce como el *Segundo Teorema de Tales*. Aunque el resultado ya era conocido antes, se cree que Tales de Mileto fue el primero en demostrarlo usando triángulos isósceles. Otra manera fácil de convencerse es trazar el diámetro que pasa por el vértice del ángulo recto. De esta forma los dos diámetros serán diagonales de un rectángulo. También dice la leyenda que estaba tan contento que sacrificó un buey en honor a este descubrimiento. Sea como sea, es un resultado importante y suele ser una técnica posible cuando necesitamos demostrar cosas como las siguientes.

- Que un ángulo es recto (o que dos rectas son perpendiculares).
- Que una cuerda de una circunferencia es diámetro.
- Que un punto es punto medio de un segmento.

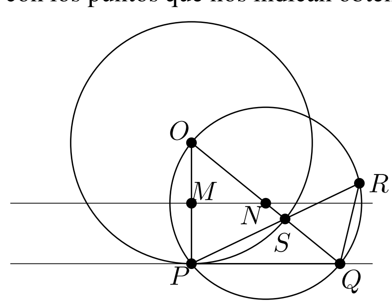
Esa segunda oración realmente tenía mucho contenido. Pero no hemos terminado de leer el problema.

Investigando la tercera oración

La tercera oración dice:

El segmento OQ interseca a $\mathcal{C}_1$ en S y
la recta PS interseca a $\mathcal{C}_2$ en un punto R distinto de P.

Si completamos la figura con los puntos que nos indican obtenemos lo siguiente.



Otra vez, antes de seguir leyendo pensemos en torno a esta figura. Observa los nuevos puntos y trata de descubrir algo nuevo.

Realmente hay muchas cosas que decir, pero no por eso vamos a detenernos. Simplemente debemos ser ordenados. Como ejercicio deberías detener la lectura y tratar de hallar la mayor cantidad posible de cosas en la figura.

Pero si te da pereza, ponemos algunas de ellas como ejercicios.

Ejercicio 1 *Con la información de la última figura debes convencerte de lo siguiente.*

a) $\angle OSP = \angle QSR$.

b) *El triángulo* OPS *es isósceles.*

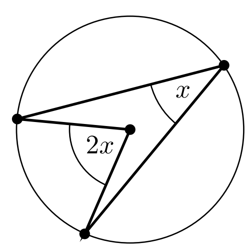
c) $\angle POS = 2\angle QPS$.

d) $\triangle POS \sim \triangle QRS$.

Los incisos a) y b) son muy fáciles y no vamos a discutirlos. Pero los incisos c) y d) pueden no ser tan evidentes para quienes no estén familiarizados con la geometría del círculo. Para esto vamos a requerir otros patrones geométricos importantes. Primero el siguiente

Patrón 5

El ángulo central que abarca una cuerda mide el doble que cualquier ángulo inscrito a la misma cuerda.

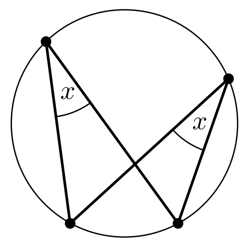


La justificación de este patrón vamos a dejarla como ejercicio. Pero si necesitas una sugerencia recomendamos trazar la recta que pasa por el centro y el vértice del angulo inscrito. Luego fíjate en los ángulos que se forman con ella y las cuerdas.

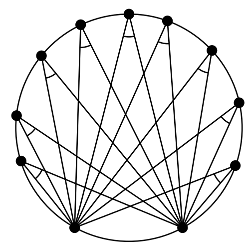
Una vez que te convences de lo anterior y si imaginas que el vértice del ángulo inscrito se mueve sobre la circunferencia, puedes convencerte de que los ángulos inscritos no cambian, porque el ángulo central siempre es el mismo. Esto significa que dos ángulos inscritos al mismo arco siempre son congruentes. Esto lo hacemos notar en el siguiente patrón.

Patrón 6

Dos ángulos inscritos al mismo arco son iguales.



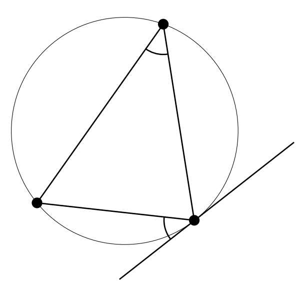
Si te imaginas muchos puntos sobre la circunferencia todos formando ángulos inscritos con el mismo arco, entonces los ángulos serán iguales. Como la figura parece un maguey, algunos conocemos a este teorema como *El Teorema del Maguey*.



Siguiendo esta misma idea de mover el punto, imagina que el punto se acerca a uno de los puntos fijos. ¿Qué pasa entonces con el ángulo? Resulta que en ese extremo, el ángulo se aproxima al que forma la cuerda con la recta tangente a la circunferencia en el punto fijo. Este resultado lo vamos a resaltar como otro patrón. Esto porque por alguna razón muchos alumnos tienen problemas para reconocer cuándo usarlo.

Patrón 7

En una circunferencia,
el ángulo que una cuerda forma con la tangente en uno de sus puntos
es igual al ángulo inscrito en esa cuerda.

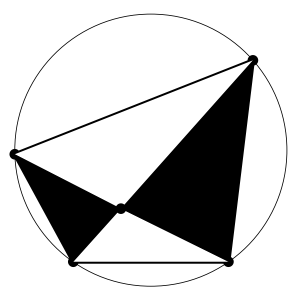


La demostración de esto, también la dejamos como ejercicio. Pero como siempre cuando hay tangentes a un círculo, puede ser buena idea trazar el segmento que va del centro del círculo al punto de tangencia.

Este patrón es el que resuelve la cuestión del inciso c) del ejercicio anterior. Pero aún tenemos que justificar el inciso d). Esto último será apenas la entrada a un tema intermedio relacionado con la geometría del círculo. Nuestra entrada es el siguiente patrón.

Patrón 8

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo,
se forman dos pares de triángulos semejantes.



Para la justificación de este patrón, necesitaremos utilizar los conceptos de triángulos similares o triángulos semejantes. Podemos usar el teorema del Maguey para ver que sus pares de ángulos son iguales. Esto es suficiente para que sean semejantes.

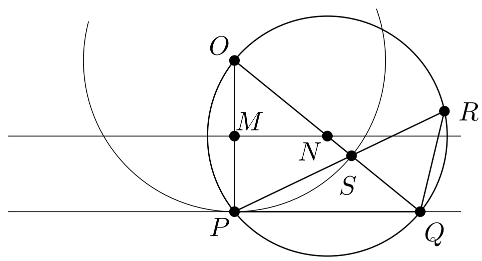
De esta igualdad se deduce directamente el inciso d). Además, si conectamos esto con el inciso b) sabremos que en nuestro problema el triángulo SRQ también es isósceles, en particular sabremos que $SR = QR$.

Investigando el final del problema

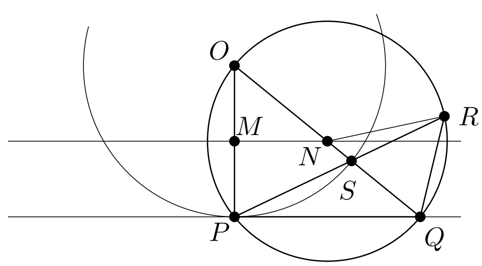
Finalmente la última parte del problema nos hace la verdadera pregunta.

Si r_1 y r_2 son las las longitudes de los radios
de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente,
muestra que $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.

Para terminar vamos a necesitar otra vez la figura.



Ahora vamos a analizar la última oración. Esta nos indica el objetivo del problema y podemos identificarlo como la igualdad entre dos proporciones. El uso de triángulos semejantes es muchas veces el medio de demostrar proporciones. La dificultad es entonces encontrar los triángulos adecuados. Pero analizando lo que nos piden podemos sospechar qué triángulos podrían ser.
Los segmentos involucrados son PS, SR, r_1 y r_2. Los tres primeros ya los hemos usado en triángulos, el único que no hemos usado es r_2, el radio de la segunda circunferencia. Necesitamos un triángulo que tenga un lado r_2 y de preferencia que esté relacionado con los lados que ya hemos analizado. Los candidatos son los triángulos que se forman conectando el centro de la segunda circunferencia N con puntos de la circunferencia. Como ejercicio, analiza los triángulos que tienen como lados algunos de los siguientes segmentos: NO, NP, NQ, NR. ¿Qué puedes decir acerca de cada uno de ellos?



Es posible que te tome unos minutos, pero eventualmente debes notar que el triángulo QNR es semejante a los triángulos que ya habíamos analizado. Es decir

$$\triangle POS \sim \triangle SRQ \sim \triangle QNR.$$

Se obtienen muchas proporciones, pero si nos enfocamos en las que tienen los segmentos que nos interesan obtenemos que $\frac{OP}{NQ} = \frac{PS}{QR}$. Finalmente dado que $QR = SR$, $OP = r_1$ y $NQ = r_2$, podemos concluir que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{PS}{SR}$, que es lo que nos habían pedido.

Conclusiones

El análisis de este problema nos deja mucho aprendizaje. Además de todos los patrones y resultados que hemos usado, nos enseña que para resolver un problema es necesario avanzar poco a poco. Normalmente es más difícil resolver problemas de este tipo, leyendo todo de una vez y haciendo una sola figura. Los problemas de geometría con figuras complejas deberían ser investigados de una forma similar a la que presentamos en esta sección. Esta es de hecho una lección estratégica.

Los problemas complejos se analizan poco a poco.

Otra de las lecciones del problema es la siguiente.

La semejanza de triángulos nos sirve para conectar ángulos con proporciones.

Si nuestro objetivo es demostrar una proporción y tenemos algunos ángulos iguales, semejanzas puede ser una técnica útil. Pero en otros problemas, buscamos demostrar que hay ángulos iguales y tenemos información sobre proporciones. Vuelve a dar una leída a este texto y toma nota de todas las lecciones que puedas.

Ejercicios

1. Sea AB un diámetro de una circunferencia g. Un punto C se elige sobre el segmento AB y se traza una recta m por el punto C perpendicular a AB. Sea D el punto de intersección de la recta m con la circunferencia g. Una segunda circunferencia g' es tangente a la recta m en el punto D y pasa por el punto A. Demuestra que las circunferencias g y g' tienen el mismo radio.

2. Considera un punto arbitrario O sobre un segmento PQ, de forma que no sea su punto medio. Hacia el mismo lado del segmento PQ se construyen los triángulos equiláteros OPA y OQB. Llamamos N y L a los puntos medios de los segmentos PB y QA respectivamente. Demuestra que NLO es un triángulo equilátero.

3. Sobre el lado AB de un triángulo ABC se elije un punto arbitrario P. Por este punto P se traza una recta m que corta al triángulo en dos figuras de áreas iguales. El segundo punto de intersección de la recta m con el triángulo se llama Q. La paralela por Q al segmento CP corta al lado AB en el punto D. Demuestra que D es el punto medio del lado AB.

4. Sea $ABCD$ un cuadrado. Con centro en el vértice A se traza una circunferencia de radio igual al lado del cuadrado que pasa por los vértices B y D. Sobre BC se elige un punto E y sobre CD el punto F de forma que EF es tangente a la circunferencia. Demuestra que el ángulo EAF mide $45°$.

5. En el problema anterior, asumiendo que no sabes que EF es tangente a la circunferencia, demuestra que si el ángulo EAF es de $45°$ entonces EF tiene que ser tangente a la circunferencia.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 30 problemas seleccionados especialmente para comenzar tu preparación de este año. Es importante señalar que en esta ocasión los problemas se presentan en formato de opción múltiple. Esto se debe a que el filtro inicial de la mayoría de los concursos estatales suele ser presentado así. Sin embargo, conviene señalar que para resolverlos no es recomendable obtener la respuesta correcta por eliminación de las otras opciones.

Ten en cuenta que en las olimpiadas no sólo se trata de saber la respuesta correcta, sino que además, es necesario justificar dicha solución. En las etapas más avanzadas de todos los concursos de matemáticas, las preguntas siempre son abiertas y nunca se utiliza el formato de opción múltiple[3]. En el caso de esta publicación, el formato de opción múltiple se adopta con el fin de que el estudiante que recién se inicia se vaya familiarizando con el concurso y sus estapas.

Como seguramente ya habrás observado, en el primer número de cada año el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección no es muy elevado y el material escogido está pensado mayoritariamente para principiantes. Conforme el año transcurra su nivel se irá incrementando paulatinamente, de forma que, para el último número del año, el material será en su mayoría de nivel avanzado.

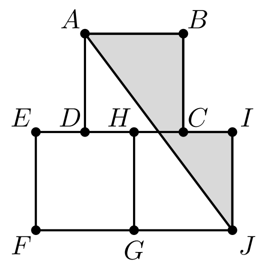
Por último, te invitamos a que con tu participación contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Consideremos todos los subconjuntos no vacíos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y para cada uno de ellos calculamos el producto de sus elementos. ¿Cuál es la suma de todos estos productos?

(a) 719 (b) 120 (c) 1000 (d) 119 (e) 15

[3] De hecho, el formato de opción múltiple sólo se usa por el carácter masivo de las etapas inciales de muchos concursos y debido a su facilidad de calificación (no requiere apreciación).

Problema 2. Los cuadriláteros $ABCD$, $EHGF$ y $HIJG$ son cuadrados de lado $1\,cm$, de tal manera que D y C son los puntos medios de EH y HI, respectivamente. ¿Cuánto vale el área sombreada?



(a) $0.75\,cm^2$ (b) $1\,cm^2$ (c) $0.8\,cm^2$ (d) $1.4\,cm^2$ (e) $0.5\,cm^2$

Problema 3. Se tienen diez monedas, de denominaciones $\$1, \$2, \ldots, \$10$ y se dan dos de cada una a Ana, Bruno, César, Daniel y Ernesto de tal manera que Ana termina con $\$16$, Bruno con $\$4$, César con $\$7$, Daniel con $\$11$ y Ernesto con $\$17$. ¿Quién tiene la moneda de $\$6$?

(a) Ana (b) Bruno (c) César (d) Daniel (e) Ernesto

Problema 4. ¿Cuántos números de tres dígitos hay tales que tienen al menos un 2 y al menos un 5?

(a) 24 (b) 28 (c) 30 (d) 25 (e) 18

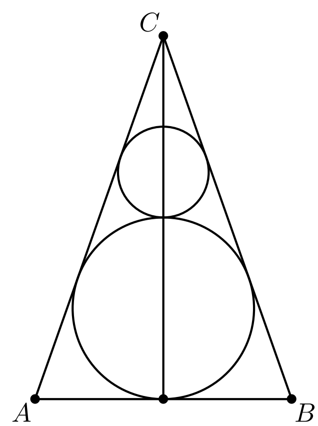
Problema 5. a, b y c son números reales tales que $a^2 + 2b = 7$, $b^2 + 4c = -7$ y $c^2 + 6a = -14$. ¿Cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

(a) 27 (b) 11 (c) 6 (d) 10 (e) 14

Problema 6. Los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética son $a+b$, $a-b$, ab y $\frac{a}{b}$ (en ese orden). ¿Cuál es el quinto término de la sucesión?

(a) $\frac{6}{5}$ (b) $-\frac{9}{8}$ (c) $\frac{123}{40}$ (d) 10 (e) $\frac{27}{40}$

Problema 7. El triángulo isósceles ABC tiene su incírculo de radio $2\,cm$ y también hay un círculo de radio $1\,cm$ tangente al incírculo y a los lados AC y BC. ¿Cuánto vale la altura desde C?



(a) $8\,cm$ (b) $9\,cm$ (c) $9.5\,cm$ (d) $7\,cm$ (e) $8.5\,cm$

Problema 8. ¿Cuál es el valor de $\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{100}\rfloor$?

(a) 500 (b) 600 (c) 5050 (d) 625 (e) 525

Problema 9. Pedro y Juan son vendedores y ganan $7000 mensuales más una comsión del $8\,\%$ sobre las ventas. En febrero, Juan ganó $14000 y Pedro $17500. En ese mes, ¿en qué porcentaje las ventas de Pedro superaron a las de Juan?

(a) $20\,\%$ (b) $30\,\%$ (c) $45\,\%$ (d) $50\,\%$ (e) $60\,\%$

Problema 10. Marco tiene tres terrenos cuadrados: uno de ellos tiene 100 metros de lado y los otros dos tienen 200 metros de lado. Si Marco quiere cambiar sus tres terrenos por un nuevo terreno cuadrado cuya área sea igual a la suma de los tres que ya tenía, ¿Cuánto debe medir el lado del nuevo terreno?

(a) 300 metros (b) 350 metros (c) 400 metros (d) 450 metros (e) 500 metros

Problema 11. La herencia de Jorge fue repartida de la siguiente manera: la quinta parte para su esposa, la sexta parte de lo restante para su hermano mayor y el resto se repartió en partes iguales entre sus 12 hijos. ¿Qué porción de la herencia le tocó a cada hijo?

(a) $\frac{1}{20}$ (b) $\frac{1}{18}$ (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{15}$ (e) $\frac{1}{14}$

Problema 12. Un número tiene tres dígitos. La suma del dígito de las unidades y el dígito de las decenas es 13, y el producto de los tres dígitos es igual a 120. ¿Cuál es el dígito de las centenas?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 8

Problema 13. Una pista circular está dividida en 45 casillas, numeradas del 1 al 45. Dos jugadores comienzan en la casilla $\#1$ y avanzan por las casillas (en el sentido de la numeración) bajo las siguientes reglas:

- Si al lanzar dos dados la suma de sus puntos es par, el jugador avanza tres casillas.
- Si al lanzar dos dados la suma de sus puntos es impar, el jugador avanza una casilla.
- Gana el jugador que llega a la casilla $\#45$.

Si un jugador se pasa de la casilla 45 entonces sigue avanzando por la casilla 1. Por ejemplo, si está en la casilla 44 y avanza 3 casillas, termina en la casilla 2.
¿Cuál es el mínimo número de turnos en que un jugador puede ganar?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 14. Sea M un número de dos dígitos con la propiedad de que es igual al doble del producto de sus dígitos. ¿Cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- M es múltiplo de 3.
- M es múltiplo de 8.
- M es un cubo perfecto.
- M es mayor a 40.
- $M + 1$ es primo.

(a) Ninguna (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 15. Un corral tiene forma cuadrada y mide $10\,m$ de lado, dentro del cual está una vaca, amarrada por una cuerda a una de las esquinas. Se sabe que el suelo del corral está cubierto de forraje, y que la longitud de la cuerda es tal que la vaca alcanza la mitad del área del forraje para comer. ¿Cuál es la longitud de la cuerda?

(a) $\frac{10}{\sqrt{2\pi}}\,m$ (b) $\sqrt{\frac{300}{\pi}}\,m$ (c) $\frac{20}{\sqrt{\pi}}\,m$ (d) $\frac{10}{\sqrt{\pi}}\,m$ (e) $\sqrt{\frac{200}{\pi}}\,m$

Problema 16. Un mosaico, en forma de polígono regular, fue retirado del lugar que ocupaba un una pared. Se observó que, si el mosaico se rota 40° o 60° alrededor de su centro, podía ser encajado perfectamente en el lugar del que se quitó. ¿Cuál es el menor número de lados que puede tener el mosaico?

(a) 6 (b) 12 (c) 18 (d) 24 (e) 30

Problema 17. Si m y n son enteros positivos tales que $\frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15}$, ¿Cuál es el menor valor que puede tomar n?

(a) 6 (b) 7 (c) 25 (d) 30 (e) 60

Problema 18. ¿Cuál es el mínimo número de enteros positivos que se necesitan para que la suma de todos ellos sea 100, pero la suma de cualesquiera 7 de ellos sea menor que 15?

(a) 25 (b) 40 (c) 50 (d) 70 (e) 100

Problema 19. ¿Cuál es la máxima cantidad de circunferencias que pueden dibujarse de tal forma que cada una sea tangente a todas las demás pero no haya tres circunferencias tangentes en un mismo punto?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 20. ¿Cuánto vale x en la siguiente ecuación?

$$10^x = (10^{624} + 25)^2 - (10^{624} - 25)^2.$$

(a) 625 (b) 626 (c) 628 (d) 1248 (e) 1252

Problema 21. En una urna hay 7 pelotas rojas, 8 pelotas azules y 9 pelotas verdes. Si se sacan pelotas sin ver y sin regresarlas a la urna, ¿cuál es el mínimo número de pelotas que se deben sacar para garantizar tener al menos dos de cada color?

(a) 6 (b) 7 (c) 17 (d) 19 (e) 24

Problema 22. En el triángulo ABC se toman los puntos medios D y E de BC y AC, respectivamente. Si el área del triángulo ADE es 16, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

(a) 32 (b) 48 (c) 64 (d) 80 (e) 160

Problema 23. En la suma $abc + ab.c + a.bc = k$, cada letra representa un dígito y el punto es un punto decimal. Si se quiere que k sea entero, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $a = b = c$ (b) 37 divide a k (c) $a + b + c$ es constante
(d) Hay 5 valores posibles de k (e) a, b, c son pares

Problema 24. En el triángulo ABC, $AB = 1$, $AC = 2$ y $\angle BAC = 45°$. En el triángulo DEF, $DE = 1$, $DF = 2$ y $\angle EDF = 135°$. ¿Cuánto vale $\frac{(ABC)}{(DEF)}$? Nota: (ABC) y (DEF) denotan las áreas de los triángulos ABC y DEF, respectivamente.

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 1 (d) $\sqrt{2}$ (e) 2

Problema 25. Si los números positivos a y b satisfacen que

$$\frac{1}{a^2+4b+4}+\frac{1}{b^2+4a+4}=\frac{1}{8},$$

¿cuál es el valor máximo de $a+b$?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 2 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 4 (e) Ninguna de las anteriores

Problema 26. El entero positivo n tiene la propiedad de que entre los números n^2+1 y $2n^2$ hay exactamente 5 cuadrados perfectos distintos. ¿Cuántos enteros n tienen esta propiedad?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) Más de 3

Problema 27. Los triángulos equiláteros I, II, III y IV son tales que la altura del triángulo I es el lado del triángulo II, la altura del triángulo II es el lado del triángulo III, y la altura del triángulo III es el lado del triángulo IV. Si el área del triángulo I es $2\,cm^2$, ¿cuánto vale el área del triángulo IV?

(a) $2\,cm^2$ (b)$\frac{3}{2}\,cm^2$ (c)$\frac{9}{8}\,cm^2$ (d)$\frac{27}{32}\,cm^2$ (e)$\frac{81}{128}\,cm^2$

Problema 28. Sean m y n enteros positivos tales que 11 divide a $m+13n$ y 13 divide a $m+11n$. ¿Cuál es el valor mínimo de $m+n$?

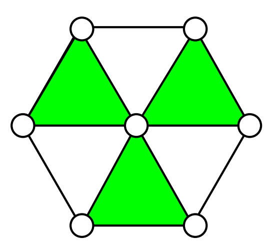
(a) 24 (b) 26 (c) 28 (d) 30 (e) 34

Problema 29. Sea ABC un triángulo tal que $AB = 2\,cm$, $BC = 4\,cm$ y $CA = 2\sqrt{2}\,cm$. Sea P un punto sobre la bisectriz del ángulo en B tal que AP es perpendicular a esta bisectriz, y sea Q un punto sobre la bisectriz del ángulo en C tal que AQ es perpendicular a esta bisectriz. ¿Cuánto mide PQ?

(a) $\sqrt{2}-1\,cm$ (b) $\sqrt{2}\,cm$ (c) $\frac{1}{3}\,cm$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,cm$ (e) $\frac{1}{2}\,cm$

Problema 30. ¿De cuántas formas puedes colocar los números del 1 al 7 en los círculos de tal forma que la suma de los números en los triángulos sombreados sea la misma?

(a) 121 (b) 144 (c) 152 (d) 160 (e) 185



Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 30 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Observa que, en cada solución, no sólo se ha determinado la opción correcta, sino que además, siempre se incluye la argumentación que establece su validez. En todos los casos, la justificación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos, además de que la solución sólo se alcanza a partir del enunciado y sin usar la información contenida en las opciones de respuesta.

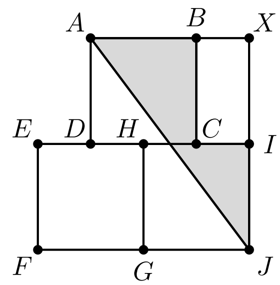
Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (a).
Notemos que al desarrollar el producto

$$(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)(1+5),$$

cada sumando es cada uno de los productos buscados, salvo el $1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$. Luego, la suma buscada es igual a $6! - 1 = 719$.

Solución del problema 2. La respuesta es (b).
Sea X el punto de intersección de las rectas AB e IJ.



Como CI mide $\frac{1}{2}\,cm$, se tiene que $AX = \frac{3}{2}\,cm$. Además, $XJ = 2\,cm$, por lo que el área del triángulo AXJ es $\frac{1}{2}(\frac{3}{2} \cdot 2) = \frac{3}{2}\,cm^2$. El área del rectángulo $BXIC$ es $\frac{1}{2}\,cm^2$, por lo que el área buscada es igual a $\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1\,cm^2$.

Solución del problema 3. La respuesta es (a).
Como Bruno tiene $\$4$, necesariamente tiene que tener las monedas de $\$1$ y de $\$3$ (pues no puede tener dos monedas de $\$2$. César tiene $\$7$, por lo que puede tener las parejas $\$1$ y $\$6$, $\$2$ y $\$5$ o $\$3$ y $\$4$, pero como Bruno tiene las monedas $\$1$ y de $\$3$, necesariamente tiene que tener las monedas $\$2$ y $\$5$.
Quedan disponibles las monedas de $\$4$, $\$6$, $\$7$, $\$8$, $\$9$ y $\$10$. La menor suma que con ellas podemos hacer es $\$10$, y la única posibilidad de sumar $\$11$ es usando las monedas de $\$4$ y $\$7$, que las tiene que tener Daniel. Nos quedan las monedas de $\$6$, $\$8$, $\$9$ y $\$10$. La única manera de sumar 16 es con las monedas de $\$6$ y $\$10$, por lo que esas las tiene Ana y Ernesto debe tener las de $\$8$ y $\$9$.

Solución del problema 4. La respuesta es (b).
Consideremos tres casos:

- El número tiene dos dígitos iguales a 2. Solo se pueden los números 225, 252 y 522.
- El número tiene dos dígitos iguales a 5. Solo se pueden los números 255, 525 y 552.
- El número tiene tres dígitos diferentes. Sea a el otro dígito. El dígito a puede ir en las unidades, en las decenas y en las centenas, por lo que tiene 3 posibilidades de aparecer. Además, como el dígito tiene que ser diferente a 2 y a 5, hay 8 maneras de elegir a a. Esto nos da $3 \times 8 = 24$ números. Pero estamos contando los números 025 y 052, que no tienen tres dígitos, por lo que nos quedan 22 números.

Por lo tanto, hay $3+3+22 = 28$ números de tres dígitos con al menos un 2 y al menos un 5.

Solución del problema 5. La respuesta es (e).
Sumando las tres expresiones obtenemos

$$a^2 + 6a + b^2 + 2b + c^2 + 4c = 7 - 7 - 14 = -14,$$

lo cual puede reescribirse como $(a+3)^2 + (b+1)^2 + (c+2)^2 = 0$, de donde $a+3 = b+1 = c+2 = 0$ y $a = -3$, $b = -1$ y $c = -2$. Por lo tanto, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$.

Solución del problema 6. La respuesta es (c).
Si d es la diferencia común, tenemos que $d = (a-b) - (a+b) = -2b$, luego

$$(a-b) - 2b = ab \text{ y } ab - 2b = \frac{a}{b},$$

las cuales son equivalentes a $a = b(a+3)$ y $a = b^2(a-2)$, de donde $b(a+3) = b^2(a-2)$ y $a+3 = b(a-2)$ (pues b no puede ser 0). Si $a-2 = 0$, tendríamos que $a+3 = 0$, lo cual no es posible, por lo que $a - 2 \neq 0$ y despejando obtenemos que $b = \frac{a+3}{a-2}$.
Por otro lado, tenemos que $a = b(a+3)$. si $a+3 = 0$ tendríamos que $a = 0$, lo cual no es posible y despejando obtenemos que $b = \frac{a}{a+3}$. Igualando los dos valores para b obtenemos que

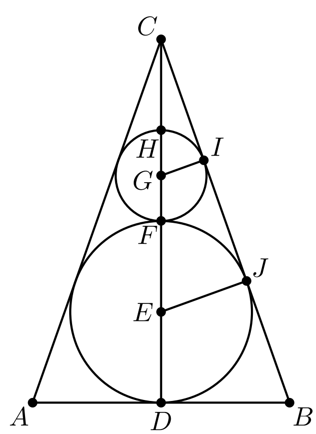
$$\frac{a+3}{a-2} = \frac{a}{a+3},$$

la cual es equivalente a $a^2 - 2a = a^2 + 6a + 9$, por lo que $a = -\frac{9}{8}$ y $b = -\frac{3}{5}$. Luego, tenemos que la diferencia es $-2b = \frac{6}{5} = \frac{48}{40}$. La sucesión queda

$$a+b = -\frac{69}{40}, \quad a-b = -\frac{21}{40}, \quad ab = \frac{27}{40}, \quad \frac{a}{b} = \frac{75}{40}$$

y el quinto término es $\frac{75+48}{40} = \frac{123}{40}$.

Solución del problema 7. La respuesta es (a).
Nombremos a los puntos como se muestra en la figura, siendo E y G los centros de los círculos.



Como GI y EJ son perpendiculares a CB, tienen que ser paralelas y obtenemos que los triángulos CEJ y CGI son semejantes con razón $\frac{EJ}{GI} = 2$. Luego, $\frac{EC}{GC} = 2$ o $EC = 2GC$. Como $GE = 3\,cm$, tenemos que $3 = CE - GC = GC$. Finalmente, la altura desde C mide $CG + GE + ED = 3 + 3 + 2 = 8\,cm$.

Solución del problema 8. La respuesta es (d).
Notemos que $\lfloor\sqrt{1}\rfloor = \lfloor\sqrt{2}\rfloor = \lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$ (3 valores iguales a 1) y $\lfloor\sqrt{4}\rfloor = \lfloor\sqrt{5}\rfloor = \lfloor\sqrt{6}\rfloor = \lfloor\sqrt{7}\rfloor = \lfloor\sqrt{8}\rfloor = 2$ (5 valores iguales a 2). Esto continúa hasta $\lfloor\sqrt{81}\rfloor = \lfloor\sqrt{82}\rfloor = \cdots = \lfloor\sqrt{99}\rfloor = 9$ (19 valores iguales a 9) y $\lfloor\sqrt{100}\rfloor = 10$. Luego, la suma buscada es igual a

$$\begin{aligned} & 3(1)+5(2)+7(3)+9(4)+11(5)+13(6)+15(7)+17(8)+19(9)+10 \\ = {} & 3+10+21+36+55+78+105+136+171+10 \\ = {} & 625. \end{aligned}$$

Solución del problema 9. La respuesta es (d).
Quitando de las ganancias de Pedro y Juan el sueldo base de $\$7000$, obtenemos que el dinero de las ventas de Juan fue de $\$7000$ y el de Pedro $\$10500$, por lo que las ventas de Pedro superan a las de Juan en $\$3500$. Así, los $\$7000$ de Juan es el $100\,\%$. No es difícil ver que los $\$3500$ representan el $50\,\%$ de las ventas de Juan. Por tanto, las ventas de Pedro superan a las de Juan en un $50\,\%$.

Solución del problema 10. La respuesta es (a).
Puesto que el área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de su lado, el área de cada uno de los tres terrenos es $10,000\,m^2$, $40,000\,m^2$ y $40,000\,m^2$. Así, la suma de las áreas de los tres terrenos es $90,000\,m^2$, por lo que el lado del nuevo terreno debe medir $300\,m$.

Solución del problema 11. La respuesta es (b).
Después de que se le entregó $\frac{1}{5}$ de la herencia de Jorge a su esposa, quedaron $\frac{4}{5}$ del total. De esto, su sexta parte representa

$$\frac{4/5}{6} = \frac{2}{15}$$

del total, que es la parte de la herencia que le tocó al hermano de Jorge. Por tanto, la porción total de la herencia de Jorge que se repartió a su esposa y a su hermano es

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

La otra parte de la herencia de Jorge, o sea, $\frac{2}{3}$ del total, fue lo que se repartió entre sus 12 hijos. Por ello, la porción de la herencia de Jorge que le tocó a cada uno de sus hijos es

$$\frac{2/3}{12} = \frac{1}{18}.$$

Solución del problema 12. La respuesta es (a).
De la factorización $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, podemos ver que las únicas posibilidades para que tres dígitos multiplicados resulten en 120 son $(3,5,8)$ o $(4,5,6)$ en algún orden. Sin embargo, en la segunda posibilidad ningún par de dígitos suma 13, pues $4+5=9$,

$4+6=10$ y $5+6=11$, por lo que este caso es imposible. En la primera posibilidad, sólo los dígitos 8 y 5 suman 13, por lo que éstos deben ser los dígitos de las unidades y decenas en algún orden. Por ello el número es 385 o 358, y en cualquier caso la respuesta es 3.

Solución del problema 13. La respuesta es (d).
En 14 turnos o menos, un jugador a lo más puede avanzar $3 \times 14 = 42$ casillas. Como el juego comienza en la casilla $\#1$, a lo más llegaría a la casilla $\#43$, por lo cual es imposible ganar en 14 turnos o menos. Si en 15 turnos un jugador avanzó 3 casillas en todos sus turnos, habrá avanzado 45 casillas, por lo que terminaría en la $\#1$ sin tocar la $\#45$; por otra parte, si en al menos uno de los 15 turnos avanzó sólo una casilla, el jugador habría avanzado a lo más $3 \times 14 + 1 \times 1 = 43$ casillas, terminando a lo más en la $\#44$. Lo anterior demuestra que es imposible ganar en menos de 16 turnos. Sin embargo, sí es posible ganar en 16 turnos, por ejemplo: si el jugador en dos de los turnos avanza una casilla por turno, y en los 14 restantes avanza 3 casillas por turno, habrá avanzado $1 \times 2 + 3 \times 14 = 44$ casillas, por lo que terminará en la $\#45$.

Solución del problema 14. La respuesta es (c).
Probaremos que $M = 36$. Si a y b son los dígitos de M, entonces la propiedad que carateriza a M es

$$10a + b = 2ab.$$

Así, b es par y podemos considerar los casos $b = 2, 4, 6, 8$. Si $b = 2$, la igualdad de arriba resulta en $10a + 2 = 4a$, que se simplifica en $6a + 2 = 0$, la cual no tiene solución, pues a es un dígito; si tomamos $b = 4$, obtenemos la ecuación $2a + 4 = 0$, la cual tampoco tiene solución; tomando $b = 6$, obtenemos $6 = 2a$ y $3 = a$, que nos da la solución $M = 36$; finalmente, si $b = 8$, obtenemos la ecuación $8 = 6a$, que tampoco tiene solución. por lo tanto $M = 36$. Como $M = 36$ es múltiplo de 3, no es múltiplo de 8, no es un cubo perfecto, no es mayor que 40 y $M + 1 = 37$ sí es primo, hay exactamente 2 afirmaciones verdaderas.

Solución del problema 15. La respuesta es (e).
Aproximadamente, la región que la vaca puede alcanzar es un cuarto de circunferencia con centro en la esquina donde la vaca está amarrada y radio la longitud de la cuerda. Por ello, el área que la vaca puede alcanzar es igual a

$$A = \frac{1}{4}\pi r^2,$$

donde r es la longitud de la cuerda. Por otra parte, el área del corral es $100\,m^2$, y como la vaca puede alcanzar la mitad del área del corral tenemos que $A = 50m^2$. Así, tenemos que $50m^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$, por lo que $200m^2 = \pi r^2$. Por lo tanto, la respuesta es $r = \sqrt{\frac{200}{\pi}}\,m$.

Solución del problema 16. La respuesta es (c).
Notemos que si rotamos el mosaico en $60°$ en el sentido de las manecillas del reloj y después $40°$ en el sentido contrario a las manecillas del reloj, entonces el mosaico fue

rotado $20°$ y sigue cabiendo perfectamente en el lugar del que se retiró. Puesto que $360° = 18 \times 20°$, podemos rotar 18 veces el mosaico en $20°$ en torno a su centro y en cada rotación el mosaico cabe perfectamente en el lugar del que se quitó. Si fijamos nuestra atención en uno de los lados del mosaico mientras se va rotando 18 veces en $20°$, vemos que ese lado coincidirá con otros lados del mosaico en cada rotación. Esto nos muestra que el mosaico tiene al menos 18 lados. Si consideramos el polígono regular de 18 lados, éste cumple que al rotarse $40°$ o $60°$ concide consigo mismo otra vez, por lo que 18 es el mínimo número de lados que puede tener.

Solución del problema 17. La respuesta es (b).
Veremos que no hay solución para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Observemos que $0 < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < 1$, así que no puede ser $n = 1$. Puesto que

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < \frac{2}{2},$$

no puede ser $n = 2$. Como

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < \frac{3}{3},$$

vemos que no hay solución en el caso $n = 3$. De la misma manera, las desigualdades

$$\frac{2}{4} < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < \frac{3}{4},$$

$$\frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < \frac{4}{5},$$

$$\frac{4}{6} < \frac{7}{10} < \frac{m}{n} < \frac{11}{15} < \frac{5}{6}$$

nos dicen que no hay solución en los casos $n = 4$, 5 y 6, respectivamente. Pero para $n = 7$ tenemos que

$$\frac{7}{10} < \frac{5}{7} < \frac{11}{15}.$$

Por tanto, el menor valor de n es 7.

Solución del problema 18. La respuesta es (c).
Si la mínima cantidad de números fuera 49, podríamos dividir a los números en siete bloques cada uno con 7 números. Por hipótesis cada uno de estos bloques tiene suma menor a 15, por lo tanto la máxima suma en cada bloque es de 14 (porque todos los números son enteros). Luego la suma de todos los números es a lo más $14 \cdot 7 = 98$, entonces la suma no puede ser 100. Si tenemos 50 números 2's es claro que esta lista cumple las condiciones, por lo tanto 50 es el mínimo número posible.

Solución del problema 19. La respuesta es (c).
Podemos ver que con 4 circunferencias es posible. La única forma de que se cumpla esto con 4 circunferencias es que haya tres circunferencias tangentes en forma de triángulo y la cuarta sea tangente a las tres ya sea en el espacio que queda entre ellas o

en la parte exterior de estas. Sin embargo para tener una quinta circunferencia con dicha condición tendría que estar en la parte exterior o interior de las tres circunferencias que forman el triángulo, pero de ambas maneras ya no son tangentes la circunferencia de afuera y la de adentro.

Solución del problema 20. La respuesta es (b).
Como el lado derecho es una diferencia de cuadrados, tenemos:

$$\begin{aligned} & (10^{624}+25)^2-(10^{624}-25)^2 \\ = & (10^{624}+25+10^{624}-25)(10^{624}+25-10^{624}+25) \\ = & (2\cdot 10^{624})(50)=100\cdot 10^{624} \\ = & 10^{626}, \end{aligned}$$

de donde $x=626$.

Solución del problema 21. La respuesta es (d).
Si sacamos 9 pelotas verdes, 8 azules y una roja tendríamos 18 pelotas, pero aún no tenemos 2 de cada color. Sin embargo, sin importar cómo saquemos 19 pelotas, al menos 2 de ellas tienen que ser rojas (pues con las verdes y azules máximo juntamos 17) y análogamente al menos 2 de ellas serán azules y 2 de ellas verdes. Así, la respuesta es 19.

Solución del problema 22. La respuesta es (c).
El triángulo ADC tiene la misma altura que el triángulo ABC (en el vértice A), pero la mitad del lado, de modo que tiene la mitad del área de ABC. Del mismo modo, el triángulo ADE tiene la misma altura que el triángulo ADC (en el vértice D), pero la mitad del lado, de modo que tiene la mitad del área de ADC. Así, el triángulo ADE tiene un cuarto del área del triángulo ABC, y por tanto el área del triángulo ABC es $4\cdot 16=64$.

Solución del problema 23. La respuesta es (b).
Para eliminar los números después del dígito decimal, necesitamos en primer lugar que $c=0$. Fijando $c=0$, tenemos ahora que b debe ser 0, pero ya que determinamos esto, a puede ser cualquier dígito. Esto quiere decir que hay 10 valores posibles para k. Si tomamos $a=1$ y $a=2$, vemos que $a+b+c$ no es constante, pues en un caso vale 1 y en otro caso vale 2. De la misma manera si $a=1$ no todos son pares, y más aún, vemos que no necesariamente $a=b=c$. Finalmente, para verificar que 37 divide a k, observemos que $k=100a+10a+a=111a=37\cdot 3a$.

Solución del problema 24. La respuesta es (c).
Trasladando los triángulos, podemos hacer coincidir A con D y F con C porque $AC=DF=2$. Además, E y B estarían sobre la misma línea que A por ser suplementarios los ángulos $45°$ y $135°$, de modo que tendríamos un triángulo donde A es el punto medio de uno de sus lados puesto que $AB=DE=1$. Por lo tanto, las áreas de los triángulos ABC y DEF son iguales y la razón buscada es igual a 1.

Solución del problema 25. La respuesta es (d).
Tenemos que

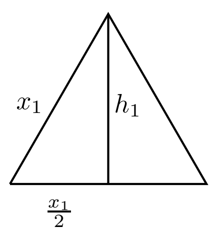
$$\begin{aligned}\frac{1}{8} &= \frac{1}{a^2+4b+4}+\frac{1}{b^2+4a+4}\\ &= \frac{1}{(a-2)^2+4a+4b}+\frac{1}{(b-2)^2+4b+4a}\\ &\leq \frac{1}{4(a+b)}+\frac{1}{4(a+b)}\\ &= \frac{1}{2(a+b)}.\end{aligned}$$

Luego, $a+b\leq 4$. Este valor máximo se obtiene si y sólo si $a=b=2$. Por lo tanto, la respuesta es 4.

Solución del problema 26. La respuesta es (c).
Resolviendo las desigualdades $(n+5)^2 < 2n^2 < (n+6)^2$ obtenemos que $50 < (n-5)^2$ y $(n-6)^2 < 72$. Luego, $8 \leq n-5$ y $n-6 < 9$, esto es, $13 \leq n \leq 14$. Por lo tanto, 13 y 14 son los únicos números que satisfacen el problema.

Solución del problema 27. La respuesta es (d).
Si el lado del triángulo I mide x_1, entonces por el teorema de Pitágoras la altura, h_1, del triángulo I mide

$$h_1=\sqrt{x_1^2-\left(\frac{x_1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x_1.$$



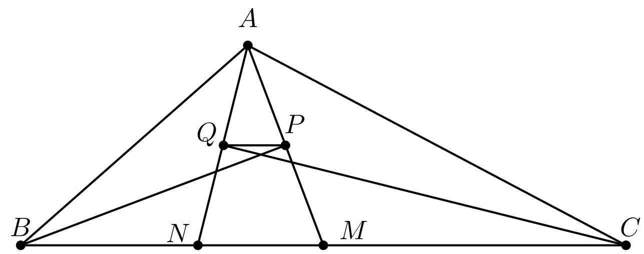
Pero entonces la longitud del lado del triángulo II, x_2, es $\frac{\sqrt{3}}{2}x_1$ y la altura, h_2, del triángulo II es $\frac{\sqrt{3}}{2}h_1$. Luego, el área, A_2, del triángulo II es $\frac{x_2h_2}{2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{x_1h_1}{2}=\frac{3}{4}A_1$, donde A_1 es el área del triángulo I. Análogamente, $A_3=\frac{3}{4}A_2$ y $A_4=\frac{3}{4}A_3$, donde A_3 y A_4 son las áreas de los triángulos III y IV, respectivamente. Como $A_1=2\,cm^2$, tenemos que

$$A_4=\frac{3}{4}A_3=\left(\frac{3}{4}\right)^2A_2=\left(\frac{3}{4}\right)^3A_1=\frac{27}{32}\,cm^2.$$

Solución del problema 28. La respuesta es (c).
Ya que 13 divide a $6(m+11n)=(6m+n)+13(5n)$, se sigue que 13 divide a $6m+n$. De manera análoga, ya que 11 divide a $6(m+13n)=(6m+n)+11(7n)$, se sigue

que 11 también divide a $6m + n$. Por lo tanto, $11 \cdot 13 = 143$ divide a $6m + n$, de modo que $6m + n = 143k$ para algún entero k. Como $6(m + n) = 143k + 5n = 6(24k + n) - (k + n)$, 6 debe dividir a $k + n$, de donde $k + n \geq 6$. Ahora, $6(m + n) = 143k + 5n = 138k + 5(k + n) \geq 138 + 30 = 168$. En consecuencia, $m + n \geq 28$ y este valor mínimo se alcanza con $m = 23$ y $n = 5$. Así, la respuesta es 28.

Solución del problema 29. La respuesta es (a).
Extendamos AP y AQ hasta cortar al segmento BC en los puntos M y N, respectivamente.



Por el criterio de congruencia ALA, los triángulos rectángulos ABP y MBP son congruentes, lo cual implica que el triángulo ABM es isósceles. Luego, $BM = AB = 2\,cm$. De manera análoga, el triángulo ACN es isósceles y por lo tanto $NC = AC = 2\sqrt{2}\,cm$. Por otra parte, tenemos que $4 = BC = BN + MN + MC$, de donde $MN = 4 - (BN + MC)$. Además, $4 = BC = BN + NC = BN + 2\sqrt{2}$ y $4 = BC = BM + MC = 2 + MC$, de donde $8 = BN + MC + 2 + 2\sqrt{2}$. De aquí, $BN + MC = 6 - 2\sqrt{2}$. Por lo tanto, $MN = 4 - (6 - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$. Finalmente, como P es el punto medio de AM (pues los triángulos rectángulos ABP y MBP son congruentes) y Q es el punto medio de AN (pues los triángulos rectángulos ACQ y NCQ son congruentes), por el teorema de Thales obtenemos que $MN = 2PQ$ y por lo tanto $PQ = \frac{MN}{2} = \frac{2\sqrt{2}-2}{2} = \sqrt{2} - 1\,cm$.

Solución del problema 30. La respuesta es (b).
La suma de los números es $1 + 2 + 3 + \cdots + 7 = \frac{7\times 8}{2} = 28$. Llamemos x al número central, como queremos que la suma de cada uno de los triángulos sombreados sea la misma, $28 - x$ tiene que ser divisible entre 3. Luego, los posibles valores de x son 1, 4 o 7. Veamos cada caso:

1. Si $x = 1$ entonces la suma de los números en los vértices de cada triángulo es $1 + \frac{27}{3} = 10$. Los otros dos números en cada uno de los triángulos tienen que sumar 9, entonces la única elección posible es para uno de los triángulos 7 y 2, para el segundo 6 y 3, finalmente para el tercer triángulo será 4 y 5.

2. Si $x = 4$ entonces la suma de los números en los vértices de cada triángulo sombreado es $4 + \frac{24}{3} = 12$. Los otros dos números de cada triángulo tienen que sumar 8, entonces la única elección posible de los números restantes es 7 y 1 para uno de los triángulos, 6 y 2 para el segundo triángulo y para el tercer triángulo 5 y 3.

3. Si $x = 7$ entonces la suma de los números en los vértices de cada triángulo sombreado es $7 + \frac{21}{3} = 14$. Los otros dos números de cada uno de los triángulos son 5 y 2, 4 y 3, y finalmente 6 y 1.

En el centro podemos colocar 3 números distintos. Para cada uno de estos números centrales tenemos tres triángulos distintos que pueden ser permutados de 3! formas distintas. En los otros dos vértices del triángulo los dos números se pueden permutar, luego, tenemos en total $2^3 = 8$ posibles acomodos para los tres triángulos. Por lo tanto, el número de configuraciones distintas es $3 \times 3! \times 2^3 = 3 \times 6 \times 8 = 144$.

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 1.

Problema 1. En un triángulo ABC, sea D un punto sobre el segmento BC tal que $BD = 14\,cm$, $AD = 13\,cm$ y $DC = 4\,cm$. Sabiendo que $AB = AC$, calcula el área del triángulo ABC.

Problema 2. Dado un número natural N, multiplicamos todos sus dígitos. Repetimos este proceso con el número obtenido cada vez hasta obtener un número de un solo dígito, al cual le llamaremos el *primitivo* de N. Por ejemplo, como $3 \cdot 2 \cdot 7 = 42$ y $4 \cdot 2 = 8$, concluimos que el primitivo de 327 es 8. Encuentra el mayor número natural tal que todos sus dígitos son diferentes y su primitivo es impar.

Problema 3. En un pizarrón están escritos los números $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots, 2014^2$. Francisco y Sergio borran alternadamente un número del pizarrón, hasta que sólo quedan dos números. Si la diferencia entre ellos es múltiplo de 2015, gana Sergio y en caso contrario, gana Francisco. Si Francisco es el primero en jugar, ¿quién tiene estrategia ganadora? (se dice que un jugador tiene estrategia ganadora si puede asegurar su victoria sin importar cómo juegue su rival).

Problema 4. Un triángulo ABC es tal que su ángulo en A es de $60°$. Sean D y E puntos sobre los lados AB y AC respectivamente de manera que $BD = DE = EC$. Sea O el punto de intersección de BE y DC. Demuestra que O es el circuncentro del triángulo ABC.

Problema 5. Demuestra que:

a) $\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 4}+\sqrt[3]{4^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2}+\sqrt[3]{999\cdot 1000}+\sqrt[3]{1000^2}} > \frac{9}{2}$.

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{998^2}+\sqrt[3]{998\cdot 999}+\sqrt[3]{999^2}} < \frac{9}{2}$.

Problema 6. La FIFA desea cambiar la modalidad del mundial. En el torneo participarán 32 equipos, los juegos de cada ronda se decidirán por sorteo y en cada partido entre dos equipos exactamente uno, el ganador (no hay empates), pasará a la siguiente ronda. La FIFA tiene un ranking de los 32 equipos ordenándolos de mejor a peor. En la primera ronda del torneo se realizarán 16 partidos y los 16 ganadores pasan a la segunda ronda, en la segunda ronda se jugarán 8 partidos y los 8 equipos ganadores pasan a la tercera ronda así hasta que en la cuarta ronda habrá 2 partidos y los ganadores jugarán la final. Supongamos que si un equipo A está en mejor posición en el ranking de la FIFA que un equipo B entonces si A y B juegan, A le gana a B, por ejemplo el equipo 1 en el ranking siempre gana. Bajo esta suposición, ¿cuál es el peor equipo que puede disputar la final?

Problema 7. Determina el mayor número real m tal que $(x^2 + y^2)^3 > m(x^3 + y^3)^2$ para cualesquiera números reales positivos x, y.

Problema 8. Sea m un entero positivo. Demuestra que

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(2m)!}{(n!(m-n)!)^2}$$

es el cuadrado de un entero.

Problema 9. Todos los miembros de un senado son divididos en S comisiones. Cada comisión tiene al menos 5 senadores y cualesquiera dos comisiones tienen un número diferente de senadores. Después de la primera sesión se crean nuevas comisiones (también cada una con al menos 5 senadores) y algunos senadores se quedan sin estar en alguna comisión. Resultó que cualesquiera dos senadores que estaban en una misma comisión, ya no están en la misma comisión. Demuestra que al menos $4S + 10$ senadores se quedaron fuera de las comisiones. Y muestra cómo puede darse exactamente que $4S + 10$ senadores se queden fuera.

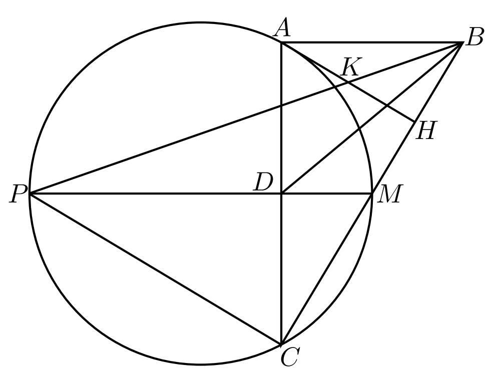
Problema 10. Sea ABC un triángulo acutángulo con gravicentro G tal que $\angle AGB = 2\angle ACB$. Demuestra que $\angle ACB \geq 60°$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2013 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2013. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2013, por lo que todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. En el triángulo rectángulo ABC, M es el punto medio de la hipotenusa BC y H es el pie de la altura trazada desde A, sobre BC. Consideramos a la recta que pasa por M y es perpendicular con AC y nos fijamos en su intersección P con la circunferencia circunscrita del triángulo AMC. Si BP corta a AH en K, demuestra que $AK = KH$.

Solución. Tenemos que AB y MP son ambos perpendiculares con AC y como $BM = MC$, tenemos que MP corta a AC en su punto medio D. De aquí se sigue que MP es un diámetro de la circunferencia circunscrita del triángulo AMC, por lo que MC es perpendicular a PC.



Entonces, los triángulos MCD y MPC son semejantes y tenemos que $\frac{MD}{MC} = \frac{MC}{MP}$. Entonces, como M es el punto medio de BC, tenemos que $\frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MP}$, y como además $\angle DMB = \angle BMP$, entonces los triángulos DMB y BMP, también son semejantes. De aquí, se sigue que $\angle CBD = \angle BPM = \angle ABK$. Por otra parte, los triángulos BAH y BCA son semejantes, pues $\angle AHB = \angle ABC$. Luego, como $\angle CBD = \angle ABK$ y BD es mediana en el triángulo BAC, se sigue que BK debe ser mediana del triángulo BHA, por lo que K es el punto medio de AH. Por lo tanto, $AK = KH$.

Problema 2. Hay 13 monedas idénticas en apariencia pero sólo 12 de ellas pesan lo mismo, y no se sabe si la décimo tercera moneda pesa más o menos que las demás. Muestra que es posible determinar la moneda diferente utilizando tres pesadas en una balanza de platillos.

Solución. De las 13 monedas seleccionemos dos grupos de 4 monedas: A_1, A_2, A_3, A_4 y B_1, B_2, B_3, B_4 y las pesamos. Sobran 5 monedas, C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5, y tenemos dos posibilidades:

1. La balanza está equilibrada. En este caso la moneda está en las 5 restantes. Ahora pesamos A_1, A_2, A_3 y C_1, C_2, C_3. Tenemos dos posibilidades:

    - La balanza está en equilibrio. Luego la moneda diferente es C_4 o C_5 y con una pesada más, por ejemplo C_4 con A_1, podemos determinar si C_4 es la moneda diferente o lo es C_5.
    - La balanza está desequilibrada. Entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, que el grupo $C_1C_2C_3$ es más pesado que $A_1A_2A_3$. Luego la moneda diferente es C_1, C_2 o C_3 y pesa más que las otras. Entonces, con una tercera pesada, por ejemplo C_1 y C_2 podemos determinar cuál de las tres monedas pesa más.

2. La balanza está desequilibrada. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el grupo $A_1A_2A_3A_4$ es más pesado que $B_1B_2B_3B_4$. Luego, las monedas C_i para $i = 1, \ldots 5$ no son las monedas de peso distinto. Ahora pesamos $A_1A_2B_1$ y $A_3B_2C_1$. Tenemos tres posibilidades:

    - Está en equilibrio. Entonces la moneda diferente es A_4, B_3 o B_4. Hacemos la tercera pesada con B_3 y B_4, si está en equilibrio la moneda diferente es A_4 y si está en desequilibrio la moneda diferente es la que pesa menos.
    - El grupo $A_1A_2B_1$ es más pesado que $A_3B_2C_1$. Entonces como $A_1A_2A_3A_4$ es más pesado que $B_1B_2B_3B_4$, la moneda diferente es A_1, A_2 o B_2. En la tercera pesada tomamos a A_1 y A_2, si la balanza está en equilibrio, entonces la moneda más pesada es B_2, de lo contrario la moneda diferente es la más pesada de las dos.
    - El grupo $A_1A_2B_1$ es más ligero que $A_3B_2C_1$. Entonces como $A_1A_2A_3A_4$ es más pesado que $B_1B_2B_3B_4$, la moneda diferente es B_1 o A_3. En la tercera pesada consideramos a B_1 y C_1. Si está en equilibrio la moneda distinta es A_3, de lo contrario es B_1.

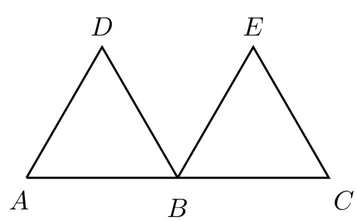
Problema 3. Un entero positivo n es *bueno* si es divisible entre todos sus factores primos al cuadrado. Por ejemplo, el 72 es bueno ya que sus factores primos son 2 y 3, y 72 es múltiplo de 2^2 y de 3^2. Demuestra que hay una infinidad de parejas de números enteros consecutivos buenos.

Solución. Primero notemos que si a y b son buenos, entonces ab es bueno. Esto se debe a que si p es un factor primo de ab podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que p divide a a. Como a es bueno, se tiene que p^2 divide a a y con esto, p^2 divide a ab. Luego, ab es bueno.

Además, todos los cuadrados perfectos son buenos, ya que si p es un factor primo, deberá aparecer al menos dos veces en la descomposición en primos del cuadrado.

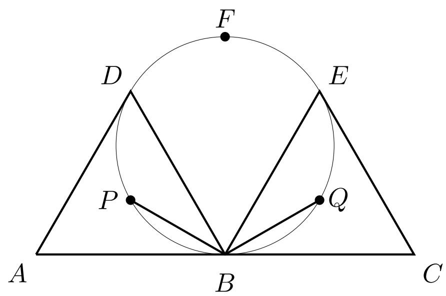
Ahora, supongamos que a y $a+1$ son ambos buenos. Como 4 es bueno, se tiene que $4a(a+1)$ es un número bueno. Y $4a(a+1)+1 = 4a^2+4a+1 = (2a+1)^2$ es un cuadrado perfecto y por tanto también es bueno. Luego, $4a(a+1)$ y $4a(a+1)+1$ son buenos y son mayores que $a+1$. Así, siempre que tengamos una pareja de números buenos consecutivos, podemos encontrar otra más grande. Y como $8, 9$ es una pareja de números consecutivos tales que ambos son buenos, se demuestra que hay una infinidad de parejas de números buenos consecutivos.

Problema 4. En la figura, AC mide $2\,cm$, B es el punto medio de AC y los triángulos ABD y BCE son equiláteros. Si P y Q son los centros de ABD y BCE, respectivamente, encuentra el radio de la circunferencia que pasa por P, Q y B.



Solución. Los centros P y Q de los triángulos ABD y BCE son los centroides de los triángulos, los cuales satisfacen que $PQ = AB = 1\,cm$. Como BP y BQ son radios de las circunferencias circunscritas de los triángulos ABD y EBC, tenemos que $BP = BQ$ y en consecuencia el triángulo BPQ es isósceles. Además, como BP y BQ son las bisectrices de los ángulos $\angle ABD$ y $\angle EBC$, respectivamente, tenemos que $\angle PBQ = 30° + 30° + 60° = 120°$, ya que $\angle DBE = 60°$. Luego, $\angle BPQ = \angle BQP = \frac{180°-120°}{2} = 30°$.

Si inscribimos el triángulo BPQ en una circunferencia, llamemos F al punto diametralmente opuesto a B. Luego, como $BPFQ$ es cíclico, $\angle PFQ = 180° - \angle PBQ = 60°$ y $\angle BPF = \angle BQF = 90°$, ya que BF es un diámetro.



Entonces, $\angle PQF = \angle QPF = 60°$. Por lo tanto, el triángulo PQF es equilátero de lado 1 y el radio de su circuncírculo es dos tercios de la longitud de la altura. La longitud de la altura de un triángulo equilátero de lado 1 es $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ahora, $\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 5. Durante el año 2011 una librería, que abría los siete días de la semana, vendió por lo menos un libro por día y un total de 600 libros en el año. Demuestra que existe necesariamente un período de días consecutivos donde se hayan vendido exactamente 129 libros.

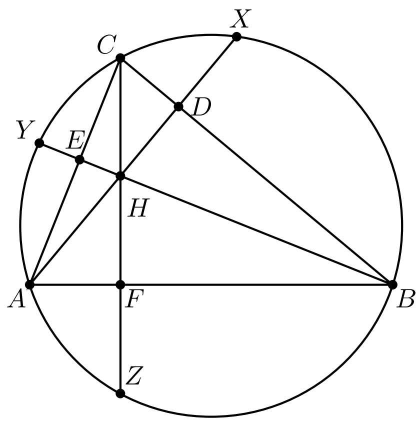
Solución. Denotemos por a_i el total de libros vendidos hasta el final del i-ésimo día. Por ejemplo, a_5 es el total de libros vendidos hasta el quinto día y $a_{35} - a_{31}$ es el total de libros vendidos entre los días 35 y 32 (inclusive). Entonces $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{364} < a_{365} = 600$. Ahora veamos que existen a_i y a_j, con i, j enteros positivos menores o iguales que 365, y $j > i$, tales que $a_j - a_i = 129$.
Sumemos 129 a cada término de $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{364} < a_{365} = 600$, entonces tenemos que,

$$a_1 + 129 < a_2 + 129 < a_3 + 129 < \cdots < a_{364} + 129 < a_{365} + 129 = 729.$$

Si denotamos por b_i cada uno de estos términos tenemos que, $b_i = a_i + 129$ y que, $b_1 < b_2 < b_3 < \cdots < b_{364} < b_{365} = 729$. Luego hay 730 términos: 365 términos a_i y 365 términos b_i, con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$ y con $b_k \neq b_l$ para $k \neq l$. Como estos 730 enteros positivos están entre 1 y 729, entonces por el principio de las casillas tenemos que existen dos valores que son iguales. Como cada a_i es distinta y cada b_i es distinta, entonces existe una a_m que es igual a una b_n, es decir, $a_m = a_n + 129$, de donde, $a_m - a_n = 129$. Por lo tanto, existe un periodo de días consecutivos, $m - n$ días, donde se vendieron exactamente 129 libros.

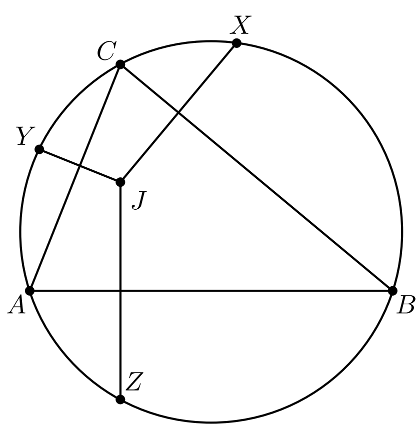
Problema 6. Sean ABC un triángulo acutángulo y J un punto en su interior. Supongamos que las reflexiones de H sobre cada uno de los lados del triángulo están sobre el circuncírculo de ABC. Demuestra que J es el ortocentro de ABC.

Solución. Esta es una propiedad del ortocentro. Lo que este problema pide es demostrar que esta propiedad solo la tiene el ortocentro. Sean H el ortocentro, D, E y F los pies de las alturas y X, Y y Z las intersecciones de AH, BH y CH con el circuncírculo del triángulo ABC, respectivamente.



Como $CAZB$ es cíclico, tenemos que $\angle ABZ = \angle ACZ$. Por otro lado, como $CEFB$ es cíclico (ya que $\angle CEB = \angle CFB = 90°$) se sigue que $\angle ABH = \angle ACZ$. Luego, $\angle ABH = \angle ABZ$ y los triángulos ABH y ABZ son congruentes por el criterio ALA, de donde $HF = FZ$ y Z es la reflexión de H sobre el lado AB. Análogamente puede verse que las otras dos reflexiones están en el circuncírculo. Por otro lado, como Z es la reflexión de H sobre AB, se tiene que $\angle AHB = \angle AZB = 180° - \angle BCA$ (la última igualdad es porque $AZBC$ es cíclico).

Ahora, volvamos al problema.



Llamemos X, Y y Z a las reflexiones de J sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Como Z es la reflexión de J sobre AB, se tiene que $\angle AJB = \angle AZB =$

$180^\circ - \angle BCA$. Luego, J está sobre el circuncírculo del triángulo ABH (pues $\angle AJB = \angle AHB$). Análogamente, J está sobre el circuncírculo del triángulo BCH. Estos circuncírculos se cortan en exactamente dos puntos: H y B. Como J es un punto del interior, J tiene que ser igual a H y terminamos.

Problema 7. Se tienen 14 cartas. Cada una de ellas tiene escrito un $+1$ o un -1. Luego, las cartas se meten en 14 sobres. Si es posible preguntar cuál es el producto de los números contenidos en tres sobres, ¿cuál es el mínimo número de preguntas que se necesitan hacer para saber el producto de los 14 números?

Solución. Veamos que 6 es el mínimo. Hacemos preguntas para 4 grupos de 3 cartas diferentes y con ello podemos saber cuál es el producto de 12 números. Quedan dos números: x e y. Para esto, hacemos las preguntas que nos digan cuánto valen los productos abx y aby (donde a y b son números en otras cartas). Si $abx = aby$ tenemos que $x = y$ y $xy = 1$ y si $abx \neq aby$ tenemos que $x \neq y$ y $xy = -1$. Luego, podemos conocer el valor de xy con dos preguntas y con ello, el producto de las 14 cartas.
Basta probar que no se puede lograr con 5 o menos preguntas. Como cada pregunta involucra tres números, son necesarias al menos 5 preguntas (con cuatro preguntas involucraría a lo más 12 números). Así, basta ver que no se puede con exactamente 5 preguntas.
Supongamos que se puede con 5 preguntas. Como $5 \cdot 3 = 15$ y cada número debe estar en al menos una pregunta, tenemos que hay exactamente un número que apareció en dos preguntas y que todos los demás aparecen en exactamente una pregunta. Sea x ese número y digamos que se preguntaron los productos abx y cdx (donde a, b, c, d y x son todos de diferentes cartas). Como las otras tres preguntas fueron para los otros 9 números, deberíamos de poder determinar $abcdx$ a partir de abx y cdx. Esto no siempre es posible, ya que si $abx = cdx$ podemos deducir que $abcd = 1$, pero x podría ser $+1$ o -1. Luego, no es posible lograrlo con 5 preguntas y concluimos que son necesarias al menos 6 preguntas.

Problema 8. Demuestra que si (x, y, z) es una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 + px + q, \\ z & = & y^2 + py + q, \\ x & = & z^2 + pz + q, \end{array}$$

para ciertos valores de p y q, entonces $x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2z + y^2x + z^2y$.

Solución. Si multiplicamos cada una de las ecuaciones del sistema por y, z, x, respectivamente, obtenemos,

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & x^2y + pxy + qy, \\ z^2 & = & y^2z + pyz + qz, \\ x^2 & = & z^2x + pxz + qx. \end{array}$$

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2y + y^2z + z^2x + pxy + pxz + pyz + qx + qy + qz. \qquad (1)$$

Por otra parte, si multiplicamos cada una de las ecuaciones del sistema original por z, x, y, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} yz &= x^2z + pxz + qz, \\ zx &= y^2x + pxy + qx, \\ xy &= z^2y + pyz + qy. \end{aligned}$$

Sumando estas tres ecuaciones obtenemos

$$xy + xz + yz = x^2z + y^2x + z^2y + pxy + pxz + pyz + qx + qy + qz. \qquad (2)$$

Restando (2) de (1) obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + xz + yz) = x^2y + y^2z + z^2x - (x^2z + y^2x + z^2y).$$

Por lo tanto, demostrar que $x^2y + y^2z + z^2x \geq x^2z + y^2x + z^2y$ es equivalente a demostrar que $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$. Pero esta última igualdad es cierta ya que $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $x^2 + z^2 \geq 2xz$ y $y^2 + z^2 \geq 2yz$.

Problema 9. Cada lado de un cuadrado de 1×1 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo externo. Sean A, B, C y D los vértices de estos triángulos rectángulos y sean O_1, O_2, O_3 y O_4 los incentros de dichos triángulos. Demuestra que:

- El área del cuadrilátero $ABCD$ es menor que 2.
- El área del cuadrilátero $O_1O_2O_3O_4$ es menor que 1.

Solución. Comenzaremos probando el siguiente resultado.
Lema. El área de cualquier cuadrilátero trazado dentro o sobre un círculo de radio R siempre es menor o igual que $2R^2$.

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero dentro o sobre un círculo de radio R y centro O. Supongamos que los rayos OA y OB cortan a esta circunferencia en A' y B', respectivamente. Entonces, el área del triángulo ABO es:

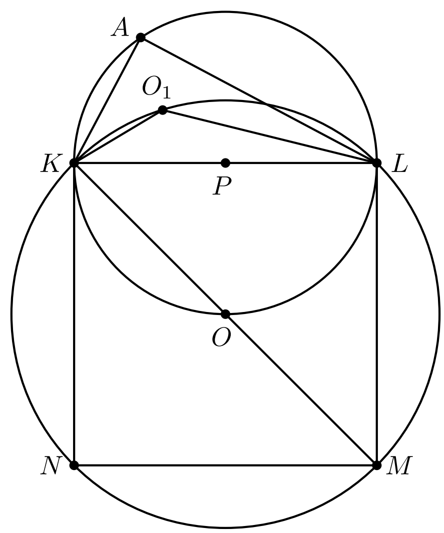
$$S(ABO) = \frac{1}{2}AO \cdot BO \operatorname{sen}(\angle AOB) \leq \frac{1}{2}AO \cdot BO \leq \frac{1}{2}OA' \cdot OB' = \frac{1}{2}R^2.$$

y el área del cuadrilátero $ABCD$ es

$$\begin{aligned} S(ABCD) &= S(ABO) + S(BCO) + S(CDO) + S(DAO) \\ &\leq \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}R^2 \\ &= 2R^2, \end{aligned}$$

con lo que el lema queda demostrado y podemos regresar al problema.

Llamemos $KLMN$ al cuadrado dado y O a su centro. Comenzamos notando que los puntos A, B, C y D están sobre semicírculos de diámetro 1. Sea P el punto medio del lado KL. Entonces, $AO \leq OP + AP = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. De forma análoga, obtenemos que $BO \leq 1$, $CO \leq 1$ y $DO \leq 1$, lo que significa que los puntos A, B, C y D están sobre o en el interior de la circunferencia con centro en O y radio $r = 1$. Finalmente, por el lema concluimos que $S(ABCD) \leq 2$.
Para la segunda parte, comencemos considerando que O_1 es el incentro del triángulo AKL.



Entonces, dado que O_1 está sobre las bisectrices del triángulo rectángulo AKL, tenemos que para cualquier posición de A, $\angle O_1LK + \angle O_1KL = 45^\circ$ y por lo tanto la medida del ángulo $\angle KO_1L$ es constante e igual a 135°.
Ahora, si nos fijamos en el cuadrilátero O_1LMK, observamos que $\angle KO_1L + \angle LMK = 135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, por lo que concluimos que es concíclico y O_1 está sobre la circunferencia con centro en O y radio $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces, $OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. De forma análoga, obtenemos que $OO_2 = OO_3 = OO_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Aplicando nuevamente el lema, obtenemos que $S(O_1O_2O_3O_4) \leq 1$.

Problema 10. Para cada entero positivo n sea $P(n)$ el número de polinomios cuadráticos $p(x) = ax^2 + bx + c$ cuyas raíces son números enteros y los coeficientes a, b, c son números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Demuestra que $n < P(n) < n^2$ para todo $n \geq 4$.

Solución. Como las ecuaciones cuadráticas $x^2 + kx + k - 1 = 0$ para $k = 2, 3, \ldots, n$ y $2x^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = 0$ tienen raíces enteras, podemos concluir que $P(n) > n$.
Sea f un polinomio que satisface las condiciones dadas. Escribamos a f en la forma $f(x) = a(x + a_1)(x + a_2)$ con a_1 y a_2 números enteros, y $a, a(a_1 + a_2), aa_1a_2$ números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Como $a > 0$ y $aa_1a_2 > 0$, a_1 y a_2 deben ser

ambos positivos o ambos negativos. Si $a_1 < 0$ y $a_2 < 0$, entonces $a_1 + a_2 < 0$ y en consecuencia, $a(a_1 + a_2) < 0$ lo cual es una contradicción. Luego, $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$. Tenemos entonces que $1 \leq a \leq n$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ y $1 \leq aa_1a_2 \leq n$, de donde $1 \leq a_1 \leq n$ y $a_2 \leq \frac{n}{aa_1}$.
Ahora, si a y a_1 son números del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, hay $\lfloor \frac{n}{aa_1} \rfloor$ valores posibles para a_2, pues $1 \leq a_2 \leq \frac{n}{aa_1}$. (*Nota:* $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x, esto es, $\lfloor x \rfloor$ es el único entero tal que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$).
De aquí, $P(n) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq a_1 \leq n}} \left\lfloor \frac{n}{aa_1} \right\rfloor$ y por lo tanto

$$P(n) \leq \sum_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq a_1 \leq n}} \frac{n}{aa_1} = n \left(\sum_{1 \leq a_1 \leq n} \frac{1}{a_1} \right) \left(\sum_{1 \leq a \leq n} \frac{1}{a} \right) = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^2.$$

Demostraremos por inducción en n que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}$ si $n \geq 7$.
Si $n = 7$, tenemos que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{7} = \frac{363}{140}$. Ahora, $\frac{363}{140} < \sqrt{7}$ si y sólo si $363^2 < 7(140^2)$ lo cual es cierto, pues $363^2 = 131,769$ y $7(140^2) = 137,200$.
Supongamos que la desigualdad es cierta para algún $k > 7$. Entonces,

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{k+1} < \sqrt{k} + \frac{1}{k+1}.$$

Ahora, basta demostrar que $\sqrt{k} + \frac{1}{k+1} < \sqrt{k+1}$, esto es, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} > \frac{1}{k+1}$. Esta última desigualdad es equivalente a la desigualdad $k + 1 > \sqrt{k} + \sqrt{k+1}$ pues $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$. Por lo tanto,

$$k + 1 > \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \Leftrightarrow (k+1)^2 > (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})^2 \Leftrightarrow k^2 > 2\sqrt{k(k+1)}.$$

Ahora, como $k > 0$, por la desigualdad media aritmética - media geométrica tenemos que $2\sqrt{k(k+1)} \leq 2k + 1$ y es claro que $2k + 1 < k^2$ si $k \geq 3$, pues $k^2 - 2k - 1 > 0$ equivale a $(k-1)^2 > 2$ la cual claramente se cumple si $k \geq 3$.
Por lo tanto,

$$P(n) \leq n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)^2 < n(\sqrt{n})^2 = n^2 \quad \text{si} \quad n \geq 7.$$

Sólo falta analizar los casos $n = 4$, $n = 5$ y $n = 6$.

- Para $P(4)$ tenemos que $a, a(a_1 + a_2), aa_1a_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 \leq a_2$. Luego, tenemos las posibles ternas $(a, a_1, a_2) = (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2)$ y $(2, 1, 1)$. Así, $P(4) = 5$.

- Para $P(5)$ debemos tener que $a, a(a_1 + a_2), aa_1a_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, de modo que además de las ternas encontradas en el caso $n = 4$ tenemos la terna $(1, 1, 4)$. Así, $P(5) = 6$.

- Para $P(6)$ debemos tener que $a, a(a_1+a_2), aa_1a_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$, de manera que además de las seis ternas encontradas en los dos casos anteriores tenemos las ternas $(1,1,5), (1,2,3)$ y $(2,1,2)$. Así, $P(6) = 9$.

Como $P(4) = 5 < 4^2$, $P(5) = 6 < 5^2$ y $P(6) = 9 < 6^2$, concluimos que $P(n) < n^2$ si $n \geq 4$.

Reto: Haciendo un análisis más detallado de la solución anterior, demuestra que

$$P(n) \leq \frac{n^2}{4} \quad \text{si} \quad n \geq 5.$$

Concurso Nacional 2013
27^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 24 al 30 de noviembre de 2013 se llevó a cabo en Huasca de Ocampo, Hidalgo, el Concurso Nacional de la 27^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República.

Los 20 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Arturo Arellano Árias (Campeche).
Luis Enrique Chachón Ochoa (Chihuahua).
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua).
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua).
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila).
Zeus Caballero Pérez (Distrito Federal).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco).
Miguel Ángel Prado Godoy (Jalisco).
Oscar Samuel Henney Arthur (Michoacán).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Joseandres Hinojoza Ortuño (Morelos).
Marlet Morales Franco (Nayarit).
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León).
Diego Alonso Roque Montoya (Nuevo León).
Diego Fajardo Rojas (Puebla).
Jorge Luis Marroquín López (Puebla).
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro).
Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri (Sonora).
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Arturo Arenas Esparza (Chihuahua).
José Nieves Flores Máynez (Chihuahua).
Antonio López Guzmán (Chihuahua).
Karol José Gutiérrez Suárez (Colima).
Saúl Adrián Álvarez Tapia (Distrito Federal).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Jesús Emilio Domínguez Rusell (Sinaloa).

Los 7 alumnos preseleccionados para la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) fueron:

Sergio Felipe López Robles (Colima).
Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Rodolfo Flores Jiménez (Puebla).
Fernando Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala).
Juan Eduardo Castañedo Hernández (Zacatecas).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Nayeli Reyes Moreno (Baja California).
Myriam Hernández Ketchul (Baja California Sur).
Naomi Mastache López (Guerrero).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Alka Xavier Earathu (Morelos).
Marlet Morales Franco (Nayarit).
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla).
Sandra Berenice Mendoza Peñúñuri (Sonora).
Katya Denisse Ortega Luna (Tlaxcala).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 27^a OMM.

1. Chihuahua.
2. Nuevo León.
3. Jalisco.
4. Yucatán.
5. Morelos.
6. Puebla.
7. Distrito Federal.
8. Michoacán.
9. San Luis Potosí.
10. Sonora.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Fray Diego Rodríguez**", y fue ganado por Chihuahua. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Puebla y Michoacán, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Nacional 2013. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Se escriben los números primos en orden, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$. Encuentra todas las parejas de números enteros positivos a y b con $a - b \geq 2$, tales que $p_a - p_b$ divide al número entero $2(a - b)$.

(Problema sugerido por Leonardo Ignacio Martínez Sandoval)

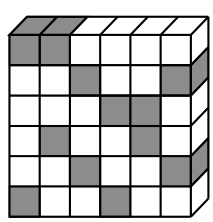
Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con ángulo obtuso en A. Sea P un punto sobre el segmento BD de manera que la circunferencia con centro en P y que pasa por A, corte a la recta AD en A y Y, y corte a la recta AB en A y X. La recta AP intersecta a BC en Q y a CD en R, respectivamente. Muestra que $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$.

(Problema sugerido por Daniel Perales Anaya)

Problema 3. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puedes tomar del conjunto de números enteros $\{1, 2, \ldots, 2012, 2013\}$, de tal manera que entre ellos no haya tres distintos, digamos a, b, c, tales que a sea divisor o múltiplo de $b - c$?

(Problema sugerido por Marco Antonio Figueroa Ibarra)

Problema 4. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Por ejemplo, en la siguiente ilustración, se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 6$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).



Muestra que es posible sustituir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

(Problema sugerido por María Luisa Pérez Seguí)

Problema 5. Una pareja de enteros es *especial* si es de la forma $(n, n-1)$ o de la forma $(n-1, n)$ con n un entero positivo. Muestra que una pareja (n, m) de enteros positivos que no es especial, se puede representar como suma de dos o más parejas especiales diferentes si y sólo si los enteros n y m satisfacen la desigualdad $n + m \geq (n - m)^2$. *Nota: la suma de dos parejas se define como* $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

(Problema sugerido por Rogelio Valdez Delgado)

Problema 6. Sea $A_1A_2 \ldots A_8$ un octágono convexo, es decir, un octágono donde todos sus ángulos internos son menores que $180°$. Además los lados del octágono tienen la misma longitud y cada par de lados opuestos son paralelos. Para cada $i = 1, \ldots, 8$, definamos el punto B_i como la intersección del segmento A_iA_{i+4} con el segmento $A_{i-1}A_{i+1}$, donde $A_{j+8} = A_j$ y $B_{j+8} = B_j$, para todo número entero j.
Muestra que para algún número i, de entre los números 1, 2, 3 y 4, se cumple que

$$\frac{|A_iA_{i+4}|}{|B_iB_{i+4}|} \leq \frac{3}{2}.$$

(Problema sugerido por Jesús Jerónimo Castro)

Olimpiadas Internacionales

XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 20 al 28 de septiembre de 2013 se llevó a cabo la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas en la ciudad de Panamá, Panamá. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Diego Alonso Roque Montoya y Kevin William Beuchot Castellanos, ambos de Nuevo León, Juan Carlos Ortiz Rhoton de Jalisco y Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán. Juan Carlos y Luis Xavier obtuvieron medalla de oro con examen perfecto, mientras que Diego Alonso y Kevin William obtuvieron medalla de plata. México ocupó el tercer lugar de entre los 20 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Marco Antonio Figueroa Ibarra (líder) y Luis Eduardo García Hernández (colíder). Los profesores José Antonio Gómez Ortega y María Luisa Pérez Seguí participaron como coordinadores en esta olimpiada.

A continuación presentamos los problemas de la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Un conjunto S de enteros positivos distintos se llama *canalero* si para cualesquiera tres números a, b, $c \in S$, todos diferentes, se cumple que a divide a bc, b divide a ca y c divide a ab.

1. Demostrar que para cualquier conjunto finito de enteros positivos $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ existen infinitos enteros positivos k, tales que el conjunto $\{kc_1, kc_2, \ldots, kc_n\}$ es canalero.

2. Demostrar que para cualquier entero $n \geq 3$ existe un conjunto canalero que tiene exactamente n elementos y ningún entero mayor que 1 divide a todos sus elementos.

Problema 2. Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos XY de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY.

Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.

Problema 3. Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ con $n > 5$. Demostrar que existe un conjunto finito B de enteros positivos distintos tal que $A \subseteq B$ y tiene la propiedad:

$$\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2,$$

es decir, el producto de los elementos de B es igual a la suma de los cuadrados de los elementos de B.

Problema 4. Sean Γ una circunferencia de centro O, AE un diámetro de Γ y B el punto medio de uno de los arcos AE de Γ. El punto $D \neq E$ está sobre el segmento OE. El punto C es tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo con AB paralelo a CD y BC paralelo a AD. Las rectas EB y CD se cortan en el punto F. La recta OF corta al arco menor EB de Γ en el punto I. Demostrar que la recta EI es la bisectriz del ángulo BEC.

Problema 5. Sean A y B dos conjuntos tales que:

1. $A \cup B$ es el conjunto de los enteros positivos.
2. $A \cap B$ es vacío.
3. Si dos enteros positivos tienen como diferencia a un primo mayor que 2013, entonces uno de ellos está en A y el otro en B.

Hallar todas las posibilidades para los conjuntos A y B.

Problema 6. Una *configuración* es un conjunto finito S de puntos del plano entre los cuales no hay tres colineales y a cada punto se le asigna algún color, de modo que si un triángulo cuyos vértices están en S tiene un ngulo mayor o igual a $120°$, entonces exactamente dos de sus vértices son de un mismo color. Hallar el número máximo de puntos que puede tener una configuración.

Problemas y Soluciones de Concursos Internacionales

XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

La XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, se realizó del 22 al 30 de junio de 2013 en la ciudad de Managua, Nicaragua. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos: Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Luis Xavier Ramos Tormo, de Yucatán; y Jorge Pat De la Torre Sánchez, de Coahuila. Los tres participantes obtuvieron medalla de oro y México ocupó el primer lugar entre los 13 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Miguel Raggi Pérez (líder) y David Guadalupe Torres Flores (colíder).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la XV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Juan escribe la lista de parejas $(n, 3^n)$ con $n = 1, 2, 3, \ldots$ en un pizarrón. A medida que va escribiendo la lista, subraya las parejas $(n, 3^n)$ cuando n y 3^n tienen la misma cifra de las unidades. De las parejas subrayadas, ¿cuál ocupa la posición 2013?

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Veamos el último dígito de 3^n con n un entero positivo. Módulo 10 tenemos que $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 7$, $3^4 \equiv 1$, de donde $3^{4k+r} \equiv (3^{4k})3^r \equiv (3^4)^k 3^r \equiv 1^k 3^r \equiv 3^r$, de donde concluimos que $3^n \equiv 3^m \pmod{10}$ si y sólo si $n \equiv m \pmod 4$.
El mínimo común múltiplo de 4 y 10 es 20. Luego, si $n \equiv 3^n \pmod{10}$, tenemos que $n + 20 \equiv n \equiv 3^n \equiv 3^{n+20} \pmod{10}$, por lo que $n + 20 \equiv 3^{n+20} \pmod{10}$. Por lo tanto, basta encontrar los enteros positivos n entre 1 y 20 tales que n y 3^n terminan en

el mismo dígito. Como 3^n solo puede terminar en 1, 3, 7 o 9, basta revisar 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17 y 19.
Utilizando que $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$ obtenemos que los únicos que cumplen son el 7 y el 13. Así, el 7 ocupará la primera posición, el 13 la segunda, el 27 la tercera y así sucesivamente. De donde concluimos que el $7 + 20k$ ocupa la posición $2k + 1$ y el $13 + 20k$ ocupa la posición $2k + 2$.
Por lo tanto, el número en la posición 2013 termina en 7 y como de $2k + 1 = 2013$ se obtiene que $k = 1006$ y $20k + 7 = 20127$. Por lo tanto, la pareja buscada es $(20127, 3^{20127})$.

Problema 2. Alrededor de una mesa redonda están sentadas en sentido horario las personas $P_1, P_2, \ldots, P_{2013}$. Cada una tiene cierta cantidad de monedas (posiblemente ninguna); entre todas tienen 10000 monedas. Comenzando por P_1 y prosiguiendo en sentido horario, cada persona en su turno hace lo siguiente:

1. Si tiene un número par de monedas, se las entrega todas a su vecino de la izquierda.

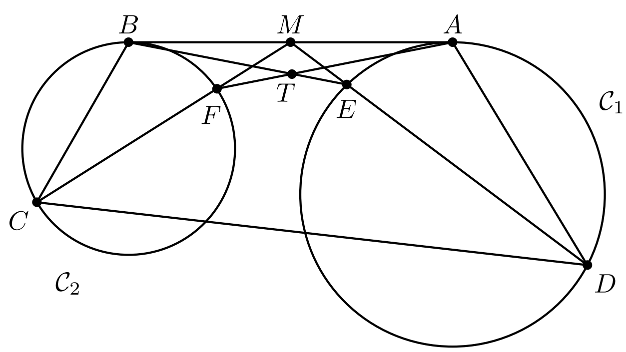
2. Si en cambio tiene un número impar de monedas, le entrega a su vecino de la izquierda un número impar de monedas (al menos una y como máximo todas las que tiene), y conserva el resto.

Pruebe que, repitiendo este procedimiento, llegará un momento en que todas las monedas estén en poder de una misma persona.

Solución de Jorge Pat De la Torre Sánchez. Notamos que si en algún momento todas las personas tienen una cantidad par de monedas, en a lo más una vuelta se tendrá que una persona tiene todas las monedas. Esto es cierto, pues la primera de estas personas le dará todas sus monedas al de la izquierda quedándose sin monedas y como el de su izquierda sigue teniendo una cantidad par de monedas, esto volverá a suceder hasta que todas las monedas lleguen a una persona. Luego, basta demostrar que en algún momento todas las personas tendrán una cantidad par de monedas.
Sea I la cantidad de personas que tienen una cantidad impar de monedas. Demostraremos que si I es positivo, después de alguna cantidad finita de pasos, reduce su valor. Luego, en algún momento I será 0 y terminamos.
Si una persona P_i tiene una cantidad impar de monedas en su turno pasará una cantidad impar de monedas a la persona de al lado. Si esta persona también tenía una cantidad impar de monedas, ahora ambos tendrán una cantidad par y la cantidad I se redujo. De otro modo P_i ahora tiene una cantidad par de monedas y sucede lo mismo con la siguiente persona, pues ella pasará una cantidad impar de monedas a su izquierda y así sucesivamente hasta que aparezca otra persona con una cantidad impar de monedas, después de lo cual, todas las involucradas terminarán con una cantidad par de monedas y la cantidad I se reduce.
Solo basta ver que siempre que I sea positivo, habrá al menos dos personas con una cantidad impar de monedas. Esto es cierto, pues como hay 10000 monedas, no puede haber solo una persona con una cantidad impar de monedas.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio del lado AB. La circunferencia que pasa por D y es tangente al lado AB en A corta al segmento DM en E. La circunferencia que pasa por C y es tangente al lado AB en B corta al segmento CM en F. Suponga que las rectas AF y BE se intersecan en un punto que pertenece a la mediatriz del lado AB. Demuestre que A, E y C son colineales si y sólo si B, F y D son colineales.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Sea T la intersección de las rectas AF y BE. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ los circuncírculos de los triángulos DAE y BCF. Como T está en la mediatriz del segmento AB tenemos que $TA = TB$ y $\angle TAB = \angle TBA$.



La potencia de M con respecto a $\mathcal{C}_1$ es MA^2 y con respecto a $\mathcal{C}_2$ es MB^2, como $MA = MB$ se tiene que M está en el eje radical de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Luego, $MA^2 = MD \cdot ME = MC \cdot MF = MB^2$.
Supongamos que A, E y C son colineales. Se tiene que $\angle ACM = \angle ECM$. De $MA^2 = MC \cdot MF$ se tiene que $\frac{MA}{MC} = \frac{MF}{MA}$ y como $\angle MAF = \angle MCA$, por el criterio LAL deducimos que los triángulos MAF y MCA son semejantes y $\angle MAF = \angle MCA$. Luego, $\angle MAF = \angle MCE$. De la misma manera concluimos que $\angle MBE = \angle MDB$.
De manera similar, como $MD \cdot ME = MC \cdot MF$ tenemos que $\frac{ME}{MC} = \frac{MF}{MD}$ y como $\angle EMF = \angle CMD$ por el criterio LAL tenemos que los triángulos CMD y EMF son semejantes, de donde $\angle MFE = \angle CDE$ de donde el cuadrilátero $CDEF$ es cíclico. Luego, $\angle ECF = \angle EDF$.
Por todas estas igualdades tenemos que

$$\begin{aligned} \angle MDB &= \angle MBE = \angle MBT = \angle MAT = \angle MAF \\ &= \angle ACM = \angle ECF = \angle EDF, \end{aligned}$$

de donde los puntos D, F y B son colineales. Análogamente se puede ver que si estos puntos son colineales también lo son A, E y C, por lo que el problema queda resuelto.

Problema 4. Ana y Beatriz alternan turnos en un juego que se inicia con un cuadrado de lado 1 dibujado en un tablero infinito. Cada jugada consiste en dibujar un cuadrado que no se sobreponga con la figura ya dibujada, de manera que uno de sus lados sea un lado (completo) del rectángulo que está dibujado. Gana el juego aquella persona que logre completar una figura cuya área sea múltiplo de 5. Si Ana realiza la primera jugada, ¿existe una estrategia ganadora para alguna jugadora?

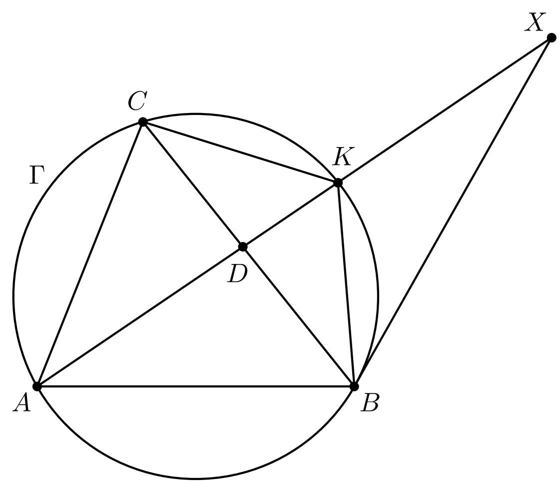
Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Mostraremos que no existe una estrategia ganadora para Ana ni para Beatriz. Es decir, demostraremos que ninguna de las dos jugadoras puede ganar sin importar cómo juegue la otra. Esto es equivalente a mostrar que tanto Ana como Beatriz siempre podrán evitar que la otra gane.
En cada caso tenemos un rectángulo de $a \times b$, cuya área es ab. Como 5 es primo, para que el área sea múltiplo de 5, es necesario que 5 divida a a o a b. Denotaremos por (a, b) un rectángulo de dimensiones a y b.
Si tenemos un rectángulo (a, b) tenemos dos opciones: agregar un cuadrado de lado a, en cuyo caso obtenemos el rectángulo $(a, a + b)$ o agregar un cuadrado de lado b, obteniendo el rectángulo $(a + b, b)$.
Supongamos que Ana ganó sin que Beatriz pueda evitarlo y sea (a, b) el rectángulo antes de que Beatriz jugara por última vez. Luego, Beatriz eligió $(a+b, b)$ o $(a, a+b)$. De estos dos, los rectángulos que Ana puede obtener son: $(a + 2b, b)$, $(a + b, a + 2b)$, $(a, 2a+b)$ o $(2a+b, a+b)$. Luego, alguno de los números a, b, $a+b$, $2a+b$ o $a+2b$ tiene que ser múltiplo de 5. Claramente a y b no son múltiplos de 5, pues eso implicaría que alguien hubiera ganado antes. De manera similar, $a + b$ no puede ser múltiplo de 5 o Beatriz hubiera ganado en el turno anterior. Luego, $2a+b$ o $a+2b$ deben ser múltiplo de 5.
Si $a + 2b$ no es múltiplo de 5, Beatriz debió haber elegido $(a + b, b)$, de donde Ana hubiera elegido $(a + 2b, b)$ o $(a + 2b, a + b)$, sin ganar. Veamos qué pasa si $a + 2b$ es múltiplo de 5. Si 5 también divide a $2a + b$, 5 dividiría a $(a + 2b) - (2a + b) = b - a$ y también a $(2a + b) + 2(b - a) = 3b$, de donde 5 divide a b, lo cual es falso. Luego, 5 no divide a $2a + b$ y si Beatriz elige $(a, a + b)$ obliga a Ana a elegir $(a, 2a + b)$ o $(2a + b, a + b)$ sin ganar. Por lo que Beatriz siempre puede evitar que Ana gane y de una manera similar demostramos que también Ana puede evitar que Beatriz gane.
Nota: en este razonamiento se utiliza el movimiento anterior al ganador. Esto es posible a menos que Ana gane en su primer turno, pero esto no es posible ya que la única posible jugada es $(2, 1)$ la cual no hace que gane.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea Γ su circuncírculo. La bisectriz del ángulo A corta a BC en D, a Γ en K (distinto de A), y a la tangente a Γ por B en X. Demuestre que K es el punto medio de AX si y sólo si $\dfrac{AD}{DC} = \sqrt{2}$.

Solución de Jorge Pat De la Torre Sánchez. Sea $\alpha = \angle CBK$. Por ángulos inscritos y dado que AK es la bisectriz de $\angle BAC$ tenemos que

$$\alpha = \angle CBK = \angle CAK = \angle KAB = \angle KCB,$$

de donde los triángulos ADC y BDK son semejantes y $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DK}$. Como BX es tangente a Γ tenemos que $\angle CBX = \angle BAC = 2\alpha$, por lo que BK biseca al ángulo $\angle CBX$. Luego, por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{BD}{DK} = \frac{BX}{KX}$ y por potencia del punto X a Γ tenemos que $XB^2 = XK \cdot XA$ o $\frac{BX}{KX} = \frac{XA}{BX}$.



Supongamos que K es el punto medio de AX. Tenemos que $BX^2 = XK \cdot XA = XK(2XK) = 2XK^2$ o $BX = \sqrt{2}XK$, de donde

$$\sqrt{2} = \frac{BX}{XK} = \frac{BD}{DK} = \frac{AD}{DC},$$

que es a lo que queríamos llegar. Por otro lado, si $\frac{AD}{DC} = \sqrt{2}$, tenemos que $\sqrt{2} = \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{DK} = \frac{BX}{KX}$. Como $BX = \sqrt{2}KX$ tenemos que $XK \cdot XA = BX^2$ de donde $2KX^2 = KX \cdot AX$, por lo que $AX = 2KX$ y K es el punto medio de AX.

Problema 6. Determine todas las parejas de polinomios no constantes $p(x)$ y $q(x)$, cada uno con coeficiente principal 1, grado n y n raíces enteras no negativas, tales que

$$p(x) - q(x) = 1.$$

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ las raíces enteras de p y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ las raíces enteras de q. Tenemos que $p(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$ y $q(x) = (x - b_1)(x - b_2)\cdots(x - b_n)$. Como para cada $1 \leq i \leq n$ tenemos que $0 = p(a_i) = q(a_i) + 1$, de donde $q(a_i) = -1$ para cada $1 \leq i \leq n$. Luego, $(a_i - b_1)(a_i - b_2)\cdots(a_i - b_n) = -1$. Entonces, no es posible que $a_i = b_j$ para algunos $1 \leq i, j \leq n$, de hecho, como $a_i - b_j$ es entero, se tendrá que $a_i - b_j = \pm 1$ o $a_i = b_j \pm 1$ para cada $1 \leq i, j \leq n$.
Supongamos que no todos los a_i son iguales. Luego, deben existir $1 \leq i, j, k \leq n$ tales que $a_i + 1 = b_j = a_k - 1$ (pues de otro modo se tendría que $a_1 + 1 = a_2 + 1 = \cdots = a_n + 1 = b_j$ o $a_1 - 1 = a_2 - 1 = \cdots = a_n - 1 = b_j$ para cada $1 \leq j \leq n$). Para todos los demás b_r se tiene que tener que $b_r = a_i \pm 1$. Si $b_r = a_i - 1$ tendríamos que

$$b_r = a_i - 1 = b_j - 2 = a_k - 3,$$

lo cual es una contradicción pues $b_r - a_k = \pm 1$. Luego, todos los b_r deben ser iguales entre sí e iguales a $a_i + 1$. Por lo tanto, todos los a_i son iguales o todos los b_i son iguales.

Supongamos que todos los b_i son iguales e iguales a b. Tenemos que $p(x) = q(x)+1 = (x-b)^n + 1$, el cual debe tener n raíces enteras. Si $y = x - b$ tenemos que $y^n + 1$ debe tener n raíces enteras. Luego, como $y^n = -1$ es necesario que $y = \pm 1$, pero si $y = 1$ tendríamos que $y^n = 1^n = 1 \neq -1$, por lo que $y = -1$ es la única opción (y para que esto sea posible n tiene que ser impar). Supongamos que $n \geq 3$. Al ser n impar, se tiene que $y^n + 1 = (y+1)(y^{n-1} - y^{n-2} + \cdots - y + 1)$, por lo que $y^{n-1} - y^{n-2} + \cdots - y + 1$ debe tener $n-1$ raíces iguales a -1, pero como $(-1)^i$ es igual a 1 si i es par y -1 si i es impar, se tiene que

$$(-1)^{n-1} - (-1)^{n-2} + \cdots - (-1) + 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}_{n} = n \neq 0,$$

por lo que -1 no vuelve a ser raíz y n tiene que ser 1. En este caso, encontramos las soluciones $p(x) = x - (b-1)$ y $q(x) = x - b$ para todo entero $b \geq 1$ (para que $b - 1 \geq 0$).

Supongamos ahora que todas las a_i son iguales e iguales a a. En este caso $p(x) = (x-a)^n$ y $q(x) = (x-a)^n - 1$, la cual tiene que tener n raíces enteras no negativas. Como en el caso anterior obtenemos que $y = x - a$ tiene que ser ± 1. Tenemos que

$$y^n - 1 = (y-1)(y^{n-1} + y^{n-2} + \cdots + y + 1),$$

de donde $y = 1$ es una solución. Notamos que $y = 1$ no vuelve a ser solución, pues

$$1^{n-1} + 1^{n-2} + \cdots + 1 + 1 = n \neq 0,$$

por lo que el resto de las soluciones tienen que ser -1. Para que -1 sea solución de $y^n - 1$, es necesario que n sea par. En este caso tenemos que

$$y^n - 1 = (y-1)(y+1)(y^{n-2} + y^{n-4} + \cdots + y^2 + 1).$$

Si $n \geq 4$ notamos que -1 no vuelve a ser raíz, pues

$$(-1)^{n-2} + (-1)^{n-4} + \cdots + (-1)^2 + 1 = \frac{n-2}{2} \geq 1 > 0,$$

por lo que $n = 2$. Luego,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-a)^2 \text{ y} \\ q(x) &= (x-a)^2 - 1 = (x-(a+1))(x-(a-1)) \end{aligned}$$

los cuales cumplen las condiciones para cualquier $a \geq 1$ entero. Esto concluye la demostración.

Competencia Internacional de Matemáticas

La Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se realiza en el mes de julio. La participación es por invitación y cada país invitado puede asistir con un máximo de dos equipos, los países que han sido sede o lo serán próximamente pueden llevar hasta cuatro equipos y el país sede hasta diez. Cada equipo consiste de 4 estudiantes, un tutor y un líder. Hay dos categorías: primaria y secundaria, México sólo ha participado en la categoría de secundaria.

La IMC es muy diferente a las otras olimpiadas internacionales de matemáticas en las que participa México ya que hay participación individual y por equipo y los exámenes son el mismo día. La prueba individual consiste de un examen de 15 preguntas, las primeras doce son de respuesta sin justificación y las últimas tres son de argumentación completa, las primeras valen 5 puntos y las últimas 20 puntos cada una por lo que 120 es la máxima puntuación. El examen dura dos horas. En este examen se otorgan medalla de oro, medalla de plata, medalla de bronce, mención honorífica y constancia de participación en razón 1:2:3:4:5. De esta manera aproximadamente el 40 % de los alumnos reciben medalla y dos terceras partes reciben distinción.

El examen por equipos tiene muchas especificaciones pero esencialmente son 10 problemas a resolver en una hora, en algunos momentos individualmente y en otros de manera colectiva, cada problema vale 40 puntos por lo que 400 es la máxima puntuación del equipo. Antes del examen se hace un sorteo en donde los equipos son agrupados en bloques (se trata de que estén cerca de 15 países por bloque). Se otorga un oro, dos platas y tres bronces por bloque.

En el año 2013, la Competencia Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 30 de junio al 5 de julio en Burgas, Bélgica. Se participó con dos equipos. El equipo A estuvo integrado por Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Olga Medrano Martín del Campo, de Jalisco; Antonio López Guzmán y Arturo Arenas Esparza, ambos de Chihuahua. El equipo B estuvo integrado por Karol José Gutiérrez Sánchez, Sergio Felipe López Robles, ambos de Colima; José Nieves Flores Máynez, de Chihuahua; y Juan Carlos Castro Fernández, de Morelos. Por equipos, México A obtuvo medalla de plata y México B medalla de bronce. Individualmente, Kevin William obtuvo medalla de plata, Arturo obtuvo medalla de bronce y Olga, Karol José, Antonio y Sergio Felipe obtuvieron mención honorífica. Acompañaron a los equipos: Fernando Campos García, Eréndira Jiménez Zamora, Martín Eliseo Isaías Castellanos y Hugo Villanueva Méndez.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la Competencia Internacional del año 2013 en la que participó México.

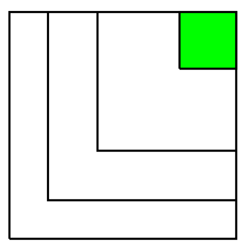
Examen individual

Sección A

Problema 1. En este problema, letras distintas representan dígitos distintos y letras iguales representan al mismo dígito. El número de tres cifras ABB es 25 unidades menor que el número de tres cifras CDC. Si el número $ABBCDC$ es el cuadrado de un entero positivo, ¿cuál es este entero positivo?

Solución. La suma $ABB + 25 = CDC$ muestra que $C = A + 1$, y que hay acarreo del dígito de las decenas al dígito de las centenas. Luego, debemos tener $B = 7$, 8 o 9. De aquí, $C = 2$, 3 o 4. Ya que $ABBCDC$ es un cuadrado perfecto, la única posibilidad es $C = 4$ (pues ningún cuadrado perfecto termina en 2 o 3). Se sigue que $B = 9$, $A = 3$, $D = 2$ y $\sqrt{399424} = 632$.

Problema 2. Una casa de $30\,m \times 30\,m$ está en la esquina noreste de una granja de $120\,m \times 120\,m$. El propietario quiere dividir, utilizando dos vallas en forma de V, la parte restante en tres parcelas con forma de V que tengan la misma área, como se muestra en la figura. Cada segmento de la valla es perpedicular al lado del terreno y dos segmentos de la misma valla, tienen la misma medida. ¿Cuántos metros mide el lado de la valla más pequeña?



Solución. El área total de las tres parcelas es $120 \times 120 - 30 \times 30 = 13500\,m^2$. Luego, el área de cada una es $\frac{13500}{3} = 4500\,m^2$. Ahora, la casa y la parcela más cercana forman un cuadrado de área $4500 + 900 = 5400\,m^2$. Por lo tanto, cada lado de este cuadrado tiene longitud $\sqrt{5400} = 30\sqrt{6}\,m$, de manera que la longitud de la valla más pequeña mide $30\sqrt{6} \times 2 = 60\sqrt{6}\,m$.

Problema 3. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar las seis letras de la palabra MOUSEY en un arreglo, de manera que no contengan la palabra YOU o la palabra ME? Por ejemplo, la palabra MOUSEY es uno de los arreglos posibles.

Solución. El número total de arreglos es $6! = 720$. Si aparece la palabra ME, entonces el número de arreglos es $5! = 120$. Si aparece la palabra YOU, entonces el número de arreglos es $4! = 24$. Si aparecen ambas palabras YOU y ME, el número de arreglos es $3! = 6$. Por lo tanto, el número de arreglos que no contienen la palabra YOU o la palabra ME es $720 - 120 - 24 + 6 = 582$.

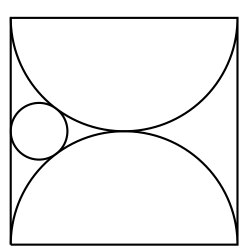
Problema 4. ¿Cuántas parejas (a, b) de enteros positivos existen tales que $a \leq b$ y $2\left(\sqrt{\frac{15}{a}} + \sqrt{\frac{15}{b}}\right)$ es un entero?

Solución. Sea $k = 2\left(\sqrt{\frac{15}{a}} + \sqrt{\frac{15}{b}}\right)$. Entonces $\sqrt{\frac{15}{b}} = \frac{k}{2} - \sqrt{\frac{15}{a}}$ de donde

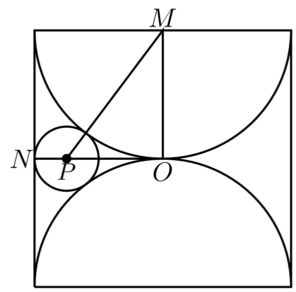
$$\frac{15}{b} = \frac{15}{a} - k\sqrt{\frac{15}{a}} + \frac{k^2}{4}.$$

Luego, $\sqrt{\frac{15}{a}}$ es un número racional $\frac{p}{q}$ donde p y q son primos relativos. Entonces $ap^2 = 15q^2$ y en consecuencia p^2 divide a 15, lo que significa que $p = 1$. Luego, $\sqrt{\frac{15}{a}} = \frac{1}{q}$. De manera análoga tenemos que $\sqrt{\frac{15}{b}} = \frac{1}{r}$ para algún entero $r \geq q$. Se sigue que $\frac{k}{2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \leq 2$. Por lo tanto, $k = 1, 2, 3$ o 4.
Si $k = 1$, tenemos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ de donde $(q, r) = (4, 4)$ o $(3, 6)$.
Si $k = 2$, tenemos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ de donde $(q, r) = (2, 2)$.
Si $k = 3$, tenemos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$ de donde $(q, r) = (1, 2)$.
Si $k = 4$, tenemos que $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$ de donde $(q, r) = (1, 1)$.
Por lo tanto, los valores correspondientes para a y b son $(a, b) = (240, 240), (135, 540), (60, 60), (15, 60)$ y $(15, 15)$, para un total de 5 parejas.

Problema 5. La figura muestra un cuadrado cuyo lado mide $80\,cm$. Contiene dos semicírculos que se tocan el uno al otro en el centro del cuadrado y un pequeño círculo que es tangente al cuadrado y a los semicírculos. ¿Cuántos centímetros mide el radio del círculo pequeño?



Solución. Sea O el centro del cuadrado y sea P el centro del círculo más pequeño. Tenemos que OP es una tangente común a ambos semicírculos, y pasa por el punto medio N de un lado del cuadrado. Sea M el centro de uno de los dos semicírculos.



Entonces, M es punto medio de un lado del cuadrado. Luego, $ON = OM = 40\,cm$. Si r es el radio del círculo más pequeño, tenemos que $MP = 40 + r$ y $OP = 40 - r$. Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo MPO, obtenemos

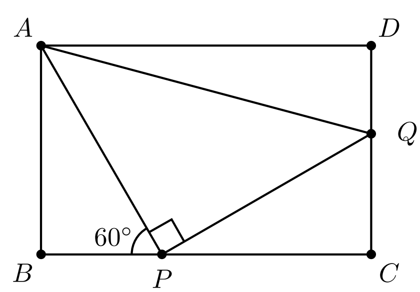
$$1600\,cm^2 = OM^2 = MP^2 - OP^2 = (MP - OP)(MP + OP) = (2r)(80)\,cm^2,$$

de donde $r = 10\,cm$.

Problema 6. ¿Cuál es la longitud más grande de un bloque de enteros positivos consecutivos, cada uno de los cuales es la suma de los cuadrados de dos enteros positivos?

Solución. Notemos que $72 = 6^2+6^2$, $73 = 3^2+8^2$ y $74 = 5^2+7^2$ forman un bloque de 3 enteros positivos consecutivos con la propiedad deseada. Demostraremos que ésta es la máxima longitud de tales bloques. La suma de dos cuadrados impares es congruente con 2 módulo 4, la suma de un cuadrado impar y un cuadrado par es congruente con 1 módulo 4, mientras que la suma de dos cuadrados pares es congruente con 0 módulo 4. Por lo tanto, los enteros positivos que son congruentes con 3 módulo 4 no pueden expresarse como la suma de los cuadrados de dos enteros positivos, y entre cada cuatro enteros consecutivos uno de ellos es congruente con 3 módulo 4.

Problema 7. El triángulo rectángulo isósceles APQ está inscrito en el rectángulo $ABCD$, de manera que el vértice P del ángulo recto está en BC y Q en CD. Si $BP = 1\,cm$ y $\angle APB = 60°$, ¿cuántos centímetros cuadrados mide el área del triángulo ADQ?



Solución. Observemos que $\angle CPQ = 180^\circ - \angle APQ - \angle APB = 180^\circ - \angle ABC - \angle APB = \angle PAB$. Luego, los triángulos ABP y PCQ son semejantes, y como tienen la misma hipotenusa, son congruentes también. Cada uno es la mitad de un triángulo equilátero, de tal manera que $CQ = BP = 1\,cm$ y $AB = PC = \sqrt{3}\,cm$. Por lo tanto, el área del triángulo AQD es $\frac{1}{2}AD \cdot DQ = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = 1\,cm^2$.

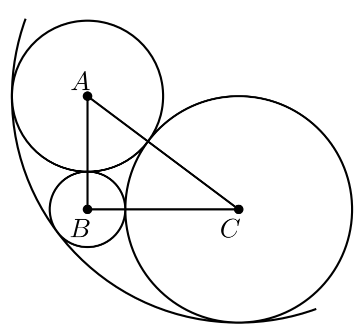
Problema 8. Lea tiene un anillo de diamantes, uno de oro y otro de marfil. Se los puso en la mano derecha y cada anillo puede estar en cualquiera de los cinco dedos. Cuando hay dos o tres anillos en el mismo dedo, si el orden en que están puestos es diferente, entonces se cuentan como maneras distintas de ponérselos. ¿De cuántas maneras diferentes puede Lea ponerse los anillos?

Solución. Los tres anillos pueden ser ordenados de $3! = 6$ maneras. Insertemos 4 separadores entre los anillos para determinar cuál anillo va en cuál dedo. El número de maneras de colocar los separadores es $\binom{3+4}{4} = 35$. Por lo tanto, el número total pedido es $6 \cdot 35 = 210$.

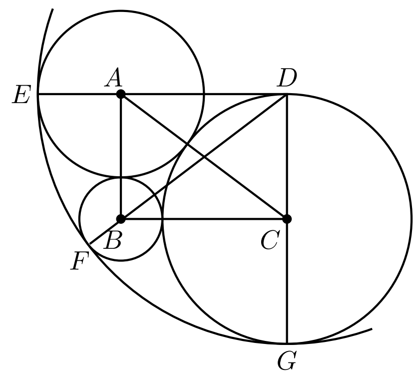
Problema 9. Sean a, b y c enteros positivos. Si el máximo común divisor de $b+c$, $c+a$ y $a+b$ es k veces el máximo común divisor de a, b y c, ¿cuál es el máximo valor de k?

Solución. Sea d el máximo común divisor de a, b y c. Entonces, el máximo común divisor de $2a$, $2b$ y $2c$ es $2d$. Ahora, kd divide a cada uno de los números $b+c$, $c+a$ y $a+b$. Luego, también divide a $(c+a)+(a+b)-(b+c) = 2a$. De manera análoga, kd divide a $2b$ y a $2c$. Por lo tanto, kd debe dividir al máximo común divisor de $2a$, $2b$ y $2c$, esto es $kd \mid 2d$. De aquí, $k \leq 2$. El valor máximo $k = 2$ se obtiene, por ejemplo, con $a = b = c = 1$. Entonces $b+c = c+a = a+b = 2$ y su máximo común divisor igual a 2 es $2 \cdot d$ con $d = 1$.

Problema 10. En el triángulo ABC, $BC = 4\,cm$, $CA = 5\,cm$ y $AB = 3\,cm$. Tres círculos con centros en A, B y C, respectivamente, son tangentes entre sí. Un cuarto círculo es tangente a estos tres círculos y los contiene a todos, como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide el radio del cuarto círculo?



Solución. Sean a, b y c los radios de los círculos con centros en A, B y C, respectivamente. Como $a + b = 3$, $b + c = 4$ y $c + a = 5$, tenemos que $a = 2$, $b = 1$ y $c = 3$. Completemos el rectángulo $ABCD$ y extendamos los lados DA, DB y DC hasta intersectar a los círculos de centros A, B y C en los puntos E, F y G, respectivamente.



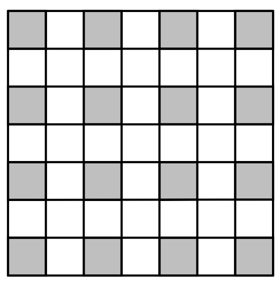
Entonces $DE = DA + a = BC + 2 = 6\,cm$, $DF = DB + b = CA + 1 = 6\,cm$ y $DG = DC + c = AB + 3 = 6\,cm$. Por lo tanto, un círculo con centro en D y radio $6\,cm$ contrendrá y será tangente a los tres círculos dados.

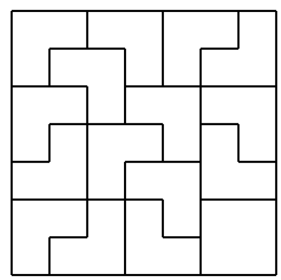
Problema 11. Los enteros positivos $a < b$ son tales que $\frac{a+b}{2}$ y $\sqrt{ab}$ son números enteros positivos con los mismos dos dígitos pero en orden inverso. ¿Cuál es el menor valor para a?

Solución. Escribamos $a + b = 2A$ y $ab = G^2$. Entonces a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - 2Ax + G^2 = 0$. Usando la fórmula cuadrática, obtenemos $a = A - \sqrt{A^2 - G^2}$ y $b = A + \sqrt{A^2 - G^2}$, de donde $b - a = 2\sqrt{(A + G)(A - G)}$. Luego, $(A + G)(A - G)$ es un cuadrado perfecto. Sean $A = 10p + q$ y $G = 10q + p$, donde $p > q$ son dígitos. Entonces $(A+G)(A-G) = 99(p+q)(p-q)$. Para que este número sea un cuadrado perfecto, 11 debe dividir a $(p + q)(p - q)$. Ya que $1 \leq p - q \leq 8$, 11 no puede dividir a $p - q$. Luego, debe dividir a $p + q$. Ya que $3 \leq p + q \leq 17$, debemos tener que $p + q = 11$. Esto significa que $p - q$ también es un cuadrado perfecto. Ya que $p + q$ es impar, también lo es $p - q$ y por lo tanto $p - q = 1$ (pues $1 \leq p - q \leq 8$). De aquí, $p = 6$ y $q = 5$, de modo que $A = 65$, $G = 56$ y $\sqrt{A^2 - G^2} = 33$. En consecuencia, sólo hay una pareja de enteros positivos con la propiedad deseada, a saber $a = 65 - 33 = 32$ y $b = 65 + 33 = 98$. En particular, el único valor de a es 32.

Problema 12. Una fábrica produce piezas de metal de dos formas. La primera consiste en un cuadrado de 2×2. La segunda forma, como se muestra en la figura siguiente, es un cuadrado de 2×2 a la que le falta una de las cuatro celdas. Estas piezas de distinta forma se cortan de una hoja metálica de 7×7 y ninguna de las 49 celdas puede ser desperdiciada. ¿Cuál es el menor número de piezas de la segunda forma que se pueden obtener de una hoja metálica de 7×7?

Solución. Cada pieza de metal puede cubrir a lo más una de las 16 celdas sombreadas en la figura de la izquierda. Luego, debemos obtener al menos 16 piezas de metal. Aún si son todas de la segunda forma, ya cubren $16 \times 3 = 48$ casillas. Por lo tanto, debemos tener sólo una pieza de metal de la primera forma y 15 piezas de metal de la segunda forma. La figura de la derecha muestra una posible forma de hacer los cortes.





Sección B

Problema 1. Considera la expresión,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Empezando en el segundo paréntesis, la expresión se obtiene quitando el primer sumando de la expresión al interior del paréntesis anterior. ¿Cuál es el valor de la expresión cuando $n = 2013$?

Solución. Si desarrollamos los cuadrados, obtenemos dos tipos de términos:

1. $\left(\frac{1}{j}\right)^2$, $1 \leq j \leq n$. De estos hay j, con suma igual a $\frac{1}{j}$.

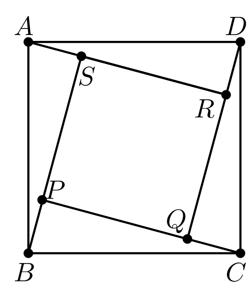
2. $2\left(\frac{1}{i}\right)\left(\frac{1}{j}\right)$, $1 \leq i \leq j \leq n$. De estos hay i, con suma igual a $\frac{2}{j}$.

Luego, toda la expresión es igual a

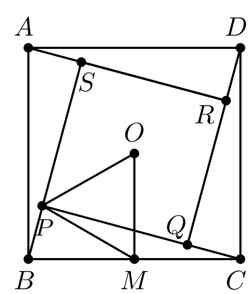
$$\begin{array}{ll}
\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} & \\
+\,1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} & 1\le j\le n \\
+\,2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) & i=1,\ 2\le j\le n \\
+\,2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right) & i=2,\ 3\le j\le n \\
\ \vdots & \\
+\,2\left(\frac{1}{n}\right) & i=n-1,\ j=n \\
=2+\frac{4}{2}+\frac{6}{3}+\cdots+\frac{2n}{n} & \\
=2n. &
\end{array}$$

Cuando $n = 2013$, la respuesta es $2(2013) = 4026$.

Problema 2. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y $\angle PCB = \angle QDC = \angle RAD = \angle SBA$. Si el área de $ABCD$ es el doble del área de $PQRS$, ¿cuántos grados mide $\angle PCB$?



Solución. Es fácil ver que los triángulos PCB, QDC, RAD y SBA son congruentes entre sí. Luego, $PQRS$ también es un cuadrado. Sea O el centro común de $ABCD$ y $PQRS$ y sea M el punto medio de BC. Entonces $OM = MC$.



Ya que M es el circuncentro del triángulo PCB, tenemos que $MC = MP$. Como el área de $ABCD$ es el cuadrado de BC, y el área de $PQRS$ es el doble del cuadrado de OP, tenemos que $(2MC)^2 = 2(2OP)^2$, de donde $MC = OP$. Se sigue que OPM es un triángulo equilátero. Ahora

$$\angle PMB = \angle OMB - \angle OMP = 30^\circ = \angle PCB + \angle CPM.$$

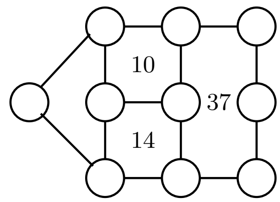
Finalmente, como $MC = MP$, los ángulos $\angle PCB$ y $\angle CPM$ son iguales, y cada uno mide 15°.

Problema 3. Hay ocho monedas en una fila todas mostrando águila. En cada movimiento, se pueden voltear dos monedas adyacentes siempre que ambas muestren águila o ambas muestren sol. ¿Cuántos arreglos distintos de águila y sol se pueden obtener después de cierto número de movimientos?

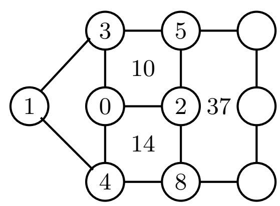
Solución. Sea m el número de monedas en las posiciones $1, 3, 5$ y 7, las cuales muestran águila, y sea n el número de monedas en las posiciones $2, 4, 6$ y 8, las cuales muestran águila.
Observemos que al inicio $m-n = 0$. En cada movimiento, o bien ambos m y n aumentan en 1, o ambos disminuyen en 1. Luego, $m - n = 0$ todas las veces. Consideremos las monedas en las posiciones $1, 3, 5$ y 7. Podemos elegir $0, 1, 2, 3$ o 4 de ellas para mostrar águila, de 1, 4, 6, 4 y 1 formas, respectivamente. Entonces, debemos elegir los números correspondientes de monedas en las posiciones 2, 4, 6 y 8 para mostrar sol. Se sigue que el número de arreglos distintos es a lo más $1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2 = 70$. Demostraremos que cada uno de estos arreglos puede ser obtenido. Debe haber dos monedas adyacentes las cuales o bien ambas muestran águila o ambas muestran sol. Consideremos el primer tal conjunto desde la izquierda. Después de voltearlas, la moneda izquierda en este par y la moneda a su izquierda muestran ambas águila o muestran ambas sol. Podemos continuar volteando hasta que las primeras dos monedas (de izquierda a derecha) muestren ambas águila o muestren ambas sol. En el último caso, las volteamos de manera que ambas muestren águila. Ahora dejamos solas estas dos monedas. En la parte que queda del arreglo, tenemos todavía $(m - 1) - (n - 1) = 0$ monedas y podemos continuar volteando hasta que todas las ocho monedas muestren águila. Ya que los movimientos son reversibles, todos los 70 arreglos pueden ser obtenidos.

Examen en equipo

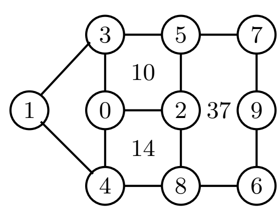
Problema 1. Coloca los números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 en cada uno de los círculos del siguiente diagrama. Números consecutivos no pueden estar en círculos que estén conectados por un segmento. La suma de los números que están en los círculos dentro del perímetro de cada rectángulo debe ser igual al número indicado al interior de él.



Solución. Como la suma de los diez dígitos es 45 y la suma de los seis dígitos en el rectángulo de la derecha es 37, tenemos que la suma de los cuatro dígitos de la izquierda es igual a 8. Ahora, 8 puede ser la suma de $(0,1,3,4)$ o $(0,1,2,5)$. Esta última es imposible, pues 1 estaría al lado del 0 o del 2. Para obtener el 10 no podemos tener disponibles simultáneamente al 0 y al 1, por lo que el 10 solo puede ser la suma de $(0,2,3,5)$ o $(1,2,3,4)$. Esta última es imposible pues el 2 quedaría al lado del 1 o del 3. Ahora, el dígito hasta la izquierda tiene que ser el 1 o el 4. Si fuera el 4, el 15 tendría que ser obtenido con la suma de 1, 3, 5 y otro dígito, que tendría que ser otro 5. Luego, el dígito hasta la izquierda es el 1 y obtenemos parcialmente:

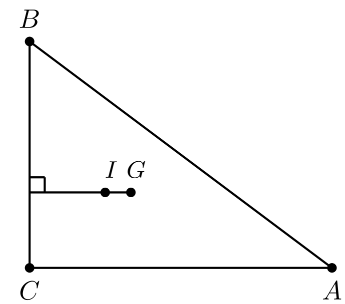


Quedan los dígitos 6, 7 y 9. Notemos que el 8 no puede ir al lado del 7 o del 9, por lo que tiene que quedar al lado del 6. Como el 6 no puede ir al lado del 7, la única manera es la que sigue:



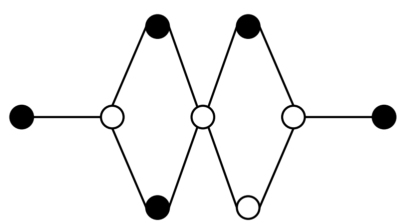
Problema 2. Las medidas de los lados, en centímetros, de un triángulo rectángulo son enteros primos relativos. La recta que une al centroide y al incentro es perpendicular a uno de los lados. ¿Cuál es el mayor perímetro, en centímetros, que puede tener dicho triángulo?

Solución. Sea ABC dicho triángulo con $\angle C = 90°$. Sea G el centroide y sea I el incentro.



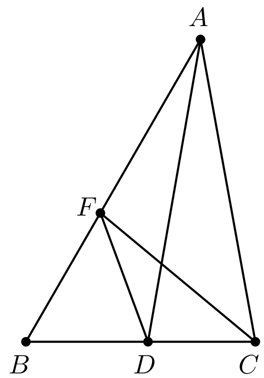
Si $AC = BC$, entonces $AB = \sqrt{2}AC$ que no es entero. Luego, $AC \neq BC$. Supongamos que $BC < AC$. Entonces, la bisectriz de $\angle C$ intersecta AB en un punto más cerca de B que de A. De manera análoga, ya que $AB > BC$, la bisectriz de $\angle B$ intersecta AC en un punto más cerca de C que de A. De aquí se sigue que I está dentro del triángulo GBC, de tal manera que el lado al cual GI es perpendicular debe ser BC, y por lo tanto GI es paralela a AC. Ahora, la distancia desde G a AC es $\frac{1}{3}BC$, y la distancia desde I a AC es igual al inradio r de ABC. Sean $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Entonces $r = \frac{a+b-c}{2}$ y también $r = \frac{a}{3}$. Luego, $c - b = \frac{a}{3}$. Ahora, $a^2 = c^2 - b^2 = \frac{a}{3}(c + b)$ de donde $c + b = 3a$. Resolviendo para b y c obtenemos que $b = \frac{4}{3}a$ y $c = \frac{5}{3}a$. Los valores enteros primos relativos son $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$. Como estos valores son únicos, el máximo perímetro es $3 + 4 + 5 = 12\,cm$.

Problema 3. Una ficha se coloca aleatoriamente en alguno de los nueve círculos del siguiente diagrama. Después se mueve aleatoriamente a otro círculo siguiendo una línea. ¿Cuál es la probabilidad de que después de este movimiento la ficha esté en un círculo negro?

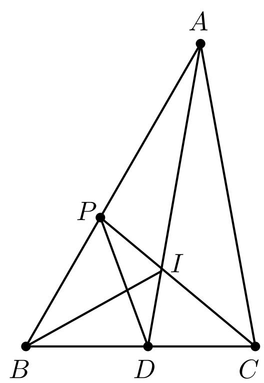


Solución. Si la ficha se coloca ya sea en un círculo del primer renglón (el de más arriba), o bien en un círculo del último renglón (el de más abajo), o bien en los círculos de los extremos del renglón de en medio, entonces no se podrá mover a un círculo negro. Si la ficha se coloca en el círculo de en medio del renglón de en medio, la probabilidad de que se mueva a un círculo negro es $\frac{3}{4}$. Si la ficha se coloca en el círculo blanco de la izquierda del renglón de en medio, la probabilidad es 1. Y si la ficha se coloca en el círculo blanco de la derecha del renglón de en medio, la probabilidad es $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, la probabilidad buscada es $\frac{1}{9}(1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}) = \frac{29}{108}$.

Problema 4. En el triángulo ABC, $\angle A = 40^\circ$ y $\angle B = 60^\circ$. La bisectriz de $\angle A$ corta a BC en D, y F es el punto en AB tal que $\angle ADF = 30^\circ$. ¿Cuántos grados mide $\angle DFC$?



Solución. Sea I el incentro del triángulo ABC y supongamos que la prolongación de CI intersecta a AB en el punto P.



Notemos que $\angle ADC = 80^\circ = \angle ACD$. Luego, $\angle PID = \angle ICB + \angle ADC = 120^\circ$. Se sigue que $BDIP$ es un cuadrilátero cíclico, de manera que $\angle ADP = \angle ABI = 30^\circ$. Esto significa que P coincide con F, y por lo tanto $\angle DFC = \angle DPI = \angle DBI = 30^\circ$.

Problema 5. El primer dígito de un entero positivo con 2013 cifras es 5. Cualesquiera dos dígitos adyacentes forman un múltiplo de 13 o de 27. ¿Cuál es la suma de todos los posibles valores del último dígito de dicho número?

Solución. Los múltiplos de 13 de dos dígitos son $13, 26, 39, 52, 65, 78$ y 91, y los múltiplos de 27 de dos dígitos son $27, 54$ y 81. Luego, el segundo dígito debe ser 4 o 2. De hecho, debe ser 2 pues ninguno de los múltiplos comienza con 4. El tercer dígito es 7 o 6. Si es 7, debe estar seguido por el 8 y entonces tenemos el ciclo $1, 3, 9, 1, 3, 9, \ldots$.

En este caso, el dígito en la posición 2013 será 3. Si el tercer dígito es 6, entonces el cuarto dígito es 5 otra vez. Luego, es posible que tengamos el ciclo $5, 2, 6, 5, 2, 6, \ldots$ y el dígito en la posición 2013 será 6. Si cambiamos de 6 a 7 en el último paso, entonces el dígito en la posición 2013 será 7. Pero si intercambiamos antes, el dígito en la posición 2013 será 3. Por lo tanto, la suma buscada es $3 + 6 + 7 = 16$.

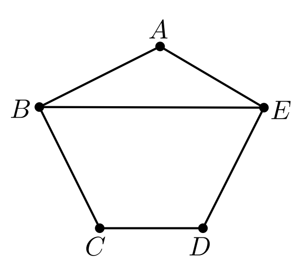
Problema 6. En un torneo, cualesquiera dos participante juegan entre sí. Ningún juego puede terminar en empate. El registro del torneo muestra que para cualesquiera dos participantes X y Y, existe un jugador Z que le ganó a ambos. En tal torneo,

1. prueba que no puede haber seis participantes;
2. muestra que puede haber siete participantes.

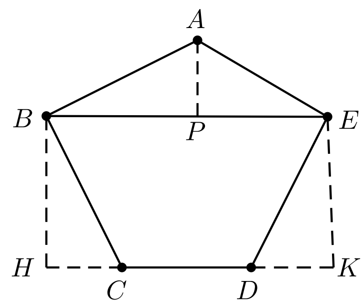
Solución.

1. Digamos que tenemos a los participantes: Beatriz, Carla, Denise, Elena, Fiona y Gema. Cada una de ellas jugó 5 veces. Supongamos que Beatriz ganó al menos la misma cantidad de veces que las otras cinco. Como hubo 15 juegos, Beatriz debió haber ganado al menos tres veces. Si ella derrotó a todas excepto quizás a Carla, nadie hubiera derrotado tanto a Beatriz como a Clara, lo cual es una contradicción y Beatriz ganó exactamente tres veces, digamos a Elena, a Fiona y a Gema. En el juego entre Carla y Denise podemos asumir que Carla ganó. Entonces, nadie derrotó a Beatriz y a Carla. Luego, no puede haber seis jugadores.
2. Supongamos que Alicia se une a la competencia. Pongamos a las siete jugadoras en orden alfabético en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de una mesa redonda. Los resultados del torneo se pueden ver como sigue: cada jugador derrotó al primero, segundo y cuarto jugador a partir de él en el orden de las manecillas del reloj. Consideremos cualesquiera dos jugadores. Si ocupan asientos adyacentes podemos suponer que son Beatriz y Carla. Si ocupan asientos separados por un asiento, podemos asumir que son Carla y Elena. Y si ocupan asientos separados por dos asientos, podemos suponer que son Beatriz y Elena. En cada caso, Alicia derrota a ambos jugadores. Como cada caso es equivalente a uno de estos tres, el torneo tiene la propiedad deseada y sí puede haber siete jugadores.

Problema 7. En un pentágono $ABCDE$, $\angle ABC = 90° = \angle DEA$, $AB = BC$, $DE = EA$ y $BE = 100\,cm$. ¿Cuántos centímetros cuadrados mide el área de $ABCDE$?

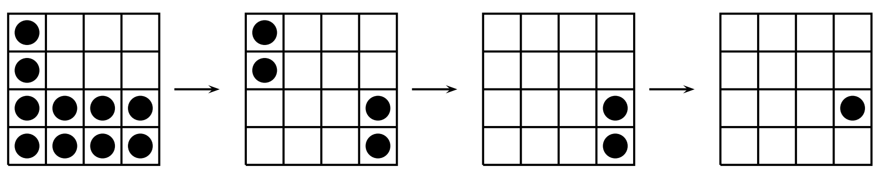


Solución. Sean H y K los puntos sobre la recta CD tal que BH y EK son ambos perpendiculares a BE. Sea P el punto sobre BE tal que $BP = BH$. Entonces, los triángulos BHC y BPA son congruentes, de donde $\angle BHC = BPA$.



Ahora, $\angle DKE = 180° - \angle BHC = 180° - \angle BPA = \angle APE$ ya que BH y EK son paralelas. Luego, los triángulos APE y DKE son congruentes y por lo tanto $EK = PE$ y $BH + EK = BP + EP = BE = 100\,cm$. Se sigue que el área de $ABCDE$ es igual al área de $BHKE$, que es igual a $\frac{1}{2}BE(BH + EK) = \frac{1}{2}BE^2 = 5000\,cm^2$.

Problema 8. Un juego entre dos jugadores comienza con una ficha en cada una de las casillas de un tablero de 100×100. En cada jugada, el jugador en turno tiene que quitar un número positivo de fichas, que deberán proceder de los cuadrados que formen una región rectángular que no podrá tener ningún cuadrado vacío. El jugador que quite la última ficha, pierde. A continuación se muestra un ejemplo de una partida en un tablero de 4×4, donde el primer jugador perdió. ¿Qué jugador tiene la estrategia ganadora, el primer jugador o el segundo?



Solución. El primer jugador gana quitando todas las fichas de un rectángulo de 98×100, dejando solo las del primer y el último renglón. Todos los movimientos siguientes serán en rectángulos que consisten en cuadrados adyacentes o en el primer renglón o en el último. En este momento, cada uno de estos dos renglones contiene al menos dos fichas que son adyacentes. Podemos suponer que el primer movimiento del segundo jugador es en el primer renglón. Si después de ese movimiento sigue habiendo dos fichas adyacentes en el primer renglón, el primer jugador copiará esa jugada en el último renglón. Por simetría, podemos suponer que el segundo jugador siempre juega en el primer renglón y que el segundo lo hace en el último. Debe haber un momento en el que, después de un movimiento del segundo jugador, no haya dos fichas adyacentes en el primer renglón. Entonces, este movimiento debió haber sido en el último bloque con al menos dos fichas adyacentes en el primer renglón. Tenemos tres casos:

1. El segundo jugador quitó todas las fichas del bloque. El primer jugador quitará todas las fichas del bloque correspondiente, salvo una en un extremo.

2. El segundo jugador quitó todas las fichas del bloque excepto una de un extremo. El primer jugador quitará todas las fichas del bloque correspondiente.

3. El segundo jugador quitó todas las fichas del bloque salvo los dos extremos. El segundo jugador quitará todas las del bloque correspondiente, salvo una en un extremo.

Después del turno del primer jugador, habrán quedado una cantidad impar de fichas, cada una de las cuales no tiene fichas a sus lados, por lo que cada uno de los siguientes turnos será de quitar solo una ficha. Luego, el segundo jugador eventualmente perderá.

Problema 9. En una vitrina de 5×5 hay 20 gemas: 5 rojas, 5 amarillas, 5 azules y 5 verdes. En cada fila y en cada columna hay una casilla vacía y las otras cuatro contienen gemas de distinto color. Doce personas están admirando las gemas. Mirando a lo largo de una fila o una columna, cada persona informa el color de la gema en la primera casilla, o si la casilla está vacía, el color de la gema en la segunda casilla. Sus informes se registran en el siguiente diagrama, donde R, Am, Az y V corresponden a rojo, amarillo, azul y verde, respectivamente. En el diagrama que se te dió para registrar tu respuesta, escribe R, Am, Az o V en 20 de las 25 casillas para indicar el color de la gema que está en ella.

	R		Am		R	
R						Az
V						Az
R						Am
	Az		Az		V	

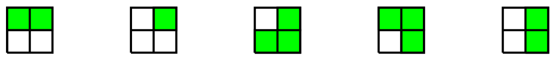
Solución. Si en el segundo cuadrado de abajo hacia arriba en la primera columna hubiera una gema, tendría que ser de color rojo, por lo que arriba en esa columna no podría decir "R". Luego, esa casilla tiene que estar vacía y la de hasta arriba debe ser roja y eso solo deja una posibilidad a esa columna. Como la última columna no puede tener una gema roja hasta arriba, debe tener un espacio vacío ahí. Esto deja una única posibilidad para esa columna y el tablero queda parcialmente así:

	R		Am		R	
R	R					Az
	Am				R	
V	V				Az	Az
R					Am	Am
	Az				V	
	Az		Az		V	

El cuadrado de abajo en la columna de en medio debe estar vacío, por lo que el segundo cuadrado debe contener una gema azul y la de hasta arriba una gema amarilla. La gema roja tiene que estar en el cuadrado central, por lo que la gema verde debe estar en el segundo cuadrado desde arriba. Las demás gemas se deducen fácilmente y se llega a:

	R		Am		R	
R	R	V	Am	Az		Az
	Am	Az	V		R	
V	V		R	Am	Az	Az
R		R	Az	V	Am	Am
	Az	Am		R	V	
	Az		Az		V	

Problema 10. Cuatro estampas diferentes están en un bloque de 2×2. La figura muestra los 13 posibles sub-bloques adyacentes que se pueden obtener de este bloque si se quitan 0 o más estampas. Los cuadros sombreados representan estampas que se quitaron. ¿Cuántos sub-bloques adyacentes de estampas distintos se pueden obtener de un bloque de 2×4 con ocho estampas diferentes?



Solución. Consideramos la última columna en una configuración de $2 \times n$. Sea a_n el número de bloques conectados que contienen las dos estampas de la última columna, b_n el número que solo contienen la estampa de arriba, c_n el número de los que solo tienen la estampa de abajo y d_n los que no tienen ninguna de las dos.
Es fácil ver que $a_1 = b_1 = c_1 = 1$ mientras que $d_1 = 0$. El problema nos dice que $a_2 = 4$ y que $b_2 = c_2 = d_2 = 3$. Para $n \geq 3$ podemos agregar una columna de dos estampas a cada bloque conectado de $2 \times (n-1)$ en donde la columna $n-1$ no está vacía, a menos que sea un bloque vacío. Luego, tenemos que

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + 1.$$

De manera similar se tiene que

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + 1, \\ c_n &= a_{n-1} + c_{n-1} + 1, \text{ y} \\ d_n &= a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1}. \end{aligned}$$

Usando estas relaciones llegamos a que $a_3 = 11$, $b_3 = c_3 = 8$, $d_3 = 13$, $a_4 = 28$, $b_4 = c_4 = 20$ y $d_4 = 40$. Por lo tanto, el número buscado es $a_4 + b_4 + c_4 + d_4 = 108$.

54ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 54^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) se llevó a cabo en Santa Marta, Colombia, del 18 al 28 de julio de 2013, con la participación de 528 estudiantes provenientes de 97 países. México ocupó el 17^o lugar, siendo este el mejor lugar que México ha ocupado en esta olimpiada. La delegación que representó a México estuvo integrada por los alumnos: Juan Carlos Ortiz Rothon y Adán Medrano Martín del Campo, ambos de Jalisco; Diego Alonso Roque Montoya, Kevin William Beuchot Castellanos, ambos de Nuevo León; Enrique Chiu Han del Distrito Federal y Luis Xavier Ramos Tormo de Yucatán. En esta ocasión Enrique, Juan Carlos y Diego obtuvieron medalla de plata y Luis Xavier, Kevin William y Adán obtuvieron medalla de bronce. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (líder), Rogelio Valdez Delgado (colíder) y David Cossío (Observador B). El profesor Florian Luca participó como coordinador en esta olimpiada.

Gracias a estos resultados, México fue invitado por primera ocasión a participar en la competencia Romanian Master of Mathematics que se llevará a cabo en febrero de 2014 en Rumania. A este evento sólo son invitados los mejores 20 países de la IMO del año anterior.

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la 54^a Olimpiada Internacional. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Demostrar que para cualquier par de enteros positivos k y n, existen k enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (no necesariamente distintos) tales que

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

(Problema sugerido por Japón)

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Probaremos por inducción fuerte en k el resultado. El caso base es fácil, pues si $k=1$, entonces $m_1=n$ de modo que $1+\frac{2^1-1}{n}=1+\frac{1}{n}$. Supongamos que para toda t tal que $1\leq t\leq k$ se cumple el problema. Veamos ahora que se cumple para $k+1$.

- Si n es par, $n=2r$ con $r\in\mathbb{N}$. Así,

$$\begin{aligned}1+\frac{2^{k+1}-1}{2r} &= \frac{2^{k+1}-1+2r}{2r}=\left(\frac{2^{k+1}-1+2r}{2^{k+1}+2r-2}\right)\left(\frac{2^{k+1}+2r-2}{2r}\right)\\ &= \left(\frac{2^{k+1}-1+2r}{2^{k+1}+2r-2}\right)\left(\frac{2^k+r-1}{r}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2^{k+1}+2r-2}\right)\left(1+\frac{2^k-1}{r}\right)\end{aligned}$$

Definamos $m_{k+1}=2^{k+1}+2r-2$. Tenemos $m_k\in\mathbb{N}$ pues $r\geq 1$ y por hipótesis podemos expresar a $1+\frac{2^k-1}{r}$ como $\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$. Así,

$$1+\frac{2^{k+1}-1}{2r}=\left(1+\frac{1}{2^{k+1}+2r-2}\right)\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

- Si n es impar, $n=2r+1$. De aquí,

$$\begin{aligned}1+\frac{2^{k+1}-1}{2r+1} &= \frac{2^{k+1}+2r}{2r+1}=\left(\frac{2^k+r}{r+1}\right)\left(\frac{2r+2}{2r+1}\right)\\ &= \left(1+\frac{2^k-1}{r+1}\right)\left(1+\frac{1}{2r+1}\right)\end{aligned}$$

y tomamos $m_{k+1}=2r+1$ y por hipótesis de inducción expresamos a $1+\frac{2^k-1}{r+1}$ como $\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right)$ y entonces

$$1+\frac{2^{k+1}-1}{n}=\left(1+\frac{1}{2r+1}\right)\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

En cualquier caso, completamos la inducción, por lo que el problema es cierto para toda $k \in \mathbb{N}$, que era lo que queríamos probar.

Problema 2. Una configuración de 4027 puntos del plano, de los cuales 2013 son rojos y 2014 azules, y no hay tres de ellos que sean colineales, se llama *colombiana*. Trazando algunas rectas, el plano queda dividido en varias regiones. Una colección de rectas es *buena* para una configuración colombiana si se cumplen las dos siguientes condiciones:

- ninguna recta pasa por ninguno de los puntos de la configuración;
- ninguna región contiene puntos de ambos colores.

Hallar el menor valor de k tal que para cualquier configuración colombiana de 4027 puntos hay una colección buena de k rectas.

(Problema sugerido por Australia)

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. La respuesta es 2013. Primero muestro una configuración colombiana sin colección buena de 2012 rectas o menos. Trazo un 4026-ágono convexo y coloreo sus vértices alternadamente rojo y azul. Añado un punto azul arbitrario. Primero muestro el siguiente lema:
Lema. Toda línea intersecta a lo más 2 veces a un polígono convexo.
Demostración. Supongamos que lo intersecta 3 o más. Si empiezo a recorrer la línea desde lejos, iniciamos fuera y terminamos fuera, así que intersectó al polígono un número par de veces (pues cada vez se cambia de "dentro" a "fuera" o viceversa). Así, lo intersecta mínimo 4 veces. Me tomo el segmento AB donde A es un punto de la línea de la primera vez que estuvo adentro y B de la segunda vez que estuvo adentro. Entre ellos hay un punto C de la primera vez que estuvo afuera. Así, A y B están dentro del polígono y C no. Pero C está en el segmento AB. Esto es una contradicción pues el polígono es convexo. De este modo, el lema es cierto.
Como cada lado del polígono es de la forma RA (R un punto rojo y A un punto azul), debe haber una línea buena que lo intersecte, de lo contrario habría una región con un punto rojo y uno negro. Pero toda línea intersecta a lo más 2 lados, de modo que hay al menos 2013 líneas en la configuración.
Ahora muestro que siempre se puede con 2013 líneas para acabar. Muestro algo más general, que si en una configuración hay m rojos y k azules, con $\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor$ líneas es suficiente, asumiendo que $m+k$ es impar. Lo hago por inducción sobre $m+k$.
Si $m+k=1$, es obvio pues no trazo ninguna línea ya que sólo hay 1 punto. Ahora supongamos que $m+k=x$ funciona y lo demostraré para $m+k=x+2$. Me tomo la envolvente convexa de los $x+2$ puntos. Sobre esta o hay dos puntos de distinto color consecutivos, o todos son del mismo color. En el primer caso, supongamos que tengo un punto a rojo y uno azul b seguidos en la envolvente convexa. Me olvido de ellos y trazo las $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ líneas que sirven para los x puntos restantes. Si a y b quedaron en distintas regiones, entonces basta con trazar una línea muy pegada a ab que divida a esos puntos del resto. Tenemos que a y b quedarán en regiones solos y habré usado $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{x+2}{2} \rfloor$ líneas.

Si a y b quedaron en la misma región, supongamos sin perder generalidad que todos los otros puntos en esa región son rojos. Trazo una línea muy pegada a b que lo divida del resto de los puntos y claramente esta configuración es buena y de nuevo usamos $\lfloor \frac{x+2}{2} \rfloor$ líneas.

Si todos los puntos de la envolvente convexa son del mismo color, supongamos que son azules. Me tomo dos de ellos seguidos, digamos a y b y me olvido de ellos. Trazo la configuración buena para los x puntos restantes y añado una línea muy cercana a ab que los divida del resto de los puntos. Esta configuración sirve y usé $\lfloor \frac{x+2}{2} \rfloor$ líneas.

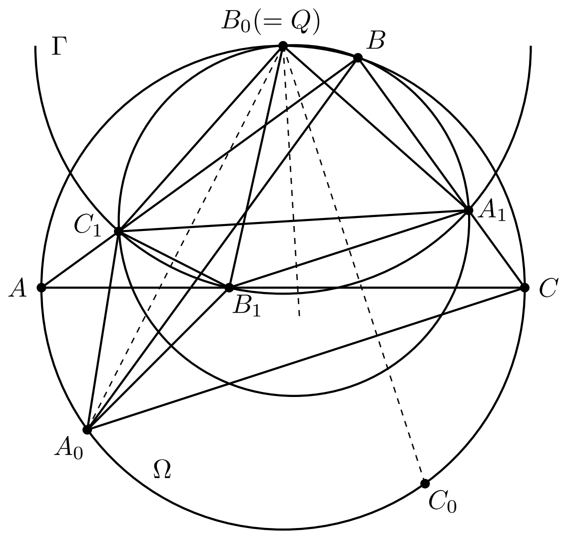
Estos casos terminan la prueba inductiva. Finalmente, notemos que con $m = 2013$, $k = 2014$ vemos que $m + k$ es impar así que necesito solamente $\lfloor \frac{m+k}{2} \rfloor = 2013$ líneas para hacer una configuración buena.

Problema 3. Supongamos que el excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es tangente al lado BC en el punto A_1. Análogamente, se definen los puntos B_1 en CA y C_1 en AB, utilizando los excírculos opuestos a B y C respectivamente. Supongamos que el circuncentro del triángulo $A_1B_1C_1$ pertenece a la circunferencia que pasa por los vértices A, B y C. Demostrar que el triángulo ABC es rectángulo.

El excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A es la circunferencia que es tangente al segmento BC, a la prolongación del lado AB más allá de B, y a la prolongación del lado AC más allá de C. Análogamente se definen los excírculos opuestos a los vértices B y C.

(Problema sugerido por Rusia)

Solución. Denotemos los circuncírculos de los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ por Ω y Γ, respectivamente. Denote el punto medio del arco CB de Ω que contiene a A por A_0, y defina B_0, C_0 de manera análoga. Por hipótesis el centro Q de Γ está sobre Ω.



Lema. Se tiene que $A_0B_1 = A_0C_1$. Además, los puntos A, A_0, B_1 y C_1 son concíclicos. Finalmente los puntos A y A_0 están en el mismo lado con respecto a B_1C_1. Resultados análogos se cumplen para B y C.

Demostración. Consideremos primero el caso $A = A_0$. Entonces el triángulo ABC es isósceles en A, lo que implica que $AB_1 = AC_1$ y las restantes afirmaciones del lema son obvias. Supongamos entonces que $A \neq A_0$ de ahora en adelante.

De la definición de A_0 se tiene que $A_0B = A_0C$. Es conocido y fácil de demostrar que $BC_1 = CB_1$. Ahora, se tiene que $\angle C_1BA_0 = \angle ABA_0 = \angle ACA_0 = \angle B_1CA_0$. Luego, los triángulos A_0BC_1 y A_0CB_1 son congruentes. Esto implica que $A_0B_1 = A_0C_1$, estableciendo la primera parte del lema. También se sigue que $\angle A_0C_1A = \angle A_0B_1A$, pues son los ángulos exteriores de los vértices correspondientes C_1 y B_1 de los triángulos congruentes A_0BC_1 y A_0CB_1. Por esta razón los puntos A, A_0, B_1 y C_1 son los vértices de un cuadrilátero cíclico donde AA_0 y B_1C_1 son lados opuestos.

Regresando a la solución del problema, se tiene que los puntos A_1, B_1 y C_1 están en el interior de un semicírculo de Γ, de donde el triángulo $A_1B_1C_1$ es obtusángulo. Supongamos sin pérdida de generalidad que el ángulo en B_1 es obtuso. Luego Q y B_1 están en diferente lados de A_1C_1; obviamente, lo mismo se tiene para los puntos B y B_1. Luego, los puntos Q y B están del mismo lado con respecto a A_1C_1.

Note que la mediatriz de A_1C_1 intersecta a Ω en dos puntos que están en diferentes lados de A_1C_1. Por la primera afirmación del lema, ambos puntos B_0 y Q están entre esos puntos de intersección; como ellos están del mismo lado con respecto a A_1C_1, ellos coinciden, es decir, $B_0 = Q$.

Ahora, por la primera parte del lema nuevamente, se tiene que QA_0 y QC_0 son mediatrices de B_1C_1 y A_1B_1, respectivamente. Luego,

$$\begin{aligned}\angle C_1B_0A_1 &= \angle C_1B_0B_1 + \angle B_1B_0A_1 = 2\angle A_0B_0B_1 + 2\angle B_1B_0C_0\\ &= 2\angle A_0B_0C_0 = 180^\circ - \angle ABC,\end{aligned}$$

recordando que A_0 y C_0 son los puntos medios de los arcos CB y BA, respectivamente. Por otro lado, por la segunda parte del lema se tiene que

$$\angle C_1B_0A_1 = \angle C_1BA_1 = \angle ABC.$$

De las últimas dos igualdades, se tiene que $\angle ABC = 90°$ y la solución está completa.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H, y sea W un punto sobre el lado BC, estrictamente entre B y C. Los puntos M y N son los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Se denota por ω_1 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BWN, y por X el punto de ω_1 tal que WX es un diámetro de ω_1. Análogamente, se denota por ω_2 la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo CWM, y por Y el punto de ω_2 tal que WY es un diámetro de ω_2. Demostrar que los puntos X, Y y H son colineales.

(Problema sugerido por Tailandia)

Solución de Adán Medrano Martín del Campo. Sea D el pie de la altura desde A a BC. Entonces $AD \perp BC$, $CN \perp AB$, $BM \perp AC$. De aquí, $DHNB$ y $DHMC$ son cíclicos, de modo que por potencia desde A,

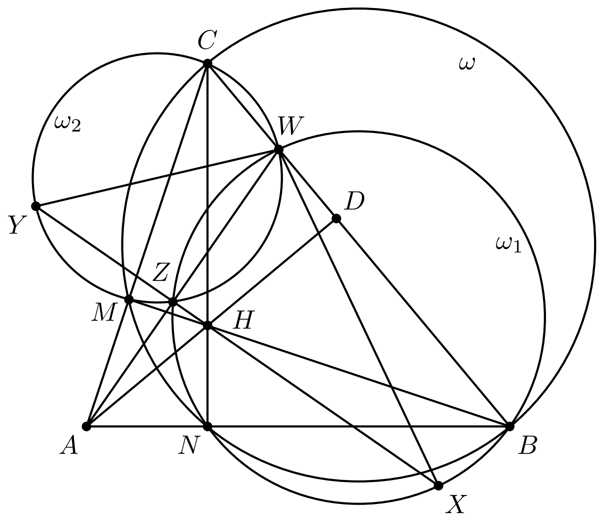
$$\begin{aligned} AN \cdot AB &= AH \cdot AD, \\ AM \cdot AC &= AH \cdot AD. \end{aligned}$$

Luego, sea ω la circunferencia de diámetro BC. Como $\angle BNC = \angle BMC = 90°$, entonces N y M están sobre ω. Así, el eje radical de ω_1 y ω debe ser BC y el eje radical de ω_2 y ω debe ser CM. Claramente BN y CM se cortan en A, por lo tanto el centro radical de $\omega, \omega_1, \omega_2$ es A. Así, AW es eje radical de ω_1 y ω_2.

Sea Z la segunda intersección de ω_1 y ω_2. Tenemos pues que $BNZW$ es cíclico, así que por potencia en A, $AN \cdot AB = AZ \cdot AW = AH \cdot AD$. Como $AH \cdot AD = AZ \cdot AW$, entonces $HZWD$ es cíclico, pero $\angle HDW = 90°$, de modo que $\angle HZW = 90°$ y por tanto $HZ \perp AW$.

También como WX y WY son diámetros de ω_1 y ω_2, entonces $\angle XZW = \angle YZW = 90°$. Así, $YZ \perp AW$ y $XZ \perp AW$.

De aquí es claro que XYH se encuentran sobre la línea perpendicular a AW por A. Esto muestra que X, Y, H son colineales, como queríamos.



Problema 5. Sea $\mathbb{Q}_{>0}$ el conjunto de los números racionales mayores que cero. Sea $f : \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las tres siguientes condiciones:

1. $f(x)f(y) \geq f(xy)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
2. $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ para todos los $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
3. existe un número racional $a > 1$ tal que $f(a) = a$.

Demostrar que $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

(Problema sugerido por Bulgaria)

Solución de Enrique Chiu Han. Primero notamos que por la segunda condición, se tiene que $f(nb) \geq nf(b)$ para todo entero positivo n y b un racional positivo. Probemos primero un lema.
Lema. Si $f(n) = n$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.
Demostración. Tenemos que para $m, n \in \mathbb{Z}^+$

$$mf\left(\frac{1}{n}\right) = f(m)f\left(\frac{1}{n}\right) \geq f\left(\frac{m}{n}\right) \geq mf\left(\frac{1}{n}\right).$$

Esto demuestra que $f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right)$. Con $m = n$, $1 = f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, de modo que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$, así, $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}$, como queríamos probar.
Tenemos 3 casos:

- $f(b) < 0$ para algún $b \in \mathbb{Q}_{>0}$. Aquí para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos que $f(n)f(b) \geq f(nb) \geq nf(b)$, de modo que $f(n) \leq n$, pero además $af(n) = f(n)f(a) \geq$

$f(na) \geq na$, por lo que $f(n) \geq n$ pues $a > 0$. De este modo $f(n) = n$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ y acabamos.

- $f(b) = 0$ para algún $b \in \mathbb{Q}_{>0}$. Este caso es imposible, pues se tendría que $0 = f(b)f\left(\frac{a}{b}\right) \geq f(a) = a > 1$.
- $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}_{>0}$. Mostraremos las siguientes propiedades:
  - f es creciente. Supongamos que no lo es. Entonces existen x, y con $x > y$ y $f(x) \leq f(y)$. De aquí tendríamos que $f(x) \geq f(y) + f(x-y) > f(x) + 0 = f(x)$, una contradicción.
  - $f(a^k) \leq a^k$ para toda $k \in \mathbb{Z}^+$. Lo demostraremos por inducción en k. La base es $f(a) \leq a$ y suponiendo que cierto $k \in \mathbb{Z}^+$ cumple, tenemos que:

    $$f(a^{k+1}) \leq f(a)f\left(\frac{a^{k+1}}{a}\right) \leq a \cdot a^k = a^{k+1}$$

    lo cual completa la inducción.
  - $f(n) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Esto sucede pues

    $$af(n) = f(n)f(a) \geq f(na) \geq nf(a) = na$$

    y dividimos entre a de ambos lados pues $a > 0$.

Ahora, supongamos que existe $m \in \mathbb{Z}^+$ con $f(m) > m$, digamos $f(m) = m+\varepsilon$ con ε un número real positivo. Tendríamos que, para cualquier entero positivo k, $f(km) \geq kf(m) = km + k\varepsilon$. Notemos que como $f(a^s) \leq a^s$ para todo $s \in \mathbb{Z}^+$ y $a > 1$, existen números $x = a^s$ tan grandes como queramos tales que $f(x) \leq x$.

Elijo k suficientemente grande, tal que $k\varepsilon > m$. Tenemos que, para $\ell \in \mathbb{Z}^+$, los intervalos $[\ell m, \ell m + \ell\varepsilon]$ cubren a todos los reales mayores o iguales a km, entonces existe $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\ell m \leq a^s < \ell m + \ell\varepsilon$$

para algún ℓ, luego,

$$f(a^s) \leq a^s < \ell m + \ell\varepsilon \leq f(\ell m).$$

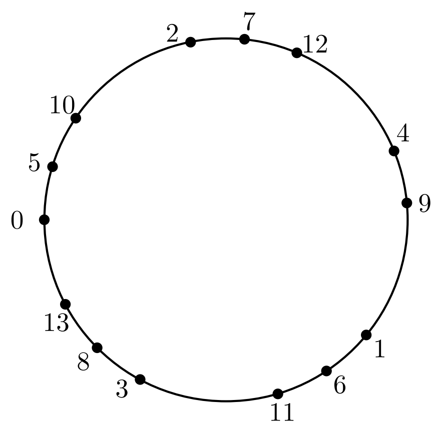
Pero esto diría que $\ell m > a^s$ pues f es creciente. ¡Contradicción! Entonces $f(m) = m$ para todo entero positivo m y acabamos.

Problema 6. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se considera una circunferencia en la que se han marcado $n+1$ puntos igualmente espaciados. Cada punto se etiqueta con uno de los números $0, 1, \ldots, n$ de manera que cada número se usa exactamente una vez. Dos distribuciones de etiquetas se consideran la misma si una se puede obtener de la otra por una rotación de la circunferencia. Una distribución de etiquetas se llama *bonita* si, para cualesquiera cuatro etiquetas $a < b < c < d$, con $a + d = b + c$, la cuerda que une los puntos etiquetados a y d no corta la cuerda que une los puntos etiquetados b y c. Sea M el número de distribuciones bonitas y N el número de pares ordenados (x, y) de enteros positivos tales que $x + y \leq n$ y $\text{mcd}(x, y) = 1$. Demostrar que

$$M = N + 1.$$

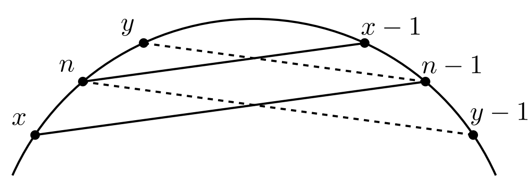
(Problema sugerido por Rusia)

Solución. Notemos que hay exactamente N fracciones irreducibes $f_1 < f_2 < \ldots < f_N$ en $(0, 1)$ cuyos denominadores son a lo más n, ya que la pareja (x, y) con $x+y \leq n$ y $(x, y) = 1$ corresponde a la fracción $\frac{x}{x+y}$. Escribamos $f_i = \frac{a_i}{b_i}$ para $1 \leq i \leq N$.
Comencemos construyendo $N + 1$ distribuciones bonitas. Sea $\alpha \in (0, 1)$ que no sea ninguna de las N fracciones de arriba. Considere un círculo de perímetro 1. Sucesivamente marque los puntos $0, 1, \ldots, n$, donde 0 es arbitrario y la distancia en el sentido de las manecillas del reloj de i a $i + 1$ es α. El punto k estará a una distancia $\{k\alpha\}$ de 0 en la dirección de las manecillas del reloj, donde $\{r\}$ denota la parte fraccional de r. Llamemos a tal arreglo circular *cíclico* y denotémoslo por $A(\alpha)$. Si el orden de los puntos, con respecto a las manecillas del reloj, es el mismo en $A(\alpha_1)$ y $A(\alpha_2)$, consideramos que es el mismo arreglo circular. La siguiente figura muestra el arreglo circular $A(\frac{3}{5} + \epsilon)$ de $[0, 13]$ donde $\epsilon > 0$ es muy pequeño.



Si $0 \leq a$, $b, c, d \leq n$ satisfacen $a + c = b + d$, entonces $a\alpha + c\alpha = b\alpha + d\alpha$ de donde la cuerda de a a c es paralela a la cuerda de b a d en $A(\alpha)$. Por lo tanto, en un arreglo cíclico todas las k-cuerdas son paralelas. En particular, todos los arreglos cíclicos son bonitos.
Ahora, mostraremos que hay exactamente $N + 1$ arreglos cíclicos distintos. Para ver esto, veamos cómo cambia $A(\alpha)$ cuando α crece de 0 a 1. El orden de los puntos p y q cambia precisamente cuando cruzamos un valor $\alpha = f$ tal que $\{pf\} = \{qf\}$; esto sólo puede pasar si f es uno de las N fracciones f_1, f_2,..., f_N. Por lo tanto, hay a lo más $N + 1$ arreglos cíclicos diferentes.

Para mostrar que todos son distintos, recuerde que $f_i = a_i/b_i$ y sea $\epsilon > 0$ un número muy pequeño. En el arreglo $A(f_i+\epsilon)$, el punto k se encuentra en $\frac{ka_i \pmod{b_i}}{b_i} + k\epsilon$. Por lo tanto, los puntos se agrupan en b_i conjuntos enseguida de los puntos $0, \frac{1}{b_i}, \dots, \frac{b_i-1}{b_i}$ del círculo. Los puntos que se agrupan enseguida del punto $\frac{k}{b_i}$ contienen los números congruentes a ka_i^{-1} módulo b_i listados en la dirección de las manecillas del reloj en orden creciente. Se sigue que el primer número después de 0 en $A(f_i+\epsilon)$ es b_i, y el primer número después de 0 menor que b_i es a_i^{-1} módulo b_i, lo cual determina de manera única el número a_i. De esta manera podemos recuperar f_i del arreglo cíclico. Notemos también que $A(f_i+\epsilon)$ no es el arreglo trivial, donde se colocan los números $0, 1, \dots, n$ en el sentido de las manecillas del reloj. Se sigue entonces que los $N+1$ arreglos cíclicos $A(\epsilon), A(f_1+\epsilon), \dots, A(f_N+\epsilon)$ son distintos.
Notemos la siguiente observación $*$, la cual será útil más adelante: si $f_i < \alpha < f_{i+1}$ entonces 0 está inmediatamente después de b_{i+1} y antes de b_i en $A(\alpha)$.
De hecho ya se ha visto que b_i es el primer número después de 0 en $A(f_i+\epsilon) = A(\alpha)$. De manera análoga se puede ver que b_{i+1} es el último número antes de 0 en $A(f_{i+1}-\epsilon) = A(\alpha)$.
Finalmente, mostremos por inducción sobre n que cualquier distribución bonita de $[0,n]$ es cíclica. Para $n \leq 2$ el resultado es claro. Ahora supongamos que todas las distribuciones bonitas de $[0,n-1]$ son cíclicas, y consideremos una distribución bonita A de $[0,n]$. El subarreglo $A_{n-1} = A\backslash\{n\}$ de $[0,n-1]$ obtenido al borrar n es cíclico; digamos $A_{n-1} = A_{n-1}(\alpha)$.
Sea α un número entre fracciones consecutivas $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$ de entre las fracciones irreducibles de denominador a lo más $n-1$. Existe a lo más una fracción $\frac{i}{n}$ en $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2})$, ya que $\frac{i}{n} < \frac{i}{n-1} \leq \frac{i+1}{n}$ para $0 < i \leq n-1$.
Caso 1. No existe una fracción con denominador n entre $\frac{p_1}{q_1}$ y $\frac{p_2}{q_2}$.
En este caso el único arreglo cíclico que extiende $A_{n-1}(\alpha)$ es $A_n(\alpha)$. Sabemos que A y $A_n(\alpha)$ sólo pueden diferir en la posición de n. Suponga que n está inmediatamente después de x y antes de y en $A_n(\alpha)$. Como los puntos vecinos de 0 son q_1 y q_2 por la observación $*$, tenemos que $x, y \geq 1$.



En $A_n(\alpha)$, la cuerda de $n-1$ a x es paralela y adyacente a la cuerda de n a $x-1$, luego $n-1$ esta entre $x-1$ y x en el sentido de las manecillas del reloj como se muestra en la figura anterior. Análogamente, $n-1$ está entre y y $y-1$. Por lo tanto, x, y, $x-1$, $n-1$ y $y-1$ se encuentran en este orden en $A_n(\alpha)$ y por lo tanto en A (posiblemente con $y = x-1$ o $x = y-1$).
Ahora, A sólo puede diferir de $A_n(\alpha)$ en la posición de n. En A, como la cuerda de $n-1$ a x y la cuerda de n a $x-1$ no se intersectan, n está entre x y $n-1$. De

manera análoga se tiene que n está entre $n-1$ y y. Entonces n debe estar entre x y y y $A = A_n(\alpha)$. Por lo tanto A es cíclico como se deseaba mostrar.
Caso 2. Existe exactamente un i con $\frac{p_1}{q_1} < \frac{i}{n} < \frac{p_2}{q_2}$.
En este caso existen exactamente dos arreglos cíclicos $A_n(\alpha_1)$ y $A_n(\alpha_2)$ de los números 0, 1,…, n que extienden a $A_{n-1}(\alpha)$, donde $\frac{p_1}{q_1} < \alpha_1 < \frac{i}{n}$ y $\frac{i}{n} < \alpha_2 < \frac{p_2}{q_2}$. En $A_{n-1}(\alpha)$, 0 es el único número entre q_2 y q_1 por $*$. Por la misma razón, n se encuentra entre q_2 y 0 en $A_n(\alpha_1)$, y entre 0 y q_1 en $A_n(\alpha_2)$.
Haciendo $x = q_2$ y $y = q_1$, el argumento del Caso 1 implica que n debe estar entre x y y en A. Por lo tanto A debe ser igual a $A_n(\alpha_1)$ o a $A_n(\alpha_2)$, y por lo tanto es cíclico. Esto concluye la demostración de que cada distribución bonita es cíclica. Se sigue entonces que hay exactamente $N+1$ distribuciones bonitas de $[0, n]$ como se deseaba mostrar.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de febrero a abril de 2014.

Febrero, 5 al 15, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento.

Febrero, primera quincena

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico y nombramiento de delegado).

Febrero, segunda quincena

Publicación del 21^o número de la revista "Tzaloa".

Marzo, primera semana

VII Romanian Master of Mathematics.

Marzo, 6 al 16, Pachuca, Hidalgo

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen de la XXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico y del selectivo para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Marzo, 17

Envío a los estados el examen eliminatorio propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

Marzo, 22

Aplicación del examen eliminatorio en los estados registrados con este propósito (puede aplicarse después).

Abril, 10 al 13, CIMAT, Guanajuato, Guanajuato

Curso de entrenadores.

Abril, 10 al 16, Antalya, Turquía

III Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Apéndice

Criterios 1 (Criterios de divisibilidad) *Un número entero es divisible,*

- *entre* 2*, si el dígito de las unidades es un número par.*
- *entre* 3*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 3*.*
- *entre* 4*, si el número formado por los dos últimos dígitos (el de las unidades y el de las decenas) es divisible entre* 4*.*
- *entre* 5*, si el dígito de las unidades es* 5 *o* 0*.*
- *entre* 6*, si es divisible entre* 2 *y* 3*.*
- *entre* 8*, si el número formado por sus últimos tres dígitos es divisible entre* 8*.*
- *entre* 9*, si la suma de sus dígitos es divisible entre* 9*.*

Definición 2 (Divisibilidad) *Si* a *y* b *son enteros, se dice que* b *divide* a *si* $a = bq$ *para algún entero* q*, y se denota por* $b \mid a$*.*

Teorema 1 (Propiedades de la divisibilidad) *Sean* a, b*,* c *y* d *números enteros.*

1. *Si* $a \mid b$ *y* $b \mid c$*, entonces* $a \mid c$*.*
2. *Si* $a \mid b$ *y* $a \mid c$*, entonces* $a \mid b + c$*.*
3. *Si* $a \mid b$ *y* $a \mid b + c$*, entonces* $a \mid c$*.*
4. *Si* $a \mid b$ *y* $c \mid d$*, entonces* $ac \mid bd$*.*
5. *Si* $a \mid b$*, entonces* $a^n \mid b^n$ *para todo entero positivo* n*.*
6. *Si* $a \mid b$*, entonces* $|a| \leq |b|$*.*

Teorema 2 (Inducción) *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición* $P(n)$ *es verdadera para todo entero* $n \geq k_0$*, donde* k_0 *es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 3 (Principio de las casillas) *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 4 (Suma de los ángulos internos de un triángulo) *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 5 (Teorema de Pitágoras) *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA) *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos) *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir,*

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$
$$\angle ACB = \angle A'C'B'$$
$$\angle BAC = \angle B'A'C'$$

y sus lados homólogos son proporcionales, esto es

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA) *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 6 (Teorema de Thales) *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 7 (Desigualdad del triángulo) *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las siguientes relaciones,*

$$\begin{aligned} a+b &> c, \\ a+c &> b, \\ b+c &> a. \end{aligned}$$

Definición 5 (Bisectriz) *Dado un ángulo $\angle ABC$ su bisectriz es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.*

Teorema 8 (Bisectrices) *Las bisectrices internas de un triángulo concurren en un punto que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo. El punto de concurrencia se llama incentro.*

Teorema 9 (Medida del ángulo inscrito) *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del arco comprendido entre sus lados, es decir, la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 10 (Cuadrilátero cíclico) *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] T. Andreescu, D. Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

[4] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2012.

[5] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[6] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[7] I. Niven, H. Zuckerman. *Introducción a la Teoría de los Números*. Limusa-Wiley, México 1972.

[8] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[9] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

[10] N. Vilenkin. *¿De cuántas formas? (Combinatoria)*. Editorial Mir, Moscú 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Efraín Casillas Carrillo*

CONALEP Prof. J. Refugio Esparza Reyes
pay3@hotmail.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias
carlos.yee@uabc.edu.mx, www.ommbc.org

Baja California Sur–*Jesús Eduardo Ríos Torres*

CBTIS #62,
eduardo.rios.73@gmail.com
www.institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Hernán Rafael Díaz Martín*

Coordinación de Intervención Académica, Dirección General CONALEP
herrdiaz@me.com

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*

Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas, UNACH
msolerza@unach.mx

Chihuahua–*Héctor Daniel García Lara*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
hector@ommch.org, ommch.org

Coahuila–*Silvia Carmen Morelos Escobar*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila
silvia.morelos@gmail.com

Colima–*Blanca Yazmín Radillo Murguía*

Comité Estatal Olimpiada de Matemáticas
martin.isaias1967@gmail.com, ommcolima.ucol.mx

Distrito Federal–*Alejandro Bravo Mojica*

Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas, UNAM
abm@ciencias.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango, Escuela de Matemáticas
angelhiram@hotmail.com

Estado de México–*Benito Fernando Martínez Salgado*

Facultad de Ciencias, UAEMex
masabemx@yahoo.com.mx

Guanajuato–*María Fernanda de la Torre Robles*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato
mfdelatorre@cimat.mx, www.ommgto.wordpress.com

Guerrero–*Gonzalo Delgado Espinoza*

Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas
deggonzalo@yahoo.com.mx

Hidalgo–*Benjamín Alfonso Itzá Ortiz*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA
itza@uaeh.edu.mx

Jalisco–*Julio Rodríguez Hernández*

Universidad de Guadalajara CUCEI, Departamento de Matemáticas
juliorod@sems.udg.mx

Michoacán–*Armando Sepúlveda López*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana
asepulve@umich.mx

Morelos–*Radmila Bulajich Manfrino*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias
bulajich@uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*

Universidad Autónoma de Nayarit
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
aalanis56@hotmail.com, sites.google.com/site/eommnl

Oaxaca–*Marcelino Ramírez Ibañez*

Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan
mramirez@unpa.edu.mx

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
arjuarez@fcfm.buap.mx,

Querétaro–*Iván González García*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería
zelaznog_navi@hotmail.com, ommqro@gmail.com

Quintana Roo–*Alicia Ramón Barrios*

Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo Plantel Cancún 2
olimpiadasquintanaroo@hotmail.com

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Casa Olímpica, San Luis Potosí, San Luis Potosí
floreseugenio@hotmail.com, ommslp.blogspot.com

Sinaloa–*Maria Guadalupe Russell Noriega*

Universidad Autónoma de Sinaloa
mgrussell@uas.edu.mx, mgrusselln@gmail.com

Sonora–*José María Bravo Tapia*

Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas
jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Tabasco–*Jaír Remigio Juárez*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Div. Académica de Ciencias Básicas
jair.remigio@ujat.mx

Tamaulipas–*Ramón Jardiel Llanos Portales*

Universidad Autónoma de Tamaulipas
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades
rllanos@uat.edu.mx, www.matetam.com

Tlaxcala–*Mauro Cote Moreno*

Secretaría de Educación Pública de Tlaxcala
anpmlogimat@hotmail.com

Veracruz–*Porfirio Toledo Hernández*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas
ptoledo@uv.mx

Yucatán–*Didier Adán Solís Gamboa*

Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas
didier.solis@uady.mx, www.matematicas.uady.mx

Zacatecas–*Nancy Janeth Calvillo Guevara*

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas
ncalvill@mate.reduaz.mx, nautilus.uaz.edu.mx/olimpiada/

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
fuerunt@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
Universidad Nacional Autónoma de México
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias,
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Departamento de Matemáticas
Universidad de Guanajuato
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Eduardo Velasco Barreras
Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora
lalovelascobar@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://www.ommenlinea.org

¡Síguenos en facebook y en twitter!