TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2015, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Octubre de 2015.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2015, Número 4

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su cuarto y último número del año 2015. En esta edición de tu revista encontrarás el artículo *Sobre el Problema 4 del Concurso Nacional de la OMM 2013*, escrito por María Luisa Pérez Seguí. En él, la autora hace un análisis del Problema 4 del concurso nacional de la OMM del año 2013, comenzando por la motivación que dió origen al problema y desarrollando varias soluciones distintas del problema, algunas de las cuales hacen uso de conceptos sobre *teoría de gráficas*.

Asimismo y como cada fin de año, al final de la revista encontrarás un interesante artículo autobiográfico. En esta ocasión, tenemos el orgullo de poder presentar parte de la biografía del primer matemático brasileño ganador de la medalla fields en el año 2014, y que también fuera medallista de oro de la olimpiada internacional de matemáticas de 1995.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

En la sección *Concursos Estatales* encontrarás el examen de la cuarta eliminatoria de la olimpiada de matemáticas en Guanajuato del año 2015. Queremos expresar nuestro agradecimiento a María Fernanda de la Torre Robles, delegada estatal de Guanajuato, por compartirnos el material y a la vez invitamos al resto de los delegados estatales a que nos envíen sus exámenes selectivos para publicarlos en la revista y de esta manera enriquecer el intercambio de material entre todos.

En la sección internacional hallarás los resultados y los exámenes con soluciones de la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe donde México ocupó, como ya es costumbre, el primer lugar de la competencia; así como los resultados y los exámenes con soluciones de la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, donde México obtuvo su tercera medalla de oro y una de sus mejores participaciones quedando en el top de los 20 mejores países de la competencia. En esta sección también hemos incluido los problemas de la 2^a Olimpiada Iraní de Geometría en la que México participó por primera vez.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *Problemas de Práctica* y de *Entrenamiento*, mismas que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas. Por último, no olvidamos incluir los datos actualizados del Comité Olímpico Nacional.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1996. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2015-2016 y, para el 1° de julio de 2016, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 22 al 27 de noviembre de 2015 en Guadalajara, Jalisco. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2015 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Hong Kong, julio de 2016) y a la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2016).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2016).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO)[2] a celebrarse en el mes de abril de 2016.

[2]La Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas nace en 2012 como una manera de estimular la participación femenil en olimpiadas de matemáticas, siguiendo el ejemplo de China que ya contaba con una olimpiada exclusiva para mujeres. El modelo de competencia de esta olimpiada es el mismo que el de la IMO, con la diferencia de que las delegaciones nacionales son de cuatro participantes en lugar de seis. A pesar de que la olimpiada es europea, es posible la participación de equipos no europeos por invitación.

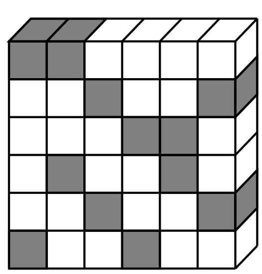
Sobre el Problema 4 del Concurso Nacional de la OMM 2013

Por María Luisa Pérez Seguí

Nivel Avanzado

Durante la coordinación del problema 4 del Concurso Nacional de 2013 surgieron algunas preguntas y observaciones que me parecieron interesantes y que describo a continuación. El problema del Concurso decía:

Problema 0. Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos grises y otros blancos, de manera que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos grises y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios; por ejemplo, en la ilustración, $n = 6$ y se muestra una posible rebanada del cubo de $6 \times 6 \times 1$ (formada por 6 subprismas de $1 \times 6 \times 1$).

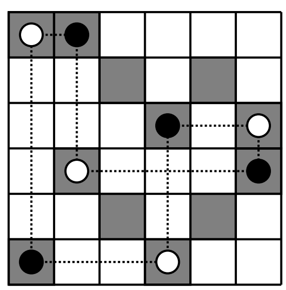


Probar que es posible sustituir la mitad de los cubitos grises por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito gris.

Empezaremos con un problema en el plano, como motivación para la creación del problema, en donde no es necesaria la condición de la separación entre los cubitos grises.

Problema 1. En una cuadrícula de $n \times n$ algunos cuadraditos son grises y otros son blancos, de manera que en cada renglón y en cada columna hay exactamente dos cuadraditos grises. Probar que es posible sustituir la mitad de los cuadraditos grises por blancos para que en cada renglón y en cada columna haya exactamente un cuadradito gris.

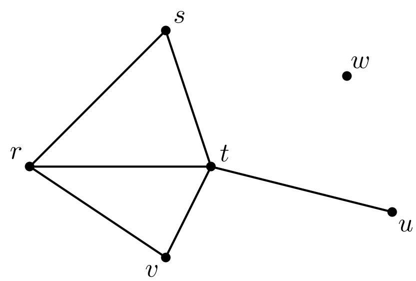
Solución 1a. Pongamos un punto en cada cuadradito gris y pongamos una línea entre una pareja de estos puntos si están en el mismo renglón o en la misma columna. Como las líneas alternan horizontal con vertical, la configuración formada es una unión de ciclos de longitud par, de manera que los puntos pueden pintarse de blanco y negro en forma alternada, lo cual corresponde a la selección buscada. La siguiente figura muestra uno de los ciclos que se forman (en dicha figura se tienen dos ciclos pero solo se está dibujando uno).



La solución anterior puede reescribirse en términos de las llamadas gráficas y, aunque no es necesario, lo que expondremos después se expresa de manera más sencilla con el lenguaje de gráficas, por lo que a continuación incluimos un pequeño resumen de lo que necesitaremos de este tema.

Gráficas

Una *gráfica* consta de dos conjuntos: uno de vértices y otro que consta de pares no ordenados de vértices, a los cuales se les llama aristas. El conjunto de vértices se suele representar por puntos y las aristas por líneas que unen los dos vértices que las forman. Un ejemplo es el siguiente:



la cual consta de 6 vértices y 6 aristas. Las gráficas sirven para representar muchas cosas, por ejemplo:

- Los vértices pueden ser personas y una arista entre dos de ellas indica que son amigos.

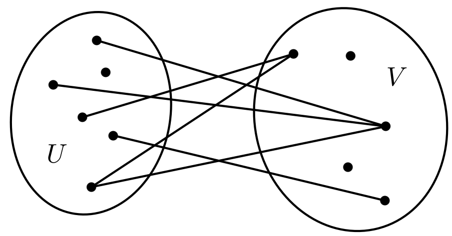
- Los vértices pueden ser países y una arista entre dos de ellos indica que tienen frontera.

- Los vértices pueden ser islas y una arista entre dos de ellas indica que hay un puente que las conecta.

Si una arista a consta de los vértices u y v, escribimos $a = uv$. En este caso decimos que v es *vecino* de u (y, a su vez, u es vecino de v). El *grado* de un vértice v es el número $\delta(v)$ de aristas que lo contienen. Por ejemplo, en la gráfica anterior, el conjunto de vértices es $\{r, s, t, u, v, w\}$ y las aristas son rs, rt, rv, st, tv y tu; los grados de los vértices son: $\delta(r) = 3$, $\delta(s) = 2$, $\delta(t) = 4$, $\delta(u) = 1$, $\delta(v) = 2$ y $\delta(w) = 0$.

Un *ciclo* en una gráfica es una sucesión de aristas que comienza en un vértice, recorre algunos vértices y llega al que iniciaron. Si k es el número de aristas se dice que el ciclo tiene *longitud* k. Por ejemplo, en la gráfica de arriba hay dos ciclos de longitud 3, a saber, (rs, st, tr) y (rt, tv, vr), y uno de longitud 4: (rv, vt, ts, sr). No es difícil demostrar que cuando una gráfica tiene todos sus vértices de grado 2, entonces es la unión de ciclos ajenos.

Decimos que una gráfica $\mathcal{G}$ es *bipartita* si el conjunto de vértices se puede partir en dos subconjuntos no vacíos U y V de manera que entre los vértices de cada conjunto no haya aristas. En este caso escribimos $\mathcal{G} = (U, V)$. El siguiente es un ejemplo de una gráfica bipartita.



Tenemos la siguiente caracterización de gráficas bipartitas.

Proposición. Una gráfica es bipartita si, y solo si, no tiene ciclos de longitud impar.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Consideramos una gráfica bipartita. Coloreamos los vértices de uno de los conjuntos de rojo y los del otro, de azul. Dado que no hay aristas entre vértices del mismo conjunto, en cualquier ciclo, los vértices estarán alternando estos dos colores y no es posible que haya ciclos de longitud impar.

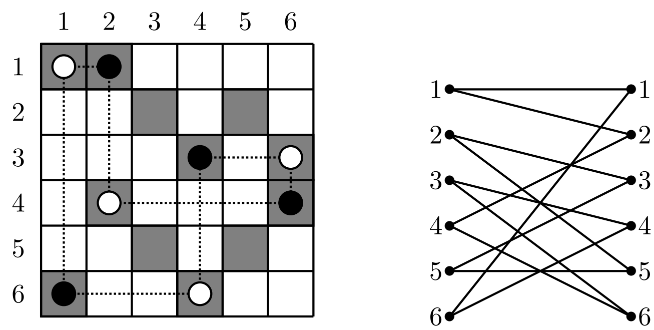
$(\Leftarrow)$ Supongamos que cierta gráfica no tiene ningún ciclo de longitud impar. Tomemos un vértice cualquiera v y pintémoslo de azul. Ahora, pintemos todos los vértices vecinos de v de rojo; posteriormente, pintemos de azul a todos los vértices vecinos de estos rojos, y así sucesivamente. Si en algún momento un vértice debe ser pintado de dos colores distintos, eso quiere decir que hemos llegado hasta él por dos caminos de distinta paridad, y por lo tanto forman un ciclo de longitud impar, lo cual es imposible. Por lo tanto, los vértices de color azul y los vértices de color rojo forman una partición del conjunto de vértices de la gráfica, lo que significa que la gráfica es bipartita.

En el lenguaje de gráficas la solución del problema 1 se puede reescribir como sigue:

Solución 1b. Construyamos la gráfica en que los vértices son los cuadraditos grises y se pone una arista entre dos vértices si, y solo si, los cuadraditos que representan están en el mismo renglón o en la misma columna. Cada vértice tiene grado 2, así que es unión de ciclos ajenos. Como las aristas se alternan entre horizontal y vertical, no hay ciclos de longitud impar, así que se pueden pintar de blanco vértices alternados en cada ciclo.

Una segunda solución del problema 1, la cual motivará la solución del problema 4, está basada en el lenguaje de gráficas bipartitas. Esta requiere algo de práctica en gráficas, pues los vértices terminarán siendo renglones o columnas de nuestra cuadrícula.

Solución 1c. Construyamos la gráfica bipartita (U, V) en que los elementos de U son los renglones, los de V son las columnas y hay arista de $u \in U$ a $v \in V$ si, y solo si, el cuadradito en posición (u, v) es gris.

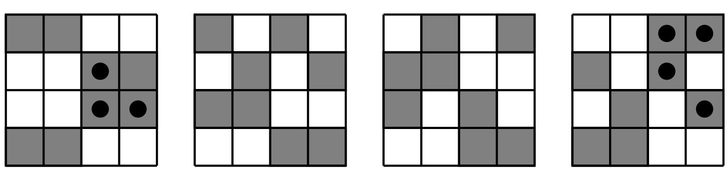


Como cada vértice tiene grado 2 y es bipartita, la gráfica es unión de ciclos de longitud par, así que resolvemos el problema escogiendo alternadamente aristas de cada ciclo y repintamos de blanco los cuadraditos representados por esas aristas.

Ahora veamos que la hipótesis de separación de los cuadraditos grises es necesaria en el cubo.

Problema 2. Prueba que es falso el resultado del problema anterior en dimensión 3, es decir, que existe un cubo de $n \times n \times n$ construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos grises y otros blancos, en el que en cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos grises, pero en el que no se pueden sustituir algunos cubitos grises por blancos de manera que quede exactamente uno por cada subprisma.

Solución 2. Bastará construir un ejemplo en el que algún ciclo en la gráfica correspondiente tenga longitud impar. En la siguiente figura se muestran las cuatro rebanadas de un cubo de $4 \times 4 \times 4$ y se señalan los vértices que forman el ciclo.



Procedamos ahora a resolver el problema del Concurso Nacional (problema 0) de dos maneras distintas: la primera (y más difícil) será usando un procedimiento similar al que vimos en el plano.

Solución 0a. Indiquemos con tres coordenadas las posiciones relativas de los cubitos dentro del cubo grande y construyamos una gráfica como sigue:

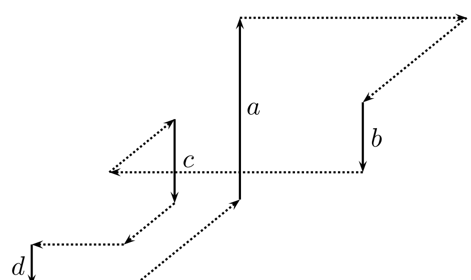
Reemplazamos cada cubito negro por un vértice y ponemos una arista entre todas las parejas de vértices que tengan exactamente dos coordenadas iguales (es decir, que los

cubitos que representen estén en un mismo subprisma de $\mathcal{P}$).
La gráfica construida satisface las siguientes dos condiciones:

1. Cada vértice está en un ciclo. En efecto, si algún vértice no estuviera en ningún ciclo, necesariamente habría vértices que están al final de algún camino y esos vértices tendrían grado 1, lo que contradice la condición del problema.

2. La gráfica no tiene ciclos de longitud impar. Para ver esto podemos proceder de cualquiera de las siguientes formas:

   - La condición de que los cubitos negros están separados a distancia impar nos dice que cada arista une dos puntos cuya suma de coordenadas tiene distinta paridad, y por tanto el ciclo se tiene que cerrar con una cantidad par de aristas y así poder terminar con la misma suma inicial.
   - Al caminar sobre las aristas, lo que se mueve en el camino en un sentido (horizontal, vertical o hacia el fondo), tiene que regresar en sentido inverso y, como todas las longitudes son impares, la única forma de lograrlo es que la paridad del número de segmentos en cada una de las tres direciones sea par.



$a = b + c + d$

Tenemos entonces que los vértices se pueden pintar con rojo y con azul de manera alternada en los ciclos. Los cubitos de cada prisma de $\mathcal{P}$ están representados uno por un vértice azul y el otro por un vértice rojo.
La separación de los cuadraditos grises en la hipótesis del problema 0 hace que haya una solución mucho más sencilla usando el procedimiento conocido como *coloración*, que consiste en partir un conjunto en subconjuntos a manera de distinguir los de cada conjunto de los demás de una manera eficiente; en este caso, se distinguen algunos cubitos grises de otros como veremos a continuación.

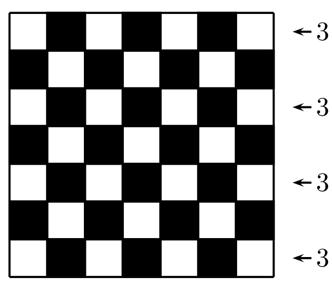
Solución 0b. Indiquemos con tres coordenadas la posiciones relativas de los cubitos dentro del cubo grande. En cada subprisma hay un cubito gris con suma de coordenadas par y otro con suma de coordenadas impar así que basta con escoger todos los de una de estas dos categorías. (Una manera equivalente de decir lo mismo es colorear todos los cubitos del cubo con los colores rojo y azul en forma alternada, como si fuera ajedrez en tercera dimensión; precisamente uno de los colores coincidirá con los cubos que

están en una posición con suma de coordenadas par y el otro color a los que tienen suma de coordenadas impar).
Algunos participantes en el Concurso Nacional intentaron demostrar que el tamaño de la cuadrícula debía ser par. Aunque no lo lograron y no era necesario probar esto para resolver el problema, quedó la incógnita. La intuición que tuvieron esos estudiantes fue buena pues la respuesta es afirmativa como veremos a continuación.

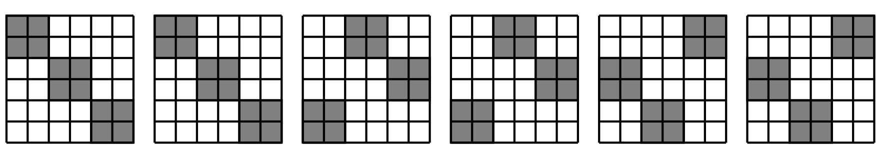
Problema 3. Determinar para qué enteros positivos n es posible construir cubos que cumplan las hipótesis del problema del concurso nacional (Problema 0).

Solución 3. Vamos a ver que es posible si, y solo si, n es par.

Primero, si n es impar, digamos, $n = 2k + 1$ no es posible porque al colorear como tablero de ajedrez con rojo y azul de manera que las esquinas sean azules, en cada uno de los $2k+1$ renglones hay que escoger un lugar rojo para poner un cubito blanco, pero cada renglón impar (hay $k + 1$ de estos) tiene k rojos (uno en cada columna par, de las cuales hay solo k). Por el principio de las casillas, se repite la elección de la columna.



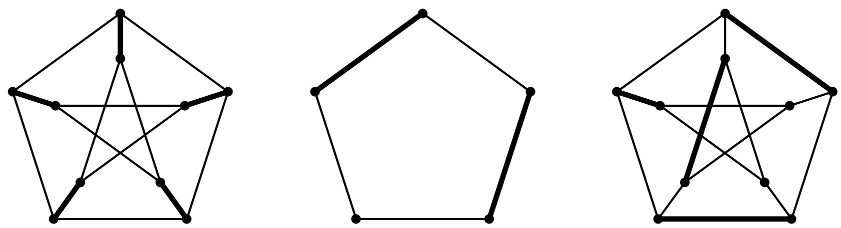
Ahora, si n es par basta repetir el cubo gris de 2×2 moviéndolo sobre las diagonales paralelas a la principal, por capas, como se ilustra en la figura a continuación en el caso $n = 6$.



Es decir, la primera capa de $n \times 2$ se construye poniendo el cubo gris de 2×2 en la diagonal; en las siguientes dos capas se ponen cubos de 2×2 grises encima de la diagonal principal y en la esquina inferior izquierda, etc.

Un problema muy bonito que usa ideas similares a la segunda solución del problema 1 requiere de un teorema de Teoría de Gráficas que expondremos abajo. Necesitamos algunas definiciones y el Teorema de Hall, el cual enunciaremos y demostraremos al final de este artículo.

Un *apareamiento* en una gráfica es cualquier conjunto de aristas ajenas entre sí. Decimos que un determinado apareamiento *satura* algún conjunto de vértices W si cada vértice de W está en alguna de las aristas del apareamiento. En el siguiente dibujo mostramos algunos apareamientos. Los segmentos del apareamiento aparecerán más gruesos que los otros.



Teorema de Hall. Sea $\mathcal{G}$ una gráfica bipartita, $\mathcal{G} = (U, V)$ con partición (U, V). Entonces es posible escoger un apareamiento que satura a U si, y solo si, para todo $S \subset U$ se tiene que el conjunto $N(S)$ que consta de los vértices de V vecinos de al menos un vértice de S tiene por lo menos tantos elementos como S (es decir, $|S| \leq |N(S)|$).

Un arreglo cuadrado de enteros no negativos tal que la suma de los elementos de cada renglón y de cada columna es la misma constante $k \in \mathbb{N}$ se llama *cuadrado mágico de suma k*.

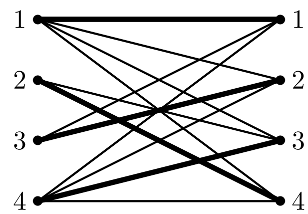
Un ejemplo sorprendente de la aplicación del Teorema de Hall nos dice exactamente cómo son los cuadrados mágicos.

Problema 4. Un arreglo cuadrado de números es cuadrado mágico si, y solo si, es la suma de cuadrados mágicos de suma 1 (estos últimos llamados *matrices de permutación*).

Solución 4. Es claro que si C es suma de cuadrados mágicos de suma 1, entonces C es cuadrado mágico, como se ilustra en el ejemplo siguiente:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&2&2\\3&1&0&0\\0&2&1&1\end{bmatrix}.$$

Recíprocamente, sea C un cuadrado mágico de suma k. Procedemos por inducción sobre k. Para $k = 1$ no hay nada que demostrar. Supongamos que $k > 1$ y sea n el número de renglones de C. Construyamos la gráfica bipartita (U, V) en que U es el conjunto de renglones, V es el conjunto de columnas, y hay una arista de $u \in U$ a $v \in V$ si, y solo si, en la posición (u, v) de C hay un elemento distinto de 0. Por ejemplo, la gráfica que se construiría a partir del cuadrado mágico de arriba sería la siguiente (y se ha señalado el apareamiento que correspondería al primer cuadrado mágico de suma 1).



Veamos que esta gráfica satisface las hipótesis del Teorema de Hall. Sea $S \subset U$ y digamos que $|S| = r$. Sea l el número de columnas que tienen elementos distintos de 0 en estos renglones (es decir, $l = |N(S)|$). Sumemos de dos formas distintas todos los elementos de los renglones de S. Por renglones, la suma de ellos es rk; por columnas, su suma es menor o igual que lk. Entonces $rk \leq lk$ de donde $r \leq l$, como queríamos. Aplicando el Teorema de Hall, tenemos que hay un apareamiento de U a V que satura U. Sea C_1 el arreglo rectangular de números que tiene 1 en cada una de las posiciones de C determinadas por el apareamiento y sea $C_2 = C - C_1$; entonces C_1 es un cuadrado mágico de suma 1 y C_2 es un cuadrado mágico de suma $k - 1$, de donde, por hipótesis de inducción, tenemos el resultado.

Demostración del Teorema de Hall. La implicación ($\Rightarrow$) es clara. Supongamos entonces que para todo $S \subset U$ se tiene que $|S| \leq |N(S)|$. Procedemos por inducción sobre $|U|$. Para $|U| = 1$ la conclusión es obvia. Tomemos una gráfica bipartita (U, V) en la que $|U| > 1$ y $|S| \leq |N(S)|$ para todo $S \subset U$, y supongamos que el resultado es cierto para cualquier gráfica bipartita (U', V') que cumpla la hipótesis y en la que $|U'| < |U|$. Tenemos dos casos:

1. Para todo subconjunto propio S de U se tiene que $|S| < |N(S)|$. Tomemos un elemento u_0 de U y sea v_0 vecino de u_0. Sean $U' = U \setminus \{u_0\}$ y $V' = V \setminus \{v_0\}$. Veamos que la gráfica bipartita $\mathcal{G}' = (U', V')$ satisface las hipótesis del teorema: Sea $S \subset U'$; entonces el conjunto de sus vecinos en $\mathcal{G}'$ es el mismo que en $\mathcal{G}$ salvo tal vez un elemento menos (v_0), pero como estamos suponiendo que la desigualdad es estricta en $\mathcal{G}$, entonces en $\mathcal{G}'$ se tiene la desigualdad (no necesariamente estricta) requerida. Al completar el apareamiento que nos da la hipótesis de inducción con la arista u_0v_0 tenemos el apareamiento buscado.

2. Existe un subconjunto propio S_0 de U tal que $|S_0| = |N(S_0)|$. Tomemos dicho S_0 y usemos la hipótesis de inducción para encontrar un apareamiento entre S_0 y $N(S_0)$. Sean $U' = U \setminus S_0$ y $V' = V \setminus N(S_0)$. Bastará encontrar apareamiento de U' a V'. Para ello, por hipótesis de inducción, debemos ver que la gráfica $\mathcal{G}' = (U', V')$ satisface la hipótesis. Sea $T \subset U'$; usando la hipótesis de la proposición, nuestra suposición sobre S_0 y que el número de elementos de una unión ajena de conjuntos es la suma del número de elementos de los conjuntos

tenemos

$$\begin{aligned} |T| + |S_0| = |T \cup S_0| &\leq |N_{\mathcal{G}}(T \cup S_0)| \\ &= |N_{\mathcal{G}}(T) \cup N_{\mathcal{G}}(S_0)| = |N_{\mathcal{G}'}(T) \cup N_{\mathcal{G}}(S_0)| \\ &= |N_{\mathcal{G}'}(T)| + |N_{\mathcal{G}}(S_0)| = |N_{\mathcal{G}'}(T)| + |S_0|, \end{aligned}$$

de donde, cancelando $|S_0|$, tenemos $|T| \leq |N_{\mathcal{G}'}(T)|$, que es lo que necesitábamos.

Ejercicios

1. Si v es un vértice de una gráfica, su *grado* es el número de aristas de las que v es un extremo. Sea G una gráfica en la que todos los vértices tienen el mismo grado. Si G tiene 28 aristas, ¿cuántos vértices puede tener?

2. Probar que el número de personas en el mundo que tienen un número impar de hermanos es par.

3. Dados u, v vértices en una gráfica, un *camino* C de u a v es una sucesión de vértices alternados con aristas $C = (u = v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_n, v_n = v)$ tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, la arista a_i tiene por extremos a los vértices distintos v_{i-1} y v_i. Una gráfica G es *conexa* si dados cualesquiera dos vértices u y v existe un uv-camino. Probar que si G es una gráfica, entonces ella o su complemento $\overline{G}$ es conexa. (Nota: $\overline{G}$ es la gráfica que tiene los mismos vértices de G pero dos vértices en $\overline{G}$ forman arista si, y solo si, no la forman en G.)

4. ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener una gráfica no conexa con n vértices? (*Sugerencia:* Recordar que $\binom{r}{2} = 1 + 2 + \cdots + (r-1)$.)

5. Hay un tesoro en cada cubo de $1 \times 1 \times 1$ de los 343 que forman un cubo de $7 \times 7 \times 7$. Un duende se encuentra en el cubo central; en cada momento puede pasar de un cubo a cualquier otro que comparta un cuadrado con el cubo donde está. Resulta que si regresa a un cubo por el que ya pasó, entonces un monstruo le quita todos los tesoros que ha obtenido hasta el momento. Las salidas están en las 8 esquinas del cubo. ¿Es posible que el duende salga del cubo con todos los 343 tesoros?

6. En una fiesta ningún hombre bailó con todas las mujeres, pero cada mujer bailó con al menos un hombre. Probar que hay dos parejas (m, h) y (m', h') tales que m y h bailaron entre sí, m' y h' bailaron entre sí, pero m no bailó con h' ni tampoco lo hicieron m' y h. (*Sugerencia:* Considerar un arreglo rectangular de $0'$s y $1'$s que represente el problema poniendo 1 en el lugar (i, j) si el i-ésimo hombre bailó con la j-ésima mujer y 0 si no. Tomar un renglón i con máximo número de $1'$s.)

7. Demostrar, con un diseño constructivo, que dado un número par $2n$ de equipos de volibol, es posible organizar un torneo de manera que en cada ronda haya n juegos y después de $2n-1$ rondas cada equipo haya competido exactamente una vez con cada uno de los demás.

8. En un torneo, cada participante debe competir exactamente una vez contra cada uno de los demás. Hay $2n$ participantes y ya se jugaron dos rondas. Probar que todavía se pueden partir los equipos en dos grupos de n jugadores de manera que los participantes de un mismo grupo no hayan competido todavía entre ellos.

9. En un cuarto hay n niños y n juguetes. Cada niño escoge r de los juguetes y resulta que cada juguete es escogido por r niños. Probar que se pueden organizar r rondas de juego de manera que en cada ronda cada niño juegue con alguno de los juguetes que eligió sin repetir.

Bibliografía

1. Bóna M., *A walk through combinatorics*, World Scientific, 2002.

2. Engel A., *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1997.

3. Pérez Seguí M. L., *Combinatoria*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2a edición, 2009.

4. Pérez Seguí M. L., *Combinatoria Avanzada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a edición, 2010.

Problemas de práctica

Como ya es costumbre, presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2015. Hay que recordar que el nivel de dificultad de estos problemas va en aumento conforme va transcurriendo el año, comenzando con niveles básicos en el primer número para acabar con problemas del nivel del concurso nacional en el cuarto. Esto, para ayudarte a preparar mejor para este concurso. Procuramos tener problemas de todas las áreas y con las ideas que más aparecen en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Esperamos que los disfrutes.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviándonos problemas que te hayan parecido interesantes y retadores, cuya solución desees compartir con la comunidad olímpica mexicana. Para ello ponemos a tu disposición la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. A un tablero de 11×11 se le ha quitado la casilla central. ¿Será posible cubrir el tablero con fichas de 8×1 y 1×8 sin que se traslapen piezas ni se salgan del tablero?

Problema 2. Sea ABC un triángulo isósceles de base AC. Considera un punto M dentro del triángulo que esté del mismo lado de C con respecto a la mediatriz de AC y que cumpla que $\angle AMC = 2\angle ABC$. Sea N un puntos sobre el segmento AM que cumple que $\angle BNM = \angle ABC$. Demuestra que $BN = CM + MN$.

Problema 3. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales tales que $a_1 = 1$ y para $n \geq 2$ se tiene que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n$. Encuentra el valor de a_{2015}.

Problema 4. Determina todos los enteros positivos N tales que al borrar el dígito de la izquierda, N es 2015 veces el número obtenido.

Problema 5.

(a) ¿Para qué enteros positivos n existen enteros x e y tales que su máximo común divisor sea 1998 y su mínimo común múltiplo sea $n!$?

(b) ¿Para cuáles de estos n el número de parejas (x, y) con $x < y$ y que cumplen lo anterior es menor que 1998?

Problema 6. Un país tiene 200 aeropuertos conectados con algunos vuelos directos. Para cualesquiera tres aeropuertos, hay dos de ellos que no están conectados con un vuelo directo. ¿Cuál es la máxima cantidad de vuelos directos que puede haber?

Problema 7. En un tablero de 2015×2015 van a jugar por turnos un par de jugadores A y B siendo A el primero en tirar. En cada turno cada uno de ellos selecciona un subtablero de $n \times n$ con $1 \leq n \leq 2015$ y borra todos los cuadraditos de una de las dos diagonales. Además, no es posible seleccionar un subtablero con cuadraditos borrados. Gana la persona que borra el último cuadradito. Demuestra que alguno de los jugadores tiene estategia ganadora y descríbela.

Problema 8. Encuentra todos los enteros l, m, n tales que sean primos relativos por parejas y tales que el número $(l+m+n)\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ sea entero.

Problema 9. En el triángulo acutángulo ABC, el pie de la perpendicular desde B a CA es E. Sea l la recta tangente al circuncírculo de ABC en B. El pie de la perpendicular desde C a l es F. Demuestra que EF es paralela a AB.

Problema 10. Demuestra que todo entero positivo n satisface la desigualdad

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < n^{2n}.$$

Problema 11. Encuentra un entero positivo de seis dígitos que sea cuadrado perfecto y tal que el número formado por sus últimos tres dígitos sea el sucesor del número formado por los tres primeros.

Problema 12. Sean M y N puntos sobre los lados AB y AC del triángulo ABC, respectivamente. Si $\frac{BM}{MA}+\frac{CN}{NA}=1$, demuestra que MN pasa por el centroide del triángulo ABC.

Problema 13. Determina todas las parejas de enteros positivos (m, n) que satisfacen la ecuación $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Problema 14. Sea A un subconjunto de n elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ con la propiedad de que la diferencia entre cualesquiera dos números de A no es un número primo. Determina el mayor valor posible de n. (Nota: el número 1 no se considera primo.)

Problema 15. Sean a, b, c y d números reales positivos tales que $2(a+b+c+d) \geq abcd$. Demuestra que $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq abcd$.

Problema 16. Demuestra que si puedes dividir un polígono convexo de n^2 lados en n pentágonos convexos, entonces $n = 3$.

Problema 17. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Un círculo dentro de $ABCD$ es tangente a los lados AB y AD e interseca al segmento BD en E y F. Demuestra que existe un círculo que pasa por E y F y es tangente a las líneas CB y CD.

Problema 18. Para cada entero positivo n, se denota por $\varphi(n)$ al número de enteros positivos menores o iguales que n que son primos relativos con n. Determina todos los enteros positivos n tales que $\frac{n}{\varphi(n)}$ sea un número entero.

Problema 19. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

para todos los números reales x, y.

Problema 20. Determina todos los enteros positivos k para los cuales existen enteros positivos a y b tales que $\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b} = k$.

Soluciones a los problemas de práctica

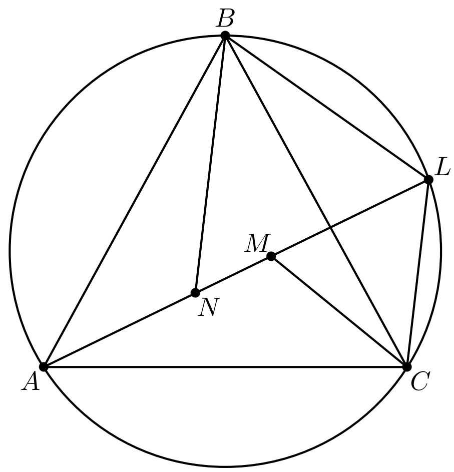
En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Veamos que es imposible cubrir el tablero con dichas condiciones. Coloreemos de negro las casillas que están en la misma fila o misma columna que la casilla central y de blanco el resto de las casillas. Notemos que al colocar una ficha de las permitidas siempre se cubre exactamente una casilla negra y siete casillas blancas, entonces como hay 20 casillas negras al menos se requerirían 20 fichas. Sin embargo, $20 \cdot 8 = 160$ que es mayor a 120 el número de casillas que se desean cubrir, por lo tanto dicho acomodo no existe.

Solución del problema 2. Sea L la intersección de la recta AM con el circuncírculo del triángulo ABC. En el cuadrilátero cíclico $ABLC$ se tiene que $\angle CLA = \angle CBA$ y por ángulos externos en el triángulo CLM se tiene que

$$\angle MCL = \angle CMA - \angle CLM = 2\angle CBA - \angle CBA = \angle CBA.$$



Por lo tanto, el triángulo CML es isósceles, de donde se tiene que $CM = LM$. Por otro lado, con el mismo cíclico se tiene que $\angle ALB = \angle ACB$ y por hipótesis $\angle BNL = \angle CBA$, entonces los triángulos BCA y NLB son semejantes de donde se tiene que el triángulo NLB es isósceles con $BN = NL = NM + ML = NM + MC$ como se quería probar.

Solución del problema 3. De las condiciones del problema se tiene que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1}.$$

Restando la primera igualdad de la segunda se obtiene que $a_{n+1} = (n+1)^2 a_{n+1} - n^2 a_n$, de donde

$$a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n.$$

Entonces, usando esta identidad hasta llegar a a_1, obtenemos que

$$a_{2015} = \frac{2014}{2016} \cdot \frac{2013}{2015} \cdot \frac{2012}{2014} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} a_1 = \frac{2}{2016 \cdot 2015}.$$

Solución del problema 4. Supongamos que los dígitos del número N son: $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$. Si borramos el dígito de la izquierda obtenemos el número $M = \overline{a_2 a_3 \ldots a_k}$. La condición del problema establece entonces que $N = 2015M$.
Por otra parte podemos expresar

$$N = a_1 \cdot 10^{k-1} + \overline{a_2 a_3 \ldots a_k} = a_1 \cdot 10^{k-1} + M = 2015M.$$

De aquí, $a_1 \cdot 10^{k-1} = 2014M$. Esta igualdad es imposible, pues 19 es un divisor de 2014 pero no lo es de $a_1 \cdot 10^{k-1}$ (pues 19 es primo y no es divisor de a_1 que es un dígito, ni de 10^{k-1}). Por lo tanto, no existen enteros con la propiedad pedida.

Solución del problema 5. Denotaremos por (m, n) y $[m, n]$ al máximo común divisor y al mínimo común múltiplo, respectivamente, de los enteros m y n.

(a) Sean $x = 1998a$ y $y = 1998b$ con $(a, b) = 1$. Por esto, tenemos que $[x, y] = 1998ab = 2 \cdot 3^3 \cdot 37ab = n!$, y como 37 es primo, se tiene que $n \geq 37$. Para $n \geq 37$, simplemente tenemos que elegir a y b primos relativos tales que $ab = \frac{n!}{1998}$ el cual siempre es un entero.

(b) Tenemos que $n \geq 37$. Sea $k = \frac{n!}{1998}$. Como $(a, b) = 1$ tenemos que cada factor primo de k tiene que aparecer en a o en b (en uno solo). En k tenemos al menos 11 factores primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 y 31. Para cada uno de ellos, tenemos dos opciones: que aparezca en a o que aparezca en b. Esto da un total de $2^{11} = 2048$ maneras, pero solo la mitad de ellas cumplen que $x < y$. Luego, si solo están esos 11 factores primos tendremos 1024 parejas. Si tuviéramos al menos un primo más, por el mismo argumento habría al menos 2048 parejas. Por lo tanto, el 41 no puede aparecer en k y $37 \leq n \leq 40$ son los enteros que cumplen.

Solución del problema 6. La respuesta es $100^2 = 10000$ vuelos directos. Demostraremos un caso más general: si se tienen $2n$ aeropuertos, la máxima cantidad de vuelos será n^2. Esto lo demostraremos por inducción sobre n y consideremos una gráfica donde los vértices son los aeropuertos y las aristas entre dos vértices indican vuelos directos.

Para $n = 1$ se tienen dos aeropuertos y la máxima cantidad de vuelos es 1, el cual coincide con 1^2, por lo que la base de inducción queda demostrada. Supongamos que el resultado es válido para cierto $n = k$.

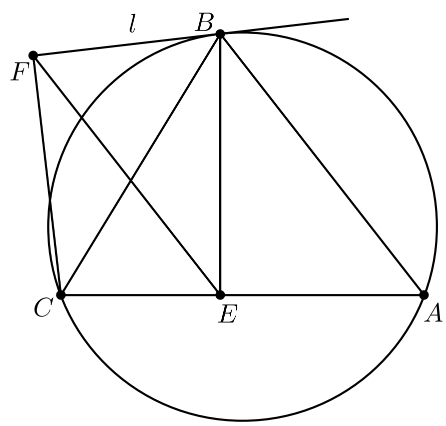
Si $n = k + 1$, tendremos $2k + 2$ aeropuertos. Consideremos dos de ellos que tengan un vuelo directo entre ellos, digamos a_1 y a_2 y de momento borramos ese vuelo directo. Sean d_1 y d_2 los grados de estos vértices (el grado de un vértice se define como el número de aristas que parten de él). Si $d_1 + d_2 > 2k$, por el principio de las casillas, habrá un aeropuerto que está conectado con a_1 y a_2, lo cual es imposible y $d_1 + d_2 \leq 2k$. Sin considerar a a_1 y a a_2, ni a los vuelos directos que de ellos salgan, lo que queda es una gráfica con los $2k$ aeropuertos restantes. Por la hipótesis de inducción, en ella hay a lo más k^2 vuelos directos. Luego, el total de vuelos directos es a lo más $k^2 + d_1 + d_2 + 1 \leq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, lo cual termina la inducción.

Nota. Es posible demostrar que para que haya k^2 vuelos directos la configuración tiene que ser la siguiente: se parten los aeropuertos en dos conjuntos A y B, cada uno de ellos con k aeropuertos. Los vuelos directos serán todos los que conecten un aeropuerto de A con uno de B.

Solución del problema 7. Veamos que A tiene estrategia ganadora. En su primer turno A escoge el tablero de 2015×2015 y borra todos los cuadraditos de una de las diagonales. Cuando B tira, A solo tendrá que reflejar ese tiro tomando como eje de reflexión la diagonal borrada en su primer turno. Después de cada turno de A, todo será simétrico respecto a la diagonal que A borró en el primer turno. Por lo tanto, si B puede hacer su tiro, A también podrá hacerlo. Como A puede borrar cuadraditos siempre y cuando B haya borrado en el turno anterior, se sigue que el primero en no poder borrar cuadraditos es B. Entonces, A tiene estrategia ganadora.

Solución del problema 8. El número es igual a $\frac{(l+m+n)(mn+nl+lm)}{lmn}$, por lo que lmn tiene que dividir a $(l+m+n)(mn+nl+lm)$, en particular, l divide a $(l+m+n)(mn+nl+lm)$. Desarrollando, vemos que esto sucede si y solo si l divide a $mn(m+n)$ y como es primo relativo con mn, l tiene que dividir a $m+n$. Análogamente, m divide a $l+n$ y n divide a $l+m$.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l \geq m \geq n$. Tenemos que $\frac{m+n}{l} \leq \frac{l+l}{l} = 2$, por lo que $\frac{m+n}{l}$ es 1 o 2. Si es igual a 2, los tres números tienen que ser iguales y para que sean primos relativos por parejas, tienen que ser iguales a 1. Si $m+n=l$, tenemos que $m \geq \frac{l}{2}$, por lo que $\frac{l}{m} \leq 2$ y $\frac{n+l}{m} \leq 3$. Además, como $l \geq m$ esta fracción no puede valer 1. Si $\frac{n+l}{m} = 2$, tenemos que $m+n=l$ y $n+l=2m$, de donde obtenemos que $l=3n$ y $m=2n$. Como l y m deben ser primos relativos, la única posibilidad es $n=1$, por lo que la terna (l,m,n) es $(3,2,1)$. Si $\frac{n+l}{m}=3$, tenemos que $m+n=l$ y $n+l=3m$, de donde $l=2n$ y $m=n$. Nuevamente debemos tener que $n=1$ por lo que la terna (l,m,n) es $(3,1,1)$.
Por lo tanto, las ternas (l,m,n) que cumplen son $(1,1,1)$, $(3,2,1)$, $(3,1,1)$ y cualquiera de sus permutaciones.

Solución del problema 9. Como los ángulos $\angle FBC$ y $\angle BAC$ abarcan el mismo arco $\widehat{BC}$, tenemos que son iguales. Por otro lado, como los ángulos $\angle CFB$ y $\angle BEC$ son rectos, el cuadrilátero $FCEB$ es cíclico y $\angle FBC = \angle FEC$. Luego, $\angle FEC = \angle BAC$, de donde FE es paralela a BA.



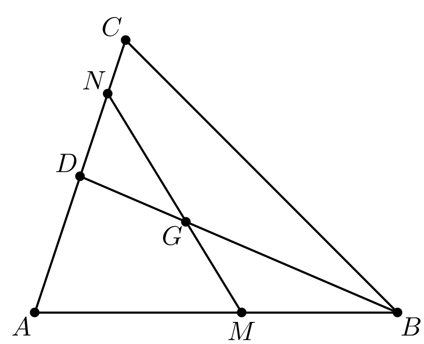
Solución del problema 10. Si $n=1$ obtenemos que $0<1$. Supongamos que $n>1$. Entonces, $0<n-1<n+1$ y por lo tanto

$$(n-1)^{n+1}(n+1)^{n-1} < (n-1)^n(n+1)^n = (n^2-1)^n < (n^2)^n = n^{2n}.$$

Solución del problema 11. Sea N el número formado por los primeros tres dígitos del número buscado. Como $N+1$ es el número formado por los tres últimos dígitos

tenemos que el número buscado será $1000N + (N+1) = 1001N + 1$ para cierto N entre 100 y 998.
Igualando este número a un cuadrado tenemos que $1001N+1 = x^2$. Queremos ver para qué valores de N se obtiene un x entero. Pasando el 1 al lado derecho y factorizando, tenemos que $1001N = (x+1)(x-1)$. Luego, tenemos que factorizar a $1001N$ como el producto de dos números que difieran en 2. Por otro lado, como x^2 tiene seis dígitos, tenemos que $x < 1000$.
La factorización en primos de 1001 es $7 \times 11 \times 13$. Cada uno de estos factores primos puede estar en $x+1$ o en $x-1$. Una opción es que 7×11 divida a $x+1$ y que 13 divida a $x-1$. Para que 7×11 divida a $x+1$, $x+1$ tiene que ser de la forma $77i$, de donde $x = 77i - 1$ y $x - 1 = 77i - 2$. Queremos encontrar un i tal que $77i - 2$ sea múltiplo de 13. Como 13 divide a $78i$, para que divida a $77i-2$, tiene que dividir a $78i - (77i - 2) = i + 2$. El primer i que cumple esto es 11. Con este valor, tenemos que $x = 77(11) - 1 = 846$ y $x^2 = 715716$.

Solución del problema 12. Sea D el punto medio de AC. Como $\frac{CN}{NA} < 1$, el punto N está en el segmento CD. Sea G el punto de intersección de BD y MN.



Aplicando el teorema de Menelao[3] en el triángulo ABD con la recta MN, tenemos que $\frac{DG}{GB} \cdot \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AN}{ND} = 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\frac{BG}{GD} &= \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AN}{ND} = \left(1 - \frac{CN}{NA}\right) \cdot \frac{AN}{ND}\\ &= \frac{NA - CN}{ND} = \frac{(2CD - CN) - CN}{ND}\\ &= \frac{2ND}{ND} = 2.\end{aligned}$$

Por lo tanto, G es el centroide del triángulo ABC, pues el centroide divide cada mediana en razón $2:1$.

Solución del problema 13. Tenemos que $n^2 \equiv 1 \pmod 3$. Luego, $n = 3k+1$ o $3k+2$ para algún entero no negativo k.
1. $n = 3k+1$. Después de simplificar, obtenemos que $2^m = 3k^2 + 2k = k(3k+2)$.

[3] Ver en el apéndice el teorema 11.

Luego, k y $3k+2$ son ambos potencias de 2. Es claro que $k=2$ es una solución, mientras que $k=1$ no lo es. Si $k=2^p$ con $p\geq 2$, entonces $3k+2=2(3\cdot 2^{p-1}+1)$ no es potencia de 2 ya que $3\cdot 2^{p-1}+1$ es impar. Por lo tanto, la única solución en este caso es $n=7$ y $m=4$, con $k=2$.
2. $n=3k+2$. Simplificando obtenemos que $2^m=3k^2+4k+1=(3k+1)(k+1)$ de donde $k+1$ y $3k+1$ son ambos potencias de 2. Si $k=0$, entonces $2^m=1$ y por lo tanto $m=0$, lo cual no puede ser. Si $k=1$, obtenemos $2^m=8$ de donde $m=3$. Si $k>1$, tenemos que $3k+1=2k+(k+1)>2k+2$ y por lo tanto $4(k+1)>3k+1>2(k+1)$. Luego, si $k+1=2^p$ para algún entero no negativo p, entonces $2^{p+2}>3k+1>2^{p+1}$, lo que significa que $3k+1$ no puede ser potencia de 2. Por lo tanto, la única solución en este caso es $m=3$ y $n=5$.
Por lo tanto, las parejas (m,n) buscadas son $(4,7)$ y $(3,5)$.

Solución del problema 14. Si $n\in A$, entonces $n+i\notin A$ para $i=2,3,5,7$. De entre los números $n+1$, $n+4$ y $n+6$ a lo más uno puede estar en A. Luego, entre cualesquiera 8 enteros consecutivos, a lo más 2 pueden estar en A. Por lo tanto, $|A|\leq 2\lceil 2015/8\rceil=504$ (donde $\lceil x\rceil$ denota el menor entero que es mayor o igual que x). Un ejemplo es el conjunto $\{4k+1\mid k=0,1,\ldots,503\}$. Es claro que este conjunto satisface las condiciones del problema, pues la diferencia entre cualesquiera dos de sus elementos es múltiplo de 4. Luego, la respuesta es 504.

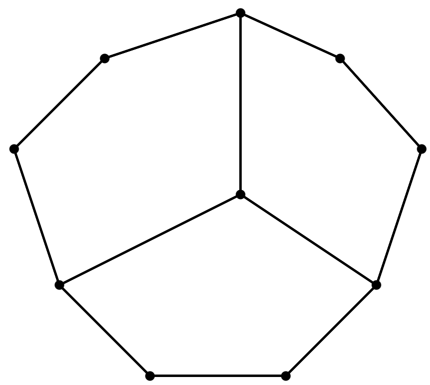
Solución del problema 15. Consideraremos dos casos.
Caso 1. $abcd\geq 16$. Tenemos que,

$$\begin{aligned}2abcd &\leq 2(2a+2b+2c+2d)\leq (4+a^2)+(4+b^2)+(4+c^2)+(4+d^2)\\ &= 16+a^2+b^2+c^2+d^2\leq abcd+a^2+b^2+c^2+d^2,\end{aligned}$$

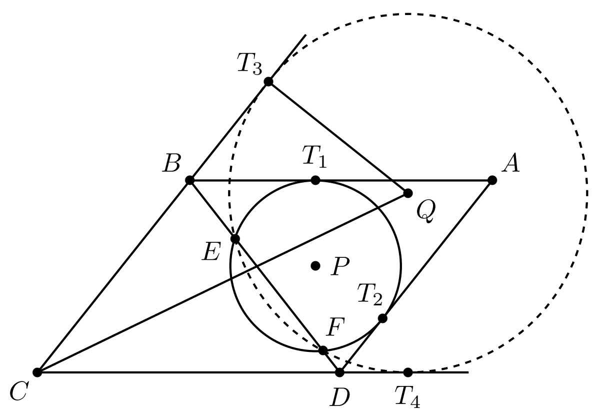
de donde $a^2+b^2+c^2+d^2\geq abcd$.
Caso 2. $abcd<16$. Por la desigualdad media aritmética-media geométrica, tenemos que,

$$a^2+b^2+c^2+d^2\geq 4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2}=\sqrt{16abcd}>\sqrt{a^2b^2c^2d^2}=abcd.$$

Solución del problema 16. Sabemos que la suma de los ángulos internos de un pentágono es igual a $3\cdot 180°$, por lo que si se tienen n pentágonos, entonces la suma de sus ángulos internos es igual a $3n\cdot 180°$.
Por otro lado, el polígono completo tiene una suma de ángulos que es igual a $(n^2-2)\cdot 180°$. La suma de los ángulos de los pentágonos es mayor que la suma de los ángulos del polígono (porque en el polígono sólo se suman los ángulos de los pentágonos que quedan en la orilla). Así, tenemos que $3n\cdot 180° > (n^2-2)180°$ y por tanto $0>n^2-3n-2$. Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $2>n(n-3)$ la cual es cierta si $n\leq 3$. Como $n\geq 3$, la única posibilidad es $n=3$. El siguiente ejemplo muestra que es posible hacer la división con $n=3$.



Solución del problema 17. Sean k_1 el círculo dado, P su centro, y T_1 y T_2 los pies de las perpendiculares desde P a AB y a AD, respectivamente. Sean $a = AB = CD$, $b = BC = DA$. Por ser tangentes, sea $x = AT_1 = AT_2$. Sea T_3 un punto en el rayo CB tal que $BT_3 = BT_1$ pero tal que T_3 no está en el segmento CB. Sea Q la intersección de la perpendicular a CB por T_3 y la bisectriz de $\angle BCD$.



Demostraremos que el círculo k_2 con centro Q y radio QT_3 satisface la condición requerida.
Como Q está en la bisectriz de $\angle BCD$ y QT_3 es perpendicular a CB, k_2 es tangente a CB y a CD, por lo que solo tenemos que demostrar que interseca a BD en E y F. Sea T_4 el punto de tangencia de k_2 y CD. Tenemos que $BT_3 = BT_1 = AB - AT_1 = a - x$. Por tangentes, $CT_4 = CT_3 = CB + BT_3 = b + a - x$. Como $a > x$, tenemos que $CT_4 > CD$ y D está entre C y T_4. Luego

$$DT_4 = CT_4 - CD = (b + a - x) - a = b - x = DT_2.$$

Luego, tenemos que $BT_1 = BT_3$ y $DT_2 = DT_4$. Como BT_1 y BT_3 son tangentes desde B a k_1 y a k_2, B tiene la misma potencia respecto a los dos círculos. De manera análoga, D también y BD tiene que ser el eje radical de k_1 y k_2. Luego, como k_1 interseca a BD en E y F, también lo hará k_2.

Solución del problema 18. Un resultado conocido de la función $\varphi(n)$ establece que si la factorización en primos de n es $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$ entonces

$$\varphi(n) = (p_1 - 1)p_1^{a_1-1}(p_2 - 1)p_2^{a_2-1} \cdots (p_r - 1)p_r^{a_r-1}.$$

Supondremos adicionalmente que $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$, es decir, que los primos aparecen ordenados.
La condición $\varphi(n) \mid n$ equivale a:

$$p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r} = [(p_1 - 1)p_1^{a_1-1}(p_2 - 1)p_2^{a_2-1} \cdots (p_r - 1)p_r^{a_r-1}]c$$

para algún entero c, y después de cancelar obtenemos,

$$p_1 p_2 \cdots p_r = [(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_r - 1)]c.$$

Pero cualquier primo que divida a $p_1 - 1$ es estrictamente menor que p_1 y por tanto no puede dividir al lado izquierdo. La única forma de evitar la contradicción es que $p_1 - 1 = 1$, es decir, $p_1 = 2$. Notemos además que 2 solo aparece una vez en el lado izquierdo, por lo que solo debe aparecer una vez en el lado derecho. Como $p_2, \ldots, p_r$ son primos impares, al restar 1 aparecerán otros factores 2 lo cual será una contradicción a menos que $r \leq 2$ (y que el único posible factor primo que aparezca en el lado izquierdo provenga de $p_2 - 1$). Si $r = 2$, tenemos que $2p_2 = (p_2 - 1)c$. Como $p_2 - 1$ es primo relativo con p_2 tenemos que debe dividir a 2, por lo que $p_2 - 1 = 2$ y por lo tanto $p_2 = 3$. Luego, los enteros que cumplen son de la forma 2^a y $2^a \cdot 3^b$ con a y b enteros positivos.

Solución del problema 19. Haciendo $y = 0$, obtenemos $f(f(x)) = (1 + f(0))f(x)$. Reemplazando x por $x + y$ en esta relación obtenemos,

$$\begin{aligned}(1 + f(0))f(x + y) &= f(f(x + y)) \\ &= f(x + y) + f(x)f(y) - xy,\end{aligned}$$

de donde

$$f(0)f(x + y) = f(x)f(y) - xy. \tag{1}$$

Sustituyendo $y = 1$ en esta relación obtenemos

$$f(0)f(x + 1) = f(x)f(1) - x, \tag{2}$$

y sustituyendo $y = -1$ y reemplazando x por $x + 1$ nuevamente en la relación (1) obtenemos

$$f(0)f(x) = f(x + 1)f(-1) + x + 1. \tag{3}$$

Multiplicando la relación (3) por $f(0)$ y usando la relación (2) obtenemos

$$((f(0))^2 - f(1)f(-1))f(x) = (f(0) - f(-1))x + f(0).$$

Si $(f(0))^2 - f(1)f(-1) \neq 0$, entonces $f(x)$ es lineal. Si $(f(0))^2 - f(1)f(-1) = 0$, entonces haciendo $x = 0$ en la última relación obtenemos que $f(0) = 0$ y por lo tanto $f(x)f(y) = xy$. Luego, $f(x)f(1) = x$ para todo número real x, de modo que $f(1) \neq 0$ y $f(x) = \frac{x}{f(1)}$ es lineal.
Finalmente, sustituyendo $f(x) = ax + b$ en la relación original y simplificando, obtenemos que $(a^2 - a - ab)(x + y) = (a^2 - 1)xy + b(b - a)$ para todo número real x, y. Si $x = 1$, $y = 0$, obtenemos que $a^2 - a = b^2$; y si $x = y = 0$, tenemos que $b = 0$ o $b = a$.
Si $b = 0$, entonces $a^2 - a = 0$, de donde $a = 0$ o $a = 1$. Si $a = 0$ obtenemos que $f(x) = 0$ y al sustituir en la relación original obtendríamos que $0 = xy$ para todo número real x, y, lo cual no es posible. Por lo tanto, $a = 1$ y de esta manera $f(x) = x$. Si $b = a$, entonces $a^2 - a = a^2$, de donde $a = 0$. Luego, $b = a = 0$ y $f(x) = 0$ lo cual vimos antes que no es posible.
Finalmente, es fácil verificar que $f(x) = x$ satisface la relación original y por lo tanto es la única solución.

Solución del problema 20. Fijemos un entero positivo k que satisface las condiciones del problema. De entre todas las parejas de enteros positivos (a, b) que satisfacen la igualdad $\frac{b+1}{a} + \frac{a+1}{b} = k$, consideremos una pareja de suma mínima. Demostraremos que tal pareja satisface que $a = b$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b$. Consideremos la ecuación $\frac{b+1}{x} + \frac{x+1}{b} = k$, la cual es equivalente a la ecuación $x^2 - x(kb - 1) + b^2 + b = 0$. Una raíz de esta ecuación es $x_1 = a$, y la otra es $x_2 = kb - 1 - a = \frac{b^2+b}{a}$ (si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, entonces $x_1 + x_2 = b$ y $x_1x_2 = c$) la cual es un entero positivo. Por la minimalidad de $a+b$ tenemos que $x_2+b \geq a+b$, de donde $\frac{b^2+b}{a} \geq a$. Luego, $b^2+b \geq a^2 \geq (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1$, lo cual es imposible. Por lo tanto, debemos tener $a = b$ y $k = 2 + \frac{2}{a}$. De aquí, $a = 2$ o $a = 1$, y en consecuencia $k = 3$ o $k = 4$, respectivamente. Por lo tanto, los enteros que satisfacen la condición del problema son 3 y 4.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2015 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que los problemas en esta sección no tienen solución, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Considera la lista

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots, \frac{1}{2014\cdot 2015}.$$

Halla todos los grupos de términos consecutivos de la lista cuya suma sea igual a $\frac{1}{6}$.

Problema 2. Considera una cuadrícula de 12×12 en la que están escritos números enteros positivos. Tienes dos operaciones que puedes aplicar tantas veces como quieras y en el orden que quieras.

1. Puedes multiplicar todos los números de una fila por 2.
2. Puedes restar 1 de todos los números de una columna.

Demuestra que sin importar cuáles números están originalmente en la cuadrícula, siempre puedes lograr que todos se conviertan en ceros.

Problema 3. Sea n un entero positivo y sea M el promedio de los divisores positivos de n. Demuestra que $M \geq \sqrt{n}$.

Problema 4. Sea n un entero positivo con $n \geq 2$. Demuestra que

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

Problema 5. En cada vértice de un dodecágono regular se pone una ficha con un lado blanco y un lado negro. En cada movimiento es posible elegir una ficha negra y darle la vuelta a sus dos vecinos. Encuentra todas las configuraciones iniciales desde las cuales, después de alguna secuencia de movimientos, se puede llegar a que todas las fichas, excepto una, estén en su lado blanco.

Problema 6. Sea AB un segmento con punto medio M. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen como cuerdas los segmentos AM y MB, respectivamente. El segundo punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es C. La bisectriz del ángulo $\angle CMA$ interseca a $\mathcal{C}_1$ en P y la bisectriz del ángulo $\angle CMB$ interseca a $\mathcal{C}_2$ en Q. Muestra que PQ es perpendicular a MC.

Problema 7. Lalo y César juegan volados. Lanzan n veces una moneda. César gana si la cantidad de águilas obtenidas es múltiplo de 4, y Lalo en otro caso. Encuentra todos los valores de n para los cuales la probabilidad de que gane César sea $\frac{1}{4}$.

Problema 8. Sea $x_0 = x_1 = 1$ y para $n \geq 1$ definimos

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_{n-1} + 2x_n}.$$

Encuentra una fórmula cerrada para la secuencia $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Problema 9. Se tiene un papel cuadriculado de 102×102 y una figura de 101 cuadrados conectados por aristas, cuya forma desconocemos. ¿Cuál es la menor cantidad de copias de la figura que podemos cortar del papel?

Problema 10. Determina todos los enteros positivos a tales que para cualquier entero positivo $n \geq 5$ se cumple que $2^n - n^2$ es divisor de $a^n - n^a$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2015 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2015. Queremos agradecer en esta ocasión a Leonardo Jesús Méndez Villamil por habernos enviado su solución al problema 1 y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2015, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean p, q y r tres números primos mayores que 3 que están en progresión aritmética con razón d. Muestra que d es múltiplo de 6.

Solución de Leonardo Jesús Méndez Villamil. Como $6 = 2 \times 3$, tenemos que demostrar que d es múltiplo de 2 y de 3. Supongamos que $q = p + d$ y $r = p + 2d$.
Como p, q y r son primos mayores que 3, cada uno es un primo impar, por lo que d tiene que ser par.
Si d no fuera múltiplo de 3, tiene que ser de la forma $3a \pm 1$ con a un entero positivo. Como p es un primo mayor a 3 no puede ser múltiplo de 3, así que p es de la forma $3b \pm 1$ con b un entero positivo. Veamos cada caso.

1. $p = 3b - 1$ y $d = 3a - 1$. Tenemos que $r = p + 2d = (3b - 1) + 2(3a - 1) = 3(2a + b - 1)$, el cual es múltiplo de 3.
2. $p = 3b - 1$ y $d = 3a + 1$. Tenemos que $q = p + d = (3b - 1) + (3a + 1) = 2(b + a)$, el cual es múltiplo de 3.
3. $p = 3b + 1$ y $d = 3a - 1$. Tenemos que $q = p + d = (3b + 1) + (3a - 1) = 2(b + a)$, el cual es múltiplo de 3.
4. $p = 3b + 1$ y $d = 3a + 1$. Tenemos que $r = p + 2d = (3b + 1) + 2(3a + 1) = 3(2a + b + 1)$, el cual es múltiplo de 3.

Luego, en cada caso llegamos a una contradicción, pues el único primo múltiplo de 3 es justo el 3. Por lo tanto d es múltiplo de 3, que es lo que faltaba demostrar.

Nota. Un resultado muy relacionado es el siguiente: todo número primo p mayor que 3 es de la forma $6k \pm 1$ para cierto entero positivo k.

Problema 2. Demuestra que un número de 9 dígitos que tenga exactamente una vez los dígitos del 1 al 9 y que termina en 5, no puede ser un cuadrado perfecto.

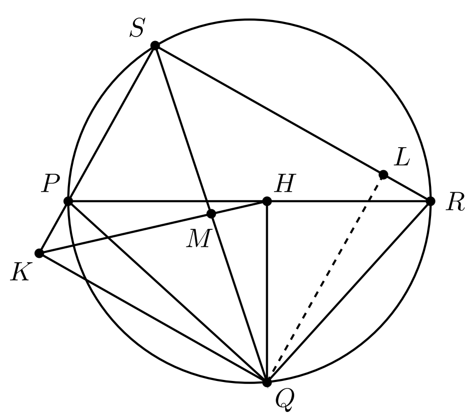
Solución. Supongamos que sí es posible y sea $D = A^2$ un número que cumple. Como D termina en 5, A también termina en 5. Luego, $A = 10a + 5$ para cierto entero positivo a. Sustituyendo, tenemos que

$$D = A^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a + 1) + 25.$$

De aquí podemos concluir que el penúltimo dígito del número es igual a 2. Además, podemos concluir que el antepenúltimo dígito será el último dígito de $a(a+1)$. Revisando con cada uno de los 10 dígitos en los que puede terminar a, notamos que este dígito solo puede ser 0, 2 o 6. Como 0 no puede ser considerado y 2 y está en el número, concluimos que el dígito es el 6 y D tiene que terminar en 625.
Como 5^3 divide a cualquier número que termina con tres ceros y también divide a 625, tenemos que 5^3 divide a D. Pero como D es un cuadrado perfecto, 5^4 divide a D. Además, como $5^4 = 625$, tenemos que 5^4 divide a $D - 625$ y este número termina en 3 ceros. Luego, el siguiente dígito tiene que ser 0 o 5 (pues de otro modo, 5^4 no puede dividir a $D - 625$). Como no puede ser ni 0, ni 5, llegamos a una contradicción y el número no puede ser un cuadrado perfecto.

Problema 3. Sea $PQRS$ un cuadrilátero cíclico con $\angle PSR = 90°$ y sean H y K los pies de las perpendiculares desde Q hacia los lados PR y PS. Demuestra que HK biseca al segmento QS.

Solución. Sea M el punto de intersección de HK y QS. Como KQ y SR son perpendiculares a KS tenemos que son paralelas entre sí y $\angle QKH = \angle QSR$. Además, el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico, por lo que $\angle QSR = \angle QPR$. Pero como $\angle QKP = \angle PHQ = 90°$, el cuadrilátero $KQHP$ es cíclico y $\angle QPH = \angle QKH$. Luego, podemos concluir que $\angle SQK = \angle QKM$ y el triángulo KQM es isósceles con $MK = MQ$.
En un triángulo rectángulo, sabemos que el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa. En el triángulo rectángulo SKQ, como M está tanto en la hipotenusa como en la mediatriz de KQ, concluimos que M es el circuncentro del triángulo SKQ y por lo tanto, es el punto medio de QS.



Solución alternativa. Sea L el pie de la perpendicular desde Q a RS. Por el teorema de Simson[4], los puntos H, K y L están alineados. Por otro lado, el cuadrilátero $KQLS$

[4]Ver en el apéndice el teorema 12.

es un rectángulo, y por lo tanto, su diagonal KH biseca a la otra diagonal QS, como queríamos demostrar.

Problema 4. Antonio escribe una lista de fracciones de acuerdo con la siguiente regla: si la última fracción escrita x es menor o igual que $\frac{1}{2}$, entonces el siguiente número en la lista es $2x$. De lo contrario, el siguiente número que escribe será $2(1-x)$. Si el primer número de la lista es $\frac{3}{11}$, ¿cuál es el número que escribe en la posición 2014?

Solución. Realicemos la lista con los primeros casos: Como $\frac{3}{11} < \frac{1}{2}$, el siguiente es $\frac{6}{11}$. Como $\frac{6}{11} > \frac{1}{2}$ entonces el siguiente es $2(1-\frac{6}{11}) = 2(\frac{5}{11}) = \frac{10}{11}$. Dado que $\frac{10}{11} > \frac{1}{2}$, el siguiente será $2(1-\frac{10}{11}) = \frac{2}{11}$. Como $\frac{2}{11} < \frac{1}{2}$ continúa $\frac{4}{11}$ y después $\frac{8}{11}$. Y como $\frac{8}{11} > \frac{1}{2}$, el siguiente en la lista será $2(1-\frac{8}{11}) = 2(\frac{3}{11}) = \frac{6}{11}$, por lo que la lista se cicla.
Tenemos entonces
$$\frac{3}{11}, \frac{6}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, \frac{6}{11}, \frac{10}{11}, \ldots$$
La posición 2014 corresponde a la posición 2013 de la sucesión periódica
$$\frac{6}{11}, \frac{10}{11}, \frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \frac{8}{11}, \frac{6}{11}, \frac{10}{11}, \ldots$$
que se repite cada 5 términos. Esto quiere decir que en esta lista la posición 2011 es $\frac{6}{11}$, la 2012 es $\frac{10}{11}$ y la 2013 es $\frac{2}{11}$. Por lo tanto, la posición 2014 en la lista original es también $\frac{2}{11}$.

Problema 5. Si Antonio escribe otra lista con la misma regla que el problema anterior, y en la cuarta posición le toca escribir el número 1, ¿cuál es el mayor número que pudo iniciar la lista?

Solución. El 1 lo podríamos obtener de dos formas: $2x = 1$ y $2(1-x) = 1$. En el primer caso tenemos que el término anterior (el tercer término de la sucesión) es $\frac{1}{2}$ y en el segundo también es $\frac{1}{2}$. Pero el segundo caso llevaría a una contradicción porque solo se puede aplicar cuando x es mayor que $\frac{1}{2}$.
Concluimos entonces que el tercer término necesariamente debe ser igual a $\frac{1}{2}$. Planteamos de nuevo las posibilidades: $2x = \frac{1}{2}$ y $2(1-x) = \frac{1}{2}$. En el primer caso tenemos $x = \frac{1}{4}$ y en el segundo $(1-x) = \frac{1}{4}$ y por tanto $x = \frac{3}{4}$, ambas posibilidades válidas.
Caso 1. La sucesión tiene la forma $a, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$. Al considerar $2a = \frac{1}{4}$ y $2(1-a) = \frac{1}{4}$ obtenemos las posibilidades: $a = \frac{1}{8}$ y $a = \frac{7}{8}$.
Caso 2. La sucesión tiene la forma $a, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, 1$. Planteamos $2a = \frac{3}{4}$ y $2(1-a) = \frac{3}{4}$, obteniendo $a = \frac{3}{8}$ y $a = \frac{5}{8}$.
Concluimos entonces que las posibilidades para el primer número son $\frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$. De estos, el mayor es el $\frac{7}{8}$.

Nota. ¿Puedes demostrar que en general, para que en la posición k aparezca 1 es necesario que la sucesión inicie con un número de la forma $\frac{2r+1}{2^{k-1}}$ donde $2r+1$ es cualquier impar entre 1 y 2^{k-1}?

Problema 6. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 números reales tales que cualesquiera dos de ellos difieren por al menos 1. Supongamos que para algún número real k se cumple que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2k$ y $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 2k^2$. Demuestra que $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Solución. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_5 > a_4 > a_3 > a_2 > a_1$. Como $a_{i+1} - a_i \geq 1$ debemos tener que $a_i - a_j \geq i - j$ para todo $i > j$, $1 \leq i, j \leq 5$. Entonces, $(a_i - a_j)^2 \geq (i - j)^2$. Sumando sobre todos los índices i, j obtenemos que

$$\sum_{1 \leq i,j \leq 5} (a_i - a_j)^2 \geq 4 \times 1^2 + 3 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 4^2 = 50.$$

Esto es,

$$4 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq j < i \leq 5} a_i a_j \geq 50.$$

Por otro lado, sabemos que

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq j < i \leq 5} a_i a_j = \left(\sum_{i=1}^{5} a_i \right)^2 = 4k^2.$$

Sumando ambas relaciones obtenemos que

$$10k^2 = 5 \sum_{i=1}^{5} a_i^2 \geq 50 + 4k^2$$

de donde $k^2 \geq \frac{25}{3}$.

Problema 7. Sean t y s enteros diferentes de 0 y sea (x, y) una pareja de enteros. Un movimiento cambia la pareja (x, y) por la pareja $(x - t, y - s)$. Una pareja es *buena* si después de cierta cantidad de movimientos (posiblemente cero) se llega a una pareja de enteros primos relativos (podrían ser negativos).

- Demuestra que la pareja (s, t) es buena.
- Demuestra que existe una pareja (x, y) que no es buena.

Solución.

- Supongamos que (s, t) no es buena. Después de un movimiento llegamos a $(s - t, t - s)$. Para que sean primos relativos tiene que darse, sin pérdida de generalidad, $s - t = 1$ y $t - s = -1$.

  Demostraremos que hay un primo p que divide al número $s + t$. Para ello, hay que demostrar que dicho número es diferente de -1, 0 y 1. Como $s - t$ es impar, $s + t$ no puede ser igual a 0. Además se cumplen las igualdades,

  $$s + t = (s - t) + 2t \neq (s - t) + 0 = 1,$$
  $$s + t = (t - s) + 2s \neq (t - s) + 0 = -1.$$

Luego, existe un primo p que divide a $s+t$. Después de p movimientos, la pareja (s,t) pasa a $(s-(p-1)t, t-(p-1)s)$. Cada uno de estos números es congruente a $s+t$ módulo p, por lo que no son primos relativos, lo que es una contradicción.

- Si m es el máximo común divisor de s y t, tenemos que $s = ms'$ y $t = mt'$. Sean x e y enteros tales que $sx - ty = m$. Demostraremos que la pareja (x,y) no es buena. Dividiendo entre m, tenemos que $s'x - t'y = 1$, de donde x e y son primos relativos. Supongamos que después de k movimientos hay un primo p que divide a $x - kt$ y a $y - ks$. Se tiene que

$$0 \equiv s(x-kt) - t(y-ks) \equiv sx - ty \equiv m \pmod p,$$

de donde p divide a m, el cual divide a s y a t. Pero como p divide a $x - kt$ y a $y - ks$, se tiene que p divide a x y a y, lo cual es una contradicción. Luego, (x,y) no es buena, como queríamos.

Problema 8. Determina todas las ternas de enteros mayores que 1, (m,n,k), tales que

$$1! + 2! + \cdots + m! = n^k.$$

Solución. Sea $S(m) = 1! + 2! + \cdots + m!$. Entonces

$$\begin{aligned}
&S(2) = 3,\\
&S(3) = 9 = 3^2, \quad \text{(que es solución)},\\
&S(4) = 33 = 3 \times 11,\\
&S(5) = 153 = 3^2 \times 17,\\
&S(6) = 873 = 3^2 \times 97,\\
&S(7) = 5913 = 3^4 \times 73,\\
&S(8) = 46233 = 3^2 \times 11 \times 467.
\end{aligned}$$

Como $9! \equiv 0 \pmod{3^3}$, para $m > 8$ tenemos que $S(m) \equiv S(8) \equiv 0 \pmod{3^2}$ y $S(m) \equiv S(8) \not\equiv 0 \pmod{3^3}$. Esto implica que si $S(m) = n^k$ y $k > 1$, entonces $k = 2$. Como $S(4) = 33 \equiv 3 \pmod 5$, tenemos que $S(m) \equiv 3 \pmod 5$ para todo $m \geq 4$. Ahora, $n^2 \equiv 0, 1$ o $4 \pmod 5$. Luego, $S(m) \neq n^2$. Por lo tanto, la única solución es $(m,n,k) = (3,3,2)$.

Problema 9. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y k números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2$ y $a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k$. Demuestra que se pueden elegir dos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que la diferencia entre ellos es mayor que 1.

Solución. Multiplicando la igualdad

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3k \tag{4}$$

por la desigualdad

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 > 3k^3 + k$$

obtenemos la desigualdad

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + a_1^3 a_2 + a_1 a_2^3 + a_1^3 a_3 + a_1 a_3^3 + \cdots$$
$$\cdots + a_{n-1}^3 a_n + a_{n-1} a_n^3 > 9k^4 + 3k^2. \qquad (5)$$

Ahora, elevando al cuadrado la igualdad

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 3k^2, \qquad (6)$$

obtenemos la igualdad

$$a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 2a_1^2 a_2^2 + 2a_1^2 a_3^2 + \cdots + 2a_{n-1}^2 a_n^2 = 9k^4. \qquad (7)$$

Restando la igualdad (7) de la desigualdad (5) obtenemos,

$$(a_1^3 a_2 - 2a_1^2 a_2^2 + a_1 a_2^3) + \cdots + (a_{n-1}^3 a_n - 2a_{n-1}^2 a_n^2 + a_{n-1} a_n^3) > 3k^2,$$

que es equivalente a la desigualdad

$$a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 + a_1 a_3 (a_1 - a_3)^2 + \cdots + a_{n-1} a_n (a_{n-1} - a_n)^2 > 3k^2. \qquad (8)$$

Ahora, si la diferencia entre cualesquiera dos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es menor o igual que 1, tenemos que

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n \geq a_1 a_2 (a_1 - a_2)^2 + a_1 a_3 (a_1 - a_3)^2 + \cdots + a_{n-1} a_n (a_{n-1} - a_n)^2,$$

y por la desigualdad (8) tenemos que

$$a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_{n-1} a_n > 3k^2. \qquad (9)$$

Por otra parte, si elevamos al cuadrado la igualdad (4) y luego restamos la igualdad (6) obtenemos que $2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \cdots + 2a_{n-1} a_n = 6k^2$, lo que contradice la desigualdad (9). Por lo tanto, se pueden elegir dos de los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que la diferencia entre ellos es mayor que 1.

Problema 10. Cada entero positivo se va a pintar con uno de 10 colores distintos disponibles respetando la siguiente condición: “Si un entero positivo n es la suma de tres enteros positivos distintos, entonces al número n se le pinta del mismo color del menor de sus sumandos o del mismo color del mayor de sus sumandos”. Por ejemplo, como $40 = 25 + 10 + 5$, entonces al número 40 se le debe pintar con el mismo color que se ha pintado al 25 o con el mismo color que se ha pintado al 5. ¿De cuántas maneras se puede realizar el coloreado respetando la condición mencionada?

Solución. Resolveremos este problema para una cantidad $n > 1$ de colores disponibles. Sea A el conjunto de los n colores y sea f una función que asigna a cada entero positivo un color de A respetando las condiciones del problema. Entonces, el problema se reduce a contar el número de funciones f que hay con las condiciones pedidas. Como el menor entero positivo que puede escribirse como suma de tres enteros positivos distintos es el $6 = 1+2+3$, tenemos que $f(6) = f(1)$ o $f(6) = f(3)$. Consideraremos tres casos.

Caso 1. $f(1) = f(3) = f(6)$. Como $1 + 2 + 6 = 9$, $1 + 3 + 6 = 10$, $1 + 4 + 6 = 11$ y $1 + 5 + 6 = 12$, tenemos que $f(1) = f(6) = f(9) = f(10) = f(11) = f(12)$. Supongamos que existe un entero positivo $k \geq 12$ tal que $f(1) = f(t)$ para $9 \leq t \leq k$. Como $k + 1 = 1 + 2 + (k - 2)$, entonces $f(k + 1) = f(1)$. Por lo tanto, $f(t) = f(1)$ para todo entero $t \geq 9$. Solo falta analizar el pintado de los números $2, 4, 5, 7$ y 8.

- Todos tienen el mismo color que el 1. Entonces, el número de funciones en este subcaso es igual a n.
- Sólo uno de ellos tiene color diferente al 1. Basta que este número no pueda ser escrito como suma de tres números diferentes (pues si pudiera escribirse como suma de tres números distintos, tendría que ser del color del 1). Luego, este número puede ser el 2, 4 o 5. Así, tenemos $3n(n - 1)$ funciones en este subcaso.
- Hay al menos dos números, digamos $i < j$ tales que su color es diferente al del 1. Si no son consecutivos, tenemos que $i + (i + 1) + j \geq 2 + 3 + 4 = 9$, lo que es una contradicción. Luego, siempre que se tengan dos con color diferente al 1, deben ser consecutivos. Esto demuestra que solo hay dos números que pueden ser diferentes del 1 y estos tienen que ser consecutivos, dejándonos las opciones $4, 5$ o $7, 8$. Como $8 = 1 + 3 + 4$, no pueden ser 7 y 8. Luego, deben ser 4 y 5, y no importan sus colores. Por lo tanto, en este subcaso hay $n(n - 1)^2$ funciones (n opciones para el color del 1, $n - 1$ para el color del 4 y $n - 1$ par a el color del 5).

Así, en este caso el número de funciones es igual a $n + 3n(n - 1) + n(n - 1)^2 = n^3 + n^2 - n$.

Caso 2. $f(1) \neq f(6)$. Entonces, $f(3) = f(6)$. Observemos que los números $3+4+6 = 13$ y $3 + 5 + 6 = 14$ tienen el mismo color que el 3. Además, $1 + 2 + 10 = 13$, $1 + 2 + 11 = 14$, $1 + 2 + 7 = 10$, $1 + 2 + 8 = 11$, $1 + 3 + 9 = 13$, $1 + 2 + 5 = 8$, $1 + 2 + 4 = 7$ y $3 + 4 + 5 = 12$. Esto muestra que hasta este momento todos los números desde el 4 hasta el 14 son pintados con el color del 3. Supongamos que existe un entero $k \geq 14$ tal que todos los números desde el 4 hasta k son pintados con el color del 3. Luego, como $k + 1 = 3 + 4 + (k - 6)$ y $f(3) = f(k - 6)$, tenemos que $f(k + 1) = f(3)$. Por lo tanto, $f(t) = f(3)$ para todo entero $t \geq 4$. Así, en este caso hay $n^2(n - 1) = n^3 - n^2$ funciones (n opciones para el color del 3, n para el color del 2 y $n - 1$ para el color del 1).

Caso 3. $f(3) \neq f(6)$. Entonces, $f(1) = f(6)$. Notemos que todos los números desde $1 + 2 + 6 = 9$ hasta $1 + 5 + 6 = 12$ son del mismo color que 1. También notemos que $3+4+5 = 12$ y por lo tanto $f(5) = f(1)$. Luego, como $1+2+5 = 8$, $1+5+8 = 14$, $1 + 4 + 8 = 13$ y $3 + 4 + 7 = 14$, tenemos hasta el momento que todos los números desde el 5 hasta el 14 son pintados con el mismo color que 1. Supongamos que existe un entero $k \geq 14$ tal que todos los enteros desde 5 hasta k son pintados del mismo color que 1. Luego, como $k + 1 = 1 + 2 + (k - 2)$ y $f(1) = f(k - 2)$, entonces $f(k+1) = f(1)$. Por lo tanto, para todo entero $t \geq 5$ tenemos que $f(t) = f(1)$. Como $2 + 3 + 4 = 9$, tenemos que $f(2) = f(1)$ o $f(4) = f(1)$. Analicemos los siguientes subcasos.

- Si $f(2) = f(4) = f(1)$, el número de funciones es igual a $n(n - 1)$.
- Si $f(2) \neq f(1)$, entonces $f(4) = f(1)$ y el número de funciones es igual a $n(n - 1)^2$.
- Si $f(4) \neq f(1)$, entonces $f(2) = f(1)$ y el número de funciones es igual a $n(n - 1)^2$.

Luego, en este caso el número de funciones es igual a $n(n - 1) + 2n(n - 1)^2 = 2n^3 - 3n^2 + n$.

Por lo tanto, el número total de funciones que cumplen las condiciones del problema es igual a

$$(n^3 + n^2 - n) + (n^3 - n^2) + (2n^3 - 3n^2 + n) = 4n^3 - 3n^2 = n^2(4n - 3).$$

Para el caso $n = 10$, tenemos que el número de formas en que se puede hacer el coloreado respetando la condición del problema es igual a $100(37) = 3,700$.

Concursos Estatales

Olimpiada de Matemáticas en Guanajuato, 2015

La Olimpiada de Matemáticas en Guanajuato (OMMGto) consta de 5 etapas. Cada año la convocatoria de la OMMGto se lanza en el mes de febrero. El primer examen selectivo consta casi siempre de 20 preguntas de opción múltiple y de 5 problemas sin opciones con respuesta numérica. La aplicación de este examen se lleva a cabo en distintas sedes del estado y aproximadamente 17 sedes participan cada año. De esta manera se abarca la mayor extensión del territorio para invitar a participantes de casi todo el estado. De esta primera etapa se eligen aproximadamente a las mejores 300 puntuaciones.

El segundo examen selectivo se realiza en la Preparatoria Oficial en la ciudad de Guanajuato, y lo conforman 5 problemas sin opciones y en este examen los participantes ya tienen que explicar sus soluciones. Los 30 mejores continúan en el proceso.

Hay dos entrenamientos de todo el fin de semana en la ciudad de Guanajuato, a los cuales se les invita a los 30 participantes elegidos de la etapa anterior, y en el último entrenamiento se aplica un tercer examen para elegir a 24 muchachos.

Hay dos entrenamientos largos (de una semana) durante las vacaciones y después puros entrenamientos de fin de semana. El cuarto examen selectivo se aplica a finales de agosto, y es un examen de dos días con formato parecido al del concurso nacional. De ahí se elige a la preselección estatal de 12 participantes.

El proceso continúa con más entrenamientos de fin de semana y a cada entrenador del Comité se le asigna un participante para trabajar de manera individual. El último examen selectivo es una simulación del concurso nacional. Para los participantes es muy parecido al cuarto examen selectivo, pero con el fin de entrenarlos como defensores de puntos, se hace una simulación con coordinadores y profesores. Los exámenes se califican y luego se deliberan las calificaciones de una manera muy parecida a las coordinaciones del concurso nacional, con firma y todo. Cuando ya se tiene a la delegación de 6 participantes, se continúa con más entrenamientos de fin de semana y un entrenamiento un poco más largo cercano al concurso nacional.

A continuación presentamos los problemas del cuarto examen selectivo de la OMMGto aplicado el pasado 29 y 30 de agosto. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolver los problemas.

Problema 1. Una comisión de gatos y perros se reúnen para negociar. Los gatos y los perros se sientan formando un círculo. Se sabe que 5 perros tienen a su derecha a un perro y 15 perros tienen a su derecha a un gato. Además 3 de cada 4 gatos tienen a su derecha a un perro. ¿Cuántos animales están reunidos?

Problema 2. Una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es tal que para cualesquiera cuatro enteros positivos k, l, m, n que cumplen que $kl = mn$ se tiene que $a_k + a_l = a_m + a_n$. Demuestra que si p divide a q, entonces $a_p \leq a_q$.

Problema 3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC, y sea l la línea que pasa por el punto medio de BC y es perpendicular a la bisectriz del ángulo BAC. Supón que el punto medio del segmento AO está sobre l. Encuentra el valor del ángulo BAC.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea O su circuncentro. Un círculo que pasa por B y O interseca de nuevo a BC y BA en P y Q, respectivamente. Prueba que las alturas del triángulo OPQ se intersecan sobre la recta AC.

Problema 5. Sean a, b y c enteros positivos distintos. Demuestra que,

$$\operatorname{mcd}(ab + 1, ac + 1, bc + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

Problema 6. Se tiene un tablero de $n \times n$ y en cada casilla se escribe un número natural de forma que no hay 2 filas iguales en el tablero. Demuestra que se puede eliminar una columna del tablero de modo que sigue sin haber 2 filas iguales en él.
Nota: Dos filas son iguales si todos los números en una están en la otra y están exactamente en la misma posición.

Olimpiadas Internacionales

XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

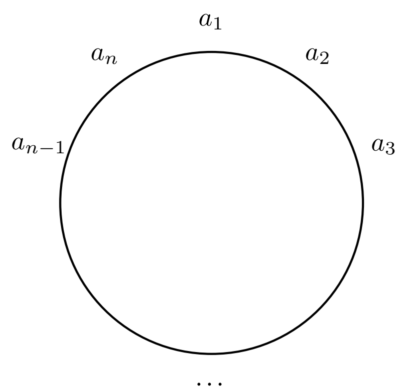
La XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe se realizó por tercera ocasión en nuestro país, del 19 al 26 de junio de 2015 en Cuernavaca, Morelos. El equipo mexicano estuvo integrado por Leonardo Ariel García Morán (Jalisco), Víctor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal) y Enrique Domínguez Lucero (Chihuahua). Leonardo Ariel y Víctor Hugo ganaron medalla de oro y Enrique ganó una medalla de plata. México ocupó el primer lugar entre los 13 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron David Guadalupe Torres Flores (jefe de la delegación) y Julio César Díaz Calderón (tutor).

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Se desea escribir n números reales diferentes con $n \geq 3$, alrededor de una circunferencia, de modo que cada uno de ellos sea igual al producto de su vecino de la derecha por su vecino de la izquierda. Determine todos los valores de n para los cuales lo anterior es posible.

Solución de Amanda Isabel Vanegas Ledesma (Venezuela). Llamemos a los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de manera que estén en ese orden sobre la circunferencia.

Si algún a_i es 0, su vecino también será 0 y habría números repetidos, lo que no puede suceder. Luego, todos los a_i son distintos de cero. Sabemos que $a_1 a_3 = a_2$, por lo que $a_3 = \frac{a_2}{a_1}$. Además, $a_2 a_4 = a_3 = \frac{a_2}{a_1}$, de donde $a_4 = \frac{1}{a_1}$. De una manera similar, podemos demostrar que $a_k = \frac{1}{a_{k-3}}$ para cada $k \geq 4$.



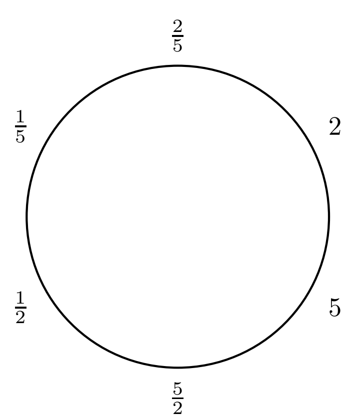
Aplicando esto, tenemos que $a_3 = \frac{1}{a_n}$ y $a_{n-3} = \frac{1}{a_n}$, por lo que $a_3 = a_{n-3}$. Esto implica que $n \leq 6$, pues si $n \geq 6$ tendríamos que a_{n-3} y a_3 son dos números iguales en diferentes vértices, lo que es una contradicción. Luego, basta ver los casos $n = 3$, 4, 5 y 6.

- $n = 3$. Tenemos que $a_1 a_2 = a_3$, por lo que $a_1 = \frac{a_3}{a_2}$. Además, como $a_2 a_3 = a_1$ tenemos que $a_2 a_3 = a_1 = \frac{a_3}{a_2}$, de donde $a_2 = \frac{1}{a_2}$ y $a_2 = 1$. Sustituyendo, tenemos que $a_1(1) = a_3$, de donde $a_1 = a_3$, lo cual es una contradicción.

- $n = 4$. Tenemos que $a_1 = a_2 a_4 = a_3$ lo cual es una contradicción.

- $n = 5$. Tenemos que $a_4 = \frac{1}{a_1}$ y $a_5 = \frac{1}{a_2}$. Como $a_1 = a_5 a_2 = \frac{1}{a_2}(a_2) = 1$ llegamos a que $a_4 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{1} = 1 = a_1$, lo cual es nuevamente una contradicción.

- $n = 6$. Un posible arreglo es:



Por lo tanto, el único valor posible de n es 6.

Problema 2. Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales está definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 2015$, y para todo entero $n \geq 1$ como

$$a_{n+1} = \frac{n-1}{n+1}a_n - \frac{n-2}{n^2+n}a_{n-1}.$$

Calcule el valor de

$$\frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \cdots + \frac{a_{2013}}{a_{2014}} - \frac{a_{2014}}{a_{2015}}.$$

Solución de Víctor Hugo Almendra Hernández (México). Notemos que $a_2 = \frac{0}{2}(a_1) - (-\frac{1}{2})a_0 = \frac{1}{2}$ y que $a_3 = \frac{1}{3}(a_2) - \frac{0}{6}(a_1) = \frac{1}{6}$. Demostraremos por inducción fuerte que para todo entero $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n!}$. Ya tenemos la base de inducción, pues $a_2 = \frac{1}{2!}$ y $a_3 = \frac{1}{3!}$.
Supongamos que $a_k = \frac{1}{k!}$ para todo k con $2 \leq k \leq m$. Tenemos que

$$a_{m+1} = \frac{m-1}{m+1}a_m - \frac{m-2}{m^2+m}a_{m-1},$$

pero por la hipótesis de inducción se tiene que $a_m = \frac{1}{m!}$ y $a_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}$, así que

$$\begin{aligned}
a_{m+1} &= \frac{m-1}{m+1}\left(\frac{1}{m!}\right) - \frac{m-2}{m^2+m}\left(\frac{1}{(m-1)!}\right),\\
a_{m+1} &= \frac{m-1}{(m+1)m!} - \frac{m-2}{m(m+1)(m-1)!},\\
a_{m+1} &= \frac{m-1-(m-2)}{(m+1)!},\\
a_{m+1} &= \frac{1}{(m+1)!},
\end{aligned}$$

lo cual concluye la inducción.
Si $m \geq 2$ tenemos que $a_m = \frac{1}{m!}$ y $a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}$, por lo que $\frac{a_m}{a_{m+1}} = \frac{(m+1)!}{m!} = m+1$ para todo $m \geq 2$. Además, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2015}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 2015$, por lo que

$$S = 2 \cdot 2015 - 3 + 4 - 5 + 6 - \cdots + 2014 - 2015.$$

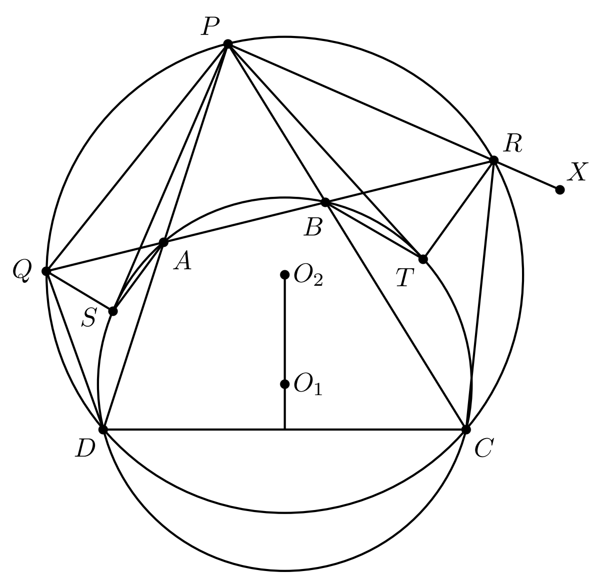
Como $-3 + 4 - 5 + 6 - \cdots + 2014 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1006} = 1006$ tenemos que $S = 4030 + 1006 - 2015 = 3021$.
Nota. En este problema la base de inducción fue con los dos primeros números. Esto es porque para pasar de saber que el resultado es cierto para $2, 3, \ldots, m$ a que sea cierto para $m+1$, se necesitaron los dos valores precedentes. Por ejemplo, como el resultado es cierto para 2 y 3, lo será cierto para 4; por ser cierto para 3 y 4, será cierto para 5; etc.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB < CD$, y sea P el punto de intersección de las rectas AD y BC. El circuncírculo del triángulo PCD corta a la recta AB en los puntos Q y R. Sean S y T los puntos donde las tangentes desde P al circuncírculo de $ABCD$ tocan a dicha circunferencia.

(a) Pruebe que $PQ = PR$.

(b) Muestre que $QRST$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución de Diego Flores Menjívar (El Salvador). Sin pérdida de generalidad los vértices son nombrados en el dibujo. Sea $\theta = \angle PDC$. Como $ABCD$ es cíclico y la recta QR es la prolongación del lado AB por ambos lados, $\angle RBC = \angle PDC = \theta$.



Sea X un punto en la prolongación del rayo $\overrightarrow{PR}$. Como $PRCD$ es un cuadrilátero cíclico tenemos que $\angle CRX = \angle PDC = \theta$. Luego, $\angle RBC = \theta = \angle CRX$, por lo que PR es tangente al circuncírculo del triángulo RBC. Si $\alpha = \angle PCR$, por esta tangencia se tiene que $\angle QRP = \alpha$. Por otro lado, como $PRCQ$ es un cuadrilátero cíclico, se tiene que $\angle PQR = \angle PCR = \alpha$. Por lo tanto, el triángulo PQR es isósceles con $PQ = PR$, que era lo que se buscaba probar.

Como los ángulos $\angle QDP$ y $\angle PCR$ corresponden a los segmentos PQ y PR, son iguales, por lo que $\angle QDP = \alpha$. Luego, tenemos que QP es tangente al circuncírculo de QDA. Por potencia del punto P a este circuncírculo tenemos que $PQ^2 = PA \cdot PD$. Análogamente tenemos que $PR^2 = PB \cdot PC$. Por potencia del punto P al circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $PS^2 = PT^2 = PA \cdot PD = PB \cdot PC$, por lo que $PS^2 = PA \cdot PD = QP^2$ de donde $PS = PQ$ y $PT^2 = PB \cdot PC =$

PR^2, y así $PT = PR$. Por todo lo anterior, se tiene que $PQ = PS = PT = PR$, por lo que los puntos Q, S, T y R equidistan de P y el cuadrilátero $QRST$ es cíclico.

Problema 4. Anselmo y Bonifacio inician un juego donde alternadamente van sustituyendo el número escrito en la pizarra. En cada turno, el jugador debe sustituir el número escrito, ya sea por la cantidad de divisores del número escrito o por la diferencia entre el número escrito y su cantidad de divisores. Anselmo es el primero en jugar, y aquel jugador que escriba el 0 gana. Dado que el número inicial es 1036, determine cuál de los jugadores tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Nota. *Por ejemplo, la cantidad de divisores del* 14 *es* 4*, pues sus divisores son* 1*,* 2*,* 7 *y* 14.

Solución de Enrique Dominguez Lucero (México). Llamemos a Anselmo el jugador A y a Bonifacio el jugador B. Veamos que A en su primer turno tiene las opciones de escribir 12 (que es el número de divisores de 1036) o $1036 - 12 = 1024$. Si escribe 12, el juego puede seguir solo alguna de las siguientes opciones:

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \arrow[r] & 0 & \\
12 \arrow[r] & 6 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 3 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & 0 \\
 & & 2 \arrow[r] & 0 & 1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

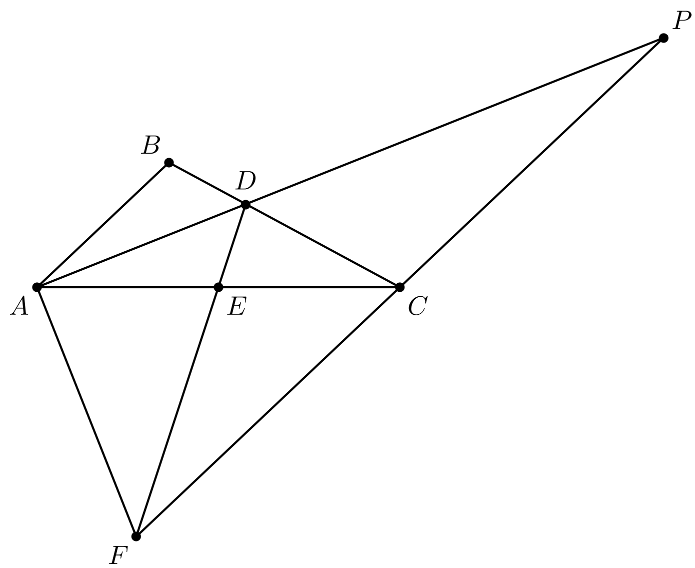
Y en este caso B tiene estrategia ganadora, pues pasa a 6 y si A pone 2 gana B, entonces pone 4, B pone entonces el 3 y ya está forzado para ganar B pues el 2 y el 1 son posiciones perdedoras para A.
Por lo anterior, si A escribe 12 entonces B tiene estrategia ganadora. Si A escribe $1024 = 2^{10}$ entonces B escribe 11 de donde el juego puede seguir de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
 & & 6 \arrow[r] & \cdots & \\
11 \arrow[r] \arrow[dr] & 9 \arrow[ur] \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 0 \\
 & 2 \arrow[r] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Si A en ese turno escribe 2 le da la victoria a B, entonces tendría que escribir 9 y de allí B escribe 3 el cual le da la victoria en el siguiente turno que tire. Por lo tanto, B tiene estrategia ganadora.

Problema 5. Sea ABC un triángulo tal que $AC = 2AB$. Sea D el punto de intersección de la bisectriz del ángulo CAB con BC. Sea F el punto de intersección de la paralela a AB por C con la perpendicular a AD por A. Muestre que FD pasa por el punto medio de AC.

Solución de Jonathan Rodríguez Figueroa (Puerto Rico). Llamemos $\alpha = \angle ABD$, $\gamma = \angle ACD$ y $\beta = \angle BAD = \angle DAC$ (porque AD es una bisectriz). Sean P y E las intersecciones de AD con FC y de AC con DF, respectivamente.



Por el teorema de la bisectriz se tiene que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

Entonces, $\frac{AB}{BD} = \frac{2AB}{CD}$ y por lo tanto $CD = 2BD$. Por otro lado como $AB \parallel CF$ se tiene que $\angle BAF + \angle AFC = 180°$ y como $\angle DAF = 90°$ se tiene que $90° + \beta + \angle AFC = 180°$. Luego, $\angle AFC = 90° - \beta$. Por suma de ángulos en el triángulo FAP se tendría que $\angle APC = \beta$. Por ángulos alternos internos $\angle ABC = \angle BCP = \alpha$ y $\angle ADB = \angle CDP$, de donde $ABD \simeq PCD$ por el criterio AAA.
Ya que $CD = 2BD$, sabemos que $PD = 2AD$ y $PC = 2AB = AC$. Luego, PCA es isósceles. Por ángulos alternos internos $\angle BAC = \angle ACF = 2\beta$. Como $\angle FAD = 90°$ y $\angle CAP = \beta$ se tiene que $\angle FAC = 90° - \beta = \angle CFA$ de donde se tiene que FCA es isósceles con $FC = CA = CP = 2AB$. Además, $\angle DAC = \angle DPF$, $PD = 2AD$ y $FP = FC + CP = CA + CA = 2CA$. Luego, $DAC \simeq DPF$ por el criterio LAL, y en particular $\angle ACD = \angle PFD = \gamma$.
Por suma de ángulo externo tenemos que $\angle ADF = \angle DFP + \angle FPD = \gamma + \beta$ y $\angle BDA = \angle DAC + \angle ACD = \beta + \gamma$.
Entonces $\angle BAD = \angle DAE$, $\angle BDA = \angle ADE$ y $AD = AD$. Por lo tanto, los triángulos BAD y EAD son congruentes por el criterio ALA, lo cual quiere decir que $\frac{AC}{2} = AB = AE$ de donde se tiene que E es el punto medio de AC.

Problema 6. En una olimpiada de matemáticas participaron 39 alumnos. El examen consistió en 6 problemas y cada uno se calificó con 1 punto si estaba correcto o con 0 si estaba incorrecto. Para cualesquiera tres alumnos, hay a lo más un problema que no fue resuelto por ninguno de los tres. Sea B la suma de los puntos que obtuvieron los 39 alumnos. Encuentre el menor valor posible para B.

Solución de Leonardo Ariel García Morán (México). Veamos que en total se otorgaron $39 \times 6 = 234$ calificaciones. Ya que cada calificación es 0 o 1, la suma total de los puntos que obtuvieron los 39 alumnos es igual a la cantidad de unos que se otorgaron, por lo que B es la cantidad de unos que se obtuvieron. Ya que en total hubo 234 calificaciones (unos o ceros) tenemos $B = 234 - A$, donde A es la cantidad de ceros que se otorgaron.

Le asignamos a cada alumno una clave. Esta es un entero positivo de la lista 1, 2, $3, \ldots, 39$. Se asignan estos 39 enteros como claves de manera que no haya dos alumnos con la misma clave.

Sean S_i el conjunto de enteros k tales que el alumno con clave k no resolvió el problema i (donde se numeran los problemas del 1 al 6) para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

La condición de que no haya 3 alumnos tales que hubo dos problemas que ninguno de los tres resolvió implica que $|S_i \cap S_j| \leq 2$ para todos i, j con $1 \leq i < j \leq 6$. Pues si hubiera $i < j$ con $|S_i \cap S_j| \geq 3$ cualesquiera tres alumnos del conjunto $S_i \cap S_j$ no cumplirían las condiciones del problema (pues todos tendrían 0 en los problemas i y j). Ahora tenemos que $A = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_6|$ y ya que buscamos minimizar $B = 234 - A$, esto equivale a maximizar A.

Consideremos una familia $\{S_1, S_2, \ldots, S_6\}$ que maximiza A sujeto a las condiciones del problema. Supongamos que existe un $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$ tal que $i \notin S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6$. Entonces cambiar el conjunto S_1 por $S_1^* = S_1 \cup \{i\}$ no afecta la condición $|S_i \cap S_j| \leq 2$ pues i no está en ninguna pareja de conjuntos (únicamente en S_1). Por otro lado, tenemos que $|S_1^*| = |S_1| + 1 > |S_1|$, luego $|S_1| + |S_2| + \cdots + |S_6| < |S_1^*| + |S_2| + \cdots + |S_6|$, contradiciendo el hecho de que $\{S_1, S_2, \ldots, S_6\}$ adquiere el máximo valor posible de A. Luego todo $i \in \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$ pertenece a $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6$, y $\{1, 2, 3, \ldots, 39\} \subseteq S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6$ pero como $S_i \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$ entonces $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6 \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$. Por lo tanto, $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6 = \{1, 2, 3, \ldots, 39\}$ y $|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6| = 39$.

Por el principio de inclusión-exclusión,

$$\begin{aligned} 39 &= |S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_6| \\ &= |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_6| + \sum_{i=2}^{6} \left(\sum_{1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_i \leq 6} |S_{a_1} \cap S_{a_2} \cap \ldots \cap S_{a_i}| \right) (-1)^{i-1} \end{aligned}$$

Notamos que $A = |S_1| + |S_2| + \cdots + |S_6|$, y que la condición $|S_i \cap S_j| \leq 2$ para todos

$i<j$ implica $\sum_{1\le i<j\le 6}|S_i\cap S_j|\le\sum_{1\le i<j\le 6}2=2\binom{6}{2}=30$. Luego,

$$A=39+\sum_{1\le i<j\le 6}|S_i\cap S_j|-\sum_{1\le i<j<k\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k|+\cdots+|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_6|$$
$$\le 69-\sum_{1\le i<j<k\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k|+\cdots+|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_6|$$

Veamos que si $Y\subseteq X$, entonces $|X|\ge|Y|$ que es equivalente a $|Y|-|X|\le 0$. Tenemos que $S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_6\subseteq S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_5$, entonces $|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_6|-|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_5|\le 0$ y entonces

$$|S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_6|-\sum_{1\le i<j<k<m<n\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k\cap S_m\cap S_n|\le 0$$

pues todo conjunto tiene cardinalidad mayor o igual que 0.
Ahora, para $a<b<c$ sea $N_{abc}=S_a\cap S_b\cap S_c$, y para $i<j<k<m$ sea $M_{ijkm}=S_i\cap S_j\cap S_k\cap S_m$. Tenemos que,

$$\begin{array}{lll}
M_{1234}\subset N_{123} & M_{1235}\subset N_{125} & M_{1236}\subset N_{126}\\
M_{1245}\subset N_{145} & M_{1246}\subset N_{146} & M_{1256}\subset N_{156}\\
M_{1345}\subset N_{134} & M_{1346}\subset N_{136} & M_{1356}\subset N_{135}\\
M_{1456}\subset N_{456} & M_{2345}\subset N_{234} & M_{2346}\subset N_{236}\\
M_{2356}\subset N_{235} & M_{2456}\subset N_{245} & M_{3456}\subset N_{345}
\end{array}$$

Luego, existen 15 conjuntos distintos (en términos de a,b,c) de la forma N_{abc} tal que cada uno contiene a uno de los 15 conjuntos de la forma M_{ijkm}. Así,

$$\sum_{1\le i<j<k<m\le 6}|M_{ijkm}|-\sum_{1\le i<j<k\le 6}|N_{ijk}|\le 0,$$

o, alternativamente:

$$\sum_{1\le i<j<k<m\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k\cap S_m|-\sum_{1\le i<j<k\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k|\le 0.$$

Entonces:

$$A\le 69+\left(\sum_{1\le i<j<k<m\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k\cap S_m|-\sum_{1\le i<j<k\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k|\right)$$
$$+\left(|S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_6|-\sum_{1\le i<j<k<m<n\le 6}|S_i\cap S_j\cap S_k\cap S_m\cap S_n|\right)$$
$$\le 69+0+0=69.$$

Ahora veamos que $A = 69$ es alcanzable. Con los conjuntos:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},\\
S_2 &= \{1, 2, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\},\\
S_3 &= \{3, 4, 11, 12, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},\\
S_4 &= \{5, 6, 13, 14, 19, 20, 25, 26, 27, 28\},\\
S_5 &= \{7, 8, 15, 16, 21, 22, 25, 26, 29, 30\},\\
S_6 &= \{9, 10, 17, 18, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39\},
\end{aligned}$$

tenemos que $A = 69$, y no es difícil verificar que la condición $|S_i \cap S_j| \leq 2$ se cumple. Entonces el valor máximo de A es 69, y por lo tanto el valor mínimo de B es $234 - 69 = 165$.

56ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas se llevó a cabo del 4 al 16 de julio de 2015 en Chiang Mai, Tailandia. La delegación mexicana estuvo integrada por Juan Carlos Ortiz Rhoton y Leonardo Ariel García Morán, de Jalisco; Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Luis Xavier Ramos Tormo, de Yucatán; Pablo Meré Hidalgo, de Querétaro; y Antonio López Guzmán, de Chihuahua. Juan Carlos obtuvo una medalla de oro, la cual es la tercera medalla de oro para México en esta olimpiada; Kevin William y Luis Xavier obtuvieron medalla de plata; y Leonardo Ariel, Pablo y Antonio obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el lugar 19 de 104 países participantes, siendo esta una de las mejores participaciones de nuestro país. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (líder), Rogelio Valdez Delgado (tutor) y Luis Eduardo García Hernández (observador).

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Decimos que un conjunto finito $\mathcal{S}$ de puntos del plano es *equilibrado* si para cada dos puntos distintos A y B de $\mathcal{S}$ hay un punto C en $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Decimos que $\mathcal{S}$ es *libre de centros* si para cada tres puntos distintos A, B, C en $\mathcal{S}$ no existe ningún punto P en $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Demostrar que para todo $n \geq 3$ existe un conjunto de n puntos equilibrado.

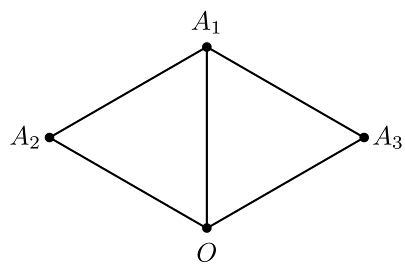
(b) Determinar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existe un conjunto de n puntos equilibrado y libre de centros.

(Problema sugerido por Países Bajos)

Solución de Leonardo Ariel García Morán.

(a) Si n es impar, sea $A_1A_2\ldots A_n$ un n-ágono regular. Veamos que el conjunto $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ es balanceado. Si elegimos dos puntos diferentes, A_iA_j, como el n-ágono tiene una cantidad impar de vértices, la mediatriz del segmento A_iA_j pasará por otro vértice, A_k de S. Por lo que $A_kA_i = A_kA_j$. Además, como el circuncentro de cualesquiera tres vértices de S es justo el centro del n-ágono, el cual no está en S, tenemos que S es libre de centros.

Cuando n es par, se encontrará el conjunto por inducción y este será de la forma $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ con $OA_1 = OA_2 = \cdots = OA_n$. Para $n = 4$ consideramos la siguiente configuración, donde todos los segmentos dibujados son iguales.



El conjunto $\{O, A_1, A_2, A_3\}$ es equilibrado, pues si tomamos A_i y A_j se tiene que $OA_i = OA_j$ y si tomamos O y un A_i, hay un A_j tal que OA_iA_j es un triángulo equilátero, por lo que $OA_j = A_iA_j$. Eso demuestra la base de inducción. Suponemos que para cierto par $n \geq 4$ existe un conjunto $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ y a partir de este construiremos uno con dos puntos más.

Elegimos un punto A_n en el círculo con centro O y radio OA_1 que sea diferente a los demás A_i. Consideraremos otro punto A_{n+1} en ese círculo de manera que $\angle A_nOA_{n+1} = 60°$. Si A_{n+1} coinciden con algún punto A_i, movemos A_n hasta que eso no suceda. Así, obtendremos el conjunto $\{O, A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ con $n+2$ puntos.

Si elegimos dos puntos A_i y A_j, tenemos que $OA_i = OA_j$, por construcción. Si elegimos O y A_i, también por construcción, siempre existe un A_j tal que OA_iA_j es un triángulo equilátero. Luego, $A_jO = A_jA_i$. Por lo tanto, este conjunto es equilibrado y la inducción está completa.

(b) En el inciso anterior se mostró un ejemplo de un conjunto equilibrado libre de centros para todo n impar. Demostraremos que si n es par, esto no puede suceder. Para ello, supongamos lo contrario, es decir, supondremos que existe un número par, digamos $n = 2k$ de manera que existe un conjunto S equilibrado y libre de centros con n elementos. Sea T el número de ternas (A, B, C) de puntos distintos de S tales que C está en la mediatriz de AB (las ternas (A, B, C) y (B, A, C) se consideran iguales). Al ser S equilibrado, por cada pareja de puntos (A, B) hay un punto C en su mediatriz, por lo que $T \geq \binom{2k}{2} = \frac{2k(2k-1)}{2} = k(2k-1)$.

Como C puede ser cualquiera de los $2k$ vértices, por el principio de las casillas tenemos que existe un vértice P que aparece como C en al menos $\lceil \frac{T}{2k} \rceil$ veces, por lo que aparece en al menos

$$\left\lceil \frac{T}{2k} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{k(2k-1)}{2k} \right\rceil = \left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil = k$$

tercias. Es decir, P está en la mediatriz de al menos k segmentos. Si estos k segmentos no tuvieran ningún vértice en común, tendríamos al menos $2k+1$ puntos en S (pues P no puede ser vértice de estos segmentos), lo cual es una contradicción y debe haber un punto de S que sea vértice de al menos dos de estos segmentos. Luego, existen puntos A_1, A_2 y A_3 en S tales que P está en las mediatrices de A_1A_2 y A_1A_3. Esto implica que P es el circuncentro del triángulo $A_1A_2A_3$ y S no es libre de centros, lo cual es una contradicción.
Luego, podemos concluir que existe un conjunto equilibrado de n puntos y libre de centros, si y solo si, n es impar.

Problema 2. Determinar todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que cada uno de los números

$$ab - c, \;\; bc - a, \;\; ca - b$$

es una potencia de 2.
(*Una potencia de* 2 *es un entero de la forma* 2^n*, donde* n *es un entero no negativo*).

(Problema sugerido por Serbia)

Solución Luis Xavier Ramos Tormo. Existen α, β y γ enteros tales que $ab - c = 2^\alpha, ac - b = 2^\beta$ y $bc - a = 2^\gamma$. Ahora analicemos los posibles casos con base en la paridad de a, b y c.
Caso 1. Los números a, b y c son todos impares.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b \geq c$. Como $ac - b \mid ac - b$ y $ac - b \mid (ab - c)$ se tiene que $ac - b \mid (ab - c)a + (ac - b) = b(a^2 - 1)$, sin embargo al ser b impar se tiene que b y $ac - b$ (que es una potencia de 2) son primos relativos, por lo tanto $ac - b \mid a^2 - 1$.
Si $b = c$, entonces $2^\alpha = b(a-1)$ y como b es impar se tendría que $b = 1$ de donde $c - a$ y $a - c$ son potencias de 2 pero $(c - a) + (a - c) = 0$ lo cual es absurdo, por lo tanto $b \neq c$. En particular, tenemos que $c \geq 3$ y $b \geq 5$.
Como $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ existen enteros A y B tales que $A \cdot B = ac - b$ y $A \mid a + 1$ y $B \mid a - 1$, luego $a \equiv -1 \pmod{A}$ y $a \equiv 1 \pmod{B}$, entonces $0 \equiv ac - b \equiv -c - b \pmod{A}$ y de forma analoga $0 \equiv b - c \pmod{B}$, por lo tanto $ac - b = A \cdot B \mid (b + c)(b - c) = b^2 - c^2$. Puesto que un divisor común de $b + c$ y $b - c$ debe dividir a $(b + c) - (b - c) = 2b$ con b impar se tiene que 4 no puede dividir simultáneamente a estos dos números, entonces la máxima potencia de 2 que divide a alguno de estos dos es 2^1, luego al otro lo tiene que dividir $2^{\beta-1}$, en cualquiera de los dos casos se tiene que $2^{\beta-1} \leq b + c$.
Análogamente $bc - a \mid c^2 - 1 = (c-1)(c+1)$ por lo que $2^{\gamma-1}$ divide a $c + 1$ o a $c - 1$. Como estos números difieren en 2, alguno solo aporta un factor 2 y tenemos que $2^{\gamma-1}$ divide al otro. En cualquier caso tenemos que $2^{\gamma-1} \leq c + 1$. Luego

$$2(c+1) \geq 2^\gamma = bc - a$$

de donde se tiene que

$$a \geq bc - 2c - 2. \tag{10}$$

Por otro lado, ya se tenía que $b + c \geq 2^{\beta-1}$, entonces $2(b + c) \geq 2^{\beta} = ac - b$ que se reescribe como $3b + 2c \geq ac$ combinando esta con (10) se concluye que $3b + 2c \geq ac \geq (bc - 2c - 2)c$, de donde

$$0 \geq bc^2 - 2c^2 - 4c - 3b. \tag{11}$$

Como $c \geq 3$ se cumple que $4c \leq c^2 + 3$, sustituyendo en (11) se tiene que

$$\begin{aligned} &0 \geq bc^2 - 2c^2 - c^2 - 3 - 3b = bc^2 - 3c^2 - 3b - 3 = (b - 3)(c^2 - 3) - 12 \\ \Rightarrow\ &12 \geq (b - 3)(c^2 - 3) \geq 2(c^2 - 3) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de que b es al menos 5. Luego, $c^2 \leq 9$ y $c = 3$. Sustituyendo en la última desigualdad tenemos que $12 \geq (b - 3)(3^3 - 3) = 6$, de donde b tiene que ser igual a 5. Falta determinar el valor de a. Como $bc - a = 15 - a$ tiene que ser una potencia de 2, a solo puede valer 7, 11 o 13. Como $3 \cdot 11 - 5 = 28$ y $3 \cdot 13 - 5 = 34$, a tiene que ser 7, el cual sí cumple y tenemos la terna $(3, 5, 7)$.

Caso 2. Hay un par exactamente entre a, b y c.

Si solo uno es par entonces $ab - c$, $ac - b$ y $bc - a$ son todos impares y potencias de 2, por lo tanto todos son 1, sin embargo eso implicaría que $ab - c = ac - b$ de donde $b(a + 1) = c(a + 1)$ y $b = c$ análogamente $a = b$ pero dos de ellos son impares y el otro par, lo cual es una contradicción.

Caso 3. Hay dos pares exactamente entre a, b y c.

Sin pérdida de generalidad a y b son pares, entonces $ab - c = 1$ de donde $ab - 1 = c$, por lo tanto $bc - a = b(ab - 1) - a = b^2a - a - b$ y $ac - b = a(ab - 1) - b = a^2b - a - b$ son potencias de 2. Sea $a = 2^x a_1$ y $b = 2^y b_1$ con $x \geq y \geq 1$ y a_1, b_1 números impares, entonces

$$b^2a - a - b = 2^{2y+x}b_1^2a_1 - 2^x a_1 - 2^y b_1 = 2^y(2^{x+y}b_1^2a_1 - 2^{x-y}a_1 - b_1),$$

lo cual implica que $2^{x+y}b_1^2a_1 - 2^{x-y}a_1 - b_1$ es potencia de 2.

Si $x > y$ el número $2^{x+y}b_1^2a_1 - 2^{x-y}a_1 - b_1$ es impar y potencia de 2, por lo tanto es igual a 1, pero $2^{x+y}b_1^2a_1 - 2^{x-y}a_1 - b_1 \geq 2$ pues $2^{x+y-1}b_1^2a_1 > 2^{x-y}a_1, b_1$, lo cual es una contradicción y $x = y$.

También sin pérdida de generalidad $a_1 \geq b_1$. Con lo anterior se tiene que

$$2^{2x}a_1^2b_1 - a_1 - b_1 \quad \text{y} \quad 2^{2x}b_1^2a_1 - a_1 - b_1$$

son potencias de 2 con el de la izquierda mayor o igual que el de la derecha, por lo tanto $2^{2x}b_1^2a_1 - a_1 - b_1 \mid 2^{2x}a_1^2b_1 - a_1 - b_1$ de donde

$$\begin{aligned} 2^{2x}b_1^2a_1 - a_1 - b_1 \mid\ &2^{2x}a_1^2b_1 - a_1 - b_1 - (2^{2x}b_1^2a_1 - a_1 - b_1) \\ &= 2^{2x}a_1b_1(a_1 - b_1) \end{aligned}$$

al ser a_1, b_1 impares se debe cumplir que

$$2^{2x}b_1^2a_1 - a_1 - b_1 \mid 2^{2x}(a_1 - b_1) < 2^{2x}a_1. \tag{12}$$

Si $a_1 = b_1$ entonces $a = b$ y $c = a^2 - 1$. Además $cb - a = a(a^2 - 1) - a = a^3 - 2a = a(a^2 - 2)$ es potencia de 2, luego $a = 2^x$ y por lo tanto $2^{2x} - 2$ es potencia de 2, lo cual sólo ocurre con $x = 1$ de donde se obtiene la solucione $(2, 2, 3)$.
Veamos qué pasa si $a_1 > b_1$. Tenemos que $2^{2x}(a_1 - b_1) > 0$ y de (12) se tendría que

$$2^{2x} b_1^2 a_1 - a_1 - b_1 < 2^{2x} a_1.$$

Si $b_1 \geq 3$, entonces $2^{2x} b_1^2 a_1 \geq 3 \cdot 2^{2x} a_1 b_1$ y como $2^{2x} a_1 b_1 > a_1$, $2^{2x} a_1 b_1 > b_1$ se tendría que

$$2^{2x} a_1 < 2^{2x} b_1^2 a_1 - a_1 - b_1 < 2^{2x} a_1$$

lo cual es absurdo, por lo tanto $b_1 = 1$ (y $a_1 \geq 3$) de donde $b = 2^x$.
Ahora $2^{2x} b_1^2 a_1 - a_1 - b_1 = 2^{2x} a_1 - a_1 - 1 = 2^k$ y $2^{2x} a_1^2 - a_1 - 1 = 2^m$ para ciertos enteros $m \geq k$. Luego $2^m - 2^k = 2^{2x} a_1(a_1 - 1)$, si $a_1 \geq 3$ se tendría que $2^{2x} a_1^2 \geq 3 \cdot 2^{2x} a_1$. Al combinar lo anterior con el hecho de que $2^{2x} a_1 > a_1, 1$ se concluye que $2^m = 2^{2x} a_1^2 - a_1 - 1 > 2^{2x}$ de donde $2^{2x} \mid 2^m = 2^{2x} a_1^2 - a_1 - 1$ y por lo tanto $2^{2x} \mid a_1 + 1$, luego $2 \mid a_1 - 1$ exactamente (es decir, 2^2 no divide a $a_1 - 1$) y por lo tanto $2^{2x+1} \mid 2^{2x} a_1(a_1 - 1)$ es una divisibilidad exacta, entonces $k = 2x + 1$.

Con esto se tiene que

$$2^{2x} a_1 - a_1 - 1 = 2^{2x+1}$$

que en el caso de $a_1 = 3$ se reduce a $2^{2x} 3 - 4 = 2^{2x+1}$ que es equivalente a $2^{2x} - 4 = 0$ de donde $x = 1$ y obtenemos la solución $(6, 2, 11)$.
Si $a_1 \geq 5$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2^{2x} a_1 - a_1 - 1 > 2^{2x+1} &\Leftrightarrow 2^{2x}(a_1 - 2) - a_1 - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow (2^{2x} - 1)(a_1 - 2) - 3 > 0 \end{aligned}$$

lo cual es cierto pues $2^{2x} - 1 \geq 3$ (pues x es al menos 1) y $a_1 - 2 \geq 3$, por lo tanto no hay soluciones con $a_1 \geq 5$. Esto concluye este caso.
Caso 4. Los tres números a, b y c son pares.
Sean $a = 2^x a_1$, $b = 2^y b_1$ y $c = 2^z c_1$ con $x \geq y \geq z$ sin pérdida de generalidad y a_1, b_1, c_1 impares. Entonces $ab - c = 2^z(2^{x+y-z} a_1 b_1 - c_1)$ es potencia de 2, por lo tanto $2^{x+y-z} a_1 b_1 - c_1$ es potencia de 2, pero es número impar, entonces

$$2^{x+y-z} a_1 b_1 - c_1 = 1$$

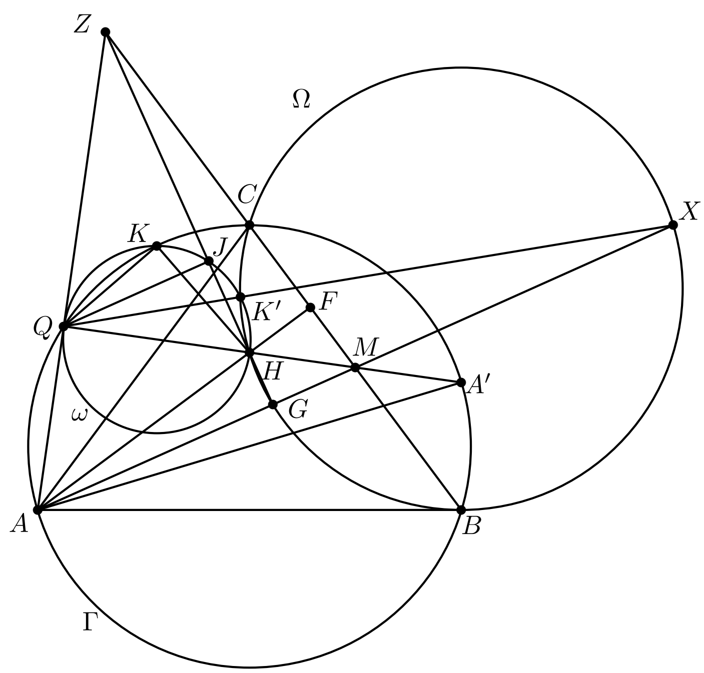
de donde $b_1 \mid c_1 + 1$, análogamente $c_1 \mid b_1 + 1$. Por lo tanto, $b_1 - 1 \leq c_1 \leq b_1 + 1$.

Como c_1 es impar y $b_1 - 1, b_1 + 1$ son pares, lo anterior implica que $c_1 = b_1$, entonces $c_1 \mid c_1 + 1$, por lo tanto $c_1 = 1$.
Por lo tanto $2^{x+y-z} a_1 - 1 = 1$, luego $2^{x+y-z} a_1 = 2$ de donde $a_1 = 1$ y $x + y - z = 1$, análogamente $x + z - y = 1$ lo cual implica que $x = 1$ y $y = z$. Además $bc - a = 2^{2y} - 2 = 2(2^{2y-1} - 1)$ es potencia de 2 y por lo tanto $2^{2y-1} - 1 = 1$ de donde $y = 1$.
Luego, en este caso la única solución es $(2, 2, 2)$.
Luego, podemos concluir que las soluciones son $(2, 2, 2)$, $(2, 6, 11)$ y $(3, 5, 7)$.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circunferencia circunscrita, H su ortocentro, y F el pie de la altura desde A. Sea M el punto medio del segmento BC. Sea Q el punto de Γ tal que $\angle HQA = 90°$ y sea K el punto de Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en este orden. Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo KQH es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo FKM.

(Problema sugerido por Ucrania)

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Sean ω y Ω la circunferencia de diámetro HQ y el circuncírculo del triángulo BHC, respectivamente. Sea Z la intersección de las líneas BC y AQ. Por construcción, el punto K está sobre ω. Es bien conocido que los puntos H, M, Q y A' están en la misma línea, con A' el punto diametralmente opuesto a A en Γ. Por el cuadrilátero cíclico $AA'CQ$ tenemos $\angle A'QC = \angle MQC$ y $\angle A'AC = 90° - \angle B$ puesto que AA' es diámetro de Γ. Entonces $\angle MQC = 90° - \angle B = \angle HCM$, esto implica que los triángulos MHC y MCQ son semejantes, por lo tanto $\frac{MH}{MC} = \frac{MC}{MQ}$ o de forma equivalente $MC^2 = MH \cdot MQ$. Además, como los ángulos $\angle HQZ$ y $\angle ZFH$ son iguales a 90°, el cuadilátero $QHFZ$ es cíclico y $MC^2 = MH \cdot MQ = MF \cdot MZ$. De esto se sigue que la inversión por M y radio MC envía H a Q y F a Z.



Puesto que la circunferencia ω pasa a través de H y Q y estos son puntos correspondientes en la inversión, esta circunferencia es fija bajo la inversión. También la circunferencia Γ después de la inversión es enviada a una circunferencia por B, C y H la cual es Ω. Sí K' es el inverso de K entonces K' está sobre ω y Ω, el circuncírculo de MFK es enviado a una línea a través de K' y Z. Entonces el problema es equivalente a ver que ZK' es tangente a ω.

Sean G y J (distinto de H) las intersecciones de ZH con AM y ω, respectivamente. En el triángulo AMZ las líneas AF y MQ son alturas, luego H es el ortocentro y ZG es perpendicular a AM. Por otro lado, $\angle QJH = 90°$ puesto que QH es diámetro de ω. Luego, AM es paralela a QJ.

Como Ω y Γ son circunferencias reflejadas por M, el segundo punto de intersección X de AM y Ω cumple que $AM = MX$, entonces el haz $Q(AX; MJ)$ es armónico. Sea X' la intersección del rayo QK' con Ω. El ángulo $\angle HK'X' = 90°$ ya que $\angle QK'H = 90°$, entonces X' es el punto diametralmente opuesto a H en Ω y la reflexión de H a través de M es A', puesto que H, M y A' son puntos colineales y Ω, Γ son reflejadas por M la una de la otra. Por lo tanto X' y A son puntos simétricos con respecto a M de donde A, M y X' son colineales y $X = X'$.

Proyectando el haz $Q(AX; MJ)$ sobre ω, el cuadrilátero $QHK'J$ es armónico. La línea QZ es tangente a ω en Q (pues QZ es perpendicular al diámetro HQ de ω), y la diagonal HJ interseca a esta recta en Z, por ser $QHK'J$ armónico se debe tener que ZK' es la otra tangente desde Z a ω.

Problema 4. El triángulo ABC tiene circunferencia circunscrita Ω y circuncentro O. Una circunferencia Γ de centro A corta al segmento BC en los puntos D y E tales que B, D, E y C son todos diferentes y están en la recta BC en este orden. Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω, tales que A, F, B, C y G están sobre Ω en este orden. Sea K el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo BDF y el segmento AB. Sea L el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo CGE y el segmento CA. Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X. Demostrar que X está en la recta AO.

(Problema sugerido por Grecia)

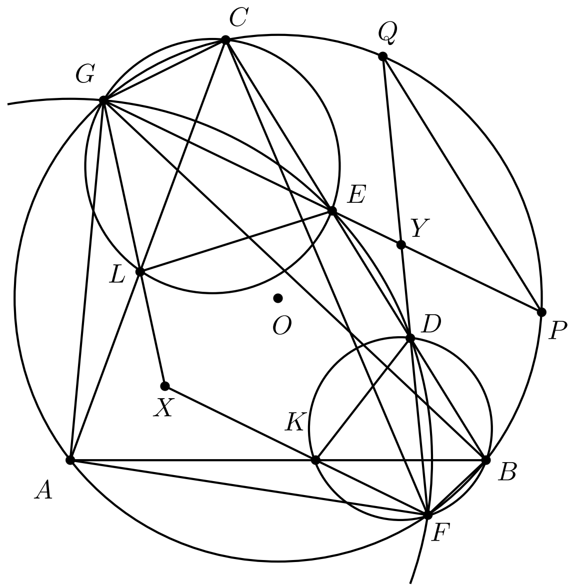
Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Demostremos que $\angle EGC = \angle BFD$. Con esto se tendría que $\angle BGE = \angle A - \angle EGC = \angle A - \angle BFD = \angle DFC$ y como

$$\angle BGA = \angle BCA = \angle ECL = \angle EGL,$$
$$\angle CFA = \angle CBA = \angle DBK = \angle DFK,$$

se concluiría que

$$\angle AGL = \angle BGE = \angle DFC = \angle AFK.$$

Entonces $\angle AGX = \angle AFX$ pero $AF = AG$, $OF = OG$, así que AO es mediatriz de FG.



Si reflejamos GX por AO, de la simetría de AG con AF y la igualdad de ángulos, se refleja en FX por lo tanto X estaría en el eje de reflexión que es AO.
Sean Y la intersección de FD con GE, P la intersección de EG con Ω y Q la de FD con Ω. Por potencia desde Y a Γ se tiene que $YD \cdot YF = YE \cdot YG$, y por potencia desde el mismo punto a Ω se tiene que $YF \cdot YQ = YP \cdot YG$. Así,

$$\frac{YD}{YE} = \frac{YG}{YF} = \frac{YQ}{YP},$$

de donde $DE \parallel PQ$. Con esto se tiene que $\angle EGC = \widehat{PC} = \widehat{BQ} = \angle BFD$.

Problema 5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$$

para todos los números reales x, y.

(Problema sugerido por Albania)

Solución. Denotaremos por $P(m, n)$ a la sustitución de los números $x = m$, $y = n$ en la igualdad del problema. $P(0, 0)$ implica que $f(f(0)) = 0$. Luego, si $a = f(0)$ tenemos que $f(a) = 0$. $P(0, a)$ implica que $a^2 = 2a$, por lo que $a = 2$ o $a = 0$. Veamos cada caso.

- $a = 2$. $P(x, 1)$ implica que $f(x + f(x + 1)) = x + f(x + 1)$, y $P(0, y)$ implica que $f(f(y)) = f(y) + 2y - 2$. Si en esta hacemos la sustitución $y = x + f(x+1)$ tenemos que $x + f(x + 1) = 1$, de donde podemos concluir que $f(x) = 2 - x$ para todo x. Sustituyendo en la ecuación funcional, vemos que sí cumple.

- $a = 0$. $P(0, y)$ implica que $f(f(y)) = f(y)$, $P(x, 0)$ implica que $f(x + f(x)) = x + f(x)$. Sustituyendo $x = f(y)$ tenemos que $f(2f(y)) = 2f(y)$. $P(-1, 1)$ implica que $f(-1) = -1$ y $P(1, -1)$ implica que $f(1) = 1$.

  - $P(1, y - 1)$ implica que $f(f(y) + 1) + f(y - 1) = f(y) + y$.
  - $P(1, f(y) - 1)$ implica que $2f(y) = f(f(y) + 1) + f(f(y) - 1)$.
  - $P(-1, y + 1)$ implica que $f(f(y) - 1) + f(-y - 1) = f(y) - y - 2$.

  Sumando estas tres igualdades tenemos que $f(y - 1) = -f(-y - 1) - 2$, por lo que $f(y - 2) = -f(-y) - 2$ para todo y. Haciendo $y = 0$ obtenemos que $f(-2) = -2$.

  $P(-2, y)$ implica que

  $$\begin{aligned} f(f(y-2)-2) + f(-2y) &= f(y-2) - 2 - 2y, \\ -f(-f(y-2)) - 2 + f(-2y) &= f(y-2) - 2 - 2y, \\ -f(f(-y)+2) + f(-2y) &= -f(-y) - 2 - 2y. \end{aligned}$$

  Cambiando y por $-y$ obtenemos que

  $$f(f(y) + 2) + 2y = f(2y) + f(y) + 2. \tag{13}$$

  Cambiando este y por $f(y)$ tenemos que $f(f(y) + 2) + 2f(y) = f(2f(y)) + f(y) + 2$, de donde $f(f(y) + 2) = f(y) + 2$. Finalmente, sustituyendo este valor para $f(f(y) + 2)$ en la relación (13), llegamos a que $f(y) + 2 + 2y = f(2y) + f(y) + 2$, o sea $f(2y) = 2y$ para toda y, por lo que $f(y) = y$ para toda y. Es fácil ver que esta cumple la ecuación funcional.

Por lo tanto, las soluciones son $f(x) = x$ y $f(x) = 2 - x$ para toda x.

Problema 6. La sucesión de enteros $a_1, a_2, \ldots$ satisface las siguientes condiciones:

(a) $1 \leq a_j \leq 2015$ para todo $j \geq 1$;

(b) $k + a_k \neq l + a_l$ para todo $1 \leq k < l$.

Demostrar que existen dos enteros positivos b y N tales que

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \leq 1007^2$$

para todos los enteros m y n que satisfacen $n > m \geq N$.

(Problema sugerido por Australia)

Solución. Supongamos que los números a_n van apareciendo uno por uno. Luego, podemos visualizar el proceso como sigue: el número a_n aparece en el n-ésimo paso, luego, en cada paso decrecerá en 1 hasta que se vuelva 0 (y desaparece). Bajo esta manera de verlo, la condición de que cada $a_n + n$ es diferente significa que todos los números son distintos en cada momento.

Este modo de verlo puede ser formalizado como sigue. Para cada $n \geq 1$ se define el conjunto

$$D_n = \{a_i - (n-i) \,|\, i = 1, 2, \ldots, n\} \cap \{1, 2, \ldots, 2015\}.$$

Notamos que para una n fija, todos los números de la forma $a_i - (n-i) = a_i + i - n$ son diferentes. Esto implica que $D_{n+1} = ((D_n - 1) \setminus \{0\}) \cup \{a_{n+1}\}$, por lo que $|D_n| \leq |D_{n+1}| \leq |D_n| + 1$ y la sucesión $|D_n|$ es no decreciente. Además, está acotada por 2015, por lo que eventualmente es constante, esto es, existe un entero positivo N tal que $|D_{N-1}| = |D_N| = |D_{N+1}| = \cdots = b$. Demostraremos que estos valores de N y b satisfacen la condición requerida.

De la definición, tenemos que si S_j es la suma de los elementos de D_j, entonces $S_j = S_{j-1} - b + a_j$ para todo $j \geq N$. Luego, sumando esta expresión para $j = m+1, m+2, \ldots, n$, obtenemos

$$\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) = S_n - S_m.$$

Notamos que $|D_j| = |D_{j+1}|$ implica que $1 \in D_j$. Como cada D_j con $j \geq N-1$ consiste en b números de $\{1, 2, \ldots, 2015\}$ y $1 \in D_j$, tenemos que

$$1 + 2 + \cdots + b \leq S_j \leq 1 + (2015 - (b-2)) + (2015 - (b-3)) + \cdots + 2014 + 2015,$$

esto es,

$$\frac{b(b+1)}{2} \leq S_j \leq 1 + \frac{(b-1)(4032-b)}{2},$$

por lo que,

$$|S_n - S_m| \leq 1 + \frac{(b-1)(4032-b)}{2} - \frac{b(b+1)}{2} = (b-1)(2015-b) \leq 1007^2,$$

por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica.

2ª Olimpiada Iraní de Geometría

La Olimpiada Iraní de Geometría (IGO) nació en el año 2014 como una competencia nacional para desarrollar la educación en geometría en Irán.

En el año 2015 se invita a diversos países, incluyendo a México, a participar en la segunda edición en una modalidad a distancia con un sistema por correspondencia.

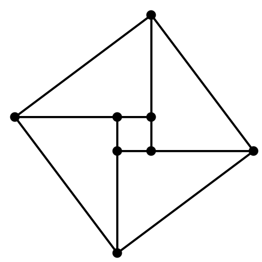
El 3 de septiembre de 2015 en diversos estados de la república mexicana se aplicó el examen de la IGO en sus tres niveles: elemental, medio y avanzado. De todos los alumnos participantes, se seleccionaron los mejores 12 exámenes para representar la participación mexicana.

Se obtuvieron 4 medallas de plata y 4 de bronce. En el nivel elemental Alfredo Hernández Estrada, de San Luis Potosí, obtuvo medalla de plata; Ana Paula Jiménez, del D.F., y Katia García Orozco, de Chihuahua, obtuvieron medalla de bronce. En el nivel medio Maximiliano Sánchez Garza, de Nuevo León, y Oriol Sole Pi, del D.F., obtuvieron medalla de plata, e Isaac Jair Jiménez Uribe, de Sinaloa, obtuvo medalla de bronce. En el nivel avanzado Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León, obtuvo medalla de plata; y Ariel Leonardo García Morán, de Jalisco, obtuvo medalla de bronce.

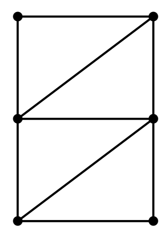
A continuación presentamos los problemas de la 2^a Olimpiada Iraní de Geometría. Los alumnos tuvieron, en cada nivel, 4.5 horas para resolver los problemas. Cada problema vale 8 puntos.

Nivel Elemental

Problema 1. Se tienen 4 triángulos de madera de lados $3, 4$ y 5 centímetros. ¿Cuántos polígonos convexos diferentes se pueden formar utilizando todos los triángulos? (Dibuja solamente los polígonos, no es necesaria una demostración).



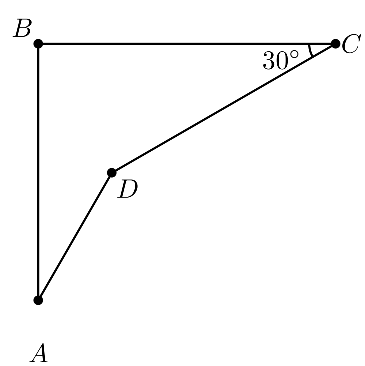
Este polígono no es convexo



Este polígono es convexo

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $\angle A = 60°$. Los puntos M, N, K están sobre BC, AC, AB, respectivamente, y son tales que $BK = KM = MN = NC$. Si $AN = 2AK$, encuentra los valores de los ángulos $\angle B$ y $\angle C$.

Problema 3. En la figura siguiente, se conoce que $AB = CD$ y $BC = 2AD$. Muestra que $\angle BAD = 30°$.

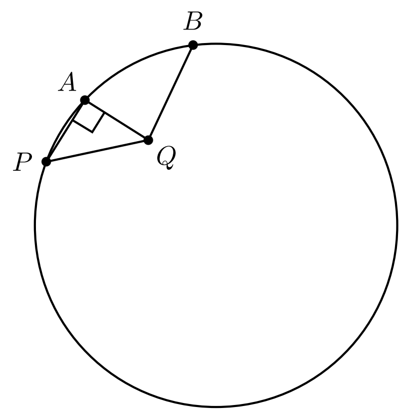


Problema 4. En el rectángulo $ABCD$, los puntos M, N, P, Q están sobre los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente, de manera que las áreas de los triángulos AQM, BMN, CNP, DPQ son iguales. Muestra que el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

Problema 5. ¿Existirán 6 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase por los centros de exactamente otras 3 circunferencias?

Nivel Medio

Problema 1. En la figura de abajo, los puntos P, A, B están sobre la circunferencia. El punto Q se encuentra dentro de la circunferencia y satisface que $\angle PAQ = 90°$ y $PQ = BQ$. Muestra que el valor de $\angle AQB - \angle PQA$ es igual al del arco $\widehat{AB}$.



Problema 2. En un triángulo acutángulo ABC, sea BH la altura desde el vértice B. Los puntos D y E son los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Supón que F es la reflexión de H con respecto a ED. Muestra que la recta BF pasa por el circuncentro de ABC.

Problema 3. En el triángulo ABC, los puntos M, N, K son los puntos medios de BC, CA, AB, respectivamente. Sean ω_B y ω_C las dos semicircunferencias con diámetros AC y AB, respectivamente, fuera del triángulo ABC. Suponga que MK y MN intersecan a ω_C y ω_B en X e Y, respectivamente. Las tangentes a ω_C y a ω_B en X e Y, respectivamente, se intersecan en Z. Muestra que AZ es perpendicular a BC.

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncírculo ω y circuncentro O. Sea P un punto en el arco $\widehat{BC}$ (en el arco que no contiene al punto A). La tangente a ω en P interseca a las extensiones de AB y AC en K y L, respectivamente. Muestra que $\angle KOL > 90°$.

Problema 5.

a) ¿Existirán 5 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase por los centros de exactamente otras 3 circunferencias?

b) ¿Existirán 6 circunferencias en el plano de manera que cada circunferencia pase por los centros de exactamente otras 3 circunferencias?

Nivel Avanzado

Problema 1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 (con centros O_1 y O_2, respectivamente) se intersecan en A y B. Sea X un punto sobre ω_2. Sea Y un punto sobre ω_1 tal que $\angle XBY = 90°$. Sea X' el segundo punto de intersección de la recta O_1X y ω_2, y sea K el segundo punto de intersección de $X'Y$ y ω_2. Muestra que X es el punto medio del arco $\widehat{AK}$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncírculo ω y circuncentro O. Sea P un punto en el arco $\widehat{BC}$ (en el arco que no contiene al punto A). La tangente a ω en P interseca a las extensiones de AB y AC en K y L, respectivamente. Muestra que $\angle KOL > 90°$.

Problema 3. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Sean l_1 y l_2 dos rectas que pasan por H y perpendiculares entre ellas. La recta l_1 interseca a BC y a la extensión de AB en D y Z, respectivamente. La recta l_2 interseca a BC y a la extensión de AC en E y X, respectivamente. Sea Y un punto tal que YD es paralela a AC y YE es paralela a AB. Muestra que X, Y, Z son colineales.

Problema 4. En un triángulo ABC, se dibuja la circunferencia con centro en A y radio AB. Esta circunferencia interseca a AC en dos puntos. Se dibuja también la circunferencia con centro A y radio AC y esta circunferencia interseca a AB en dos puntos. Denota estos cuatro puntos por A_1, A_2, A_3, A_4. Los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y C_1, C_2, C_3, C_4 se construyen de manera análoga. Supón que esos 12 puntos están distribuidos sobre dos circunferencias. Muestra que el triángulo ABC es isósceles.

Problema 5. Los rectángulos ABA_1B_2, BCB_1C_2, CAC_1A_2 están fuera del triángulo ABC. Sea C' el punto tal que $C'A_1$ es perpendicular a A_1C_2 y $C'B_2$ es perpendicular a B_2C_1. Los puntos A' y B' se definen de manera análoga. Muestra que las rectas AA', BB', CC' concurren.

El niño prodigio brasileño que calma el caos

La solución de Artur Avila[5] a problemas ubicuos en la teoría del caos, le han hecho ganarse la primera medalla Fields para Brasil.

Por Thomas Lin y Erica Klarreich

Llueve torrencialmente en un día de primavera y Artur Avila está abandonado en la Universidad de París, campus Jussieu, salvo por la chaqueta malpuesta antes de abordar su vuelo nocturno desde Chicago. “Esperemos”, dice el matemático Brasileño arrastrando las palabras por su falta de sueño. Su camiseta ajustada revela el físico aproximado de un robusto mediocampista. “No quiero enfermarme”. En los asuntos de día a día, Avila se aleja de las complicaciones y el riesgo. Temiendo que su mente vire entre señales de tráfico y el tránsito que viene a un “mapa unimodal” o a “operadores de Shrödinger cuasi periódicos”, él no maneja ni usa bicicleta. “Hay demasiados carros en París”, dice él. “Temo que un autobús loco me mate”.

Rápidamente, la conversación da un giro a un asunto menos complicado para Avila - el recuerdo público de que la aparente falta de logros intelectuales hace que los estudiantes se alejen de las carreras de investigación en ciencias o matemáticas. En el camino al Mundial de Futbol del 2014, canales populares de noticias en internet y en televisión como “Buenos días, Brasil” se hacen la pregunta: “¿cómo es que la séptima economía del mundo, que ha logrado 5 campeonatos mundiales de futbol continúe sin un Premio Nobel?” (la tenue conección a Brasil del biólogo británico Peter Medawar - nacido en Brasil, pero criado en Inglaterra, la tierra de su madre - merece a lo más un asterisco). Incluso Argentina, ese amargo rival en futbol con un quinto de la población de Brasil,

[5] Artur Avila fue medallista de oro en la Olimpiada Internacional de Matemáticas celebrada en Toronto, Canadá, en 1995, y ganador de la medalla Fields en 2014, junto con Maryam Mirzajani de Irán, también ganadora de medalla de oro en la Olimpiada Internacional.

ha logrado 5 premios Nobel.
Para Avila, el criticismo pica. “No es bueno para la imagen misma de Brasil”, dice.
Incluso en esas fechas, en mayo, el hijo de Rio de Janeiro tenía un arma secreta, un fuerte argumento de que Brasil pertenece a las naciones importantes como los Estados Unidos, Francia o Rusia. Pero él no se lo podía decir a nadie – hasta ahora. La Unión Matemática Internacional ha hecho de Avila el primer Brasileño ganador de la medalla Fields, dándole a Avila, de 35 años, lo que muchos consideran el equivalente al premio Nobel en matemáticas por sus “profundas contribuciones a la teoría de los sistemas dinámicos” que “le ha hecho un gran cambio a ese campo”, palabras del comité de selección de la medalla.
“Él es uno de los mejores analistas en el mundo” dice Jean-Christophe Yoccoz, un renombrado matemático del Collège de France y también ganador de la medalla Fields en 1994. De todos los investigadores en el posdoctorado que ha guiado Yoccoz, “Artur está solo en su clase”. La mayoría de los matemáticos se enfocan en una subdisciplina y tienen una tasa muy baja de éxitos, explica Yoccoz, pero Avila “ataca muchos problemas importantes y resuelve muchos de ellos”.
Su trabajo no puede ser reducido a “un gran teorema” pues Artur tiene muchos resultados fuertes en muy diferentes temas, dice Marcelo Viana, quien trabajó con Avila para resolver un viejo problema acerca del comportamiento caótico de las bolas de billar. Entre los dos probaron una fórmula que predice el lado de la mesa en la que la bola más seguramente golpeará – y qué lado probablemente golpeará después de mil o un millón de golpes, con el mismo margen de error. En contraste, Viana observa, si tratas de predecir el clima, “serán muy buenas tus predicciones para mañana, pero nada buenas para pasado mañana y completamente incorrectas en 15 días”.
Meses antes del anuncio en la página web del IMU, el Brasileño, investigador de sistemas dinámicos Welington de Melo predijo que su antiguo estudiante doctoral ganaría el mayor premio en matemáticas. “Va a ser extremadamente importante para Brasil”, dijo. “Nunca antes habíamos ganado tal premio. Es especialmente importante, pues Artur fue estudiante en Brasil todo el tiempo”.

Matemáticas en la playa

Hay dos cosas que Avila teme más que los autobuses erráticos con las presentaciones en power point y los formatos de impuestos. La presión por presentar una conferencia plenaria para los miles que asistieron al Congreso Internacional de Matemáticas en Hydebarad, India, lo indujo a una especie de parálisis mental, dice él. Después de dar una lectura en el Instituto de Tecnología de California en 2008, prefirió no cobrar más de 2,000 dólares en honorarios por evitar el papeleo necesario.
“Sería despedido rápidamente de casi cualquier trabajo”, dice él, agregando que duerme bien después de mediodía y no es bueno gestionando sus tiempos.
Pero en matemáticas, Avila tiene una reputación para bucear dentro de aguas poco familiares y resolver rápidamente una balsa de preguntas abiertas ambiciosa. Sus colegas describen su manera de trabajar como altamente colaborativa y muy rápida, y Avila la describe diciendo que tiene una muy buena intuición para simplificar profundas complicaciones.

"Tiene una visión geométrica", dice Raphael Krikorian, un investigador de sistemas dinámicos armeno-francés de la Universidad Pierre y Marie Curie en París. "Él te dice lo que tienes que ver, lo que tienes que hacer. Luego, claro, tienes que trabajar".

Avila tiene las nacionalidades brasileña y francesa y recorre el mundo, pasando la mitad del año como investigador director en el CNRS, la institución pública de investigación científica más grande de Francia, y la otra mitad en Rio como investigador visitante en el IMPA, el Instituto de Matemática Pura y Aplicada. (La conección entre Brasil y Francia no es mera coincidencia, en los setentas y ochentas, varios excelentes matemáticos jóvenes, como Étienne Ghys y Yoccoz cumplieron su servicio militar obligatorio con una alternativa social: dirigir investigación en el IMPA).

En el alocado Rio durante los meses de verano e invierno, Avila reflexiona sobre problemas mientras está en una cama o erra en la playa Leblon a una cuadra de su departamento. Ahí, tiene más tiempo y libertad para pensar profundamente sobre su trabajo y para dejar que sus ideas fluyan libremente. "No creo que baste con golpear mi cabeza contra una pared para que llegue una solución", le gusta decir. Él a veces invita a colaboradores a Rio, uno a la vez, para lo que se puede describir como una experiencia de trabajo poco convencional.

"La última vez que estuve en Rio, elegí específicamente un hotel cercano a la playa para poder trabajar con él", dice Amie Wilkinson, una matemática de la Universidad de Chicago. Después de buscar a Avila en una playa que está "apiñada de cariocas obsesionados con el sexo" y volver al hotel a tratar de llamarlo, Wilkinson eventualmente lo encuentra "literalmente parado sobre el agua", dice ella. "Nos reunimos y trabajamos con el agua hasta mis rodillas. Fue muy loco".

"Si trabajas con Artur", dice Wilkinson, "tienes que meterte en un traje de baño".

Avila nació de padres que no veían a su hijo crecer para convertirse en un matemático puro – ellos nunca habían oído hablar de uno – y querían que él estudiara una carrera como burócrata. La educación formal de su padre creciendo en una zona rural del Amazonas no comenzó hasta sus años de adolescencia, pero, para el tiempo en el que nació Artur, su padre se había convertido en un contador en una empresa de seguros, con lo cual le daba a su familia una vida de clase media en Rio y para comprar libros de matemáticas para así tranquilizar a su hijo, quien desde temprana edad, estaba más interesado en leer que en imitar el tiro de bicicleta de Pelé. Cuando Avila tenía 6 años, su mamá – quien aún llena sus formatos de impuestos – lo inscribió en el Colégio de São Bento, una escuela católica conservadora conocida por sus académicos y por el monasterio São Bento del siglo XVI. Dos años después sus padres se separaron. Mientras los años pasaban, Artur se enfocaba cada vez más en matemáticas excluyendo casi todo lo demás – él frecuentemente tenía malas calificaciones en otras materias y fue expulsado después del octavo grado por oponerse a resolver los exámenes obligatorios de religión. El dice que "dejó la escuela completamente no preparado para una interacción social normal".

Avila tuvo su primera prueba de una comunidad matemática enorme justo antes de su expulsión en 1992 cuando Luiz Fabiano Pinheiro, un maestro en São Bento conocido afectuosamente como "Fabiano", alentó al prodigio de 13 años a participar en la división infantil de la prestigiosa Olimpiada Internacional de Matemáticas. Avila se emocionaba mucho con problemas que nunca había visto pero se sentía deplorablemente preparado. "Por vez primera, sentí que no podía hacer nada", dice. El año siguiente,

después de que Fabiano le ayudó a entrar a una nueva escuela, Avila ganó los mejores premios del nivel estatal. Dos años después, ganó una medalla de oro en la Olimpiada Internacional de Matemáticas en Toronto.
“La primera vez que estuve con Artur, supe que sería muy bueno”, Fabiano dice en portugués mientras su ex-esposa, Eliana Vianna, traduce. “Artur fue el mejor de todos mis estudiantes”, dice el maestro retirado de 72 años que enseñó por 5 décadas.
A través de las olimpiadas, Avila descubrió el IMPA, donde Brasil hace las premiaciones de la olimpiada año con año. Ahí, él conoció grandes matemáticos como Carlos Gustavo Moreira y Nicolau Corcñao Saldanha y, mientras aún estaba en la preparatoria, comenzó con cursos universitarios.

Sistemas dinámicos

En Brasil, Avila pudo saborear las matemáticas sin las presiones a las que se hubiera enfrentado en los Estados Unidos. “Fue mejor para mí estudiar en el IMPA que en Princeton o Harvard”, dice. “Crecer y haber sido educado en Brasil fue muy positivo para mí”.
Uno de los temas de investigación más importantes en el IMPA son los sistemas dinámicos, la rama de las matemáticas que estudia sistemas que evolucionan conforme pasa el tiempo de acuerdo con ciertas reglas – una colección de planetas alrededor de una estrella, por ejemplo, o una bola de billar recorriendo una mesa o una población de organismos que puede crecer o decrecer.
Una razón por la cual muchos jóvenes matemáticos estudian sistemas dinámicos, según varios investigadores, es que es una rama relativamente nueva, en contraste con la antigua rama de teoría de números. Además, no requiere un gran conjunto de conocimientos para comenzar a resolver problemas. Los sistemas dinámicos aparecen en todos lados en las matemáticas y en la naturaleza. “Es como el pegamento que conecta todos los demás objetos”, dice Krikorian. De las “dos culturas de matemáticas” descritas por Timothy Gowers, matemático de la Universidad de Cambridge y ganador de la medalla Fields en 1998, hay *creadores de la teoría* que son los que crean nuevas matemáticas y hay los *resolvedores de problemas* que analizan las preguntas existentes. La mayoría de los que trabajan en sistemas dinámicos, dice Yoccoz, incluido Avila y él mismo, son resolvedores de problemas. “Ambos son necesarios”, dice.
En las décadas precedentes al trabajo de Avila, los matemáticos realizaron un descubrimiento profundo: para producir un comportamiento complejo, no es necesario comenzar con reglas complejas. Incluso reglas simples, repetidas una y otra vez, pueden crear caos: cosas que parecen estar al azar, comportamiento no predecible, en los cuales pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden producir escenarios dramáticamente diferentes. Uno de los primeros sistemas simples conocidos en los cuales se empezó a ver comportamiento caótico es el llamado modelo “logístico” del crecimiento de la población, que da una formulación precisa con la cual la población cambia año con año. Avila llegó en el momento justo a poner un punto final a esta historia.
En la naturaleza, una población pequeña frecuentemente crece rápidamente porque hay una abundancia de recursos; una población grande crecerá en menor medida o incluso decrecerá, pues habrá pocos recursos. En 1838, el matemático belga Pierre Verhulst capturó esta intuición en la ecuación logística para el crecimiento de la población. La

gráfica de la ecuación logística es simplemente una parábola hacia abajo que crece rápidamente si la población es pequeña y decrece muy rápido si la población es mayor a lo que el ecosistema puede sostener. Mientras pasa el tiempo, la población se moverá sobre la parábola – una población pequeña podrá volverse grande al siguiente año para volver a ser pequeña nuevamente.

No todas las poblaciones siguen esta descripción, claro. La ecuación logística codifica esta diversidad con un parámetro r que varía entre 1 y 4 y controla los cambios de la parábola: mayores valores de r corresponden a poblaciones que reaccionan de manera más extrema a pequeños cambios. Poblaciones con valor bajo de r corresponen a poblaciones que buscan un punto de equilibro o quizás rebotar entre algunos valores año con año. Pero para ciertos valores de r mayores que 3.56995 - valor conocido como "la constante del caos" - el sistema se vuelve completamente no predecible.

"Es solo una parábola – cuya gráfica saben dibujar los niños en las escuelas", observa Wilkinson. "Pero esta simple imagen tiene esta parte llena de locura".

Investigadores saben desde hace décadas que más allá de la llegada del caos, hay "islas de estabilidad" - valores de r mayores que 3.56995 para los cuales la población tenderá, por ejemplo, a un ciclo de tres años o a uno de siete. A finales de los noventas, Mikhail Lyubich de la Universidad de Stony Brook en Long Island dilucidó qué pasa fuera de estas islas: para casi cualquier otro parámetro más allá de la llegada del caos, el comportamiento de la ecuación es "estocástico", exhibiendo la no predictibilidad alrededor de lo que es el sello del caos.

Lyubich apenas había terminado este trabajo sobre la ecuación logística cuando viajó al IMPA en 1998. Mientras estuvo ahí, conoció a Avila y en un instante puso cómodo al tímido estudiante de 19 años. "Como estudiante, estaba temeroso de cometer errores", dice Avila. "Él era muy gentil y no daba nada de miedo".

Lyubich, de Melo y Avila decidieron intentar extender el análisis de Lyubich sobre el comportamiento después de la llegada del caos a un caso más general. A mediados de los setentas los matemáticos descubrieron que el conjunto particular de ciclos y caos que muestra la ecuación logística parece ser una propiedad universal de cada familia de ecuaciones con las misma forma básica que la parábola hacia abajo (llamados mapas unimodales). Los científicos encontraron esta misma combinación de ciclos y caos en una gran variedad de sistemas de dinámica de fluidos, química y otras áreas de la ciencia. Los investigadores trabajaron mucho para llevar estas observaciones a matemáticas formales.

Los tres matemáticos investigaron qué sucede a una familia de mapas unimodales después de la llegada del caos. Ellos llevaron el problema a una pregunta particular, que luego Avila resolvió. Su construcción, Lyubich escribió en una reseña del trabajo de Avila en 2012, "es delicada y, a primera vista, muy buena para ser verdad – pero funcionó y completó el argumento."

La demostración mostró que una gran clase de familias de mapas unimodales se comporta justamente como la familia logística: después de la llegada del caos, hay islas de estabilidad, rodeadas de cerca enteramente por parámetros que las llevan a un comportamiento estocástico.

Martillo y clavos

En primavera y en otoño, cuando está trabajando en el CNRS en París, Avila es un electrón matemáticamente libre moviéndose de instituto en instituto en busca de problemas "atractivos". "En ocasiones la belleza se encuentra en la redacción matemática del problema y a veces en el uso de las herramientas matemáticas", dice él. "Me gusta trabajar cuando estas se combinan una manera no esperada."

Muchos matemáticos son atraídos por Avila principalmente porque "demistifica" ideas complicadas, haciéndolas parecer triviales, dice Bassam Fayad, un colega del CNRS. "Si trabajas con él, esta experiencia cambia tu actitud hacia las matemáticas. Aprendes a hacer matemáticas sin dolor."

Cierto día, mientras erraba por las calles de París con Artur, Jairo Bochi le mencionó que estaba tratando de usar esferas para terminar una prueba en la que estaba trabajando por dos meses. "A las personas les toma mucho tiempo para entender tu problema", dice Bochi, un matemático del sur de Brasil que compartió un departamento con Avila cuando estudiaban en el IMPA. "Él inmediatamente vio lo que yo quería decir y me dijo: las esferas no funcionarán, trata con un cilindro." Eso resolvió el problema y en el 2006, publicaron su resultado.

Cuando arriba a una nueva rama de las matemáticas, Avila prefiere aprenderlas platicando con las personas en vez de leer los artículos más recientes. "En ocasiones ataco agresivamente un problema sin tener el conocimiento necesario", dice Avila. "Quizás, como yo no sé qué han hecho las otras personas, evito los caminos sin salida. Cuando obtengo un buen resultado, me siento más motivado a aprender acerca del tema, para entender lo que estoy demostrando."

Algo que fue central en la demostración sobre los mapas unimodales fue una poderosa técnica llamada renormalización que a veces convierte un sistema dinámico en otro haciendo un acercamiento a una parte que se comporta de manera similar al sistema completo. Avila se convirtió en un experto en esta técnica. "Él contribuyó de una gran manera a entender este fenómeno", dice Lyubich.

La renormalización fue el martillo de Avila y él empezó a darse cuenta de que los clavos aparecían en todas las direcciones en las que miraba. Comenzó una serie de colaboraciones en sistemas dinámicos unimodales, los cuales, Lyubich escribió en el resumen, "efectivamente cerraron el campo". Pero eso fue solo el inicio. Avila comenzó a navegar en otras áreas de sistemas dinámicos, usando la renormalización para resolver un problema importante después de otro.

"Una parte de la fuerza de Avila es que él es capaz de trabajar en todas esas áreas y, en cierto sentido, unificarlas", dice Lyubich. "Él elige una área que parece interesante, encuentra el problema fundamental para trabajar para comenzar a atacarlo sin que nada lo detenga."

Avila también estudió la evolución de los estados cuánticos en los sistemas físicos que siguen "operadores de Shrödinger cuasi-periódicos," los cuales son modelos crudos para cuasicristales, estructuras que tienen más orden que un líquido, pero menos que un cristal. Para estos operadores de Shrödinger cuasi-periódicos, Avila – trabajando con Svetlana Jitomirskaya de la Universidad de California en Irvine, y David Damanik de la Universidad Rice en Houston - "solo pasó y limpió todo", dice Wilkinson. "Él respondió una tonelada de preguntas acerca de ellos." Una de estas preguntas, concernientes a los estados de energía que los electrones pueden tomar en un modelo particular para un cuasicristal, se conoce informalmente como el problema de los “diez martinis” porque, al ser tan difícil, el matemático polaco Mark Kac prometió 10 martinis a cualquiera que pueda resolverlo. Avila recientemente ha extendido su entendimiento a una familia entera de operadores de Shrödinger cuasi-periódicos.

Avila ha trabajado con Wilkinson y Sylvain Crovisier de la Universidad de Paris-Sur en Orsay, Francia, estudiando una famosa hipótesis del siglo XIX del físico austriaco Ludwig Boltzmann. Boltzmann propuso que un gas encerrado en una caja es “ergódico”, lo que quiere decir que los átomos de gas pasarán rápidamente por todos los arreglos posibles, contrario a, por ejemplo, que se queden en periódos en regiones particulares dentro de la caja. En un trabajo reciente, Avila, Crovisier y Wilkinson han demostrado que, en el caso de modelos matemáticos cuyo comportamiento es al menos moderadamente suave, la hipótesis de ergodicidad de Boltzmann es cierta, excepto posiblemente en el caso de ciertos sistemas que son altamente predecibles, parecido a una bola de billar rebotando sobre una mesa.

A pesar de que la mayoría de sus publicaciones han tenido colaboradores, hace años que el asesor doctoral de Avila no trabaja con él. “Creo que es muy rápido para mí”, dice de Melo, de 67 años. “Tienes que trabajar mucho para estar a la par con él. Él estaría muy feliz de hacer casi todo, pero quisiera estar seguro de estar contribuyendo”.

Super estrella brasileña

Agotado por el viaje y con una barba de tres días después de un vuelo trasatlántico en mayo, Avila parecía más un estudiante de posdoctorado que un maestro en sistemas dinámicos. Desde los 19 años ha hecho grandes contribuciones a su campo (obtuvo su doctorado a los 21), por lo que ha desafiado mucho las expectativas. Cuando de matemáticas se trata, mientras no haya tránsito de coches o formas de impuestos por llenar, las ansiedades tímidas son reemplazadas por una confidencia relajada y una determinación inquebrantable.

Fayad, quien conoce a Avila desde que llegó a París en 2001, habla sobre su creciente empuje y su profesionalismo, mientras trabaja con grandes problemas matemáticos o busca en internet nuevas técnicas de ejercicio. “No es muy amateur en cosas,” dice Fayad. “Supón que él quiere comer chocolate. Se volvería un profesional comedor de chocolates”.

Por todos sus logros a tan temprana edad, Avila insiste en que él no se pone metas, prefiriendo que su trabajo fluya naturalmente. “La mayoría del tiempo en el que logro algo, no es porque eso era mi meta, sino porque estaba haciendo lo que quería,” dice él. “Solo quiero seguir disfrutando el hacer matemáticas”.

Él espera que su país natal comparta su entusiasmo. Agregado a la medalla Fields ganada por Avila, Brasil será sede de la Olimpiada Internacional de Matemáticas en el 2017 y del Congreso Internacional de Matemáticos en el 2018, donde se anunciarán a los siguientes ganadores de la medalla Fields. “Estos cuatro años serán sin duda de mucho crecimiento de las matemáticas en Brasil”, Avila dice.

Él espera que esto sea apenas el comienzo de un movimiento transformador que elevará las expectativas acerca de las promesas intelectuales del país.

El año pasado, en un pequeño bar en París en el que se estaba tocando música brasileña, Avila notó que un matemático francés le dijo a otro que en Brasil "realmente no tienen una escuela de matemáticas". Cuando Avila objetó, el otro matemático le dejó en claro que conocía el IMPA.

"Estaba un poco enojado y le insistió que en Brasil hay grandes matemáticos," Avila le dijo, a lo cual el matemático francés respondió que sí, como aquél brasileño superestrella - Avila o algo. "Creo que él esperaba que Avila fuera alguien mayor".

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Principio de las casillas)**.** *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica)**.** *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Teorema 12 (Simson)**.** *Las proyecciones de un punto sobre los lados de un triángulo son colineales si y sólo si el punto se encuentra sobre el circuncírculo del triángulo.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 13 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 14 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
UNAM
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Julio Rodríguez Hernández
SEMS, Universidad de Guadalajara
juliorod@sems.udg.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria. Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán. México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864. Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la OMM: `http://ommenlinea.org/`

¡Síguenos en facebook y en twitter!

`http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas`

`@ommtw`