TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2015, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Diseño de Portada: Manuel Macías Beckmann
www.rayaenmedio.com

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2015.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2015, Número 1

Con este número, Tzaloa inicia su séptimo año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo: *El Máximo Común Divisor*, contribución de Carlos J. Rubio y Alejandro Lara. En muchos de los problemas de olimpiada relacionados con temas de divisibilidad o con la teoría de números es muy frecuente el uso del máximo común divisor. Estamos seguros que este trabajo será apreciado por todos nuestros lectores, desde los principiantes hasta los más avanzados.

Por otro lado, en la sección *Concursos Estatales* encontrarás el examen estatal de Ja-

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

lisco del año 2014. Agradecemos a Julio Rodríguez Hernández por habernos proporcionado el material y aprovechamos invitar a los delegados estatales a que nos envíen sus propuestas de exámenes que utilizan para seleccionar a las delegaciones que representan a sus estados en el concurso nacional. Estamos seguros que la difusión a nivel nacional de estos materiales locales, tiende puentes que favorecen el intercambio entre los estados.

En la sección nacional encontrarás los resultados completos del concurso nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, incluyendo los nombres de todos los ganadores de primer lugar así como el ranking actualizado por estados de la república. Además, también incluimos el examen que se aplicó en dicha ocasión junto con las mejores soluciones de los alumnos ganadores.

En la sección internacional hallarás los resultados y el examen con soluciones de la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *Problemas de Práctica* y de *Entrenamiento*, mismas que esperamos sean útiles para tu preparación. Por último, no olvidamos incluir toda la información detallada del calendario 2015, así como los datos actualizados de los delegados estatales y del Comité Olímpico Nacional.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1996. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2015-2016 y, para el 1° de julio de 2016, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en el mes de noviembre de 2015 en algún estado de la República Mexicana. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2015 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Hong Kong, julio de 2016) y a la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2016).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2016).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO)[2] a celebrarse en el mes de abril de 2016.

[2] La Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas nace en 2012 como una manera de estimular la participación femenil en olimpiadas de matemáticas, siguiendo el ejemplo de China que ya contaba con una olimpiada exclusiva para mujeres. El modelo de competencia de esta olimpiada es el mismo que el de la IMO, con la diferencia de que las delegaciones nacionales son de cuatro participantes en lugar de seis. A pesar de que la olimpiada es europea, es posible la participación de equipos no europeos por invitación.

El Máximo Común Divisor

Por Carlos Jacob Rubio Barrios y José Alejandro Lara Rodríguez

Nivel Intermedio

Divisibilidad

Si a y b son números enteros, se dice que a *divide* a b, denotado por $a \mid b$, si $b = ac$ para algún entero c. En este caso se dice que a es un *divisor* de b. Otras formas de decir que a divide a b son:

a es un factor de b,
b es un múltiplo de a,
b es divisible entre a.

Si a no divide a b, se escribe $a \nmid b$.
Si a y b son enteros, una *combinación lineal* de a y b es un entero de la forma $ax + by$ donde x, y son enteros.
En el siguiente teorema se presentan algunas propiedades útiles de la divisibilidad.

Teorema 1.

1. *Propiedad reflexiva: Para cualquier entero a, se tiene $a \mid a$.*

2. *Propiedad transitiva: Si $a \mid b$ y $b \mid c$, entonces $a \mid c$.*

3. *Un entero c divide a los enteros a y b si y solamente si c divide a cualquier combinación lineal de a y b:*

$$c \mid a \text{ y } c \mid b \Leftrightarrow c \mid (ax + by) \text{ para cualesquiera enteros } x, y.$$

4. *$a \mid b$ y $b \mid a$ si y solamente si $a = \pm b$.*

5. *Sea m un entero distinto de cero. Entonces $a \mid b$ si y solamente si $ma \mid mb$.*

Demostración. Todas las pruebas son inmediatas de la definición.

1. Es evidente que $a = a \cdot 1$.

2. Si $b = aq_1$ y $c = bq_2$, con q_1 y q_2 enteros, entonces $c = (aq_1)q_2 = a(q_1q_2)$.

3. $\Rightarrow$): Como $c \mid a$ y $c \mid b$, existen enteros q_1, q_2 tales que $a = cq_1$ y $b = cq_2$. Por lo tanto $ax = cq_1x$ y $by = cq_2y$. Sumando término a término y factorizando c se tiene que $ax + by = c(q_1x + q_2y)$, lo que demuestra que c siempre divide a $ax + by$.

   $\Leftarrow$): Como c divide a cualquier combinación lineal de a y b, en particular, $c \mid (a \cdot 1 + b \cdot 0)$ y $c \mid (a \cdot 0 + b \cdot 1)$; es decir, $c \mid a$ y $c \mid b$.

4. Supongamos primero que $a \mid b$ y $b \mid a$. Primero se observa que si $a = 0$ entonces $b = 0$ ya que $a \mid b$ y se cumple $0 = \pm 0$. Recíprocamente, si $b = 0$, entonces a es cero y también se cumple $a = \pm b$. Supongamos que ni a ni b son cero. De la hipótesis se sigue que existen enteros u_1, u_2 tales que $b = au_1$ y $a = bu_2$. Esto implica que $b = bu_2u_1$ y $a = au_1u_2$ y por tanto $u_1u_2 = 1$. Entonces $u_1 = u_2 = 1$ o $u_1 = u_2 = -1$. Luego $a = b$ o $a = -b$.

   Recíprocamente, supongamos que $a = \pm b$. Por definición se tiene $b \mid a$. También se tiene $b = \pm a$ y por lo $a \mid b$.

5. Si $a \mid b$, entonces $b = ac$ para algún entero c. Multiplicando ambos lados de la igualdad por m, se obtiene $mb = mac$ lo que indica que $ma \mid mb$ (observe que no importa que m sea cero o distinto de cero).

   Recíprocamente, si $ma \mid mb$, entonces existe algún entero c tal que $mb = mac$. Como $m \neq 0$, aplicando la ley de la cancelación se obtiene $b = ac$.

□

Algunos casos particulares del Teorema 1 se presentan en el siguiente

Corolario 1.

1. *Si $a \mid b$, entonces $a \mid bx$ para cualquier entero x.*

2. *Si $c \mid a$ y $c \mid b$, entonces $c \mid (\pm a \pm b)$.*

Demostración.

1. Por hipótesis $a \mid b$ y como siempre sucede que $a \mid 0$, entonces $a \mid (bx + 0y)$ para cualesquiera enteros x, y, esto es, $a \mid bx$.

2. De la hipótesis se sigue que c divide a cualquier combinación lineal de a y b, y cada uno de los enteros $a + b$, $a - b$, $-a + b$ y $-a - b$ es una combinación lineal de a y b.

□

Teorema 2. *Sean a y b números enteros.*

1. $a \mid |a|$ *y* $|a| \mid a$.

2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

   a) $a \mid b$.

   b) $|a| \mid |b|$.

Demostración. 1. De acuerdo con la definición de valor absoluto se tiene

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

Es decir, $|a| = \pm a$. Esto prueba que $a \mid |a|$. También se tiene que $a = \pm|a|$. Por tanto, $|a| \mid a$.

2. Supongamos primero que $a \mid b$. Como $|a| \mid a$ y $a \mid b$ se sigue que $|a| \mid b$; ahora se tiene que $|a| \mid b$ y $b \mid |b|$; por tanto $|a| \mid |b|$.

   Recíprocamente, supongamos que $|a| \mid |b|$. Como $a \mid |a|$ y $|a| \mid |b|$ se obtiene que $a \mid |b|$. Como también se tiene que $|b| \mid b$, se llega a que $a \mid b$.

□

El Algoritmo de la división

Una propiedad muy útil que relaciona el orden en el conjunto de los números enteros con la divisibilidad es la siguiente.

Teorema 3. *Si a y b son enteros con $b \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $|a| \leq |b|$.*

Demostración. La hipótesis $a \mid b$ implica que $|a| \mid |b|$. Entonces $|b| = |a|c$ para algún entero c. Como $b \neq 0$, tenemos que $a \neq 0$ y por lo tanto $|b| > 0$ y $|a| > 0$. De aquí, $c > 0$ o, de manera equivalente, $c \geq 1$. Luego, $|b| = |a|c \geq |a|$. □

Una consecuencia inmediata de este teorema es que todo entero distinto de cero tiene un número finito de divisores. En efecto, sea a un entero distinto de cero y sea $d \in \mathcal{D}$ donde $\mathcal{D}$ es el conjunto de los divisores de a. Entonces $d \mid a$ y por lo tanto $|d| \leq |a|$, o lo que es equivalente $-|a| \leq d \leq |a|$. Luego, $\mathcal{D}$ es subconjunto del conjunto

$$\{-|a|, -|a|+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, |a|\}$$

de donde se sigue que $\mathcal{D}$ es un conjunto finito.

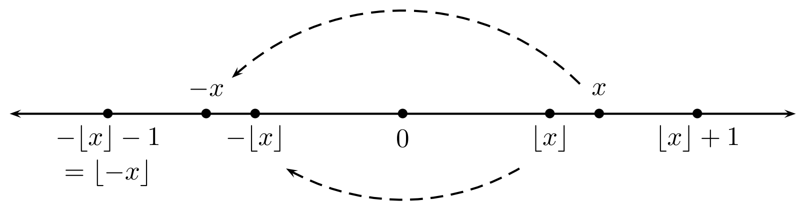
Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que x:

$$\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \colon k \leq x\}.$$

El entero $\lfloor x \rfloor$ es el *piso* de x y de acuerdo con la definición es el único entero tal que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Si x es entero, $\lfloor x \rfloor = x$ y si x no es entero, $\lfloor x \rfloor$ es el primer entero a la izquierda de x en la recta real. Por ejemplo $\lfloor -3.5 \rfloor = -4$ y $\lfloor 3.8 \rfloor = 3$.
Si x no es entero, entonces $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$. En efecto, $\lfloor x \rfloor$ es el entero inmediato anterior a x y $\lfloor x \rfloor + 1$ es el entero inmediato posterior x, de modo que el entero inmediato anterior a $-x$ es $-\lfloor x \rfloor - 1$ y el entero inmediato posterior a $-x$ es $-\lfloor x \rfloor$.



Teorema 4 (Algoritmo de la división)**.** *Si a y b son enteros y $b \neq 0$, entonces existen enteros q y r únicos tales que*

$$a = qb + r \quad \textit{con} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Se dice que q es el "cociente" y r es el "residuo".

Demostración. En primer lugar demostraremos la existencia de los enteros q y r, considerando dos casos.
Caso 1: $b > 0$. Haciendo $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, tenemos que

$$q \leq \frac{a}{b} < q + 1 \Rightarrow qb \leq a < (q+1)b \Rightarrow 0 \leq a - qb < b.$$

Tomando $r = a - qb$, se sigue que las elecciones posibles para el entero r son 0, 1, $2, \ldots, b - 1$.
Caso 2: $b < 0$. Como $-b > 0$, por el Caso 1, existen enteros q y r tales que $a = q(-b) + r = (-q)b + r$ con $0 \leq r < -b = |b|$. Luego, $-q$ y r son el cociente y residuo, respectivamente.
Para demostrar la unicidad, supongamos que q, r, q' y r' son tales que $a = qb + r$ con $0 \leq r < |b|$ y $a = q'b + r'$ con $0 \leq r' < |b|$. Si $r - r' \geq |b|$, se tendría que $r \geq |b| + r' \geq |b|$, lo que es una contradicción. Luego, $r - r' < |b|$ y también $r' - r < |b|$, así que $|r - r'| < |b|$.
Por otro lado se tiene que $b(q - q') = r' - r$ lo que indica que $b \mid r' - r$; por tanto también se tiene que $|b|$ divide a $|r - r'|$. Si $r' - r \neq 0$ se tendría $|b| \leq |r - r'|$ lo que sería una contradicción. Luego $r - r' = 0$, esto es, $r = r'$. Dado que $b \neq 0$, $bq + r = bq' + r'$ implica que $q = q'$. $\square$

A continuación, veamos algunas aplicaciones del Algoritmo de la división.

Ejemplo 1. *Sea n un entero positivo tal que $3n + 1$ es un cuadrado. Demostrar que $n + 1$ es suma de tres cuadrados.*

Solución. Sea n un entero positivo tal que $3n + 1 = k^2$ para algún entero k. Por el algoritmo de la división, $k = 3q + r$ con $r = 0, 1$ o 2.
Si $k = 3q$, entonces $3n + 1 = 9q^2$ de donde 1 es múltiplo de 3, lo cual es un absurdo.
Si $k = 3q + 1$, entonces $3n + 1 = 9q^2 + 6q + 1$ de donde $n = 3q^2 + 2q$. Así, $n + 1 = q^2 + q^2 + (q + 1)^2$ es suma de tres cuadrados.
Si $k = 3q + 2$, entonces $3n + 1 = 9q^2 + 12q + 4$ de donde $n = 3q^2 + 4q + 1$. Así, $n + 1 = q^2 + (q + 1)^2 + (q + 1)^2$ es suma de tres cuadrados.

Ejemplo 2. *Sean a, d y n enteros positivos con $a > 1$. Si $a^d - 1$ divide a $a^n - 1$, demostrar que d divide a n.*

Solución. Por el algoritmo de la división, existen enteros (únicos) q y r tales que $n = dq + r$ con $0 \leq r < d$. Entonces,

$$a^n - 1 = (a^{dq+r} - a^r) + (a^r - 1) = a^r(a^{dq} - 1) + (a^r - 1).$$

Si $a^d - 1$ divide a $a^n - 1$, entonces $a^d - 1$ divide a $a^r - 1$, pues $a^d - 1$ también divide a $a^{dq} - 1$ (observe que $a^{dq} - 1 = (a^d)^q - 1 = (a^d - 1)(a^{d(q-1)} + a^{d(q-2)} + \cdots + a^d + 1)$). Luego, si $a^r - 1 > 0$, tendríamos que $a^d - 1 \leq a^r - 1$ (por el Teorema 3) de donde $d \leq r$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $a^r - 1 = 0$ lo cual implica que $r = 0$ y $n = dq$. Así, $d \mid n$.

El máximo común divisor

Como vimos antes, el número de divisores de un entero distinto de cero es finito, de modo que podemos definir el *máximo común divisor* de los enteros a y b como el máximo de los divisores comunes de a y b, esto es,

$$\text{máx}\{d \in \mathbb{Z} \colon d \mid a \text{ y } d \mid b\},$$

suponiendo que $a \neq 0$ o $b \neq 0$, donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de los números enteros. Denotaremos a este número por $\text{mcd}(a, b)$. Se extiende la definición estableciendo que $\text{mcd}(0, 0) = 0$.

El máximo común divisor de a y b cuando $a \neq 0$ o $b \neq 0$, es por definición el elemento máximo de la intersección del conjunto de divisores de a con el conjunto de divisores de b:

$$\text{mcd}(a, b) = \text{máx}\{d \in \mathbb{Z} \colon d \mid a \text{ y } d \mid b\} = \text{máx}(\{d \in \mathbb{Z} \colon d \mid a\} \cap \{d \in \mathbb{Z} \colon d \mid b\}).$$

De la definición también es inmediato que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, a)$.

Dado que el conjunto de divisores de un entero a es el mismo que el conjunto de divisores de $-a$ se sigue directamente de la definición que

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(\pm a, \pm b) = \text{mcd}(|a|, |b|).$$

Ejemplo 3. *El máximo común divisor de 6 y 10 es 2, ya que*

$$\{d \in \mathbb{Z} \colon d \mid 6 \text{ y } d \mid 10\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \cap \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\} = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

También se tiene mcd$(-4, 6) = 2$ puesto que

$$\textit{mcd}(-4, 6) = \text{máx}(\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \cap \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}) = \text{máx}\{-2, -1, 1, 2\} = 2.$$

Por otro lado, mcd$(3, 0) = 3$ ya que

$$\text{máx}(\{-3, -1, 1, 3\} \cap \mathbb{Z}) = \text{máx}\{-3, -1, 1, 3\} = 3.$$

En general, mcd$(a, 0)$ = mcd$(0, a) = |a|$ para cualquier entero a.

Teorema 5. *Si a y b son enteros, entonces*

$$mcd(a,b) = mcd(a,b-a) = mcd(b,a-b) = mcd(a,a+b).$$

Demostración. Si $a = b = 0$, el resultado es inmediato. Supondremos que $a \neq 0$ o $b \neq 0$. Para probar la primera igualdad de izquierda a derecha, bastará probar que el conjunto de divisores de a y b es el mismo que el conjunto de divisores de a y $b - a$ (pues el conjunto de divisores de un entero distinto de cero es un conjunto finito, y si dos conjuntos finitos son iguales necesariamente tienen el mismo elemento máximo.)
Sea d un divisor común de a y b, es decir, $d \mid a$ y $d \mid b$. De acuerdo con el Corolario 1, se sigue que $d \mid (b-a)$. Recíprocamente, si $d \mid a$ y $d \mid b-a$, entonces $d \mid a$ y $d \mid a + (b-a)$, i.e., $d \mid a$ y $d \mid b$.
Las pruebas de que $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(b,a-b)$ y $\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a,b+a)$ son análogas y se dejan de ejercicio al lector. □

Una consecuencia inmediata del teorema anterior y que será de gran utilidad para el cálculo del máximo común divisor es la siguiente.

Corolario 2. *Sean a, b y n enteros. Entonces, $mcd(a,b) = mcd(a,b-an)$.*

Demostración. Si $n = 0$, el resultado es inmediato. Si $n > 0$, aplicando repetidamente el teorema anterior se tiene

$$\mathrm{mcd}(a,b) = \mathrm{mcd}(a,b-a) = \mathrm{mcd}(a,b-a-a) = \cdots = \mathrm{mcd}(a,b-na)$$

y si $n < 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{mcd}(a,b) &= \mathrm{mcd}(a,a+b) = \mathrm{mcd}(a,a+a+b) = \cdots = \mathrm{mcd}(a,|n|a+b)\\ &= \mathrm{mcd}(a,-na+b).\end{aligned}$$

□

Se pueden usar repetidamente el Algoritmo de la división junto con el Teorema 5 para calcular el máximo común divisor. Ilustramos esto con un ejemplo.

Ejemplo 4. *Calcular $mcd(4655, 1309)$.*

Solución. Al dividir 4655 entre 1309 hallamos que $4655 = 1309 \cdot 3 + 728$, es decir, $q = 3$ y $r = 728$. De acuerdo con el Teorema 5, se tiene

$$\mathrm{mcd}(1309, 4665) = \mathrm{mcd}(1309, 4665 - 1309 \cdot 3) = \mathrm{mcd}(1309, 728).$$

Esto reduce el problema, pues ahora se debe hallar el mcd de números más pequeños. Repitiendo el proceso encontramos que $1309 = 728 \cdot 1 + 581$, de tal manera que $\mathrm{mcd}(1309, 728) = \mathrm{mcd}(728, 581)$. Continuando de esta manera:

$$\begin{aligned}
728 &= 581 \cdot 1 + 147, &\quad \mathrm{mcd}(728,581) &= \mathrm{mcd}(581,147),\\
581 &= 147 \cdot 3 + 140, &\quad \mathrm{mcd}(581,147) &= \mathrm{mcd}(147,140),\\
147 &= 140 \cdot 1 + 7, &\quad \mathrm{mcd}(147,140) &= \mathrm{mcd}(140,7),\\
140 &= 7 \cdot 20 + 0, &\quad \mathrm{mcd}(140,7) &= \mathrm{mcd}(7,0) = 7.
\end{aligned}$$

De esta forma se tiene que $\text{mcd}(4665, 1309) = 7$.
Aunque el procedimiento puede resultar largo y quizá tedioso por las divisiones sucesivas, este es un método que no requiere la factorización de números, la cual puede no ser fácil de realizar, sobre todo cuando se trata de números grandes. De hecho, se sabe que el número de pasos requeridos para encontrar el máximo común divisor de los enteros a y b es, en el peor de los casos, 5 veces el número de dígitos (en base 10) del más pequeño de los números. En el ejemplo anterior, los dos números tienen 4 dígitos, así que en el peor de los casos hubiera sido necesario realizar 20 divisiones o 20 algoritmos de la división.

Algoritmo Euclidiano. *Dados los enteros a y b, mediante la aplicación repetida del Algoritmo de la división se obtiene una sucesión de cocientes y residuos*

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_0, & 0 &\le r_0 < |b|, & (0)\\
b &= r_0q_1 + r_1, & 0 &\le r_1 < r_0, & (1)\\
r_0 &= r_1q_2 + r_2, & 0 &\le r_2 < r_1, & (2)\\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n, & 0 &\le r_n < r_{n-1}, & (n)\\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1}, & & & (n+1)
\end{aligned}$$

donde r_n es el último residuo distinto de cero. Entonces, r_n es el máximo común divisor de a y b.

Es importante enfatizar la existencia de r_n. Dado que $|b| > r_0 > r_1 > \cdots > r_n$ es una sucesión estrictamente decreciente de números enteros no negativos, la sucesión no puede continuar de manera indefinida.

Ejemplo 5. *Sean a, b y c enteros con $a > 1$. Demostrar que*

$$mcd(a^b - 1, a^c - 1) = a^{mcd(b,c)} - 1.$$

Solución. Por el algoritmo de la división, podemos escribir $b = cq + r$ con $0 \le r < c$. Luego,

$$\begin{aligned}
a^b - 1 &= (a^{cq} - 1)a^r + a^r - 1\\
&= (a^c - 1)(a^{c(q-1)} + a^{c(q-2)} + \cdots + a^c + 1)a^r + (a^r - 1).
\end{aligned}$$

Aplicando el Corolario 2 con los enteros $a^c - 1$, $a^b - 1$ y $n = (a^{c(q-1)} + a^{c(q-2)} + \cdots + a^c + 1)a^r$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1) &= \text{mcd}(a^c - 1, a^{b-1} - (a^{c(q-1)} + a^{c(q-2)} + \cdots + a^c + 1)a^r(a^c - 1))\\
&= \text{mcd}(a^c - 1, a^r - 1).
\end{aligned}$$

De manera análoga, nuevamente por el Algoritmo de la división tenemos que $c = rq_1 + r_1$ con $0 \le r_1 < r$ y $\text{mcd}(a^c - 1, a^r - 1) = \text{mcd}(a^r - 1, a^{r_1} - 1)$. Continuando de esta forma, si $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ son los residuos obtenidos en la aplicación del Algoritmo Euclidiano y r_n es el máximo común divisor de b y c obtenemos

$$\begin{aligned}(a^b-1, a^c-1) = (a^c-1, a^r-1) = (a^r-1, a^{r_1}-1) = \cdots = (a^{r_{n-1}}-1, a^{r_n}-1)\\ = (a^{r_n}-1, 0) = a^{r_n}-1 = a^{mcd(b,c)}-1.\end{aligned}$$

El siguiente teorema establece que el máximo común divisor de los números a y b es combinación lineal de a y b. Es un resultado muy útil en problemas de la olimpiada.

Teorema 6. *Si a y b son enteros, entonces existen enteros x, y tales que*

$$mcd(a,b) = ax + by.$$

Demostración. Se tiene $\text{mcd}(a,0) = |a| = a\cdot u + 0\cdot 0$, donde $u = 1$ o -1. Análogamente, $\text{mcd}(0,b) = |b| = 0\cdot 0 + b\cdot u'$, con $u' = 1$ o -1, y $\text{mcd}(0,0) = 0\cdot 0 + 0\cdot 1$. Se puede suponer que $ab \neq 0$. En el Algoritmo Euclidiano, primero se usa la ecuación (n), para escribir r_n en términos de los dos residuos inmediatos anteriores, $r_n = r_{n-2} - q_n r_{n-1}$. Después se usa la ecuación $(n-1)$ para escribir r_{n-1} en términos de r_{n-2} y r_{n-3}, etc. Al final de este proceso recursivo, r_n estará escrito en términos de a y b. $\square$

Hay más de una manera de escribir $\text{mcd}(a,b)$ como combinación lineal de a y b. De hecho, hay una infinidad, pues si $\text{mcd}(a,b) = ax + by$, también se tiene $\text{mcd}(a,b) = a(x+b) + b(y-a)$. Sin embargo, en muchos problemas basta considerar una.

Ejemplo 6. *De acuerdo con el Ejemplo 4, se tiene mcd$(4655, 1309) = 7$. Además,*

$$\begin{aligned} 4655 &= 1309\cdot 3 + 728, & (0)\\ 1309 &= 728\cdot 1 + 581, & (1)\\ 728 &= 581\cdot 1 + 147, & (2)\\ 581 &= 147\cdot 3 + 140, & (3)\\ 147 &= 140\cdot 1 + 7, & (4)\\ 140 &= 7\cdot 20. & (5)\end{aligned}$$

Despejando 7 en la ecuación (4), se tiene $7 = 147 - 140\cdot 1$. Ahora se despeja 140 en la ecuación (3) y se sustituye en la ecuación anterior

$$7 = 147 - (581 - 147\cdot 3) = 147\cdot 4 - 581\cdot 1.$$

A continuación se despeja 147 en la ecuación (2) y se sustituye quedando

$$7 = (728 - 581)\cdot 4 - 581\cdot 1 = 728\cdot 4 - 581\cdot 5.$$

Se sustituye ahora 581

$$7 = 728\cdot 4 - (1309 - 728)\cdot 5 = 728\cdot 9 - 1309\cdot 5.$$

Finalmente, se despeja 728 en la ecuación (0):

$$7 = (4655 - 1309\cdot 3)\cdot 9 - 1309\cdot 5 = 4655\cdot 9 - 1309\cdot 32.$$

Es decir, mcd$(4655, 1309) = 4655(9) + 1309(-32)$. También se tiene mcd$(4655, 1309) = 4655(9+1309) + 1309(-32-4655)$.

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que un entero c es combinación lineal de dos enteros a y b si y solamente si $\text{mcd}(a, b) \mid c$. En otras palabras, el conjunto de enteros que son combinación lineal de a y b coincide con el conjunto de los múltiplos de $\text{mcd}(a, b)$. En efecto, supongamos que $d = \text{mcd}(a, b)$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces d divide a cualquier combinación lineal de a y b; en particular d divide a c. Recíprocamente, si $d \mid c$, entonces $c = dq$ para algún entero q. De acuerdo con el Teorema 6, existen enteros r, s tales que $d = ar + bs$. Luego $c = dq = a(rq) + b(sq)$.

Según el Teorema 6, $\text{mcd}(a, b)$ es combinación lineal de a y b. El recíproco no es cierto, es decir, si c es combinación lineal de a y b, c no necesariamente es el máximo común divisor de a y b. Como el máximo común divisor de dos números distintos de cero es positivo, estamos interesados en combinaciones lineales que den por resultado un número positivo. Resulta que de entre todas las combinaciones lineales que dan por resultado un número positivo, la más pequeña de todas, es el máximo común divisor. Dado que $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(|a|, |b|)$, con frecuencia nos podemos restringir al caso $a > 0, b > 0$.

Teorema 7. *Si a y b son enteros positivos y $d = ax + by$ es su combinación lineal positiva mínima, entonces $d = \text{mcd}(a, b)$.*

Demostración. Se debe probar que d es un divisor común de a y b y que además es el máximo entre todos los divisores comunes. De acuerdo con el Algoritmo de la división, se tiene $a = dq + r$ con $0 \leq r < d$. Como $d = ax + by$, se obtiene que $a = (ax + by)q + r$, de donde $r = a(1 - xq) + b(-yq)$. Dado que $r < d$ y d es la combinación lineal positiva mínima de a y b, no es posible que $r > 0$; entonces $r = 0$ y $d \mid a$. De manera análoga se muestra que $d \mid b$.
Como $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces d divide a cualquier combinación lineal de a y b (Teorema 1); en particular $d \mid \text{mcd}(a, b)$. De acuerdo con el Corolario 2 se tiene que $d \leq \text{mcd}(a, b)$. Por otro lado, como $\text{mcd}(a, b) \mid a$ y $\text{mcd}(a, b) \mid b$, se tiene que $\text{mcd}(a, b) \mid d$. Luego $\text{mcd}(a, b) \leq d$. Las dos desigualdades implican que $d = \text{mcd}(a, b)$. □

Ejemplo 7. *Los números $10, 20$ y 30 son combinaciones lineales positivas de $a = 2210$ y $b = 980$:*

$$10 = a \cdot (-47) + b \cdot 106, \qquad 20 = a \cdot 4 + b \cdot (-9), \qquad 30 = a \cdot (-43) + b \cdot 97$$

Con base en el teorema anterior podemos afirmar que el máximo común divisor de a y b no es ni 20 ni 30, pues 10 es combinación lineal positivia de a y b que es menor que 20 y 30. Para poder asegurar que 10 es el máximo común divisor de a y b necesitamos más información.

El siguiente teorema es de gran importancia pues da algunas caracterizaciones para el máximo común divisor.

Teorema 8. *Sean a, b y $d > 0$ enteros. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$d = \text{mcd}(a, b)$.*

2. *d es la combinación lineal positiva mínima de a y b.*

3. *$d \mid a$, $d \mid b$, y si $c \mid a$ y $c \mid b$, entonces $c \mid d$.*

4. *$d \mid a$, $d \mid b$, y d es combinación lineal de a y b.*

Demostración. El teorema anterior muestra que $2)$ implica $1)$. Recíprocamente, si $d = \text{mcd}(a, b)$ y d_1 es combinación lineal positiva de a y b, entonces $d \mid d_1$ ya que d divide a cualquier combinación lineal de a y b. Luego $d \leq d_1$ y d es la combinación lineal positiva mínima de a y b. Esto muestra que $1)$ y $2)$ son equivalentes.
Ahora bien, $1)$ implica $3)$, pues cualquier divisor de a y b divide a cualquier combinación lineal de a y b, en particular, divide a $\text{mcd}(a, b)$. Supongamos ahora que d satisface $3)$; dado que $\text{mcd}(a, b)$ es un divisor común de a y b, se sigue que $\text{mcd}(a, b) \mid d$ y por lo tanto $\text{mcd}(a, b) \leq d$. Por otro lado, como $d \mid a$ y $d \mid b$, entonces $d \mid \text{mcd}(a, b)$, ya que $\text{mcd}(a, b)$ es combinación lineal de a y b. Así, $d \leq \text{mcd}(a, b)$, y queda probado que $d = \text{mcd}(a, b)$. Esto muestra que $1)$ y $3)$ son equivalentes.
Finalmente, veamos que $2) \Leftrightarrow 4)$. Si d satisface la condición $2)$, entonces por el teorema anterior, $d = \text{mcd}(a, b)$ y por lo tanto se satisface la condición $4)$. Supongamos ahora que d satisface la condición $4)$ y sea c un entero tal que $c \mid a$ y $c \mid b$. Como d es combinación lineal de a y b, tenemos que $c \mid d$. Luego, se satisface la condición $3)$ y por lo tanto se satisface la condición $2)$ (pues las condiciones $1)$, $2)$ y $3)$ son equivalentes). Esto muestra que las condiciones $2)$ y $4)$ son equivalentes. □

De acuerdo con el Ejemplo 7, los números $10, 20$ y 30 son combinaciones lineales positivas de 2210 y 980. Dado que 10 es combinación lineal de 2210 y 980, y 10 es divisor común de 2210 y 980, con base en el teorema anterior se concluye que 10 es el máximo común divisor de 2210 y 980.

El Ejemplo 5 se puede resolver de otra manera utilizando el Teorema 8. En efecto, sea $d = \text{mcd}(b, c)$. Entonces, $b = sd$ y $c = td$ para algunos enteros s, t. Tenemos que $a^b - 1 = (a^d)^s - 1$ y $a^c - 1 = (a^d)^t - 1$ son divisibles por $a^d - 1$, de modo que por el Teorema 8 $a^d - 1$ divide a $\text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1)$. De aquí, $a^d - 1 \leq \text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1)$. Por otra parte, tenemos que $d = bx + cy$ para algunos enteros x, y. Además, x e y deben tener signos opuestos (claramente no pueden ser ambos negativos, ya que d es positivo. Tampoco pueden ser ambos positivos, ya que si lo fueran se tendría que $d \geq b + c$ lo que es una contradicción, pues $d \leq b$ y $d \leq c$). Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $x > 0$, $y \leq 0$ y sea $t = \text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1)$. Entonces, $t \mid (a^{bx} - 1)$ y $t \mid (a^{-cy} - 1)$, lo cual implica que t divide a $((a^{bx} - 1) - a^d(a^{-cy} - 1)) = a^d - 1$, y por lo tanto $t \leq a^d - 1$. En conclusión, tenemos que $t = \text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1) \leq a^d - 1 \leq \text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1)$, esto es, $\text{mcd}(a^b - 1, a^c - 1) = a^d - 1 = a^{mcd(b,c)} - 1$.

Una consecuencia inmediata del Teorema 8 es que si a y b son enteros y $1 = ax + by$ para algunos enteros x, y, entonces el máximo común divisor de a y b es 1, pues en este caso, 1 es la combinación lineal positiva mínima de a y b.
Se dice que dos enteros a y b son *primos relativos*, *primos entre sí* o *coprimos*, si su máximo común divisor es 1.

Corolario 3. *Si a y b son enteros tales que mcd$(a, b) = d$, entonces mcd $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.*

Demostración. Tenemos que $d = ax + by$ para algunos enteros x, y. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, resulta que $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros, y por lo tanto $1 = (\frac{a}{d})x + (\frac{b}{d})y$. Se sigue que $\text{mcd}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$. $\square$

Ejemplo 8. *Si a y b son enteros con mcd$(a, b) = 1$, demostrar que mcd$(a^2, b^2) = 1$.*

Solución. Tenemos que existen enteros x, y tales que $ax+by = 1$. Elevando al cuadrado obtenemos que $1 = a^2x^2 + b(2axy + by^2)$, y por lo tanto $\text{mcd}(a^2, b) = 1$. Esto muestra que si $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces $\text{mcd}(a^2, b) = 1$. Usando esto, concluimos que $\text{mcd}(a^2, b^2) = 1$.

Teorema 9 (Propiedad Multiplicativa del Máximo Común Divisor)**.** *Sean a, b y n enteros positivos. Entonces, mcd$(na, nb) = n \cdot$ mcd(a, b).*

Demostración. Sea $d = \text{mcd}(a, b)$. Sabemos que existen enteros x, y tales que $d = ax + by$. Como $d \mid a$ y $d \mid b$, tenemos que $nd \mid na$, $nd \mid nb$ y $nd = (an)x + (bn)y$. Luego, nd, na y nb satisfacen la condición $4)$ del Teorema 8, y por lo tanto $nd = \text{mcd}(na, nb)$ (por la equivalencia de $1)$ con $4)$ de dicho teorema). $\square$

Ejemplo 9. *Sean a y b enteros tales que mcd$(a, b) = 1$. Demostrar que*

$$\textit{mcd}(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1 \textit{ o } 3.$$

Solución. Sea $d = \text{mcd}(a + b, a^2 - ab + b^2)$. Tenemos que d es divisor de $(a + b)^2 - a^2 + ab - b^2 = 3ab$. Luego, d divide a $3b(a + b) - 3ab = 3b^2$ y también a $3a(a+b)-3ab = 3a^2$. Luego, por el Teorema 8 se sigue que d divide a $\text{mcd}(3a^2, 3b^2)$. Esto es, d divide a $3 \cdot \text{mcd}(a^2, b^2)$ por la propiedad multiplicativa del máximo común divisor. Como $\text{mcd}(a, b) = 1$, el ejemplo anterior implica que $\text{mcd}(a^2, b^2) = 1$, y por lo tanto $d \mid 3$. Así, $d = 1$ o 3.

Ejemplo 10. *Sea $n \geq 5$ un entero. Determinar el máximo común divisor de $a = n^3 - n^2 - 12n$ y $b = 2n^2 - 7n - 4$ en términos de n.*

Solución. Observemos primero que $a = n(n - 4)(n + 3)$ y $b = (n - 4)(2n + 1)$. Aplicando la propiedad multiplicativa del máximo común divisor, tenemos que

$$\text{mcd}(a, b) = (n - 4) \cdot \text{mcd}(n(n + 3), 2n + 1).$$

Como n y $2n + 1$ son primos relativos (pues $1 = (-2)n + 1(2n + 1)$), es fácil ver que $\text{mcd}(n(n + 3), 2n + 1) = \text{mcd}(n + 3, 2n + 1)$ (ejercicio). Luego, basta calcular $\text{mcd}(n + 3, 2n + 1)$.

Sean $A = 2n + 1$, $B = n + 3$ y $d = \text{mcd}(A, B)$. Como $d \mid A$ y $d \mid B$, tenemos que $d \mid (2B - A)$, esto es, $d \mid 5$. De aquí, $d = 1$ o 5. Supongamos que $d = 5$; entonces, $5 \mid A$ y $5 \mid B$. De aquí, $5 \mid (A - B)$, esto es, $5 \mid (n - 2)$. Recíprocamente, si $5 \mid (n - 2)$ entonces $n = 5k + 2$ para algún entero k. Luego, $A = 2n + 1 = 5(1 + 2k)$ y $B = n + 3 = 5(k + 1)$, lo que significa que A y B son múltiplos de 5. Por lo tanto, tenemos que $5 \mid A$ y $5 \mid B$ si y sólo si $5 \mid (n - 2)$. Esto implica que si $d = 5$, entonces $5 \mid (n - 2)$. Recíprocamente, si $5 \mid (n - 2)$ entonces $5 \mid A$ y $5 \mid B$, y por el Teorema 8 se sigue que $5 \mid d$. Como $d = 1$ o 5, debemos tener que $d = 5$. En conclusión, $d = 5$ si y sólo si $5 \mid (n-2)$, y por lo tanto, $d = 1$ si y sólo si $5 \nmid (n-2)$. Luego,

$$\text{mcd}(a,b) = \begin{cases} 5(n-4) & \text{si} \quad 5 \mid (n-2), \\ n-4 & \text{si} \quad 5 \nmid (n-2). \end{cases}$$

Si un entero a divide a un producto bc, no necesariamente divide a alguno de los factores. Por ejemplo, $4 \mid 2 \cdot 10$, pero $4 \nmid 2$ y $4 \nmid 10$. Sin embargo, si el divisor es primo relativo con alguno de los factores, es posible concluir que el divisor divide al factor con el cual no es primo relativo.

Teorema 10. *Si $a \mid bc$ y mcd$(a,b) = 1$, entonces $a \mid c$.*

Demostración. De acuerdo con la hipótesis, existen enteros x, y tales que $1 = ax + by$. Multiplicando por c, se obtiene que $c = acx + bcy$. Como $a \mid bc$, existe un entero q tal que $bc = aq$. Luego $c = acx + aqy = a(cx + qy)$, de donde $a \mid c$. □

Ejemplo 11. *Sean a y b enteros positivos primos relativos tales que $ab = c^n$ para algún entero positivo c y algún entero positivo n. Demostrar que existen enteros x, y tales que $a = x^n$ y $b = y^n$.*

Solución. Sea $d = \text{mcd}(a,c)$. Tenemos que $a = du$ y $c = dv$ con $u = \frac{a}{d}$ y $v = \frac{c}{d}$ primos relativos (ver Corolario 3). Entonces,

$$ab = dub = (dv)^n = c^n \Rightarrow ub = d^{n-1}v^n \Rightarrow u \mid d^{n-1}v^n.$$

Como u y v^n son primos relativos (pues u y v lo son), el teorema anterior implica que $u \mid d^{n-1}$. Sea $k = \frac{d^{n-1}}{u}$. Como $1 = \text{mcd}(a,b) = \text{mcd}(du, kv^n)$ existen enteros r, s tales que $1 = dur + kv^n s$. Luego, d y k son primos relativos, y en consecuencia d^{n-1} y k también lo son. De aquí, $1 = \text{mcd}(d^{n-1}, k) = \text{mcd}(ku, k) = k \cdot \text{mcd}(u, 1) = k$ y por lo tanto, $d^{n-1} = u$, $a = du = d^n$ y $b = kv^n = v^n$.

Para finalizar, dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1. Sean a y b enteros positivos impares tales que $a \nmid b$. Demuestra que existen enteros q y r tales que $b = aq + r$ donde r es impar y $-a < r < a$.

2. Sean a y b enteros tales que $b < 0$ y $b \nmid a$. Si $a = bq + r$ con $0 \leq r < |b|$, demuestra que $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor + 1$.

3. Sean a, b y c enteros y sea $d = \text{mcd}(a,b)$. Si $a \mid c$ y $b \mid c$, demuestra que $\frac{ab}{d}$ también divide a c.

4. Sean a y b enteros primos relativos. Demuestra que $\text{mcd}(a+b, a-b) = 1$ o 2.

5. Se dice que una fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si los enteros a y b son primos relativos. Demuestra que la fracción $\frac{21n+4}{14n+3}$ es irreducible para todo entero positivo n.

6. Los números de la sucesión $101, 104, 109, 116, \ldots$ son de la forma $a_n = 100 + n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Para cada entero positivo n sea $d_n = \text{mcd}(a_n, a_{n+1})$. Determina el valor $\max\limits_{n\geq 1} d_n$.

7. Sean m y n enteros positivos con m impar. Demuestra que $2^m - 1$ y $2^n + 1$ son primos relativos.

8. Sean m y n enteros positivos con $m \neq n$. Determina $\text{mcd}(a^{2m}+1, a^{2n}+1)$ para cualquier entero a. (Sugerencia: si $A_n = a^{2n}+1$, demuestra que $A_n \mid (A_m - 2)$ si $m > n$).

9. Sean a y b enteros positivos y sea d su máximo común divisor. Si $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es un entero, demuestra que $d \leq \sqrt{a+b}$.

10. Para cualesquiera enteros positivos $a > b > 1$, una sucesión $x_1, x_2, \ldots$ está definida por $x_n = \frac{a^n-1}{b^n-1}$. Determina el menor entero d tal que para cualesquiera a y b, esta sucesión no contiene d términos consecutivos que son números primos.

11. Sean $a = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r}$ y $b = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ donde $m_i \geq 0$ y $n_i \geq 0$ son enteros y los p_i son primos distintos para $1 \leq i \leq r$. Si $t_i = \min\{m_i, n_i\}$ denota el valor mínimo de m_i y n_i, demuestra que
$$\text{mcd}(a, b) = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}.$$

12. Usa el ejercicio anterior para demostrar la siguiente propiedad multiplicativa del máximo común divisor.
$$(ah, bk) = (a, b)(h, k)\left(\frac{a}{(a,b)}, \frac{k}{(h,k)}\right)\left(\frac{b}{(a,b)}, \frac{h}{(h,k)}\right)$$
para cualesquiera enteros a, b, h y k. Aquí, hemos abreviado la notación $\text{mcd}(a, b)$ por (a, b). Esta propiedad muestra en particular, que si $(a, b) = (h, k) = 1$, entonces $(ah, bk) = (a, k)(b, h)$.

13. Dados tres enteros a, b y c, se define su máximo común divisor como
$$\text{mcd}(a, b, c) = \text{mcd}(\text{mcd}(a, b), c).$$
    a) Demuestra que $\text{mcd}(a, b, c) = \text{mcd}(a, \text{mcd}(b, c))$.
    b) Demuestra que existen enteros x, y, z tales que $ax+by+cz = \text{mcd}(a, b, c)$.

Bibliografía

1. Ana Rechtman Bulajich, Carlos Jacob Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Tzaloa No. 2, 2009.

2. José Alejandro Lara Rodríguez, Carlos Jacob Rubio Barrios. *Álgebra Superior (notas de curso)*. Universidad Autónoma de Yucatán, 2014.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 problemas seleccionados especialmente para comenzar tu preparación de este año. Es importante señalar que en esta ocasión los problemas se presentan en formato de opción múltiple. Esto se debe a que el filtro inicial de la mayoría de los concursos estatales suele ser presentado así. Sin embargo, conviene señalar que para resolverlos no es recomendable obtener la respuesta correcta por eliminación de las otras opciones.

Ten en cuenta que en las olimpiadas no sólo se trata de saber la respuesta correcta, sino que además, es necesario justificar dicha solución. En las etapas más avanzadas de todos los concursos de matemáticas, las preguntas siempre son abiertas y nunca se utiliza el formato de opción múltiple[3]. En el caso de esta publicación, el formato de opción múltiple se adopta con el fin de que el estudiante que recién se inicia se vaya familiarizando con el concurso y sus estapas.

Como seguramente ya habrás observado, en el primer número de cada año el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección no es muy elevado y el material escogido está pensado mayoritariamente para principiantes. Conforme el año transcurra su nivel se irá incrementando paulatinamente, de forma que, para el último número del año, el material será en su mayoría de nivel avanzado.

Por último, te invitamos a que con tu participación contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. ¿Qué tienen que cumpir a, b y c si el producto de las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es igual a 1?

(a) $a = b$ (b) $a = bc$ (c) $c = a$ (d) $c = b$ (e) $c = ab$

[3] De hecho, el formato de opción múltiple sólo se usa por el carácter masivo de las etapas inciales de muchos concursos y debido a su facilidad de calificación (no requiere apreciación).

Problema 2. Se tiene un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A, $AB = 1\,cm$ y $AC = 2\,cm$. Si X es un punto sobre el lado BC tal que AX mide $\frac{2}{\sqrt{5}}\,cm$, ¿cuánto puede medir el ángulo AXB?

(a) $45°$ o $135°$ (b) $60°$ o $30°$ (c) $30°, 60°$ o $90°$ (d) $75°$ (e) $90°$

Problema 3. ¿Cuál es el menor entero a tal que $\sqrt{a} - \sqrt{2015}$ es la raíz de un entero positivo?

(a) 4030 (b) 2015^2 (c) 18135 (d) 8060 (e) 2015

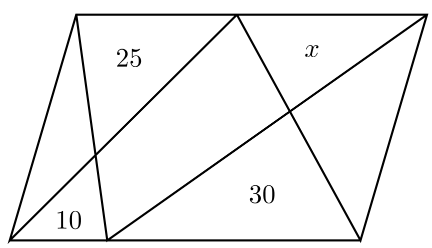
Problema 4. Para subir más rápido, dos personas suben caminando una escalera eléctrica. Una de las personas camina tres veces más rápido que la otra. Si al subir una cuenta 75 escalones mientras la otra cuenta 50, ¿cuántos escalones son visibles en la escalera?

(a) 75 (b) 100 (c) 125 (d) 150 (e) 300

Problema 5. ¿Cuántos números de la forma $13A25B$ son múltiplos de 12? (A y B son dígitos.)

(a) 6 (b) 8 (c) 12 (d) 36 (e) 1

Problema 6. En el siguiente paralelogramo, cada número indica el área en centímetros cuadrados del triángulo en donde están. ¿Cuánto vale x?



(a) $20\,cm^2$ (b) $25\,cm^2$ (c) $10\,cm^2$ (d) $15\,cm^2$ (e) $30\,cm^2$

Problema 7. Sea f una función tal que $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = x^2$ para todo número real $x \neq 0$. ¿Cuál es el valor de $f(-3)$?

(a) $-\frac{77}{72}$ (b) $-\frac{37}{36}$ (c) $-\frac{25}{24}$ (d) $-\frac{13}{12}$ (e) $-\frac{1}{3}$

Problema 8. Sea ABC un triángulo acutángulo y consideremos un punto P. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares desde P sobre BC, CA y AB, respectivamente. Si $BD = 1\,cm$, $DC = 10\,cm$, $CE = 6\,cm$, $EA = 9\,cm$ y $AF = 13\,cm$, ¿cuánto mide FB?
(a) $1\,cm$ (b) $2\,cm$ (c) $3\,cm$ (d) $4\,cm$ (e) $5\,cm$

Problema 9. Si x, y son números reales, ¿cuál es el valor mínimo de

$$x^4 - 5x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 6?$$

(a) -5 (b) -4 (c) -1 (d) 0 (e) 2

Problema 10. Cuatro jaulas se han colocado en forma de tablero de 2×2. Cada jaula contiene algunas gallinas y algunos conejos (algunas jaulas pueden contener solo gallinas o solo conejos). El número total de cabezas en las dos jaulas del primer renglón del tablero es 60. El número total de patas en las dos jaulas en el segundo renglón del tablero es 240. El número total de cabezas en las dos jaulas de la primera columna es 70. El número total de patas en las dos jaulas de la segunda columna es 230. ¿Cuál es el mínimo número de animales en las cuatro jaulas?

(a) 95 (b) 120 (c) 128 (d) 145 (e) 180

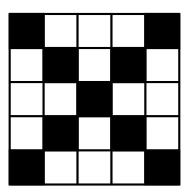
Problema 11. En una bolsa hay 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. ¿Cuál es el menor número de tarjetas que necesitas sacar para garantizar que tengas dos tarjetas cuya suma de dígitos sea la misma?

(a) 3 (b) 27 (c) 28 (d) 899 (e) 99

Problema 12. ¿Cuál es el mayor número primo que divide a todos los números de 3 dígitos que tienen todos sus dígitos iguales?

(a) 101 (b) 3 (c) 11 (d) 17 (e) 37

Problema 13. La figura muestra una cuadrícula de 5×5 a la que se le han pintado de negro las casillas en las diagonales.



Si se hace lo mismo con una cuadrícula de 100×100, el resultado de dividir el número de casillas negras entre el número de casillas blancas es:

(a) $\frac{1}{50}$ (b) $\frac{1}{49}$ (c) $\frac{199}{9801}$ (d) $\frac{197}{9604}$ (e) $\frac{99}{10000}$

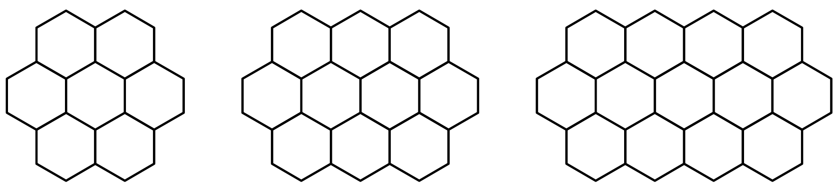
Problema 14. Sobre los lados AB y AD de un paralelogramo $ABCD$ se consideran puntos P y Q tales que $AP = PB$ y $2AQ = QD$. ¿Cuál es la razón del área del triángulo PQC sobre la del paralelogramo $ABCD$?

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) No se puede determinar

Problema 15. Pedro y Juan van a jugar un juego por turnos con un montón de 21 monedas. En cada turno se pueden tomar 1, 2, 3 o 4 monedas y gana la persona en quitar la última moneda. Si Juan empieza, ¿cuántas monedas tiene que tomar en su primer turno para asegurar que gana?

(a) No puede asegurar ganar en su primer turno
(b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 16. Considera el siguiente patrón. Si lo continúas hasta obtener una figura que tenga 2014 hexágonos, ¿cuántos hexágonos tendrá la fila central?

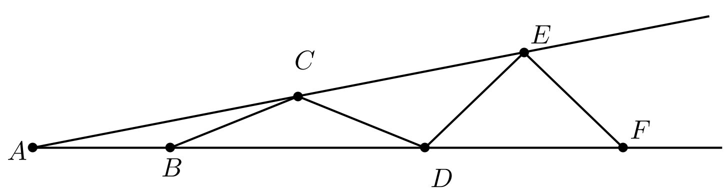


(a) 670 (b) 671 (c) 672 (d) 673 (e) 674

Problema 17. Toño y Pepe van a jugar un juego por turnos con una baraja inglesa. En cada turno se toma una carta al azar de la baraja, gana la primera persona en conseguir un par. ¿Cuántas cartas tienen que haberse tomado para asegurar que alguien gana?

(a) 3 (b) 14 (c) 21 (d) 26 (e) 27

Problema 18. En la siguiente figura se tiene que $AB = BC = CD = DE = EF$, si el ángulo $\angle BAC = 11^\circ$, ¿cuánto mide el ángulo FED?



(a) 80° (b) 84° (c) 90° (d) 92° (e) 96°

Problema 19. ¿Cuál es el mayor número primo de dos dígitos que divide a $3^{32} - 2^{32}$?

(a) 17 (b) 71 (c) 89 (d) 13 (e) 97

Problema 20. Sean a, b, c y d números reales tales que $\frac{a-b}{c-d} = 2$ y $\frac{a-c}{b-d} = 3$. ¿Cuál es el valor de $\frac{a-d}{b-c}$?

(a) -5 (b) -4 (c) -3 (d) -2 (e) -1

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección podrás encontrar las soluciones de los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarla antes de tener tu propia respuesta o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

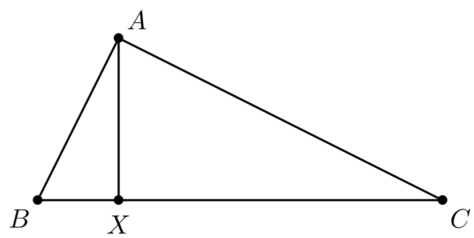
Observa que, en cada solución, no sólo se ha determinado la opción correcta, sino que además, siempre se incluye la argumentación que establece su validez. En todos los casos, la justificación se basa en resultados conocidos y/o en razonamientos lógicos, además de que la solución sólo se alcanza a partir del enunciado y sin usar la información contenida en las opciones de respuesta.

Cabe aclarar que las soluciones que aquí se presentan no son necesariamente las únicas o las mejores, tan sólo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. En matemáticas, cada problema puede tener tantas soluciones correctas como ideas originales se desarrollen con creatividad y lógica. Si tú encontraste una solución diferente de las que aquí se presentan y no estás seguro de su validez o simplemente quieres compartirla con nosotros, te invitamos para que nos escribas a `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (c).
Al dividir la ecuación entre a (como hay dos soluciones, a no puede ser igual a 0) obtenemos $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Si las soluciones son x_1 y x_2, tenemos la factorización $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 x_2)$. Por lo tanto, $\frac{c}{a} = x_1 x_2$. Luego, $x_1 x_2 = 1$ si y solo si $\frac{a}{c} = 1$, si y solo si $a = c$.

Solución del problema 2. La respuesta es (e).
El área de este triángulo es igual a $1\,cm^2$. Por el teorema de Pitágoras tenemos que $BC = \sqrt{5}\,cm$. Luego, si h es la longitud de la altura desde A, tenemos que $\frac{h\sqrt{5}\,cm}{2} = 1\,cm^2$, de donde $h = \frac{2}{\sqrt{5}}\,cm$.

Luego, tiene que suceder que X es el pie de la altura, pues para cualquier otro punto X sobre BC se tendría que la longitud de AX sería mayor que la longitud de la altura, o sea, $\frac{2}{\sqrt{5}}\,cm$. Por lo tanto, el ángulo $\angle AXB$ solo puede medir $90°$.



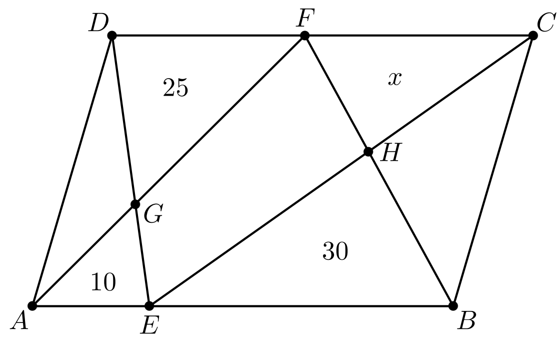
Solución del problema 3. La respuesta es (d).
Consideremos la ecuación $\sqrt{a} - \sqrt{2015} = \sqrt{x}$ para a y x enteros positivos. Es equivalente a $\sqrt{a} = \sqrt{2015} + \sqrt{x}$. Elevando al cuadrado llegamos a $a = 2015 + x + 2\sqrt{2015x}$. Como a y x son enteros, tenemos que $2015x$ tiene que ser el cuadrado de un entero. Ya que la factorización en primos de 2015 es $5 \times 13 \times 31$, x debe tener estos tres factores primos, por lo que el menor valor de x es justo 2015 y $\sqrt{a} = 2\sqrt{2015}$, de donde $a = 8060$.

Solución del problema 4. La respuesta es (b).
Sea v la velocidad de la escalera, y sean a y $3a$ las velocidades de las personas que están subiendo. Sea x el número visible de escalones.
La persona con velocidad $3a$ recorre 75 escalones y podemos pensar que los otros $x - 75$ escalones los recorre gracias a la velocidad v de la escalera. Como ésto sucede en el mismo tiempo, tenemos que $\frac{3a}{v} = \frac{75}{x-75}$.
Análogamente, considerando a la otra persona tenemos que $\frac{a}{v} = \frac{50}{x-50}$.
Como la primera igualdad es igual a 3 veces la segunda, tenemos que $\frac{75}{x-75} = 3\left(\frac{50}{x-50}\right)$, de donde $x = 100$.

Solución del problema 5. La respuesta es (a).
Para que un número sea múltiplo de 12 tiene que serlo de 3 y 4. Para que este número sea múltiplo de 4, el número formado por sus dos últimos dígitos debe ser múltiplo de 4. Es decir, 4 tiene que dividir a $5B$. Luego, B puede valer 2 o 6.
Si B vale 2 obtenemos el número $13A252$. Para que sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos tiene que ser múltilplo de 3. La suma es $13 + A$, por lo que A puede valer 2, 5 u 8 y obtenemos tres números.
Si B vale 6 obtenemos el número $13A256$, cuya suma de dígitos es $17 + A$, por lo que A puede valer 1, 4 o 7. Obteniendo tres números más.
Por lo tanto, son 6 números los que cumplen.

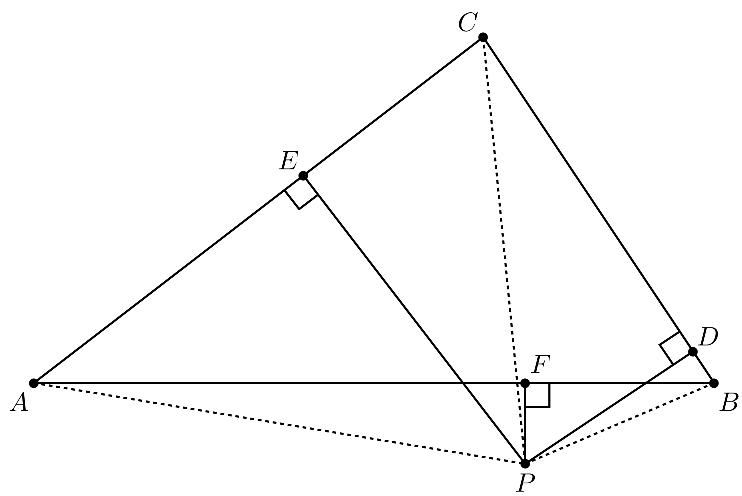
Solución del problema 6. La respuesta es (d).
Nombremos a los puntos como se muestra en la figura. Los triángulos ABF y DCE tienen la misma base ($DC = AB$) y la misma altura respectiva (la distancia entre las

paralelas AB y CD), por lo que tienen la misma área. Ignorando el área del cuadrilátero $EHFG$, tenemos que $10 + 30 = 25 + x$, de donde $x = 15$.



Solución del problema 7. La respuesta es (d).
Si $x = -3$, tenemos que $f(-3) + 3f(-\frac{1}{3}) = 9$; y si $x = -\frac{1}{3}$, tenemos que $f(-\frac{1}{3}) + 3f(-3) = \frac{1}{9}$. Resolviendo el sistema de dos ecuaciones para $f(-3)$ obtenemos que $f(-3) = -\frac{13}{12}$.

Solución del problema 8. La respuesta es (e).



Por el teorema de Pitágoras tenemos que $BD^2 - DC^2 = (BP^2 - PD^2) - (CP^2 - PD^2) = BP^2 - CP^2$. De manera similar tenemos que $CE^2 - EA^2 = CP^2 - AP^2$ y $AF^2 - BF^2 = AP^2 - BP^2$. Sumando estas relaciones obtenemos que

$$(BD^2 + CE^2 + AF^2) - (DC^2 + EA^2 + FB^2) = 0.$$

Luego, $FB^2 = (1^2 + 6^2 + 13^2) - (10^2 + 9^2) = 5^2\,cm^2$ de donde $FB = 5\,cm$.

Solución del problema 9. La respuesta es (b).
Observemos que $x^4 - 5x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2xy + 6 = (x^2 - 3)^2 + (x + y + 1)^2 - 4 \geq -4$.

Luego, el valor mínimo buscado es -4, que se da cuando $x^2 - 3 = 0$ y $x + y + 1 = 0$, esto es, con $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = -1 \mp \sqrt{3}$.

Solución del problema 10. La respuesta es (c).
Hay 230 patas en las dos jaulas de la segunda columna. Como $230 = 4(57) + 2$, tales patas provienen de al menos 58 animales, digamos, de 57 conejos y una gallina. Luego, el mínimo número de animales en las cuatro jaulas sería mayor o igual que $70 + 58 = 128$. Si tenemos 55 animales en la primera jaula del primer renglón, cero gallinas y 5 conejos en la segunda jaula del primer renglón, 15 gallinas y cero conejos en la primera jaula del segundo renglón, y una gallina y 52 conejos en la segunda jaula del segundo renglón, tenemos 128 animales en total. Por lo tanto, el mínimo número de animales en las cuatro jaulas es 128.

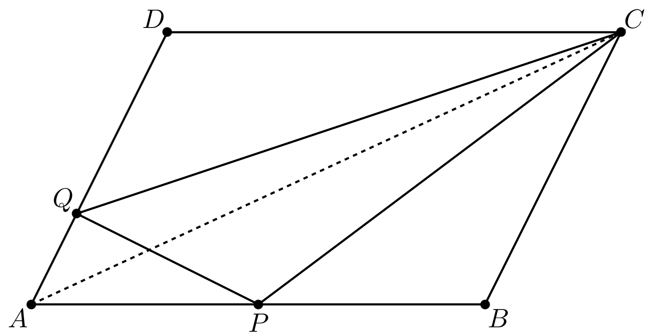
Solución del problema 11. La respuesta es (c).
Observemos que la máxima suma posible es 27, que se obtiene con el 999. Además, todos los números entre 1 y 27 se pueden obtener como sumas: Los números del 1 al 9 dan las sumas del 1 al 9, los números del 91 al 99 dan las sumas del 10 al 18, y los números del 991 al 999 dan las sumas del 19 al 27. Por tanto, no es posible asegurar que con 27 elecciones o menos, tengamos dos con la misma suma de dígitos, pues basta con que cada elección tenga una suma distinta de acuerdo a lo descrito antes.
Como hay 27 sumas posibles, por el principio de las casillas, es necesario sacar 28 tarjetas para asegurar que dos tengan la misma suma de dígitos.

Solución del problema 12. La respuesta es (e).
Si aaa es un número de tres dígitos, tenemos que $aaa = 100a + 10a + a = a(100 + 10 + 1) = 111a$, lo que muestra que todos los números que tienen tres dígitos iguales son múltiplos de 111. Como $111 = 3 \times 37$ es uno de los números, el primo buscado solo puede ser 3 o 37. El 37 cumple, pues 111 divide al número de tres dígitos aaa, por lo que aaa siempre es múltiplo de 37.

Solución del problema 13. La respuesta es (b).
Observemos que el número de casillas en cada diagonal es igual al número de casillas en el lado del cuadrado. Sin embargo, como 100 es par, a diferencia de la figura, las diagonales no se intersecan. Por tanto en el tablero de 100×100 el número de casillas negras es 200.
El número de casillas blancas lo obtenemos restando del total: $100^2 - 200 = 9800$. Por lo tanto, la respuesta es $\frac{200}{9800} = \frac{1}{49}$.

Solución del problema 14. La respuesta es (b).
Sea A el área del paralelogramo $ABCD$ y denotemos por (XYZ) al área de cualquier triángulo XYZ. En el triángulo ABC se cumple que P es el punto medio del lado AB, luego los triángulos ABC y APC comparten la altura desde C y sus bases están en razón 2 a 1, entonces $(ACP) = \frac{(ABC)}{2}$. De manera similar, los triángulos ACD y ACQ comparten la altura desde C y la razón de sus bases es de 3 a 1, entonces $(ACQ) = \frac{(ACD)}{3}$. Además, el triángulo AQB tiene la misma base AQ y la misma

altura que el triángulo ACQ (puesto que C y B equidistan del lado AD), entonces $(AQB) = (AQC) = \frac{(ACD)}{3}$.



De nuevo por ser P el punto medio de AB se tiene que $(AQP) = \frac{(AQB)}{2} = \frac{(ADC)}{6}$. Por ser $ABCD$ un paralelogramo se tiene que los triángulos ABC y CDA son congruentes, entonces cada uno tiene área la mitad del paralelogramo. De todo esto se concluye que

$$(PQC) = (AQC) + (APC) - (AQP) = \frac{A}{4} + \frac{A}{6} - \frac{A}{12} = \frac{A}{3}.$$

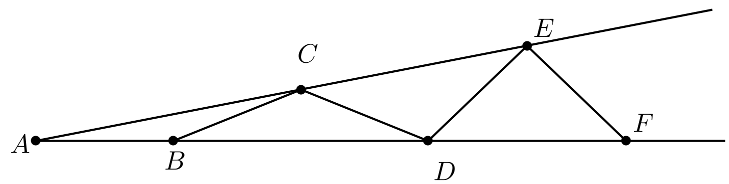
Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{1}{3}$.

Solución del problema 15. La respuesta es (b).
Veamos que si Juan quita una moneda en su primer turno puede asegurar que gana. Si Juan quita una moneda en su primer turno quedan 20 que es un múltiplo de 5. Después Pedro quita algún número de monedas pero menor que 5, entonces Juan quita las que hagan falta para que solo queden 15 monedas, siguiendo este proceso Juan asegura dejar siempre una cantidad de monedas múltiplo de 5, y puesto que 0 es múltiplo de 5, Juan gana.

Solución del problema 16. La respuesta es (c).
Observemos que en las figuras del ejemplo, todas las filas tienen la misma cantidad de celdas, excepto la fila central que tiene un hexágono más. Por tanto, si quitáramos esa celda adicional en la figura con 2014 hexágonos, quedarían 2013 hexágonos que se reparten en tres renglones, y por tanto cada uno tendría 671. Como la fila central debe tener una celda más, la respuesta es 672.

Solución del problema 17. La respuesta es (e).
En una baraja inglesa hay 13 posibles números, entonces podría pasar que en 26 turnos cada uno de Toño y Pepe tengan 13 cartas de números distintos y no tener un ganador. Si han pasado 27 turnos entonces alguno de los dos tiene 14 cartas y por el principio de las casillas esa persona debe tener dos cartas del mismo número. Por lo tanto, con 27 cartas se asegura que hay un ganador.

Solución del problema 18. La respuesta es (d).
Por ángulos externos en el triángulo ABC se tiene que $\angle DBC = \angle BAC + \angle ACB = 11° + 11° = 22°$, por ser isósceles ABC.



Por el isósceles BCD se tiene que $\angle CDB = 22°$ y por ángulos externos en el triángulo ADC se tiene que $\angle DCE = 11° + 22° = 33°$. De manera análoga se tiene que $\angle FDE = 44°$. Luego por ser isósceles el triángulo FED se tiene que $\angle FED = 180° - 2(44°) = 92°$.

Solución del problema 19. La respuesta es (e).
Factorizando tenemos que

$$\begin{aligned}3^{32} - 2^{32} &= (3^{16} - 2^{16})(3^{16} + 2^{16})\\ &= (3^8 - 2^8)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16})\\ &= (3^4 - 2^4)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16})\\ &= (3^2 - 2^2)(3^2 - 2^2)(3^4 + 2^4)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16})\\ &= 5(13)(97)(3^8 + 2^8)(3^{16} + 2^{16}).\end{aligned}$$

Luego, los números primos 5, 13 y 97 son divisores del número $3^{32} - 2^{32}$. Como 97 es el mayor número primo de dos dígitos y divide a $3^{32} - 2^{32}$, la respuesta es 97.

Solución del problema 20. La respuesta es (a).
Se tiene que $a - b = 2(c - d)$ y $a - c = 3(b - d)$, restando la primera ecuación a la segunda obtenemos que $b - c = 3b - 3d - 2c + 2d = 3b - 2c - d$, entonces $2b = c + d$ por lo tanto $b - c = d - b$. Ahora

$$\frac{a-d}{b-c} = \frac{a-c+c-b+b-d}{b-c} = \frac{a-c}{b-c} + \frac{c-b}{b-c} + \frac{b-d}{b-c} = -\frac{a-c}{b-d} - 1 - 1 = -5.$$

Problemas de Entrenamiento

Esta es la sección interactiva de la revista y su construcción sólo es posible con la participación entusiata de todos sus lectores. Los siguientes 10 problemas que presentamos carecen de solución pues están esperando a que tú los resuelvas. Acepta el reto y resuelve uno o todos los *Problemas de Entrenamiento* y una vez que lo logres, envíanos tus soluciones cuanto antes para que puedan salir publicadas con tu nombre impreso. En esta ocasión agradecemos de una manera muy especial a Emerson Soriano Pérez (de Perú) por su contribución con el Problema 10.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo.

Problemas de Entrenamiento.
Año 2015 No. 1.

Problema 1. Sean p, q y r tres números primos mayores que 3 que están en progresión aritmética con razón d. Muestra que d es múltiplo de 6.

Problema 2. Demuestra que un número de 9 dígitos que tenga exactamente una vez los dígitos del 1 al 9 y que termina en 5, no puede ser un cuadrado perfecto.

Problema 3. Sea $PQRS$ un cuadrilátero cíclico con $\angle PSR = 90°$ y sean H y K los pies de las perpendiculares desde Q hacia los lados PR y PS. Demuestra que HK biseca al segmento QS.

Problema 4. Antonio escribe una lista de fracciones de acuerdo con la siguiente regla: si la última fracción escrita x es menor o igual que $\frac{1}{2}$, entonces el siguiente número en la lista es $2x$. De lo contrario, el siguiente número que escribe será $2(1-x)$. Si el primer número de la lista es $\frac{3}{11}$, ¿cuál es el número que escribe en la posición 2014?

Problema 5. Si Antonio escribe otra lista con la misma regla que el problema anterior, y en la cuarta posición le toca escribir el número 1, ¿cuál es el mayor número que pudo iniciar la lista?

Problema 6. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 números reales tales que cualesquiera dos de ellos difieren por al menos 1. Supongamos que para algún número real k se cumple que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ y $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Demuestra que $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Problema 7. Sean t y s enteros diferentes de 0 y sea (x, y) una pareja de enteros. Un movimiento cambia la pareja (x, y) por la pareja $(x-t, y-s)$. Una pareja es *buena* si después de cierta cantidad de movimientos (posiblemente cero) se llega a una pareja de enteros primos relativos (podrían ser negativos).

- Demuestra que la pareja (s, t) es buena.
- Demuestra que existe una pareja (x, y) que no es buena.

Problema 8. Determina todas las ternas de enteros mayores que 1, (m, n, k), tales que

$$1! + 2! + \cdots + m! = n^k.$$

Problema 9. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y k números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2$ y $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Demuestra que se pueden elegir dos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que la diferencia entre ellos es mayor que 1.

Problema 10. Cada entero positivo se va a pintar con uno de 10 colores distintos disponibles respetando la siguiente condición: "Si un entero positivo n es la suma de tres enteros positivos distintos, entonces al número n se le pinta del mismo color del menor de sus sumandos o del mismo color del mayor de sus sumandos". Por ejemplo, como $40 = 25 + 10 + 5$, entonces al número 40 se le debe pintar con el mismo color que se ha pintado al 25 o con el mismo color que se ha pintado al 5. ¿De cuántas maneras se puede realizar el coloreado respetando la condición mencionada?

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2014. En esta ocasión agradecemos a Francisco Emmanuel Anaya González por su solución al Problema 5. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2014, por lo que todavía estás a tiempo para que tus trabajos puedan salir publicados dándote todo el crédito que mereces.

Problema 1. Los primeros cuatro dígitos de un entero positivo son 1, 1, 3 y 7. Demuestra que podemos reacomodar sus dígitos de tal manera que el nuevo número sea divisible entre 7.

Solución. Sea n un entero positivo cuyos primeros cuatro dígitos son $1, 1, 3$ y 7. Sea Q el número restante después de quitarle los primeros cuatro dígitos a n. Podemos reacomodar los dígitos de n de tal manera que el número resultante sea de la forma $10^4Q + R$, donde R es un número formado por los dígitos 1, 1, 3 y 7. Si logramos que R tome cualquier congruencia módulo 7, habremos acabado, pues solo habría que elegir aquella que haga que $10^4Q + R \equiv 0 \pmod 7$. Esto es cierto, pues módulo 7 se tiene que

$$3171 \equiv 0,\ \ 1317 \equiv 1,\ \ 1731 \equiv 2,\ \ 1137 \equiv 3,\ \ 1173 \equiv 4,\ \ 1713 \equiv 5 \text{ y } 1371 \equiv 6.$$

Problema 2. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos pares m tales que $m + p^2$ es compuesto para todo número primo p.

Solución. Sea p un número primo. Si $p = 3$, tenemos que $p^2 \equiv 0 \pmod 3$; y si $p \neq 3$, entonces $p^2 \equiv 1 \pmod 3$. Luego, nos gustaría encontrar un número m tal que

- $m \equiv 0 \pmod 2$. Esto para que m sea par.
- $m \equiv 2 \pmod 3$. Esto para que 3 divida a $p^2 + m$ para todo primo $p \neq 3$. Como $p^2 + m \geq 2^2 + 2 > 3$, ninguno de estos números sería primo.
- $m \equiv 1 \pmod 5$. Esto para que 5 divida a $3^2 + m$. Como $3^2 + m \geq 3^2 + 2 > 5$, este número no sería primo.

No es difícil ver que los números que cumplen estas condiciones son aquellos m tales que $m \equiv 26 \pmod{30}$. Como hay una infinidad de estos, terminamos.

Problema 3. Alrededor de una circunferencia están marcados 60 puntos de manera que 30 de ellos son rojos, 20 azules y 10 verdes. Estos puntos dividen la circunferencia en 60 arcos y a cada arco se le asigna un número, dependiendo de los colores de sus dos extremos:

- Si un arco tiene extremos rojo y verde, se le asigna el número 1.

- Si un arco tiene extremos azul y rojo, se le asigna el número 2.
- Si un arco tiene extremos verde y azul, se le asigna el número 3.
- Si un arco tiene extremos del mismo color, se le asigna el número 0.

¿Cuál es la máxima suma de los números asignados a los arcos?

Solución. Sea x el número de arcos con número 1, y el número de arcos con número 2 y z el número de arcos con número 3. Además, sean a, b y c el número de arcos con ambos extremos rojos, azules y verdes, respectivamente.
Se sigue que $x + y + 2a = 60$ (pues cada punto rojo aparece en dos de estos arcos), $y + z + 2b = 40$ (análogo con los azules) y $z + z + 2c = 20$ (análogo con los verdes). Estas tres igualdades pueden considerarse como un sistema de tres por tres en las variables x, y y z. La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x &= 20 - a + b - c, \\ y &= 40 - a - b + c, \\ z &= a - b - c. \end{aligned}$$

Ahora, queremos maximizar la expresión $x + 2y + 3z$ que con estos valores es igual a $100 - 4b - 2c$ y este valor es a lo más 100. Para que sea 100 basta que $b = c = 0$ y para ello, necesitamos un ejemplo donde no haya arcos con extremos ambos azules o ambos verdes. Un ejemplo es poner 10 veces la pareja AV, seguida de 10 veces la pareja AR seguida de 20 veces R alrededor de la circunferencia. Luego, el máximo buscado es 100.

Problema 4. Diez niñas, numeradas del 1 al 10 se sientan alrededor de una mesa de cualquier manera. Cada niña recibe un nuevo número, que es la suma de su número y el de sus dos vecinas. Demuestra que alguna niña recibe un número mayor que 17.

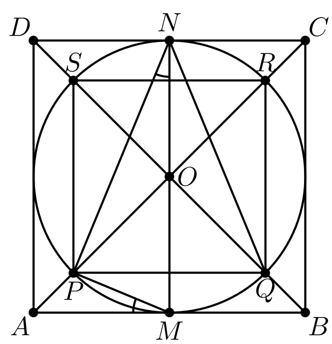
Solución. Supongamos que los números originales de las niñas son $a_0, a_1, \ldots, a_9$. El nuevo número será $b_i = a_{i-1} + a_i + a_{i+1}$, con $0 \leq i \leq 9$ y donde los índices se toman módulo 10.
Notamos que nunca puede darse que dos b_i consecutivos sean iguales, pues si, digamos $b_i = b_{i+1}$ se tendría que $a_{i-1} = a_{i+2}$, lo cual no es posible pues todos los a_i son diferentes. Además, tenemos que $b_0 + b_1 + \cdots + b_9 = 3(a_0 + a_1 + \cdots + a_9) = 3 \cdot 55 = 165$.
Supongamos que $b_i \leq 17$ para cada i. Si hubiera 6 o más iguales a 17 habría dos que son consecutivos y eso es imposible. Luego, hay a lo más 5 iguales a 17. Esto también implica que hay al menos 5 que son menores o iguales que 16. Si todos ellos son iguales a 16 la única opción es que los 16 y los 17 se alternen. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b_i = 16$ para i impar y $b_i = 17$ para i par. Se sigue que:

$$\begin{aligned} b_1 = b_3 &\Rightarrow a_0 + a_1 = a_3 + a_4, \\ b_4 = b_6 &\Rightarrow a_3 + a_4 = a_6 + a_7, \\ b_7 = b_9 &\Rightarrow a_6 + a_7 = a_9 + a_0. \end{aligned}$$

Lo cual implica que $a_1 = a_9$, que es imposible. Esto implica que no todos los que son menores a 17 pueden ser iguales a 16. Luego, la suma de los b_i es estrictamente menor que $5 \cdot 17 + 5 \cdot 16 = 165$, lo cual es una contradicción y la prueba está completa.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrado de diagonales AC y BD y llamémosle O a su centro. Se construye un cuadrado $PQRS$, cuyos lados son paralelos a los de $ABCD$, tal que P está sobre el segmento AO, Q está sobre el segmento BO, R está sobre el segmento CO, S está sobre el segmento DO. Si el área del cuadrado $PQRS$ es la mitad del área del cuadrado $ABCD$ y M es el punto medio del lado AB, ¿Cuánto mide el ángulo $\angle AMP$?

Solución de Francisco Emmanuel Anaya González. Sea Γ la circunferencia inscrita en el cuadrado. Como es tangente en los puntos medios y el cuadrado formado por los puntos medios tiene justamente la mitad del área del cuadrado $ABCD$, tenemos que cualquier cuadrado inscrito en Γ tendrá la mitad del área de $ABCD$. Sea N el punto medio de CD.



Por ángulos inscritos, tenemos que $\angle PNQ = \frac{1}{2}\angle POQ = \frac{1}{2}(90°) = 45°$ y por simetría, $\angle PNM = \frac{\angle PNQ}{2} = 22.4°$. Finalmente, como el ángulo $\angle PMA$ es semiinscrito, concluimos que $\angle PMA = \angle PNM = 22.5°$.

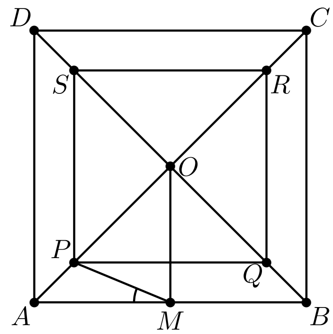
Solución alternativa. Puesto que los lados de $PQRS$ son paralelos a los de $ABCD$, entonces $OP = OQ = OR = OS$ por semejanza. Así, O es el centro de $PQRS$. Ahora bien, llamémosle L a la longitud del lado del cuadrado $ABCD$ y l a la longitud del lado de $PQRS$. El área de un cuadrado se calcula como lado por lado, así que

$$l^2 = \text{Area}(PQRS) = \frac{1}{2}\,\text{Area}(ABCD) = \frac{1}{2}L^2.$$

Por tanto, $l^2 = \frac{1}{2}L^2$ y $l = \frac{L}{\sqrt{2}}$. Ahora bien, como O es el centro de los dos cuadrados,

$$\frac{OA}{OP} = \frac{L}{l} = \sqrt{2},$$

por lo que $OA = \sqrt{2}OP$.



Por otra parte, el triángulo ΔAMO es rectángulo, y como el ángulo $\angle OAM$ mide $45°$, se tiene que ΔAMO es rectángulo isósceles, con $OM = MA$. Aplicando el Teorema de Pitágoras,

$$OA^2 = OM^2 + MA^2 = 2OM^2$$

por lo que $OA = \sqrt{2}OM$. Juntando las dos igualdades tenemos que

$$\sqrt{2}OM = OA = \sqrt{2}OP$$

por lo que $OM = OP$. Así, el triángulo ΔOMP es isósceles, con $\angle MOP = 45°$. Puesto que los ángulos interiores de ΔOMP suman $180°$, cada uno de los ángulos $\angle OMP$ y $\angle OPM$ mide $\frac{180°-45°}{2} = 67.5°$. Por tanto,

$$\angle AMP = \angle AMO - \angle OMP = 90° - 67.5° = 22.5°.$$

Problema 6. Cada uno de los números $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ puede tomar uno de los valores $\sqrt{3} - 1$ y $\sqrt{3} + 1$. Considera la suma

$$\sum_{k=1}^{1007} a_{2k-1}a_{2k} = a_1a_2 + a_3a_4 + \cdots + a_{2013}a_{2014}.$$

¿Cuántos valores enteros distintos puede valer esta suma?

Solución. Observemos que si $a_{2k-1} = \sqrt{3} - 1$ y $a_{2k} = \sqrt{3} + 1$, entonces $a_{2k-1}a_{2k}$ es entero y es igual a 2. Lo mismo ocurre si $a_{2k-1} = \sqrt{3} + 1$ y $a_{2k} = \sqrt{3} - 1$. Por otra parte, si $a_{2k-1} = a_{2k} = \sqrt{3} + 1$, entonces $a_{2k-1}a_{2k} = 4 + 2\sqrt{3}$, que no es entero; similarmente, si $a_{2k-1} = a_{2k} = \sqrt{3} - 1$, entonces $a_{2k-1}a_{2k} = 4 - 2\sqrt{3}$, que tampoco es entero. Luego, la suma será de la forma $a + b\sqrt{3}$, con a y b enteros. Como $\sqrt{3}$ es irracional, la única manera para que la suma sea un entero es que $b = 0$. Por tanto, debe ocurrir que por cada par (a_{2k-1}, a_{2k}) de la forma $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$ debe haber otro par (a_{2l-1}, a_{2l}) de la forma $(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} + 1)$ para que al sumar $a_{2k-1}a_{2k} + a_{2l-1}a_{2l}$ obtengamos un número entero. Ahora bien, si las 1007 parejas (a_{2k-1}, a_{2k}) son conjugadas, es decir, de la forma $(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1)$ o $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}-1)$, entonces cada uno de los 1007 sumandos es igual a 2 y la suma es igual a 2014. Si hay exactamente n parejas (a_{2k-1}, a_{2k}) de la forma $(\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1)$, deberá haber otras

n de la forma $(\sqrt{3}+1, \sqrt{3}+1)$, y las $1007-2n$ restantes serán conjugadas. Así, la suma es igual a

$$4(2n) + 2(1007-2n) = 4n + 2014.$$

Observemos que todas las sumas, para cada n, son distintas, y que n puede tomar los valores desde 0 hasta $\frac{1006}{2} = 503$, ya que $1007-2n$, que es el número de parejas conjugadas, no puede ser negativo. Por tanto, hay 504 valores distintos, a saber, los números pares $2014, 2018, \ldots, 4026$.

Problema 7. Sean x, y, z números reales positivos. Si $\sqrt{a} = x(y-z)^2$, $\sqrt{b} = y(z-x)^2$ y $\sqrt{c} = z(x-y)^2$, demuestra que $a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a} &= -(y+z)(z-x)(x-y),\\
\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b} &= -(z+x)(x-y)(y-z),\\
\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c} &= -(x+y)(y-z)(z-x).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\\
= & -(y+z)(z+x)(x+y)[(y-z)(z-x)(x-y)]^2\\
\leq & \ 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)\\
= & (\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})\\
\leq & \ 0.
\end{aligned}$$

Problema 8. Un poliedro P cumple que cada una de sus aristas es tangente a un esfera y todas sus aristas son congruentes. Si una de las caras de P tiene una cantidad impar de lados, demuestra que existe una esfera que pasa por todos los vértices de P.

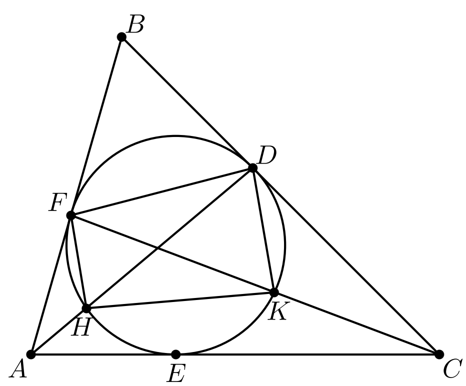
Solución. Sea a la longitud común de las aristas de P, r el radio de la esfera tangente a las aristas de P y O el centro de dicha esfera. Supongamos que ℓ es la longitud del lado de un triángulo isósceles con base a y altura r.
Coloreamos un vértice V de P de verde, rojo o azul si $OV = \ell$, $OV < \ell$ o $OV > \ell$, respectivamente.
Sea UV una arista de P con V de color verde, entonces UOV es un triángulo con base a, altura r y un lado ℓ, por lo tanto $OU = \ell$ y U es verde. De lo anterior podemos concluir que si hay un vértice verde entonces todos los vértices que forman una arista de P con ese vértice son verdes, siguiendo este proceso se puede concluir que todos los vértices de P son verdes (puesto que de esta manera se llega a cualquier vértice de P).

Supongamos entonces que no hay ningún vértice verde, de manera similar si UV es arista de P con V rojo; se sigue que UOV es un triángulo con base a, altura r y un lado menor que ℓ, entonces $OU > \ell$ y U es azul. Sin embargo esto es una contradición puesto que no se puede colorear de manera intercalada los vértices de la cara de P con una cantidad impar de vértices. Por lo tanto, existe un vértice verde, con lo cual concluimos.

Problema 9. El incírculo del triángulo ABC toca a los lados BC y AB en los puntos D y F, respectivamente; e intersecta a la recta AD nuevamente en H y a la recta CF nuevamente en K. Demuestra que $\dfrac{FD\cdot HK}{FH\cdot DK}=3$.

Solución. Sea E el punto donde el incírculo toca al lado AC y sean $x=AF=AE$, $y=BD=BF$ y $z=CD=CE$. Por el teorema de Stewart[4] tenemos que

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{BD}{BC}\cdot AC^2+\frac{CD}{BC}\cdot AB^2-BD\cdot DC=\frac{y(x+z)^2+z(x+y)^2}{y+z}-yz\\ &= x^2+\frac{4xyz}{y+z}. \end{aligned}$$



Por potencia de punto[5] tenemos que $AH=\frac{AF^2}{AD}=\frac{x^2}{AD}$, y por lo tanto

$$HD=AD-AH=\frac{AD^2-x^2}{AD}=\frac{4xyz}{AD(y+z)}.$$

De manera análoga, obtenemos que $KF=\frac{4xyz}{CF(x+y)}$.
De la semejanza de los triángulos CDK y CFD, se sigue que $DK=\frac{DF\cdot CD}{CF}=\frac{DF}{CF}\cdot z$. Por otra parte, de la semejanza de los triángulos AFH y ADF, tenemos que $FH=\frac{DF\cdot AF}{AD}=\frac{DF}{AD}\cdot x$. Aplicando la ley de los cosenos en el triángulo ABC[6] obtenemos $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$, es decir, $(x+z)^2=(x+y)^2+$

[4] Ver en el apéndice el teorema 15.
[5] Ver en el apéndice el teorema 12.
[6] Ver en el apéndice el teorema 9.

$(y+z)^2 - 2(x+y)(y+z)\cos B$. De aquí, $\cos B = \frac{(x+y)^2+(y+z)^2-(x+z)^2}{2(x+y)(y+z)}$. Aplicando ahora la ley de los cosenos en el triángulo BDF y sustituyendo la expresión obtenida previamente para $\cos B$, obtenemos que

$$\begin{aligned} DF^2 &= BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos B \\ &= 2y^2 \left(1 - \frac{(y+z)^2 + (x+y)^2 - (x+z)^2}{2(x+y)(y+z)}\right) \\ &= \frac{4xy^2z}{(x+y)(y+z)}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{KF \cdot HD}{FH \cdot DK} = \frac{\frac{4xyz}{CF(x+y)} \cdot \frac{4xyz}{AD(y+z)}}{\frac{DF}{AD}x \cdot \frac{DF}{CF}z} = \frac{16xy^2z}{DF^2(x+y)(y+z)} = 4.$$

Finalmente, como D, K, H y F son concíclicos, por el teorema de Ptolomeo[7] tenemos que $KF \cdot HD = DF \cdot HK + FH \cdot DK$, y por lo tanto $\frac{FD \cdot HK}{FH \cdot DK} = 3$.

Problema 10. Demuestra que para cada entero positivo k, existen infinitos enteros positivos n tales que los números

$$2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \ldots, 2^n + 3^n - k$$

son todos compuestos.

Solución. Dado cualquier entero positivo k, sea m un entero positivo suficientemente grande tal que $2^m + 3^m - k > 1$. Consideremos los siguientes k enteros:

$$2^m + 3^m - 1, 2^m + 3^m - 2, \ldots, 2^m + 3^m - k,$$

los cuales son todos mayores que 1. Para cada uno de estos enteros, consideremos un divisor primo $p_1, p_2, \ldots, p_k$, respectivamente, es decir, el primo p_i divide al número $2^m + 3^m - i$, y sea

$$n_t = m + t(p_1 - 1)(p_2 - 1)\cdots(p_k - 1),$$

donde t es un entero positivo arbitrario. Para cualquier entero fijo i $(1 \leq i \leq k)$, tenemos que $2^{n_t} \equiv 2^m \pmod{p_i}$. En efecto, si $p_i = 2$, el resultado es claro. Si $p_i \neq 2$, por el pequeño teorema de Fermat[8] tenemos que

$$2^{n_t} = 2^m \cdot 2^{t(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)} \equiv 2^m \cdot 1 = 2^m \pmod{p_i}.$$

De manera análoga, tenemos que $3^{n_t} \equiv 3^m \pmod{p_i}$. Luego, $2^{n_t} + 3^{n_t} - i \equiv 2^m + 3^m - i \equiv 0 \pmod{p_i}$ y $2^{n_t} + 3^{n_t} - i > 2^m + 3^m - i$, de donde $2^{n_t} + 3^{n_t} - i$ es un número compuesto. Por lo tanto, n_t es uno de los enteros positivos n tales que los números $2^n + 3^n - 1, 2^n + 3^n - 2, \ldots, 2^n + 3^n - k$ son todos compuestos. Como t se eligió de manera arbitraria, se sigue que hay una infinidad de tales enteros positivos satisfaciendo las condiciones del problema.

[7]Ver en el apéndice el teorema 14.
[8]Ver en el apéndice el teorema 2.

Concursos Estatales

Olimpiada Estatal de Jalisco, 2014

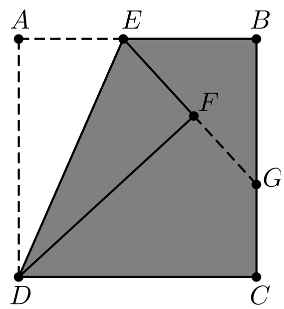
La olimpiada estatal de matemáticas en Jalisco se celebra anualmente en el mes de junio, la fecha se precisa en función de los eventos donde participan los candidatos al concurso, por ejemplo exámenes de ingreso a la preparatoria o la fecha del concurso nacional de ONMAPS. En 2014 la fecha quedó el 14 de junio y la sede fue la Escuela Preparatoria Regional de Tlajomulco de Zúñiga de la Universidad de Guadalajara.

Los profesores de la Escuela sede formaron un Comité Organizador Local y se encargaron de la logística de las aulas para la aplicación del examen, las personas que estarían a cargo de las aulas, los "aplicadores" y un grupo de edecanes que apoyaría en guiar a los estudiantes a sus aulas y llevar y regresar preguntas acerca del examen. El comité académico se integra con el comité estatal y se amplía con profesores y ex-olímpicos interesados en apoyar: el diseño del examen; la mesa de preguntas y; la calificada.

La premiación se hizo en la misma sede una semana después. Al examen asistieron 377 estudiantes de 101 escuelas acompañados por 129 profesores. Se premiaron a 25 para primer lugar; 35 para segundo lugar y; 50 para tercer lugar. Los ganadores de primer lugar asistieron a un curso de entrenamiento durante el verano, al final del curso se seleccionaron a 10 estudiantes que continuaron el entrenamiento, y después de un par de selectivos más conformarían la selección de Jalisco a la 28^a OMM.

A continuación presentamos los problemas del Concurso Estatal de Jalisco de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron una sesión de 4.5 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrado de papel de lado 10 y E un punto en el lado AB. Al doblar el papel a lo largo de la recta DE, el punto A determina al punto F, como se ve en la figura.



La recta EF corta al lado BC en G. Calcular el perímetro del triángulo EBG.

Problema 2. Considera la secuencia de términos:

$$t_1 = 1,\ t_2 = 23,\ t_3 = 456,\ t_4 = 78910,\ t_5 = 1112131415,\ \ldots$$

donde 1 es el único número en el primer término (t_1), el 2 y el 3 forman el segundo término (t_2), 4, 5 y 6 forman el tercer término (t_3), 7, 8, 9 y 10 forman el cuarto término (t_4), $11, 12, 13, 14$ y 15 forman el quinto término (t_5), $16, 17, 18, 19, 20$ y 21 forman el sexto término (t_6) y así sucesivamente. Sea t_n el término en donde aparecen por primera vez los dígitos del número 2014 en ese orden.
¿Cuál es la suma de los dígitos de ese término t_n? Por ejemplo, los dígitos del número 131 aparecen por primera vez en ese orden en t_5 ya que $1112\mathbf{131}415$, en donde la suma de las cifras de t_5 es $1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 = 20$.

Problema 3. Pepillo realiza el siguiente proceso:

- Escoge al azar un número de dos cifras o más y le aplica sucesivamente "una operación".
- "Una operación" consiste en tomar el número, sumar sus dos últimos dígitos (unidades y decenas), borrar en el número los dígitos sumados y en su lugar pone el resultado de la suma.

Por ejemplo, si Pepillo escoge el 1399 al aplicarle "una operación" se obtiene el 1318, ya que se tiene que $13\mathbf{99} \to \mathbf{9}+\mathbf{9} = 18 \to 13\mathbf{18}$; si se vuelve a aplicar "una operación" se obtiene $13\mathbf{18} \to \mathbf{1} + \mathbf{8} = \mathbf{9} \to 13\mathbf{9}$. ¿Cuántos números menores que 2014 tienen la propiedad de que al aplicarles "una operación" varias veces, el resultado en algún momento es 11?

Problema 4. Sea ABC un triángulo cuyos vértices están en una circunferencia de centro O y sean D y E puntos en los lados AC y AB tales que DB y EC son alturas del triángulo. Demuestra que las rectas OA y DE se cortan formando ángulos rectos.

Problema 5. Encuentra todas las parejas de enteros no negativos (a, b) tales que el resultado de la expresión

$$\frac{2(a + 2b) - 5}{a^2 + b^2}$$

es un número entero.

Concurso Nacional 2014 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 9 al 14 de noviembre de 2014 se llevó a cabo en Toluca, Estado de México, el Concurso Nacional de la 28^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República.

Los 19 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Arturo Arenas Esparza (Chihuahua).
Enrique Domínguez Lucero (Chihuahua).
Luis Carlos García Ramos (Chihuahua).
Alonso Granados Baca (Chihuahua).
Antonio López Guzmán (Chihuahua).
Jorge Pat De la Torre Sánchez (Coahuila).
Israel Bonal Rodríguez (Guanajuato).
José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo).
Rodrigo Flores Martínez (Jalisco).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco).
Rodrigo Andrés Cariño Escobar (Morelos).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León).
Víctor Hugo Antonio De la Fuente Jiménez (Nuevo León).
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla).
Pablo Meré Hidalgo (Querétaro).
Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán).

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Enrique Domínguez Lucero (Chihuahua).
Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal).
Luis Alfredo Aceves Astengo (Jalisco).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Iancarlo Ariel Espinosa García (Nuevo León).
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).
Carlos Yeddiel Cortes Ruelas (Tlaxcala).
Fernando Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala).
Manuel Guillermo Flota López (Yucatán).
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Los 8 alumnos preseleccionados para la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche).
Oriol Solé Pi (Distrito Federal).
Leyre Carpinteyro García (San Luis Potosí).
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).
José Ángel Rodríguez Leija (San Luis Potosí).
Mariola Camacho Lie (Veracruz).
Manuel Guillermo Flota López (Yucatán).
Jesús Pablo Rodríguez Castanedo (Zacatecas).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Aylín Aribel Pérez Moriel (Chiapas).
Tania Martínez Villagómez (Guanajuato).
Naomi Mastache López (Guerrero).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Alka Xavier Earathu (Morelos).
Jacqueline Lira Chávez (Morelos).
María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla).
Shaira Rocío Hernández Flores (San Luis Potosí).
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 28^a OMM.

1. Chihuahua.
2. Jalisco.
3. Morelos.
4. Nuevo León.
5. Yucatán.
6. Distrito Federal.
7. Guanajuato.
8. San Luis Potosí.
9. Puebla.
10. Colima.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Sor Juana Inés de la Cruz**", y fue ganado por Tamaulipas. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Sinaloa y Veracruz, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional 2014. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Diremos que dos enteros positivos m y n son *cuates* si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Cada uno de los números del 1 al 4027 está coloreado de verde o rojo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de ellos (si alguno era rojo pasa a verde y si alguno era verde pasa a rojo).
Muestra que tras algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

(Problema sugerido por Jorge Garza Vargas)

Solución de Pablo Meré Hidalgo (Querétaro). Primero notemos que 1 es primo relativo con todo primo p y que si m y n son cuates, también lo serán mk y nk para todo entero positivo k.
Veamos que si x divide a y con $1 \leq x < y \leq 4027$, podemos cambiar de color los números x e y sin afectar el color del resto de los números. Para ello, consideremos la descomposición en primos de $\frac{y}{x} = p_1p_2\cdots p_k$ (los primos p_i se pueden repetir). Hacemos los cambios de colores en las parejas de números (x, xp_1), (xp_1, xp_1p_2), $\ldots$, $(xp_1p_2\cdots p_{k-1}, xp_1p_2\cdots p_{k-1}p_k)$. En estos cambios, cada número, a excepción del x y del y, fue cambiado dos veces, por lo que después de estos cambios, sus colores no fueron alterados, mientras que sí lo fueron los colores de x e y.
Ahora, para cada i entre 2 y 2014 que esté pintado de rojo, hacemos este proceso con los números 1 e i. Terminaremos con todos los números entre 2 y 2014 pintados de verde. Si el 1 terminó de color rojo, basta hacer el cambio con los números 1 y 2015 para terminar.

Problema 2. Un entero positivo a *se reduce* a un entero positivo b, si al dividir a entre su dígito de las unidades se obtiene b. Por ejemplo, 2015 se reduce a $\frac{2015}{5} = 403$. Encuentra todos los enteros positivos que, mediante algunas reducciones, llegan al número 1. Por ejemplo, 12 es uno de tales enteros pues 12 se reduce a 6 y 6 se reduce a 1.

(Problema sugerido por Manuel Enrique Dosal Bustillos)

Solución de Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco). Consideramos un número a cuyo último dígito es d. Es decir, $a = 10c + d$ con c entero no negativo y d un dígito. El número a se reduce al número $b = \frac{10c+d}{d}$. Primero demostraremos que este número b no puede terminar en los dígitos 0, 2, 4 u 8.

- Si b termina en 0, tendríamos que $\frac{10c+d}{d} = 10x$ para cierto entero positivo x, de donde $10c + d = 10dx$ y por tanto 10 divide a d. Como d es un dígito, tendría que ser 0 pero no se puede dividir entre 0.
- Si b termina en 2, tendríamos que $\frac{10c+d}{d} = 10x + 2$ para cierto entero positivo x, de donde $10c + d = 10dx + 2d$ y por tanto $d = 10(c - dx)$. Luego, 10 divide a d y concluimos como en el inciso anterior.
- Si b termina en 4, tendríamos que $\frac{10c+d}{d} = 10x + 4$ para cierto entero positivo x, de donde $10c + d = 10dx + 4d$ y por tanto $3d = 10(c - dx)$. De aquí, 10 divide a d (pues 10 y 3 son primos relativos) y concluimos como antes.
- Si b termina en 8, tendríamos que $\frac{10c+d}{d} = 10x + 8$ para cierto entero positivo x, de donde $10c + d = 10dx + 8d$ y por tanto $7d = 10(c - dx)$. Nuevamente 10 divide a d (pues 10 y 7 son primos relativos) y concluimos como antes.

Claramente 1 se reduce a 1. Sea $n > 1$ un número que se reduce al 1. Si $n > 10$, al reducirse obtendríamos (siendo d su último dígito) $\frac{n}{d} > \frac{10}{10} = 1$, lo que es una contradicción, y $n = 10$ no es posible pues termina en 0. Luego, n tiene que ser un dígito. Para que ese número haya sido la reducción de algún otro, n no puede ser 2, 4 u 8. Veamos los demás casos.

- Para $n = 3$ tenemos que $\frac{10c+d}{d} = 3$, de donde $5c = d$, $d = 5$ y $c = 1$, por lo que el 3 puede venir únicamente del 15. El 15 puede venir únicamente del 75. En general, demostraremos que se obtienen los números de la forma $3 \cdot 5^k$ con k un entero no negativo. Ya tenemos la base inductiva. Para el brinco inductivo, consideramos $\frac{10c+d}{d} = 3 \cdot 5^k$, de donde $10c + d = 3 \cdot 5^k d$, por lo que 5 divide a d y d tiene que ser 5, de donde $10c + d = 3 \cdot 5^{k+1}$. Todos estos números cumplen, pues efectivamente terminan en 5.
- Para $n = 5$ tenemos que $\frac{10c+d}{d} = 5$, de donde 5 divide a d, por lo que tiene que ser igual a 5 y $10c + d = 25$, por lo que el 5 puede venir únicamente del 25. Demostraremos que se obtienen los números de la forma 5^k con k un entero no negativo. Ya tenemos la base inductiva. Para el brinco inductivo, consideramos $\frac{10c+d}{d} = 5^k$, de donde $10c + d = 5^k d$, por lo que 5 divide a d y d tiene que ser 5, de donde $10c + d = 5^{k+1}$. Todos estos números cumplen, pues efectivamente terminan en 5.

- Para $n = 7$ tenemos que $\frac{10c+d}{d} = 7$, de donde $5c = 3d$, por lo que d vuelve a ser igual a 5 y $10c + d = 35$, por lo que el 7 puede venir únicamente del 35. Demostraremos que se obtienen los números de la forma $7 \cdot 5^k$ con k un entero no negativo. Ya tenemos la base inductiva. Para el brinco inductivo, consideramos $\frac{10c+d}{d} = 7 \cdot 5^k$, de donde $10c + d = 7 \cdot 5^k d$, por lo que 5 divide a d y d tiene que ser 5, de donde $10c + d = 7 \cdot 5^{k+1}$. Todos estos números cumplen, pues efectivamente terminan en 5.

- Para $n = 9$ tenemos que $\frac{10c+d}{d} = 9$, de donde $5c = 4d$, $d = 5$ y $c = 4$, por lo que el 9 puede venir únicamente del 45. En general, demostraremos que se obtienen los números de la forma $9 \cdot 5^k$ con k un entero no negativo. Ya tenemos la base inductiva. Para el brinco inductivo, consideramos $\frac{10c+d}{d} = 9 \cdot 5^k$, de donde $10c + d = 9 \cdot 5^k d$, por lo que 5 divide a d y d tiene que ser 5, de donde $10c + d = 9 \cdot 5^{k+1}$. Todos estos números cumplen, pues efectivamente terminan en 5.

- Para $n = 6$ tenemos que $\frac{10c+d}{d} = 6$, de donde $2c = d$ y obtenemos los números 12, 24, 36 y 48. De estos, el único que puede tener antecesor es el 36.

  Para llegar al 36, tuvimos que haber llegado desde un número par que no acaba en 0, por lo que puede ser el $2 \times 36 = 72$, $4 \times 36 = 144$, $6 \times 36 = 216$ y $8 \times 36 = 288$. De estos, el único que puede tener antecesor es el 216.

  Este proceso continuará, pues módulo 10 se tiene que $6^k \equiv 6$, por lo que

  $$\begin{aligned} 2 \cdot 6^k &\equiv 2 \cdot 6 \equiv 2, \\ 4 \cdot 6^k &\equiv 4 \cdot 6 \equiv 4, \\ 6 \cdot 6^k &\equiv 6 \cdot 6 \equiv 6, \\ 8 \cdot 6^k &\equiv 8 \cdot 6 \equiv 8. \end{aligned}$$

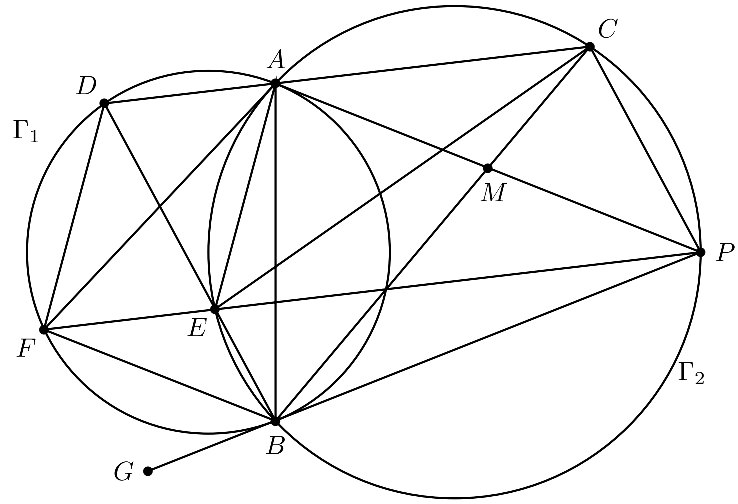
  Luego, obtenemos los números de la forma 6^k, $2 \cdot 6^k$, $4 \cdot 6^k$ y $8 \cdot 6^k$ para cualquier entero no negativo k.

Por lo tanto, los números buscados son el 1, 5^k, $3 \cdot 5^k$, $7 \cdot 5^k$, $9 \cdot 5^k$, 6^k, $2 \cdot 6^k$, $4 \cdot 6^k$ y $8 \cdot 6^k$ para cualquier entero no negativo k.

Problema 3. Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA intersecta de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB intersecta de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE intersecta a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Muestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

(Problema sugerido por Marco Antonio Flores Martínez)

Solución de Rodolfo Flores Jiménez (Puebla). Sea $\alpha = \angle PBA$. Como PA y PB son tangentes a Γ_1, se tiene que $PA = PB$ y $\angle BAP = \angle PBA = \alpha$. Como el ángulo $\angle PAB$ es semi-inscrito en Γ_1 se tiene que $\angle BDA = \angle BAP = \alpha$. Por ángulos inscritos en Γ_2, $\angle PEA = \angle PBA = \alpha$ y $\angle BEP = \angle BAP$, y como $\angle EDA + \angle DAE = \angle BEA = 2\alpha$ (al ser $\angle BEA$ ángulo exterior del triángulo EDA) y $\angle EDA = \alpha$, concluimos que $\angle DAE = \alpha$ y el triángulo EDA es isósceles con $ED = AE$.



Como $\angle DEF = \angle BEP = \alpha$, tenemos que DA es paralela a FP. Sea $\beta = \angle PAC$. Por el paralelismo tenemos que $\angle APE = \beta$. Por ángulos inscritos tenemos que $\angle APE = \angle ACE = \beta$ y $\angle PEC = \angle PAC = \beta$, por lo que $PA = EC$ y el cuadrilátero $AEPC$ es un trapecio isósceles, de donde $\angle CPE = \angle PEA = \alpha$ y por ángulos inscritos en Γ_2, $\angle ABE = \angle APE = \beta$ y $\angle PBC = \angle PAC = \beta$.

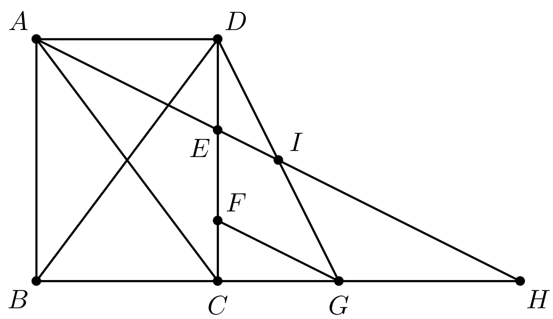
Como $\angle CPE = \angle BEP$ las rectas BE y PC son paralelas. Como también sabemos que DC es paralelo a FP, si demostramos que AP y FB son paralelas, los triángulos APC y FEB serían homotéticos y las rectas AF, EC y BP se intersectarían en el centro de homotecia. Si demostramos que las rectas EP y BC se cortan sobre Γ_1 en un punto que llamaremos Q, tendríamos que, por la suma de ángulos del triángulo BEQ, $\angle EQB = 180° - 2\alpha$, de donde $\angle FBG = 180° - 2\alpha$ (G es un punto en la extensión del segmento PB) y $\angle ABF = \alpha = \angle BAP$ y obtendríamos el paralelismo deseado. Luego, basta demostra que las rectas EP y BC se cortan sobre Γ_1.

Sea Q el otro punto de intersección de Γ_1 con BC y sea Q' el punto de intersección de BC y EP. Por potencia de M sobre Γ_1 y Γ_2 tenemos que $MA^2 = MQ \cdot MB$ y $MA^2 = MB \cdot MC$ (pues $PM = MA$), de donde $MQ = MC$. Por otro lado, como AC y $Q'P$ son paralelas y $PM = MA$, por Tales, tenemos que $MC = Q'M$. Luego, $MQ = MQ'$, por lo que $Q = Q'$ y EP y BC se cortan sobre Γ_1, que era lo que faltaba demostrar.

Problema 4. Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonales AC y BD. Sean E la intersección de la bisectriz del ángulo $\angle CAD$ con el segmento CD, F el punto sobre el segmento CD tal que E es el punto medio de DF y G el punto sobre la recta BC tal que $BG = AC$ (con C entre B y G). Muestra que la circunferencia que pasa por D, F y G es tangente a BG.

(Problema sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

Solución de Isaí Sáenz Meza (Tlaxcala). Sean H e I las intersecciones de AE con BG y DG, respectivamente. Sea $x = \angle DAE = \angle EAC$. Como $\angle AED = \angle HEC$ y los ángulos $\angle EDA$ y $\angle ECH$ son rectos, tenemos que los triángulos EAD y EHC son semejantes, por lo que $\angle CHE = \angle DAE = x$.



Como $\angle CHA = \angle HAC$, tenemos que el triángulo HCA es isósceles con $AC = CH$. Como $AC = BG$, llegamos a que $BG = CH$, de donde $BC = GH$. Por otro lado, como AD y GH son paralelas, se tiene que los triángulos ADI y HGI son semejantes, pero como $AD = GH$, son congruentes, por lo que $DI = IG$. Como además $DE = EF$, por Tales tenemos que EI es paralela a FG.

Como $ABCD$ es cíclico, tenemos que $\angle DBC = \angle DAC = 2x$ y como $BD = AC = BG$, el triángulo BDG es isósceles con $DB = BG$, por lo que $\angle GDB = \angle BGD = 90° - x$. Por la suma de ángulos internos del triángulo DGC tenemos que $\angle GDC = x$ y en el triángulo ADI podemos concluir que $\angle AID = 90° - 2x$. Como AI es paralela a FG tenemos que $\angle FGD = 90° - 2x$ y como $\angle CGD = 90° - x$ concluimos que $\angle CGF = x$. Finalmente, como $\angle GDC = \angle CGF$, tenemos que BG es tangente a la circunferencia que pasa por los puntos D, F y G, como se buscaba demostrar.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 3$. Muestra que

$$\frac{a^2}{a + \sqrt[3]{bc}} + \frac{b^2}{b + \sqrt[3]{ca}} + \frac{c^2}{c + \sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

y determina cuándo se cumple la igualdad.

(Problema sugerido por David Cossío Ruiz y José Antonio Gómez Ortega)

Solución de María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla). Como todos los números involucrados son positivos, podemos usar la desigualdad útil:

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+\sqrt[3]{bc}}+\frac{b^2}{b+\sqrt[3]{ca}}+\frac{c^2}{c+\sqrt[3]{ab}} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}\\ &= \frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}}.\end{aligned}$$

Luego, la desigualdad quedará demostrada si probamos que

$$\frac{9}{3+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab}} \geq \frac{3}{2},$$

la cual es equivalente a $\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab} \leq 3$.
Como b, c y 1 son positivos, por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica se tiene que $\sqrt[3]{bc} \leq \frac{b+c+1}{3}$. Análogamente se tiene que $\sqrt[3]{ca} \leq \frac{c+a+1}{3}$ y que $\sqrt[3]{ab} \leq \frac{a+b+1}{3}$. Sumando las tres desigualdades tenemos que

$$\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}+\sqrt[3]{ab} \leq \frac{2(a+b+c)+3}{3} = \frac{9}{3} = 3,$$

que era lo que faltaba demostrar. Para que la igualdad se alcance, se tienen que dar las igualdades en la desigualdad útil y en cada una de las desigualdades entre las medias. Para que se dé la igualdad en $\sqrt[3]{bc} \leq \frac{b+c+1}{3}$ se necesita que $b = c = 1$. Para las otras dos, es necesario que $c = a = 1$ y que $a = b = 1$, por lo que la igualdad solo podría darse en el caso $a = b = c = 1$. Evaluando, vemos que efectivamente se da la igualdad, por lo que solo se da en este caso.

Problema 6. Para cada entero positivo n, sea $d(n)$ la cantidad de divisores positivos de n. Por ejemplo, los divisores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, por lo que $d(6) = 4$. Encuentra todos los enteros positivos n tales que

$$n + d(n) = d(n)^2.$$

(Problema sugerido por David Cossío Ruiz)

Solución. Consideremos la ecuación

$$d(m(m-1)) = m. \tag{1}$$

Si n es solución del problema, $m = d(n)$ es solución de (1) y si m es solución de (1), $n = m(m-1)$ es solución del problema. Entonces buscaremos las soluciones de (1). La idea principal es usar que para casi todo entero positivo k se cumple que $d(k) \leq \sqrt{k}$. Observemos que si m es solución, m tiene que ser par porque si es impar, el lado izquierdo de (1) es impar y el derecho par porque $m(m-1)$ no es cuadrado.
Consideremos la función f definida en los enteros positivos como

$$f(k) = \frac{d(k)^2}{k}.$$

Si m es tal que $f(m(m-1)) \leq 1$, se tendría que $d(m(m-1)) \leq \sqrt{m(m-1)} < m$, por lo que m no es solución. Notemos que si a y b son enteros primos relativos, $f(ab) = f(a)f(b)$ (es decir, f es multiplicativa). En particular, si $k = p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_r^{a_r}$ es la descomposición como producto de primos de k, entonces $f(k) = f(p_1^{a_1}) \cdot \cdots \cdot f(p_r^{a_r})$. Observemos que las únicas potencias de primos, p^a, que cumplen que $1 < f(p^a)$ son $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ y 3.

$$f(2) = \frac{2^2}{2} = 2, \qquad f(2^3) = \frac{4^2}{2^3} = 2, \qquad f(2^5) = \frac{2^2 \cdot 3^2}{2^5} = \frac{9}{8}$$
$$f(2^2) = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}, \qquad f(2^4) = \frac{5^2}{2^4}, \qquad f(3) = \frac{4}{3}.$$

De lo anterior podemos ver que $f(k) \leq 3$ para cualquier $k > 0$. Supongamos que m es solución y sea p el mayor primo que divide a m. Supongamos que $p \geq 7$; como $p \mid m = d(m(m-1))$, hay un primo en $m(m-1)$ cuyo exponente es al menos $p-1$. Sea q tal primo. Si $q = p$ tendríamos $m(m-1) = p^s k$, con $(k, p) = 1$ y $p - 1 \leq s$, entonces

$$f(m(m-1)) = f(p^s)f(k) \leq f(7^6) \cdot 3 < 1,$$

así que m no sería solución. Entonces $q \neq p$, por lo que $m = q^s p^r k$, con $(pq, k) = 1$. Si $q \geq 3$,

$$f(m(m-1)) = f(q^s)f(p^r)f(k) \leq f(3^6)f(7) \cdot 3 = \frac{7^2 \cdot 2^2}{3^6 \cdot 7} \cdot 3 < 1,$$

lo cual no es posible. Si $q = 2$, k no es divisible por 2 y entonces $f(k) \leq f(3) = \frac{4}{3}$.

$$f(m(m-1)) \leq f(2^6)f(7) \cdot \frac{4}{3} < 1.$$

Entonces $p \leq 5$. Analizaremos los casos $p = 5$, $p = 3$ y $p = 2$.

1. ($p = 5$). Entonces $m = 2^a 3^b 5^c$. Si $c \geq 2$, $5^2 \mid d(m(m-1))$, y pueden pasar dos cosas: Un primo aparece con exponente al menos 24, pero entonces $f(m) < 1$, o hay al menos dos primos $p_1 < p_2$ con exponente al menos 4. En tal caso, escribimos $m(m-1) = p_2^s \cdot k$. Como $p_2 \geq 3$,

   $$f(m(m-1)) \leq f(3^4)f(k) \leq \frac{5^2}{3^4} \cdot 3 < 1.$$

   Entonces $c = 1$ y hay un primo con exponente al menos 4 en $m(m-1)$. Se puede ver que ese primo debe ser 2, de lo contrario $f(m(m-1)) \leq 1$. Ahora, $m = 2^4 \cdot 3^b \cdot 5$. Observemos que si m es múltiplo de 3, como también es par, $m-1$ no tiene factores 3 ni 2 y entonces $f(m-1) \leq 1$, por lo tanto $f(m(m-1)) \leq f(m)$. Supongamos que $b \geq 3$.

   $$f(m(m-1)) \leq f(m) \leq f(2^4)f(3^3)f(5) = \frac{20}{27} < 1.$$

   Entonces sólo falta probar $b \in \{0, 1, 2\}$, pero ninguno produce una solución.

2. ($p = 3$). Tenemos $m = 2^a \cdot 3^b$ y queremos $2^a \cdot 3^b = (a+1)(b+1)d(m-1)$, entonces $a+1$ y $b+1$ son de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta$. Los primeros números así son 2, 3, 4 y 6. Si $b+1 \geq 6$,

$$f(m(m-1)) \leq f(m) \leq f(2^a)f(3^5) \leq 1,$$

entonces $b+1 \in \{2,3,4\}$. Supongamos que $b=3$. Si $a+1 \geq 6$

$$f(m(m-1)) \leq f(m)f(2^5)f(3^3) = \frac{2}{3} < 1,$$

entonces $a+1 \in \{2,3,4\}$. Revisando estos tres casos se ve que ninguno produce una solución. Si $b=2$,

$$f(m(m-1)) \leq f(m) = f(2^a)f(3^2) = f(2^a),$$

por lo tanto $a \in \{1,2,3,4,5\}$. Sólo $a=2$ nos da una solución, $m=36$.

Si $b=1$, $m = 2^a \cdot 3$. Hay dos opciones: $3 \mid a+1$ o $a+1$ es potencia de dos. En la primera, $a+1 = 2^s \cdot 3$. Si $s=0$ encontramos la solución $m=12$, si $s=1$, m no es solución y si $s \geq 2$, $f(m(m-1)) \leq 1$. Si $a+1 = 2^s$, la desigualdad $f(m(m-1)) > 1$ se cumple sólo para $s=1$ y $s=2$, pero en ninguno de estos casos m es solución.

3. ($p = 2$). En este caso $m = 2^a$ y queremos $2^a = (a+1)d(m-1)$, entonces $a+1 = 2^s$ para algún $s \geq 1$. Como a es impar, 3 no divide a $m-1$ y entonces $f(m-1) \leq 1$. Como $f(m(m-1)) \leq f(m)$, necesitamos que $1 < f(m)$. Podemos ver que esta desigualdad se cumple sólo para $s=1$ y $s=2$, lo cual da $m=2$ y $m=8$, respectivamente, que sí son soluciones.

En conclusión, las soluciones de (1) son 2, 8, 12 y 36, entonces las soluciones n de la ecuación original son 2, 56, 132 y 1260.

Problemas y Soluciones de Concursos Internacionales

XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 19 al 27 de septiembre del año 2014, en la ciudad de San Pedro Sula, Honduras, se realizó la 29^a Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, en la que participaron 22 países con un total de 82 estudiantes.

Toda la delegación mexicana fue premiada. Los cuatro alumnos que nos representaron, obtuvieron tres medallas de oro y una medalla de plata, logrando así una destacada participación. Ellos son: Kevin William Beuchot Castellanos (de Nuevo León), Luis Xavier Ramos Tormo (de Yucatán), Pablo Meré Hidalgo (de Querétaro) y Luis Enrique Chacón Ochoa (de Chihuahua). Kevin, Luis Xavier y Pablo obtuvieron medalla de oro, y Luis Enrique obtuvo medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron: Marco Antonio Figueroa Ibarra (líder) y Daniel Perales Anaya (tutor).

Sus logros colocaron a México en el primer lugar general por países en el evento, quedando por encima de países como Argentina, Brasil, España, Perú y Portugal, entre otros. No es la primera vez que se logra esto. En 2006 y 2011 fuimos también primer lugar, sin embargo no es frecuente por ser fuerte la competencia.
La delegación mexicana ganó por segunda ocasión la Copa Puerto Rico, que se otorga al país de mejor avance relativo a los dos últimos años.

A continuación presentamos los problemas de la XXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas junto con las soluciones de los alumnos mexicanos. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cada entero positivo n, se define $s(n)$ como la suma de los dígitos de n. Determine el menor entero positivo k tal que

$$s(k) = s(2k) = s(3k) = \cdots = s(2013k) = s(2014k).$$

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Primero demostraremos que $s(10^k - 1) = s(r \cdot (10^k - 1))$ para $1 \leq r \leq 10^k + 1$. Para ello, sea $r = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$. Como multiplicar por 10 no altera la suma de los dígitos, podemos suponer que $a_n \neq 0$. Tenemos que $r \cdot (10^k - 1)$ es igual a

$$\overline{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}(a_n - 1)\underbrace{99\ldots 9(9 - a_1)(9 - a_2)\ldots(9 - a_{n-1})(10 - a_n)}_{k \text{ dígitos}}},$$

por lo que $s(r \cdot (10^k - 1)) = 9k = s(10^k - 1)$. Esto demuestra que 9999 cumple las condiciones del problema. Ahora demostraremos que es el menor.
Si $a \leq 999$, por lo demostrado tenemos que $s(a) = s(999a) = s(999) = 27$, lo que implica que $a = 999$ pues es el único número de tres dígitos que alcanza esa suma de dígitos. Pero como $s(999) = 27 \neq 54 = s(1001 \cdot 999)$, 999 tampoco cumple. Resta ver si hay algún número con 4 dígitos que cumple.
Supongamos que $a = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ cumple. Al multiplicarlo por 1001 obtenemos

$$\overline{a_1 a_2 a_3 (a_4 + a_1) a_2 a_3 a_4},$$

si $a_4 + a_1 < 10$. En este caso tendríamos que $s(1001a) = 2s(a)$, lo cual es una contradicción y $a_4 + a_1$ tiene que ser mayor a 10 para que se haga el acarreo.
Por otro lado, como $a_4 + a_1 \leq 18$, este acarreo a a_3 será de solo una unidad y como $a_3 + 1 \leq 10$ y $a_2 + 1 \leq 10$, tenemos que podría llegar solo un acarreo de 1 a a_1.
Si el acarreo no llega al a_1, el primer dígito del número será justo el a_1. Los últimos tres dígitos serán a_2, a_3 y a_4. Pero además, sí hubo acarreo. Eso implica que la suma del segundo y del tercer dígito será al menos 1, justo por ese acarreo que no llegó a a_1. Luego, la suma de dígitos de $s(1001a)$ es al menos $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 1$ lo cual es mayor que $s(a)$.
Si el acarreo llega a a_1 y $a_1 < 9$, obtendríamos la misma cota, por lo que el acarreo tiene que llegar y a_1 tiene que ser 9. Para que el acarreo llegue, se necesita que $a_2 = a_3 = 9$. Luego, $a = 999a_4$.
Pero como $s(a) = s(2a)$, módulo 9 tenemos que a tiene que ser múltiplo de 9, por lo que $a = 9990$ o $a = 9999$. Si $a = 9990$ cumple, también cumpliría $a = 999$, pero ya vimos que no, por lo que a tiene que ser 9999 y terminamos.

Problema 2. Halle todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes reales tales que $P(2014) = 1$ y, para algún entero c, se cumple que $xP(x - c) = (x - 2014)P(x)$.

Solución de Pablo Meré Hidalgo. Supongamos que $P(2014 - kc) = 0$ para cierto entero positivo k. Sustituyendo $x = 2014 - kc$ en la ecuación obtenemos que

$$(2014 - kc)P(2014 - (k + 1)c) = (-kc)P(2014 - kc) = 0,$$

de donde $kc = 2014$ o $P(2014 - (k + 1)c) = 0$.

Sustituyendo ahora $x = 2014$ en la expresión inicial obtenemos que $P(2014 - c) = 0$. Aplicando lo que acabamos de demostrar, tenemos que $c = 2014$ o $2014 - 2c$ es raíz de $P(x)$. Si $2014 - 2c$ es raíz de $P(x)$, nuevamente por lo demostrado previamente, tenemos que $2c = 2014$ o $2014 - 3c$ es raíz de $P(x)$. Continuando de esta forma tenemos que o bien c divide a 2014 o bien $2014 - kc$ es raíz de $P(x)$ para todo entero positivo k. Si esto último sucediera, tendríamos que el polinomio $P(x)$ tendría que ser el polinomio cero, contradiciendo que $P(2014) = 1$. Luego, c debe dividir a 2014, esto es, $2014 = kc$ para algún entero positivo k y así los números

$$2014 - c,\ 2014 - 2c,\ \ldots,\ 2014 - (k-1)c,\ 2014 - kc = 0,$$

son raíces de $P(x)$. Esto es, los números $0, \frac{2014}{k}, 2(\frac{2014}{k}), \ldots, (k-1)(\frac{2014}{k})$ son raíces de $P(x)$. Entonces,

$$P(x) = \prod_{j=0}^{k-1} \left(x - j\left(\frac{2014}{k}\right)\right) Q(x),$$

para cierto polinomio $Q(x)$ con coeficientes enteros. Sustituyendo esta expresión en la ecuación original, tenemos que

$$x \prod_{j=0} (x - (j+1)c)\, Q(x-c) = (x - 2014) \prod_{j=0}^{k-1} (x - (j+1)c)\, Q(x),$$

de donde $Q(x) = Q(x - c)$. Por otro lado, tenemos que

$$1 = P(2014) = Q(2014) \prod_{j=0}^{k-1} \left(2014\left(1 - \frac{j}{k}\right)\right) = \frac{Q(2014)2014^k k!}{k^k},$$

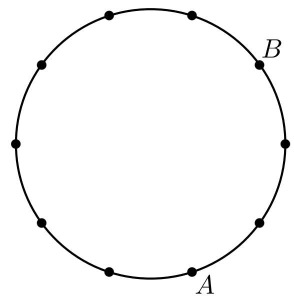
de donde $Q(2014) = \frac{k^{k-1}}{2014^k (k-1)!}$. Como $Q(x) = Q(x-c)$, tenemos que el polinomio $Q(x) - \frac{k^{k-1}}{2014^k(k-1)!}$ tiene una infinidad de raíces (todas las de la forma $2014 - jc$ con j entero no negativo), por lo que tiene que ser el polinomio idénticamente 0, por lo que $Q(x)$ es el polinomio idénticamente igual a $\frac{k^{k-1}}{2014^k(k-1)!}$. Por lo tanto,

$$P(x) = \frac{k^{k-1}}{2014^k (k-1)!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(x - \left(\frac{2014j}{k}\right)\right)$$

para cada divisor k de 2014.

Problema 3. Sobre una circunferencia se marcan 2014 puntos. Sobre cada uno de los segmentos cuyos extremos son dos de los 2014 puntos, se escribe un número real no negativo. Se sabe que para cualquier polígono convexo cuyos vértices son algunos de los 2014 puntos, la suma de los números escritos en sus lados es menor o igual que 1. Determine el máximo valor posible de la suma de todos los números escritos.

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Definimos la longitud de la cuerda AB como la cantidad de puntos en el arco más pequeño que comprende, aumentada en 1. En la siguiente figura se muestra un ejemplo con 10 puntos. En este caso, la longitud de la cuerda AB es igual a 3. Como hay 2014 puntos, la longitud de cada cuerda será un entero entre 1 y 1007.



Para cada k entre 1 y 1007, definimos $f(k)$ la suma de los números asignados a las cuerdas con longitud k. Primero demostraremos que si a y b son enteros positivos con $a + b = 1007$, se tiene que $f(a) + f(b) \leq 1007$. Para ello, numeraremos los vértices del 1 al 2014 en el sentido de las manecillas del reloj. Para cada k entre 1 y 2014 consideraremos el cuadrilátero con vértices en k, $k + a$, $k + a + b$ y $k + 2a + b$ (todo módulo 2014). Como a y b son menores a 1007, se tiene que las longitudes de este cuadrilátero son a, b, a y b. Tenemos que para cada uno de esos cuadriláteros, la suma de los números asignados a sus cuatro aristas es menor que 1, por lo que la suma de todas las aristas de todos estos cuadriláteros es menor a 2014. Por otro lado, cada arista de longitud a está en dos cuadriláteros de este estilo y lo mismo sucede con cada arista de longitud b. Luego $2(f(a) + f(b)) \leq 2014$, de donde

$$f(a) + f(b) \leq 1007, \tag{2}$$

como queríamos demostrar. Ahora, si para cada k entre 1 y 2014 consideramos un triángulo con vértices en k, $k+a$ y $k+1007$ (este triángulo tendrá cuerdas con longitud a, b y 1007) notamos que cada arista con lado a y cada arista con lado b aparece en exactamente uno de estos triángulos, mientras que las aristas con longitud 1007 (los diámetros) aparecen en dos de esos triángulos. Luego,

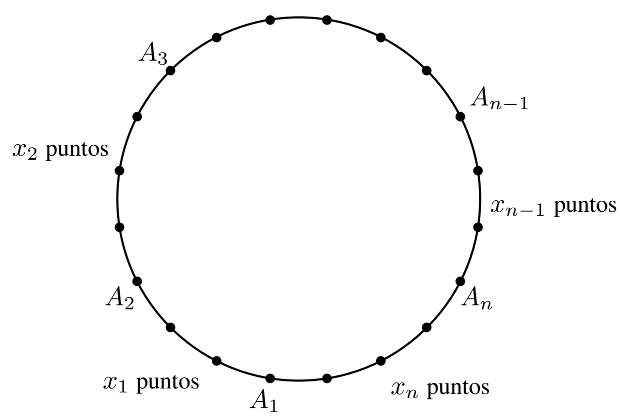
$$f(a) + f(b) + 2f(1007) \leq 2014, \tag{3}$$

Si sumamos las desigualdades (2) y (3) con $a = 1$ y $b = 1006$ tenemos que $2(f(1) + f(1006) + f(1007)) \leq 3 \cdot 1007$, por lo que $f(1) + f(1006) + f(1007) \leq (\frac{3}{2})1007$. Por otro lado, sumando las desigualdades (2) para (a, b) igual a $(2, 1005)$, $(3, 1004)$,$\dots$, $(503, 504)$, tenemos que $f(2) + f(3) + \cdots + f(2005) \leq 1007(502)$. Sumando esta desigualdad con la pasada, llegamos a que

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(1007) \leq 1007(\frac{3}{2} + 502) = \frac{1007^2}{2},$$

por lo que la suma de las aristas es menor o igual que $\frac{1007^2}{2}$. Si encontramos un ejemplo con esta suma, habremos terminado.

Para el ejemplo, a cada arista de longitud k asignamos el número $\frac{k}{2014}$. Para ver que funciona, consideramos una arista AB. Digamos que entre A y B hay x números en el arco AB (aquel que va de A a B en el sentido de las manecillas del reloj) y y el número de puntos en el otro arco. Por la manera de elegir la longitud de AB, se tiene que ésta es menor o igual que $\frac{x+1}{2014}$ (pues o es este valor o es igual a $\frac{y+1}{2014}$ con $y < x$). Consideremos ahora un polígono convexo $A_1A_2 \ldots A_n$. Tenemos que la suma de las n aristas es menor o igual que $\frac{(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_n+1)}{2014} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+n}{2014}$. Pero como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ es justo el número de vértices fuera del polígono, se tiene que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + n = 2014$, por lo que la suma es menor o igual que 1 y este arreglo cumple las condiciones del problema.



Ahora, para cada k entre 1 y 1006 se tienen exactamente 2014 aristas con longitud k. Por lo tanto, $f(k) = 2014(\frac{k}{2014}) = k$ y $f(1007) = 1007(\frac{1007}{2014}) = \frac{1007}{2}$. Por la suma de Gauss, tenemos que

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(1006) + f(1007) = \frac{1006(1007)}{2} + \frac{1007}{2} = \frac{1007^2}{2},$$

por lo que la suma los números en las aristas es igual a la cota que habíamos encontrado y terminamos.

Problema 4. Se tienen N monedas, de las cuales $N-1$ son auténticas de igual peso y una es falsa, de peso diferente de las demás. El objetivo es, utilizando exclusivamente una balanza de dos platos, hallar la moneda falsa y determinar si es más pesada o más liviana que las auténticas. Cada vez que se pueda deducir que una o varias monedas son auténticas, entonces todas estas monedas se separan inmediatamente y no se pueden usar en las siguientes pesadas. Determine todos los N para los que se puede lograr con certeza el objetivo. (Se pueden hacer tantas pesadas como se desee.)

Solución de Luis Enrique Chacón Ochoa. Primero notamos que solo tiene sentido poner la misma cantidad de monedas en cada balanza, pues si pongo una cantidad diferente, no obtengo información, pues como la moneda falsa puede pesar más o puede pesar menos que las auténticas, el resultado no me dice nada.

Luego, solo consideraré pesadas donde hay la misma cantidad de monedas en cada platillo. Si una pesada resulta equilibrada, todas las monedas involucradas resultarán auténticas y solo me quedaré con las restantes, mientras que si la pesada resulta en desequilibrio, el resto de monedas son auténticas y simplemente me quedo con las que estuvieron en la pesada.

Para $N = 1$ el problema es trivial porque la única moneda debe ser falsa, y para $N = 2$ es imposible decidir pues no sabemos si la moneda falsa pesa más o menos que una moneda real. Para $N = 3$ solo puedo poner una moneda en cada lado. Si resulta un desequilibrio, ya no puedo usar la otra moneda y no podré saber cuál de las dos es la falsa.

Para $N = 4$ sí es posible. Sean las monedas 1, 2, 3 y 4. Peso las monedas 1 y 2 contra las 3 y 4 y supongo, sin pérdida de generalidad que las monedas 1 y 2 pesaron menos. Ahora peso la moneda 1 contra la moneda 2. Si no hay equilibrio, la que pese menos tendrá que ser la falsa y pesará menos que las auténticas. Si hay equilibrio, peso la moneda 3 contra la 4 y no puede haber equilibrio, pues la falsa es una de ellas. La moneda que pese más será la falsa y pesará más que las auténticas.

Para $N = 5$, puedo poner una o dos monedas en cada platillo y si resulta equilibrio, me quedaría con 3 y 1 monedas, respectivamente y esos casos no son posibles.

Para $N = 6$ numero las monedas del 1 al 6. Peso 1, 2 y 3 contra 4, 5 y 6 y supongo, sin pérdida de generalidad, que las monedas 1, 2 y 3 pesaron menos. Si la moneda falsa es la 1, 2 o 3, tiene que pesar menos que las demás, mientras que si la falsa es la 4, la 5 o la 6, tendría que pesar más que las auténticas. Peso ahora 1 contra 2. Si no hay equilibrio, la que pese menos será la falsa. Si hay equilibrio, peso 3 y 4 contra 5 y 6 y no puede haber equilibrio. Si 3 y 4 pesan más, la única opción es que la 4 sea la diferente y pese más que las demás. Si 5 y 6 pesan más, quedan tres opciones: que la diferente sea la 3 y pese menos o que sea la 5 o la 6 y que pesen más. Ahora peso 5 y 6. Si pesan igual, la diferente es la 3 y si no, la que pese más es la falsa. Por lo tanto, sí es posible para $n = 6$.

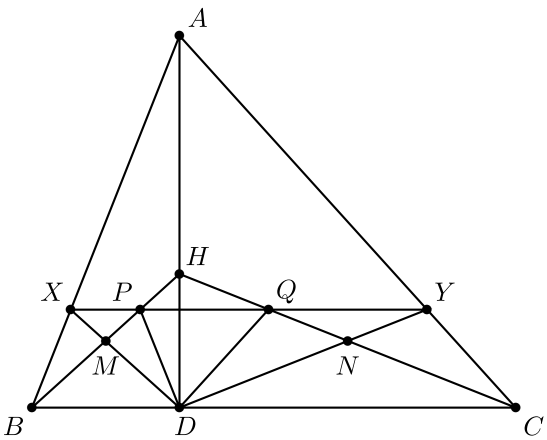
Primero demostraremos por inducción fuerte que es imposible para N impar. Ya tenemos la base de inducción con $N = 1$. Supongamos que es imposible para todos los impares entre 1 y N (donde N es cierto impar). Si tenemos $N + 2$ monedas, en la primera pesada usaremos un número par de monedas y si resultan en equilibrio, tengo que descartarlas y me quedarían algún número impar menor o igual a N de monedas posibles y por la hipótesis de inducción esto es imposible, lo que concluye la inducción.

Supongamos ahora que tenemos un número par de monedas mayor que 6. Ponemos dos monedas en cada platillo. Si resultan diferentes me reduzco a esas 4 monedas y acabo como ya se mostró. Si resultan diferentes, las descarto y tengo 4 monedas menos. Vuelvo a hacer lo mismo, poniendo dos monedas en cada platillo. Si siempre resultan iguales, eventualmente llegaremos a 4 o 6 monedas y terminamos.

Por lo tanto, es posible para todos los N pares mayores que 2.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo y H el punto de intersección de sus alturas. La altura desde A corta a BC en D. Sean M y N los puntos medios de BH y CH, respectivamente. DM y DN intersectan a AB y AC en X e Y, respectivamente. Si XY intersecta a BH en P y a CH en Q, demuestre que H, P, D y Q están en una misma circunferencia.

Solución de Luis Enrique Chacón Ochoa. Sean $\alpha = \angle CAH = \angle HBC$, $\beta = \angle HAB = \angle BCH$ y $\theta = \angle ABH = HCA$. Se tiene que $\alpha + \beta + \theta = 90°$. Como M y N son los centros de los circuncírculos de los triángulos BDH y HDC, respectivamente, se tiene que los triángulos MBD y NDC son isósceles, se tiene que $\angle MDB = \alpha$ y $\angle CDN = \beta$.



Tenemos que $\angle DXB = 180° - (\theta + \alpha) - \alpha = 2\beta + \theta$, por lo que $\angle AXD = 2\alpha + \theta$. Análogamente $\angle CYD = 2\alpha + \theta$ y $\angle AYD = 2\beta + \theta$. Luego, $\angle AYD + \angle AXD = (2\beta + \theta) + (2\alpha + \theta) = 180°$, por lo que el cuadrilátero $AYDX$ es cíclico. Por lo tanto $\angle DYX = \angle DAX = \beta$ y $\angle DXY = \angle DAY = \alpha$. Como $\angle PXD = \angle PBD$ tenemos que el cuadrilátero $PXBD$ es cíclico y

$$\angle HPD = 180° - \angle DPB = 180° - \angle DXB = \angle DXA = 2\alpha + \theta.$$

Análogamente, $\angle HQD = 2\beta + \theta$. Finalmente, $\angle HPD + \angle HQD = (2\alpha + \theta) + (2\beta + \theta) = 180°$, por lo que el cuadrilátero $HPDQ$ es cíclico, como queríamos demostrar.

Problema 6. Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, denotamos para cada $x \in X$, $f^1(x) = f(x)$ y, para cada $j \geq 1$, $f^{j+1}(x) = f(f^j(x))$. Decimos que $a \in X$ es un punto fijo de f si $f(a) = a$. Para cada número real x, definimos $\pi(x)$ como la cantidad de primos positivos menores o iguales que x.
Dado un número entero positivo n, decimos que $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ es *catracha* si $f^{f(k)}(k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Pruebe que:
a) Si f es catracha, entonces f tiene al menos $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.
b) Si $n \geq 36$, existe una función catracha con exactamente $\pi(n) - \pi(\sqrt{n}) + 1$ puntos fijos.

Solución de Pablo Meré Hidalgo. Sea f una función catracha. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, definimos s_k como el menor entero positivo tal que $f^{s_k}(k) = k$. Como la función f cumple que $f^{f(k)}(k) = k$ para cada k, s_k está bien definida. Por la definición de s_k se tiene que $s_k = s_{f(k)}$.

Demostraremos que $f(k)$ es múltiplo de s_k para cada k. Por el algoritmo de la división, $f(k) = qs_k + r$ con $0 \leq r < s_k$. Si $r > 0$ se tiene que

$$k = f^{f(k)}(k) = f^{qs_k+r}(k) = f^r(f^{qs_k}(k)) = f^r(k),$$

lo cual es una contradicción, pues por definición de s_k, ningún número de la forma $f^r(k)$ con $0 < r < s_k$ puede ser igual a k. Luego, $r = 0$ y $f(k)$ es múltiplo de s_k.
Veamos ahora que 1 es un punto fijo de f. Como $f^{f(k)}(k) = k$, la función inversa f^{-1} existe. Sea $k = f^{-1}(1)$, es decir, $f(k) = 1$. Luego, $k = f^{f(k)}(k) = f^1(k) = 1$, por lo que $f(1) = 1$. Como $\pi(n) - \pi(\sqrt{n})$ es justamente la cantidad de primos p tales que $\sqrt{n} < p \leq n$, basta que demostremos que cada uno de estos primos es punto fijo de f.
Sea p uno de tales primos y sea $k = f^{-1}(p)$, es decir, $f(k) = p$. Se tiene que $s_p = s_k$ divide a p. Si $s_k = s_p = p$, tenemos que p está en el ciclo de p números $\{p, f(p), f^2(p), \ldots, f^{p-1}(p)\}$. Como están en el mismo ciclo, todos tienen el mismo valor s_k y se tiene que $s_k = p$ divide a cada uno de estos p números. Luego, alguno de ellos tiene que ser al menos p^2 y como $p > \sqrt{n}$, $p^2 > n$, lo cual es una contradicción.
Para crear la función f de la segunda parte, todos los números en $\{1, 2, \ldots, n\}$ que no sean el 1 o un primo p con $\sqrt{n} < p \leq n$ serán puestos en conjuntos de la forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ tal que m divide a cada uno de ellos y $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots, f(a_m) = a_1$. Por construcción, esta función cumplirá que $f^{f(k)}(k) = k$.
Considero el mayor primo $p \leq \sqrt{n}$ que divide a $n!$ y tomo todos sus múltiplos entre 1 y n. Los agrupo sucesivamente en conjuntos de p números. Me quedarán a lo más $p-1$ números y puedo elegirlos de manera que sean algunos del conjunto $\{2p, 3p, \ldots, (p-1)p\}$. Esto, pues si no tuviera el número $(p-1)p$, tendría exactamente los primeros p múltiplos de p y los pongo en un conjunto.
Con los números que quedan hago lo mismo con el siguiente primo más grande y continúo este proceso hasta $p = 5$. Restan los números que solo tienen a los primos 2 o 3 en su factorización. Como $n \geq 36$, al menos tengo los números 6, 12, 18, 24 y 36. Sin considerar estos 5 números, separo los números en los conjuntos Y con múltiplos de 2 y Z con múltiplos de 3 (de cualquier manera). Si puedo incluir esos cinco números en los conjuntos Y y Z de manera que Y sea par y Z sea múltiplo de 3, podría hacer los conjuntos que faltan y terminar. Para ello, veremos todos los casos de los residuos módulo 2 de $|Y|$ y módulo 3 de $|Z|$.

1. $|Y|$ es par.
   a) $|Z| \equiv 0 \pmod 3$. Agregamos 2 números a Y y 3 a Z.
   b) $|Z| \equiv 1 \pmod 3$. Agregamos los 5 números a Z.
   c) $|Z| \equiv 2 \pmod 3$. Agregamos 4 números a Y y 1 a Z.
2. $|Y|$ es impar.
   a) $|Z| \equiv 0 \pmod 3$. Agregamos los 5 números a Y.
   b) $|Z| \equiv 1 \pmod 3$. Agregamos 3 números a Y y 2 números a Z.
   c) $|Z| \equiv 2 \pmod 3$. Agregamos 1 número a Y y 4 números a Z.

Por lo tanto, siempre es posible construir la función requerida.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para el año 2015.

4 al 14 de diciembre de 2014, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento.

25 de enero al 3 de febrero de 2015, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes de entrenamiento.

Febrero

Publicación del 25^o número de la revista "Tzaloa".

Primera quincena de febrero

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico y nombramiento de delegado).

25 de febrero al 1 de marzo, Bucarest, Rumania

VII Romanian Master of Mathematics.

Marzo

Publicación del folleto introductorio de la OMM.

7 al 15 de marzo, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen de la XXVII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico y del selectivo para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

17 de marzo

Envío a los estados del examen eliminatorio propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

21 de marzo

Aplicación del examen eliminatorio en los estados resgistrados con este propósito (puede aplicarse después).

7 al 13 de abril, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la IV Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

14 al 20 de abril, Minsk, Bielorrusia

IV Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

30 de abril al 10 de mayo, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar a la delegación que representará a México en la 56^a Olimpiada Internacional (6 participantes), la delegación que representará a México en la XVII Olimpiada Centroamericana y del Caribe (3 participantes) y la preselección para la XXX Olimpiada Iberoamericana.

Mayo

Publicación del 26^o número de la revista "Tzaloa".

2 de junio

Envío a los estados del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

6 de junio

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

15 al 21 de junio, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

21 al 27 de junio, México

XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

29 de junio al 7 de julio, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Julio

Publicación del 27^o número de la revista "Tzaloa".

4 al 16 de julio, Chiang Mai, Tailandia

56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

23 al 28 de julio, Changchun, China

Competencia Internacional de Matemáticas.

31 de agosto

Envío a los estados del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

4 y 5 de septiembre

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

12 al 19 de septiembre, Cuernavaca, Morelos

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar a la delegación para la XXX Olimpiada Iberoamericana (4 alumnos).

Octubre

Publicación del 28^o número de la revista "Tzaloa".

Octubre

Curso para entrenadores.

Noviembre

Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

1 al 7 de noviembre

Entrenamiento previo a la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

6 al 14 de noviembre, Mayagüez, Puerto Rico

XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño teorema de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos. En particular, si $n + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 5 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 6 (Teorema de Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 7 (Teorema de Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 8 (Desigualdad del triángulo)**.** *Los números positivos a, b y c son las medidas de los lados de un triángulo si y sólo si se cumplen las desigualdades $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$.*

Definición 5 (Puntos y rectas notables de un triángulo)**.**

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*

2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*

3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*

4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*

6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*

7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*

8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Teorema 9 (Ley de los cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Definición 6 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 10 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 11 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 12 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 13 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Teorema 14 (Teorema de Ptolomeo)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.*

Teorema 15 (Teorema de Stewart)**.** *Sea ABC un triángulo y AX una ceviana de longitud p que divide al segmento BC en dos segmentos BX y XC de longitudes m y n, respectivamente. Entonces, $a(p^2 + mn) = b^2 m + c^2 n$ donde a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Efraín Casillas Carrillo*

CONALEP Prof. J. Refugio Esparza Reyes
pay3@hotmail.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*

Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias
carlos.yee@uabc.edu.mx, www.ommbc.org

Baja California Sur–*Jesús Eduardo Ríos Torres*

CBTIS #62,
eduardo.rios.73@gmail.com
www.institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Hernán Rafael Díaz Martín*

Coordinación de Intervención Académica, Dirección General CONALEP
herrdiaz@me.com

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*

Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas, UNACH
msolerza@unach.mx

Chihuahua–*Héctor Daniel García Lara*

Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
hector@ommch.org, www.ommch.org

Coahuila–*Silvia Carmen Morelos Escobar*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila
silvia.morelos@gmail.com

Colima–*Carmen Jazmín Isaías Castellanos*

Facultad de Ciencias, Universidad de Colima
jazminisaias@hotmail.com, ommcol@ucol.mx

Distrito Federal–*Isabel Alicia Hubard Escalera*

Instituto de Matemáticas, UNAM, cubículo 214
omd@im.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*

Universidad Juárez del Estado de Durango, Escuela de Matemáticas
angelhiram@hotmail.com

Estado de México–*Saúl Díaz Alvarado*

Facultad de Ciencias, UAEMex
sda@uaemex.mx

Guanajuato–*María Fernanda de la Torre Robles*

Departamento de Matemáticas, Universidad de Guanajuato
mfdelatorre@cimat.mx, www.ommgto.wordpress.com

Guerrero–*Vicente Castro Salgado*

Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas
grolimath@gmail.com

Hidalgo–*Federico Menendez-Conde Lara*

Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA
fmclara@uaeh.edu.mx

Jalisco–*José Javier Gutiérrez Pineda*

Preparatoria 7, Universidad de Guadalajara
jjgtzp@hotmail.com

Michoacán–*David Meza Alcántara*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana
dmezaal@gmail.com

Morelos–*Radmila Bulajich Manfrino*

Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias
bulajich@uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*

Universidad Autónoma de Nayarit
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
aalanis56@hotmail.com, sites.google.com/site/eommnl

Oaxaca–*Marcelino Ramírez Ibañez*

Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan
mramirez@unpa.edu.mx

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
arjuarez@fcfm.buap.mx

Querétaro–*Iván González García*

Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Ingeniería
zelaznog_navi@hotmail.com, ommqro@gmail.com

Quintana Roo–*Víctor H. Soberanis Cruz*

División de Ciencias e Ingeniería, Universidad de Quintana Roo
vsobera@uqroo.edu.mx

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*

Casa Olímpica, San Luis Potosí, San Luis Potosí
floreseugenio@hotmail.com, ommslp.blogspot.com

Sinaloa–*Maria Guadalupe Russell Noriega*

Facultad de Ciencias Fis-Mat, Universidad Autónoma de Sinaloa
mgrussell@uas.edu.mx, mgrusselln@gmail.com

Sonora–*José María Bravo Tapia*

Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas
jmbravo@gauss.mat.uson.mx

Tabasco–*Jaír Remigio Juárez*

Universidad Juárez Autónoma de Tabasco, Div. Académica de Ciencias Básicas
jair.remigio@ujat.mx

Tamaulipas–*Ramón Jardiel Llanos Portales*

Universidad Autónoma de Tamaulipas
Unidad Académica Multidisciplinaria de Ciencias, Educación y Humanidades
rllanos@uat.edu.mx, www.matetam.com

Tlaxcala–*Mauro Cote Moreno*

Secretaría de Educación Pública de Tlaxcala
anpmlogimat@hotmail.com

Veracruz–*Porfirio Toledo Hernández*

Universidad Veracruzana, Facultad de Matemáticas
ptoledo@uv.mx

Yucatán–*Pedro David Sánchez Salazar*

Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas
pedro.sanchez@uady.mx, www.matematicas.uady.mx

Zacatecas–*Nancy Janeth Calvillo Guevara*

Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas
ncalvill@mate.reduaz.mx, nautilus.uaz.edu.mx/olimpiada/

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

David Cossío Ruiz
Depto. de Física y Matemáticas
Universidad Autónoma de Cd. Juárez
sirio11@gmail.com

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
Universidad Nacional Autónoma de México
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Julio Rodríguez Hernández
SEMS, Universidad de Guadalajara
juliorod@sems.udg.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://ommenlinea.org/

¡Síguenos en facebook y en twitter!

http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas

@ommtw