TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2016, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2016.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2016, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. De esta forma, en cada uno de los números buscamos proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. En particular, el artículo de matemáticas, que se incluye al inicio de la revista, suele ser elaborado por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una vasta experiencia y participación en diversos concursos y certámenes de todos los niveles. En este sentido, el artículo *Las simedianas y el punto de Lemoine*, escrito por Mauricio Adrián Che Moguel y Luis Mauricio Montes de Oca Mena, no es la excepción. A través de sus páginas el lector conocerá el poder de las simedianas en la solución de problemas de geometría. De su estudio se derivan muchos resultados interesantes que son de gran utilidad en diversos problemas de geometría

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

euclidiana. Por la utilidad para el tratamiento de múltiples problemas, estamos seguros de que será un buen aporte para incrementar tus competencias.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2016 incluimos los exámenes con soluciones, de la XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la 5^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas, así como los problemas de la 8^a Romanian Master of Mathematics. Todos, certámenes donde México participó en el primer trimestre de este año 2016.

En la sección de *Concursos Estatales* hemos publicado el examen estatal de la Olimpiada de Matemáticas en Chihuahua del año 2015. Agradecemos a Héctor Daniel García Lara (delegado de Chihuahua) por habernos proporcionado el material, y aprovechamos invitar a los delegados estatales a que nos envíen sus propuestas de exámenes que han utilizado para seleccionar a sus delegaciones rumbo al concurso nacional de la OMM.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1997. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2016-2017 y, para el 1° de julio de 2017, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 11 de noviembre de 2016 en Acapulco, Guerrero. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2016 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Brasil, julio de 2017) y a la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Argentina, septiembre de 2017).

De entre los concursantes nacidos en 2000 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2017).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) a realizarse en la India en julio de 2017.

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en Zurich, Suiza, en el mes de abril de 2017.

Las simedianas y el punto de Lemoine

Por Mauricio Adrián Che Moguel y Luis Mauricio Montes de Oca Mena

Nivel Avanzado

Al igual que las bisectrices, las medianas, las alturas y las mediatrices de un triángulo, las simedianas también juegan un papel importante en la geometría del triángulo, y sin embargo son menos conocidas por la comunidad matemática olímpica. De su estudio se derivan muchos resultados interesantes que son de gran ayuda en diversos problemas de geometría euclidiana, e inclusive en problemas de Olimpiadas de Matemáticas. Existen varios enfoques para estudiar diversos resultados relativos a las simedianas de un triángulo, tanto geométricos como analíticos. En este artículo desarrollamos en su mayoría técnicas y propiedades más analíticas, aunque también presentamos algunos resultados geométricos.

El estudio de las simedianas se atribuye al geómetra matemático Émile Lemoine, cuyo trabajo se refleja en diversas áreas de las matemáticas, por ejemplo en geometría y teoría de números —tal es el caso de la conjetura de Lemoine. Como veremos más adelante, varias propiedades geométricas llevan su nombre —como el punto de Lemoine y la circunferencia de Lemoine. Antes de adentrarnos a los resultados aquí propuestos, aconsejamos al lector tener presente conocimientos generales de trigonometría, por ejemplo, el teorema de la bisectriz generelizada que será utilizado en el texto. También, al final del artículo dejamos algunos ejercicios relacionados con el contenido de este. Sin más preámbulos, presentamos la definición de simediana.

Definición 1 (Simediana)**.** *Sean ABC un triángulo, D el punto en BC de tal manera que AD es bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y M el punto medio del lado BC. Denotemos por M' al punto en BC (M y M' en distintos semiplanos con respecto a AD) que satisface $\angle M'AD = \angle DAM$. Decimos que el segmento AM' (o en ocasiones la recta AM') es la* simediana *del triángulo ABC trazada desde A.*

En algunos casos y dependiendo del contexto, las simedianas también se definen como las rectas isogonales a las medianas, es decir, las rectas que son simétricas a las medianas con respecto a sus respectivas bisectrices internas. Como es natural en matemáticas, el estudio de conceptos básicos se facilita cuando se tienen caracterizaciones necesarias y suficientes de ellos. Las siguientes dos proposiciones caracterizan a las simedianas de manera analítica y nos permitirán probar muchos resultados de forma más simple.

Proposición 1. *Sea ABC un triángulo, M el punto medio del lado BC y M' un punto sobre el lado BC. Denotemos $AC = b$ y $AB = c$. Entonces AM' es simediana del triángulo ABC trazada desde A si y solo si*

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Demostración. Denotemos por D al punto en BC tal que AD es bisectriz de $\angle BAC$. Supongamos que AM' es simediana y sin pérdida de generalidad podemos suponer que M' está en el segmento BD y M está en el segmento DC. Del hecho que AM' es simediana se tiene que $\angle M'AD = \angle DAM$ y $\angle BAM' = \angle MAC$, así que denotemos $\alpha = \angle M'AD = \angle DAM$ y $\beta = \angle BAM' = \angle MAC$. Aplicando el teorema de la bisectriz generalizada[2] en el triángulo ABC obtenemos

$$\frac{BM}{MC} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)},$$

pero como $BM = MC$, se tiene que $\frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta+2\alpha)} = \frac{c}{b}$. Utilizando de nuevo el teorema de la bisectriz generalizada se llega a que

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta + 2\alpha)} = \frac{c^2}{b^2},$$

es decir $\frac{BM'}{M'C} = \frac{c^2}{b^2}$.

Finalmente, como hay un único punto en el segmento BC que lo divide en una razón dada, se sigue que M' es el único punto en el segmento BC que lo divide en razón $\frac{c^2}{b^2}$. En conclusión, AM' es simediana.

□

Proposición 2. *Sea ABC un triángulo y M' un punto en BC. Entonces AM' es simediana del triángulo ABC si y solo si*

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle BAM')}{\operatorname{sen}(\angle CAM')} = \frac{AB}{AC}.$$

Demostración. Utilizando el teorema de la bisectriz se llega a que

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\angle BAM')}{\operatorname{sen}(\angle CAM')}.$$

[2] Ver en el apéndice el teorema 12.

Por la Proposición 1, AM' es simediana si y solo si $\frac{BM'}{M'C} = \frac{AB^2}{AC^2}$ si y solo si $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{sen}(\angle BAM')}{\text{sen}(\angle CAM')}$. □

De manera similar a los puntos especiales de un triángulo —como son el ortocentro, incentro, circuncentro y gravicentro, que son los puntos donde concurren las alturas, las bisectrices, las mediatrices y las medianas, respectivamente— en el caso de las simedianas también existe un punto particularmente importante. Este punto es donde las simedianas concurren y se conoce con el nombre de *punto de Lemoine* o *punto simediano*.

Teorema 1. *Las tres simedianas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. Sea ABC dicho triángulo. Denotemos por $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Consideremos los puntos D, E y F sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente, de tal forma que AD, BE y CF son las simedianas del triángulo ABC. Utilizando la Proposición 1 se tendrán las igualdades

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{BD}{DC} = \frac{c^2}{b^2}, \quad \frac{CE}{EA} = \frac{a^2}{c^2},$$

por lo tanto $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1$. Es una consecuencia inmediata del teorema de Ceva[3] que las rectas AD, BE y CF son concurrentes. □

Los siguientes dos resultados muestran una manera muy útil de construir geométricamente las simedianas de un triángulo. De hecho, la forma en que estas se construyen utilizan elementos y propiedades que frecuentemente aparecen en problemas de olimpiadas de matemáticas. Algunos ejemplos de estos son el circuncírculo y rectas tangentes a este en los vértices del triángulo.

Proposición 3. *Sean ABC un triángulo y Ω su circuncírculo. Sea P el punto donde las rectas tangentes a Ω, en B y C, se intersecan. Entonces, la recta AP es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.*

Demostración. Denotemos por M' el punto donde AP interseca a BC, y por Q el punto donde AP interseca al arco $\widehat{BC}$ (arco que no contiene a A). Además sean $\alpha = \angle BAM'$, $\beta = \angle M'AC$, $AB = c$ y $AC = b$. Debido a la Proposición 2 bastará probar que $\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} = \frac{c}{b}$. Del cuadrilátero cíclico $ABQC$ se tiene $\angle BCQ = \alpha$ y $\angle QBC = \beta$. Además, de la tangencia de las rectas PB y PC con Ω se obtienen las siguientes igualdades de ángulos $\angle PBQ = \alpha$ y $\angle PCQ = \beta$. De esta manera, aplicando el teorema de la bisectriz generalizada en los triángulos PBM' y PCM' obtenemos que,

$$\frac{PQ}{QM'} = \frac{BP}{BM'} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)} \quad \text{y} \quad \frac{PQ}{QM'} = \frac{CP}{CM'} \cdot \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha)}.$$

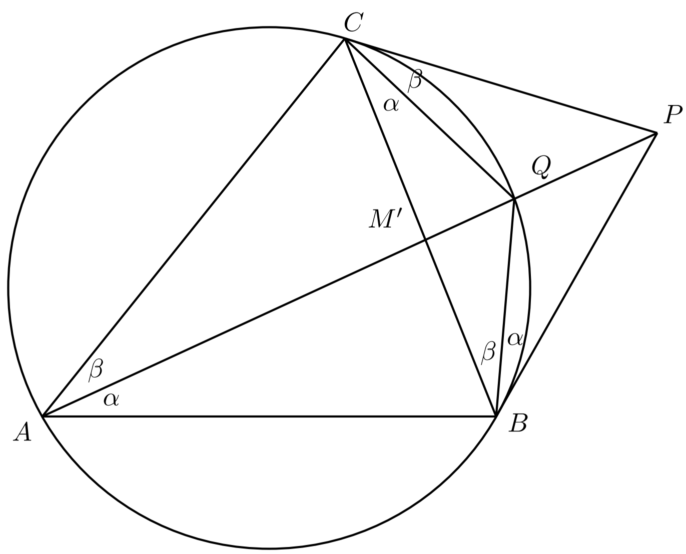
Igualando estas dos últimas ecuaciones y usando el hecho de que $CP = BP$ (debido a la tangencia de los segmentos) se llega a que $\frac{BM'}{M'C} = \left(\frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\beta)}\right)^2$. Por último notemos

[3] Ver en el apéndice el teorema 15.

que por el teorema de la bisectriz generalizada en el triángulo ABC se tiene la igualdad

$$\frac{BM'}{M'C} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)},$$

y en conclusión $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{b}$, que es lo que se quería probar. □



Como observación adicional, la Proposición 3 nos permite probar, de manera alterna a la demostración del Teorema 1, que las simedianas de un triángulo son concurrentes. A saber, las rectas tangentes al circuncírculo del triángulo ABC por los vértices, forman un triángulo cuyo punto de Gergonne[4] es el punto de Lemoine del triángulo ABC.

Proposición 4. *Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω. La recta tangente a Ω en A interseca a la recta BC en D. Desde D se traza otra recta tangente a Ω, además de AD, la cual interseca a Ω en E. Entonces, AE es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.*

Demostración. Denotemos por F al punto donde AE y BC se intersecan. Por el resultado anterior, la recta BD es la simediana de los triángulos BAE y CAE trazada desde los vértices B y C, respectivamente. Esto implica que $\frac{BE^2}{BA^2} = \frac{EF}{FA} = \frac{CE^2}{CA^2}$, de

[4]En un triángulo ABC, sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Por el teorema de Ceva, las rectas AD, BE y CF concurren. El punto de intersección se conoce como *punto de Gergonne*.

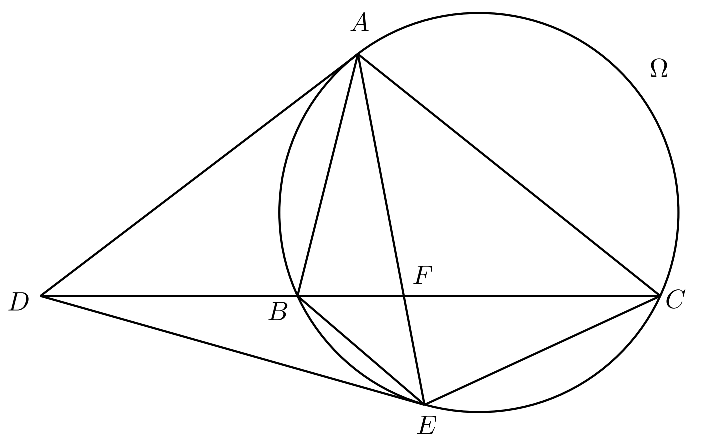
donde $\frac{BE}{BA} = \frac{CE}{CA}$. Por otro lado, debido a la semejanza de los triángulos AFC y BFE, así como a la de los triángulos AFB y CFE se tiene que

$$\frac{BF}{AF} = \frac{BE}{AC} \text{ y } \frac{CF}{AF} = \frac{CE}{AB},$$

respectivamente. Así

$$\frac{BF}{CF} = \frac{\frac{AF \cdot BE}{AC}}{\frac{AF \cdot CE}{AB}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)\left(\frac{BE}{CE}\right) = \left(\frac{AB}{AC}\right)\left(\frac{AB}{AC}\right) = \frac{AB^2}{AC^2},$$

por lo que AE es simediana. □



Otro resultado de importancia para nosotros es el siguiente.

Proposición 5. *Sea ABC un triángulo. Se escogen puntos D y E sobre las rectas AB y AC, respectivamente (los puntos son distintos de B y C). Entonces la simediana del triángulo ABC trazada desde A biseca al segmento DE si y solo si los puntos D, B, C y E son concíclicos.*

Demostración. Se demostrará el caso cuando D y E son puntos que están en el interior de los lados AB y AC, respectivamente, pues en otro caso se puede trazar una recta paralela a la original que interseque a los segmentos AB y AC interiormente. Denotemos por M al punto en BC tal que AM es simediana y sea L el punto donde AM interseca a DE. También, sean $AB = c$, $AC = b$, $\alpha = \angle BAM$ y $\beta = \angle MAC$. Debido a que AM es simediana se tiene $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{c}{b}$. Utilizando el teorema de la bisectriz generalizada en el triángulo ADE se tiene que

$$\frac{EL}{LD} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{b}{c},$$

es decir

$$\frac{EL}{LD} = \frac{AE}{AD} \cdot \frac{AC}{AB}. \tag{1}$$

Supongamos que los puntos D, B, C y E son concíclicos. De la potencia desde A hacia el circuncírculo del cuadrilátero $DBCE$ se obtiene $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$ y sustituyendo en la ecuación (1) se tiene que $EL = LD$. Por otro lado, si L es punto medio de DE, de la ecuación (1) se tiene que $\frac{AE}{AD} = \frac{c}{b}$, lo que implica que el cuadrilátero $DBCE$ es cíclico. $\square$

En la Proposición 5, cuando los puntos D, B, C y E son concíclicos también se dice que DE es *antiparalela* a BC. De hecho, dado un punto P fuera del lado BC existe una única antiparalela al lado BC que pase por P. Esto se hace construyendo el circuncírculo del triángulo BPC y de esta forma considerar los puntos D' y E' que resultan de intersecar el circuncírculo con los lados AB y AC, respectivamente. Así, la antiparalela a BC por P se construye trazando la paralela a $D'E'$ que pasa por P.

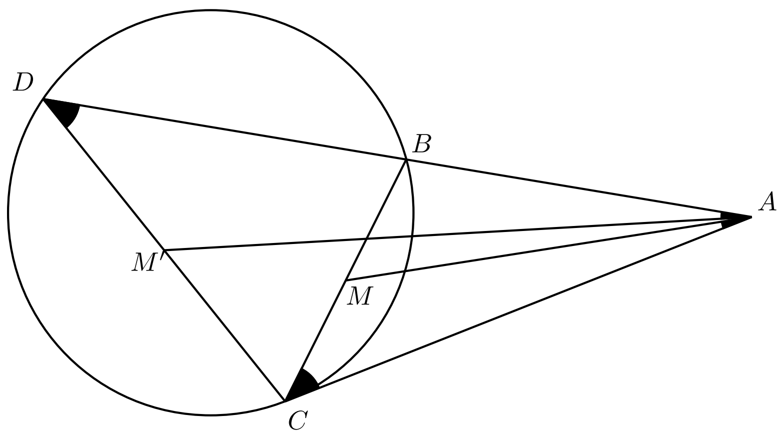
Un caso especial de la Proposición 5 es el siguiente.

Proposición 6. *Sean ABC un triángulo y M un punto sobre el segmento BC. Se escoge un punto D sobre la recta AB tal que el circuncírculo del triángulo BCD es tangente a AC. Entonces, AM es la simediana del triángulo ACD si y solo si M es el punto medio de BC.*

Demostración. Es claro que D está del mismo lado que B con respecto a A y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $AB < AD$. El hecho de que el circuncírculo del triángulo BCD sea tangente a AC implica que $\angle CDA = \angle ACB$ y como los triángulos ABC y ACD comparten el ángulo en A, se sigue que son semejantes. Ahora bien, sea M' el punto en DC tal que $\angle DAM' = \angle MAC$. Debido a la semejanza anterior, se tiene que

$$\frac{CM'}{M'D} = \frac{BM}{MC},$$

de modo que M es punto medio de BC si y solo si M' es punto medio de CD. Sin embargo, como AM' y AM son isogonales con respecto a la bisectriz interna del ángulo en el vértice A, M' es punto medio de CD si y solo si AM es simediana del triángulo ACD. Por lo tanto, M es el punto medio de BC si y solo si AM es simediana del triángulo ACD. $\square$



Algunos problemas clásicos de geometría están vinculados con minimizar o maximizar cierta cantidad, en algunas ocasiones es el perímetro, el área o simplemente alguna distancia en particular. Nuestro objetivo será minimizar la suma de los cuadrados de las distancias de un punto a los lados de un triángulo. Para ello primero tenemos las siguientes dos proposiciones.

Proposición 7. *Sean ABC un triángulo y L un punto en su interior (posiblemente sobre los lados). Denotemos por D y E a las proyecciones de L sobre los lados AB y AC, respectivamente. Entonces L está sobre la simediana del triángulo ABC trazada desde A si y solo si*

$$\frac{LD}{LE} = \frac{AB}{AC}.$$

Demostración. Denotemos por $\alpha = \angle DAL$ y $\beta = \angle LAE$. Debido a que los triángulos ADL y AEL son triángulos rectángulos, tenemos que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{\frac{LD}{AL}}{\frac{LE}{AL}} = \frac{LD}{LE},$$

es decir $\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\beta)} = \frac{LD}{LE}$. De esta última igualdad, la equivalencia es inmediata de la Proposición 2. □

Proposición 8. *Sea L el punto de Lemoine de un triángulo ABC. Si d_A, d_B y d_C son las distancias desde L hacia los lados $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$, respectivamente, entonces*

$$\frac{d_A}{a} = \frac{d_B}{b} = \frac{d_C}{c} = \frac{2(ABC)}{a^2 + b^2 + c^2},$$

donde (ABC) denota el área del triángulo ABC.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de la Proposición 7 que

$$\frac{d_A}{a} = \frac{d_B}{b} = \frac{d_C}{c} = k,$$

para alguna k. Entonces

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = ka^2 + kb^2 + kc^2 = ad_A + bd_B + cd_C$$

y así $k = \frac{ad_A+bd_B+cd_C}{a^2+b^2+c^2}$. Por último notemos que

$$(ABC) = (ALB) + (BLC) + (CLA) = \frac{cd_C}{2} + \frac{ad_A}{2} + \frac{bd_B}{2} = \frac{ad_A + bd_B + cd_C}{2},$$

de donde $k = \frac{ad_A+bd_B+cd_C}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2(ABC)}{a^2+b^2+c^2}$. $\square$

Teorema 2. *Sean ABC un triángulo y L un punto en su interior. Si d_A, d_B y d_C son las distancias desde L hacia los lados BC, CA y AB, respectivamente, entonces la suma de cuadrados*

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2$$

es mínima si y solo si L es el punto de Lemoine del triángulo ABC.

Demostración. Sean $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Para un punto P en el interior del triángulo ABC, denotemos por P_A, P_B y P_C a las proyecciones de P sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz a los conjuntos de números $\{PP_A, PP_B, PP_C\}$ y $\{a, b, c\}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}(PP_A^2 + PP_B^2 + PP_C^2)(a^2 + b^2 + c^2) &\geq (aPP_A + bPP_B + cPP_C)^2 \\ &= [2(PAB) + 2(PBC) + 2(PCA)]^2 \\ &= 4(ABC)^2,\end{aligned}$$

es decir $PP_A^2 + PP_B^2 + PP_C^2 \geq \frac{4(ABC)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$. Además, la igualdad se da si y solo si $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b} = \frac{PP_C}{b}$. Como es usual, primero veamos que el punto de Lemoine minimiza dicha suma de cuadrados. Sea L el punto de Lemoine del triángulo ABC. Usando la Proposición 8 se tiene que

$$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 = \left[\frac{2a(ABC)}{a^2 + b^2 + c^2}\right]^2 + \left[\frac{2b(ABC)}{a^2 + b^2 + c^2}\right]^2 + \left[\frac{2c(ABC)}{a^2 + b^2 + c^2}\right]^2 = \frac{4(ABC)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

de donde el punto de Lemoine minimiza la suma de cuadrados. Ahora veamos que L es el único punto que minimiza esta suma. Supongamos que P es tal que la suma de cuadrados

$$PP_A^2 + PP_B^2 + PP_C^2$$

es la mínima posible, es decir que $PP_A^2 + PP_B^2 + PP_C^2 = \frac{4(ABC)^2}{(a^2+b^2+c^2)}$, lo cual implica que se tienen las igualdades $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b} = \frac{PP_C}{b}$. De la primera igualdad $\frac{PP_A}{a} = \frac{PP_B}{b}$ se tiene $\frac{PP_A}{PP_B} = \frac{a}{b}$ y usando la Proposición 7 se tendrá necesariamente que P está sobre la simediana trazada desde C. De manera similar, P está sobre la simedianas trazadas desde B y A. En conclusión, P es el punto de Lemoine del triángulo ABC. $\square$

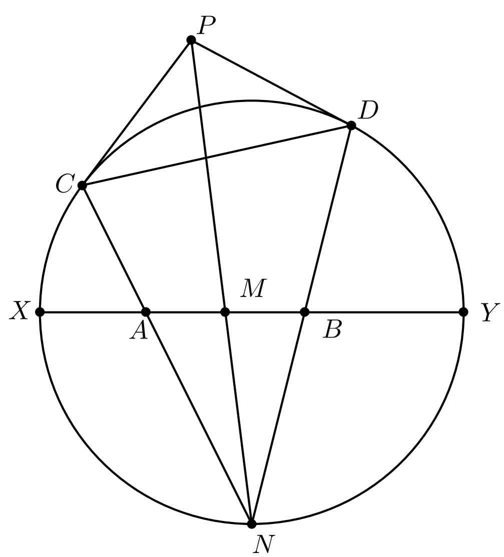
Dentro de los principales objetivos de este artículo está el de introducir a concursantes de diferentes olimpiadas de matemáticas al estudio de las simedianas y las propiedades que de ellas se derivan. Es por ello que ahora mostramos un problema de geometría que fue parte del examen de la XXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas que se llevó a cabo en la Ciudad de Panamá, en septiembre del año 2013. Este apareció como Problema 2 y como veremos a continuación, se resuelve fácilmente utilizando simedianas.

Problema (OIM, 2013/2). *Sean X, Y los extremos de un diámetro de una circunferencia Γ y N el punto medio de uno de los arcos $\widehat{XY}$ de Γ. Sean A y B dos puntos en el segmento XY. Las rectas NA y NB cortan nuevamente a Γ en los puntos C y D, respectivamente. Las tangentes a Γ en C y D se cortan en P. Sea M el punto de intersección del segmento XY con el segmento NP. Demostrar que M es el punto medio del segmento AB.*

Solución. Observemos que NP es la simediana del triángulo CND trazada desde N. Como consecuencia de la Proposición 5 bastará probar que el cuadrilátero $CDBA$ es cíclico. Para ello notemos que

$$\angle NAB = \frac{\widehat{CX} + \widehat{NY}}{2} = \frac{\widehat{CX} + \widehat{XN}}{2} = \frac{\widehat{CN}}{2} = \angle CDN,$$

de donde se sigue que el cuadrilátero $CDBA$ es cíclico. $\square$



Una observación interesante en la solución anterior es que en ella no se utiliza la hipótesis de que XY es un diámetro de Γ. De hecho el problema sigue siendo cierto si XY es una cuerda arbitraria de Γ y bajo la única restricción que los puntos C y D no sean antipodales (para garantizar que las tangentes en C y D se corten).

A continuación veremos otra aplicación de las simedianas en un problema que apareció en la ronda final de Polonia en el año 2000.

Problema. *Sea ABC un triángulo con $AC = BC$, y sea P un punto dentro del triángulo tal que $\angle PAB = \angle PBC$. Si M es el punto medio de AB, demuestra que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.*

Solución. Como $\angle PAB = \angle PBC$, la circunferencia circunscrita del triángulo APB es tangente a BC en B. Además, como $AC = BC$, entonces $\angle ABC = \angle BAC$ y se sigue que $\angle PBA = \angle PAC$. Así, la circunferencia circunscrita de APB también es tangente a AC en A. Finalmente, como estas tangentes se intersecan en C, tenemos que la recta CP es la simediana de PAB correspondiente al vértice A, de modo que $\angle APM = \angle BPN$, donde N es la intersección de la recta CP con AB. No obstante, $\angle BPN + \angle BPC = 180°$ por ser C, P y N puntos colineales, de donde concluimos que $\angle APM + \angle BPC = 180°$.
Para concluir este artículo, y antes de sugerir algunos ejercicios para el lector, se tiene el siguiente resultado relacionado con el punto de Lemoine de un triángulo, mismo que está relacionado con un problema de puntos concíclicos.

Teorema 3 (Primera Circunferencia de Lemoine)**.** *Las antiparalelas a los lados de un triángulo trazadas por su punto de Lemoine generan seis puntos de intersección con los lados del triángulo. Entonces, los seis puntos están sobre una misma circunferencia.*

Demostración. Sean ABC un triángulo y L su punto de Lemoine. Sea DE la antiparalela a BC por L, con D sobre AB y E sobre CA. Análogamente, sean GF y HI las antiparalelas a AB y CA, respectivamente, con G y H sobre BC, y F e I sobre AB. Utilizando la Proposición 5 se tendrá que L es punto medio de DE, GF y HI. Por otro lado, como los cuadriláteros $AIHC$ y $BDEC$ son cíclicos se tiene que

$$\angle BIH = \angle ACB = \angle ADE,$$

de donde el triángulo ILD es isósceles. Análogamente los triángulos FLE y HIG son isósceles. De aquí que $LD = LE = LF = LG = LH = LI$ y por tanto, los puntos D, E, F, G, H e I están sobre una circunferencia con centro en L. □

Ejercicios

A continuación dejamos unos ejercicios para el lector. Aconsejamos al lector intentar dichos ejercicios con lápiz y papel en mano.

1. Sea L el punto de Lemoine de un triángulo ABC y M el punto en BC tal que AM contiene a L. Demostrar que
$$\frac{AL}{LM} = \frac{BA^2 + AC^2}{BC^2}.$$

2. Sea ABC un triángulo. Denotemos por ω_B a la circunferencia que pasa por A, B y es tangente a AC. De forma similar, sea ω_C a la circunferencia que pasa por los puntos A, C y es tangente a AB. Por último, sea X el punto de intersección de ω_B y ω_C, que no es A. Probar que AX es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.

3. En un triángulo ABC, m_A es la longitud de la mediana trazada desde A, L es el punto de Lemoine del triángulo ABC, L_B y L_C son las proyecciones de L sobre los lados AC y AB, respectivamente. Probar que

$$L_BL_C = \frac{4m_A(ABC)}{AB^2 + BC^2 + CA^2},$$

donde (ABC) denota el área del triángulo ABC.

4. Las bisectrices interna y externa del ángulo $\angle BAC$ de un triángulo ABC, intersecan a la recta BC en E y D, respectivamente. El circuncírculo del triángulo DEA interseca al circuncírculo del triángulo ABC en X. Probar que AX es la simediana del triángulo ABC trazada desde A.

5. **Segunda Circunferencia de Lemoine.** Las rectas paralelas a los lados de un triángulo que pasan por su punto de Lemoine generan seis puntos de intersección con los lados del triángulo. Demostrar que dichos seis puntos están sobre una misma circunferencia, esta se conoce como *segunda circunferencia de Lemoine* o simplemente *circunferencia de Lemoine*.

6. En un triángulo ABC el incírculo toca a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. Por F se traza una paralela a BC, la cual interseca a DE en N. Finalmente, AN interseca a BC en P. Probar que D es el punto medio de BP.

7. Dos circunferencias se intersecan en dos puntos. Sea A uno de los puntos de intersección. Desde un punto arbitrario que se halla en la prolongación de la cuerda común de las circunferencias dadas, están trazadas hacia una de éstas dos tangentes que tienen contacto con ésta en los puntos M y N. Sean P y Q los puntos de intersección de las rectas MA y NA, respectivamente, con la segunda circunferencia. Demostrar que la recta MN corta al segmento PQ en su punto medio.

8. Consideremos un triángulo cualquiera ABC. Llamemos P y Q los pies de las alturas trazadas desde B y C respectivamente. Consideremos también $\mathcal{M}$ la recta por los puntos medios de BC y CA, y $\mathcal{L}$ la simediana trazada desde B. Probar que las rectas PQ, $\mathcal{M}$ y $\mathcal{L}$ concurren.

9. Sea ABC un triángulo con circuncírculo Ω y sea ω una circunferencia que es tangente a los lados AB, AC y tangente internamente a Ω. Si I es el incentro de ABC, T es el punto de contacto de ω con Ω y J es la segunda intersección de TI con Ω, probar que $BJ = JC$.

10. Sea ABC un triángulo, $\mathcal{L}$ su punto de Lemoine y sea A_1 el punto en BC tal que las rectas AB, BC, CA y $A_1\mathcal{L}$ son los lados de un cuadrilátero cíclico. Análogamente se definen B_1 y C_1 en los lados CA y AB, respectivamente. Demostrar que los puntos A_1, B_1 y C_1 son colineales.

Bibliografía

1. Castro, Jesús Jerónimo. *Geometría en Olimpiadas de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Guerrero.

2. Djukić, Dušan, et. al., *IMO Compendium*. Segunda edición. Springer.

3. Art of Problem Solving: `https://www.artofproblemsolving.com/`

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2016. Como seguramente ya habrás observado, el nivel de dificultad de los problemas que contiene esta sección varía conforme va transcurriendo el año. Es así, que el material seleccionado para el primer número es en su mayoría de nivel principiante y a partir de ahí, paulatinamente se incrementa el nivel, de manera que la selección para el cuarto (último) número del año es la que incorpora la mayor proporción de problemas avanzados. De cualquier manera, en cada número siempre buscamos que la selección sea diversa, que incluya retos interesantes y a la medida de todos.
Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. ¿Cuántos números múltiplos de 11 y de seis dígitos se pueden formar reordenando los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?

Problema 2. Sea $a > 0$. Encuentra todas las raíces reales del polinomio

$$x^7 - x^6a + x^5a^2 - x^4a^3 + x^3a^4 - x^2a^5 + xa^6 - a^7.$$

Problema 3. Un número de 3 dígitos es ajustado si no tiene ceros y su dígito de las centenas es igual a la suma de los otros dos dígitos (por ejemplo, el 523 es ajustado). ¿Cuántos números ajustados hay?

Problema 4. Determina todos los enteros $p > 0$ tales que los números $\sqrt{2016p - 2016}$ y $\sqrt{2016p + 2016}$ son enteros.

Problema 5. Dado un triángulo ABC, sean M y E los puntos medios de los lados AC y BA, respectivamente. Sea N un punto arbitrario en el segmento AM. Denotemos por Q a la intersección de EM y BN. La paralela a BA por N interseca a BM en P y la paralela a AQ por N interseca a BC en S. Prueba que PS y AC son paralelas.

Problema 6. En una clase de matemáticas hay $2n$ alumnos. ¿De cuántas formas los puedes repartir en n parejas distintas?

Problema 7. Sea $M = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \ldots\}$ el conjunto de enteros positivos no divisibles por 3. Para un entero positivo n se sabe que la suma de $2n$ números consecutivos en M es 300. Encuentra todos los posibles valores de n.

Problema 8. Demuestra que 2016 divide al número $2015^{2015} + 2017^{2017}$.

Problema 9. ¿Cuántos números de 4 dígitos de la forma $a12b$ son múltiplos de 36? (pueden repetirse los dígitos).

Problema 10. Sea S el punto de intersección de las diagonales de un cuadrado $ABCD$ y sea P el punto medio de AB. Sean M el punto de intersección de AC y PD, y N el punto de intersección de BD y PC. Una circunferencia está inscrita en el cuadrilátero $PMSN$. Demuestra que el radio de esta circunferencia es $MP - MS$.

Problema 11. Encuentra todos los números irracionales x tales que $x^2 + 2x$ y $x^3 - 6x$ sean ambos números racionales.

Problema 12. Sean a y b enteros positivos tales que $a > b > 2$. Demuestra que $\frac{2^a+1}{2^b-1}$ no es un entero.

Problema 13. Observa que $3, 4, 5, 8, 9$ es una lista creciente de cinco números de un solo dígito y que la suma de ellos es 29. ¿Cuántas listas crecientes de cinco números de un solo dígito tienen suma igual a 33?

Problema 14. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de números reales tales que para $n > 0$ se cumple que $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$. Considera la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$, dada por

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Demuestra que $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$.

Problema 15. Determina todos los valores enteros no negativos n para los que $n + 8$, $2n + 1$ y $4n + 1$ son cubos perfectos.

Problema 16. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Considera I_A, I_B, I_C e I_D los incentros de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente. Demuestra que $I_AI_BI_CI_D$ es un rectángulo.

Problema 17. Determina todos los números primos de la forma $a^b + b^a$ tales que a y b sean primos también.

Problema 18. Sean $x_1, \ldots, x_{49}$ números reales tales que $x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 49x_{49}^2 = 1$. Determina el valor máximo de la suma $x_1 + 2x_2 + \cdots + 49x_{49}$.

Problema 19. Determina todos los enteros positivos n para los cuales el siguiente sistema de ecuaciones tiene soluciones en los enteros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y encuentra todas las soluciones para dichos valores de n.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 16, \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} &= 1. \end{aligned}$$

Problema 20. Sea ABC un triángulo tal que $\angle CAB = 120^\circ$. Si AD es la bisectriz interna del ángulo $\angle CAB$, demuestra que

$$\frac{1}{AD} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarlas antes de tener tu propia solución o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas, tan solo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Por el criterio de divisibilidad del 11, es necesario que la suma de los dígitos en posición par sea la misma que la suma de los dígitos en la posición impar. Tenemos entonces que dividir a los números del 1 al 6 en dos conjuntos que tengan la misma suma y que además tengan la misma cantidad de elementos. Sin embargo, la suma de esos números es 21, que al ser impar, no podrá ser dividida en dos partes iguales. Por lo tanto, la respuesta es 0.

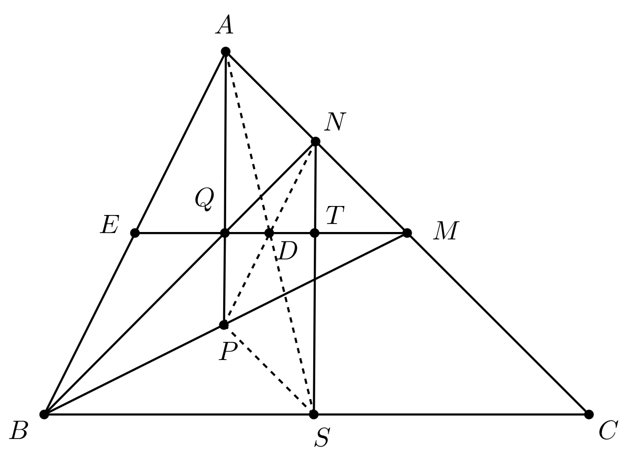
Solución del problema 2. Veamos que si multiplicamos el polinomio dado por $x + a$, obtenemos el polinomio $x^8 - a^8$, el cual se factoriza como $(x-a)(x+a)(x^2+a^2)(x^4+a^4)$. Entonces, el polinomio original se factoriza como $(x - a)(x^2 + a^2)(x^4 + a^4)$. La única raíz real de este polinomio es a.

Solución del problema 3. Procedamos por casos. Cuando el dígito de las centenas es 1, las formas de sumar 1 serían $1 + 0$ o $0 + 1$, pero como nos dicen que no hay dígitos cero, no podemos obtener algún número ajustado. Cuando el dígito de las centenas es 2, los otros dos pueden ser únicamente 11. Cuando el dígito de las centenas es 3, los otros dos pueden ser $21, 12$. Cuando el dígito de las centenas es 4, los otros pueden ser

$13, 22, 31$ y en general cuando el dígito de las centenas es k, hay $k-1$ formas para los otros dos dígitos sin usar el cero. Concluimos entonces que el número total de números ajustados es igual a $1+2+3+4+5+6+7+8=36$.

Solución del problema 4. Observemos que $\sqrt{2016p-2016} = \sqrt{9\cdot 16\cdot (14p-14)} = 3\cdot 4\cdot \sqrt{14p-14}$. Entonces, $\sqrt{2016p-2016}$ es entero si y solo si $\sqrt{14p-14}$ es entero. Aálogamente, $\sqrt{2016p+2016}$ es entero si y solo si $\sqrt{14p+14}$ es entero. Supongamos que $\sqrt{14p+14} = x$ y $\sqrt{14p-14} = y$, con x e y enteros positivos. Entonces, $x^2-y^2 = 2(14)$. Es decir, $(x+y)(x-y) = 4\cdot 7$. Como $x+y$ y $x-y$ tienen la misma paridad, entonces ambos números son pares. Por lo tanto, $\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x-y}{2} = 7$. Como 7 es primo y $\frac{x+y}{2} \geq \frac{x-y}{2}$, entonces $\frac{x+y}{2} = 7$ y $\frac{x-y}{2} = 1$. Esto quiere decir que $x=8$ y $y=6$. Si despejamos p en $\sqrt{14p+14} = 8$, obtenemos que $p = \frac{50}{14}$, que no es entero. Por lo tanto, no existen enteros positivos p con la propiedad que tanto $\sqrt{2016p-2016}$, como $\sqrt{2016p+2016}$ son enteros.

Solución del problema 5. Sean D la intersección de PN y ME, y R la intersección de PN y AQ. Demostraremos que $R=P$. Como NP y BA son paralelas, los triángulos AMB y NMP son semejantes. Pero E es el punto medio de BA, entonces D es el punto medio de NP. Por las paralelas NP y BA, sabemos que los triángulos NDQ y BEQ son semejantes, así como también lo son los triángulos RQD y AQE con la misma razón $DQ:QE$. Esto quiere decir que $\frac{ND}{BE} = \frac{DR}{EA}$. Pero $BE=EA$, entonces $ND=DR$. Con lo que concluimos que $P=R$.
Ahora, sean T y U las intersecciones de NS y AS con EM, respectivamente. Como EU y SB son paralelas, entonces $\frac{BE}{EA} = \frac{SU}{UA} = 1$. Además, como AQ y ST son paralelas, tenemos que los triángulos AUQ y SUT son semejantes, así como también lo son los triángulos NTD y PQD. Pero, $SU=AU$ y $PD=ND$, entonces $AQ=ST$ y $QP=TN$. Por lo tanto, $AP=SN$. Para concluir, recordemos que AP y SN son paralelas, lo que implica que $ANSP$ es un paralelogramo, es decir, que PS y AC son paralelas.



Solución del problema 6. El problema equivale a repartir los $2n$ alumnos en n parejas de la forma $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde el orden de las parejas y el orden de los elementos en las parejas no importan. Podemos escoger los n alumnos que corresponderán a las entradas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $\binom{2n}{n}$ formas donde el orden no importe. Ahora, hay $n!$ formas para asignarle a cada x_i su correspondiente y_i. Sin embargo, en la última operación contamos como asignaciones diferentes a (x_i, y_i) y a (y_i, x_i), esto es, contamos doble a cada pareja. Luego, debemos dividir el resultado entre 2^n, un 2 por cada pareja. Por lo tanto, el resultado es $\dfrac{n! \cdot \binom{2n}{n}}{2^n}$.

Solución del problema 7. Consideraremos dos casos.

- Los números son $3k+1, 3k+2, \ldots, 3(k+n-1)+1, 3(k+n-1)+2$. Entonces, la suma es

  $$6kn + 3(1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1) = 6kn + 3n^2 = 300.$$

  Luego, $n(2k + n) = 100$ y como ambos factores tienen la misma paridad se tiene que $n = 2$ o $n = 10$.

- Los números son $3k + 2, 3k + 4, \ldots, 3(k + n - 1) + 2, 3(k + n) + 1$. En este caso la suma es mayor que la del caso anterior por $3n$, entonces se tiene que

  $$6kn + 3n^2 + 3n = 300,$$

  de donde $n(2k+n+1) = 100$. En este caso las paridades son distintas y tenemos que los únicos valores posibles de n son 1, 4 y 5.

Solución del problema 8. Observemos que

$$\begin{aligned} 2015^{2015} + 1 &= (2015 + 1)(2015^{2014} - 2015^{2013} + \cdots - 2015 + 1) \\ &= 2016(2015^{2014} - 2015^{2013} + \cdots - 2015 + 1) \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} 2017^{2017} - 1 &= (2017 - 1)(2017^{2016} + 2017^{2015} + \cdots + 2017 + 1) \\ &= 2016(2017^{2016} + 2017^{2015} + \cdots + 2017 + 1). \end{aligned}$$

Entonces,

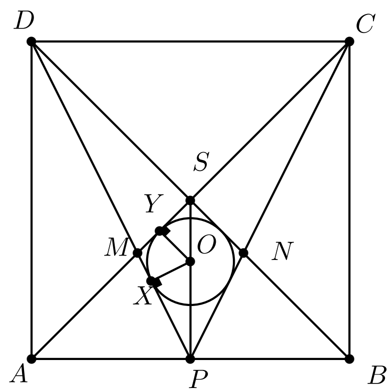
$$\begin{aligned} &2015^{2015} + 2017^{2017} = 2015^{2015} + 1 + 2017^{2017} - 1 \\ &= 2016(2015^{2014} - 2015^{2013} + \cdots - 2015 + 1) + 2016(2017^{2016} + 2017^{2015} + \cdots + 2017 + 1) \\ &= 2016(2015^{2014} - 2015^{2013} + \cdots - 2015 + 1 + 2017^{2016} + 2017^{2015} + \cdots + 2017 + 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, 2016 divide al número $2015^{2015} + 2017^{2017}$.

Solución del problema 9. Como 36 es múltiplo de 4, necesitamos que $a12b$ sea múltiplo de 4, lo cual sucederá únicamente si $b = 0, 4, 8$ por el criterio de divisibilidad por 4.

También necesitamos que el número sea divisible por 9. Si $b = 0$ esto será cuando $a + 3$ lo sea, es decir, cuando $a = 6$ y el único que funciona es 6120. Cuando $b = 4$, necesitamos que $a+7$ sea múltiplo de 9, en cuyo caso solo $a = 2$ funciona y obtenemos 2124. Finalmente, cuando $b = 8$, necesitamos que $a + 11$ sea múltiplo de 9, que solo es posible cuando $a = 7$ y se obtiene 7128. Concluimos que solo hay 3 números con la forma pedida.

Solución del problema 10. Sean O el centro y r el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrilátero $PMSN$. Sean X, Y los puntos de tangencia con los lados PM y MS, respectivamente. Como OY y MS son perpendiculares, y $\angle YSO = \angle ASP = 45°$, tenemos que $SY = YO = r$. También, $\angle OPX = \angle PDA$ (ya que OP y DA son paralelas) y $\angle OXP = \angle PAD = 90°$. Por lo tanto, los triángulos OXP y PAD son semejantes. Luego, $\frac{OX}{XP} = \frac{PA}{AD} = \frac{1}{2}$. De aquí que $PX = 2r$. Por lo tanto, $PM - MS = 2r + MX - MY - r = r$.



Solución del problema 11. Sean $m = x^2 + 2x$ y $n = x^3 - 6x$. Notemos que $n = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 2x = x(m-2) - 2m$, lo cual implica que $x(m-2) = n + 2m$, donde x no es racional pero n y m sí lo son. Por lo tanto, $m - 2 = 0$. Luego, $x^2 + 2x - 2 = 0$, de donde, $x = 1 + \sqrt{3}$ o $x = 1 - \sqrt{3}$, los cuales cumplen las condiciones del problema.

Solución del problema 12. Escribamos $a = bm + r$ con m, r enteros y $0 \leq r < b$. Entonces,

$$\frac{2^a + 1}{2^b - 1} = \frac{2^a - 2^r}{2^b - 1} + \frac{2^r + 1}{2^b - 1}.$$

Notemos que $2^a - 2^r = 2^r(2^{a-r} - 1) = 2^r(2^{bm} - 1)$ y $2^{bm} - 1 = (2^b)^m - 1 = (2^b - 1)[(2^b)^{m-1} + (2^b)^{m-2} + \cdots + 1]$. Por lo tanto, $\frac{2^a - 2^r}{2^b - 1}$ es un entero.
Por otro lado, si $b > 2$, entonces $2^b - 2^{b-1} = 2^{b-1}(2 - 1) > 2$, y en consecuencia $2^r + 1 \leq 2^{b-1} + 1 < 2^b - 1$, de donde $\frac{2^r+1}{2^b-1}$ no es entero. Luego, si $\frac{2^a+1}{2^b-1}$ fuera entero, entonces $\frac{2^r+1}{2^b-1}$ sería también entero, ya que $\frac{2^a-2^r}{2^b-1}$ es entero. Pero esto es una contradicción. Por lo tanto, $\frac{2^a+1}{2^b-1}$ no es entero si $a > b > 2$.

Solución del problema 13. Si el número más grande de la lista fuera distinto de 9, lo más que podrían sumar los números sería $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$, es decir, no llegaría

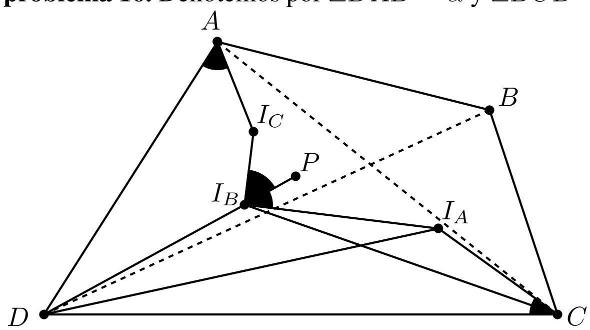
a sumar los 33 que se piden. Por tanto, el número mayor de la lista tiene que ser el 9: $(*,*,*,*,9)$.
Pero si el número más grande es igual a 9, quiere decir que los otros cuatro números tienen que sumar $33-9=24$. Si el penúltimo número no fuera 8, lo más que podrían sumar sería $4+5+6+7=22$, que nuevamente no alcanzaría lo que se necesita. Entonces, el penúltimo número forzosamente tiene que ser igual a 8: $(*,*,*,8,9)$ y, por tanto, los tres primeros números tienen que sumar 16.
Si el número de en medio fuera diferente de 7, lo más que podrían sumar los tres primeros números sería $4+5+6=15$, que no llega a los 16 necesarios. Por tanto, en medio de la lista tiene que ir siempre el 7 y los dos primeros números tienen que sumar 9: $(*,*,7,8,9)$. Pero las posibilidades para que los dos primeros números sumen 9 y la lista siga siendo creciente son: $3+6$ y $4+5$. Por tanto, las únicas listas posibles son: $(3,6,7,8,9)$ y $(4,5,7,8,9)$.

Solución del problema 14. Puesto que $|a_{n+1}-a_n|\leq 1$, se concluye al aplicar varias veces la desigualdad del triángulo que $|a_m-a_n|\leq|m-n|$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|b_{n+1}-b_n| &= \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right| \\
&= \left|\frac{na_{n+1}-a_1-a_2-\cdots-a_n}{n(n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{a_{n+1}-a_1+a_{n+1}-a_2+\cdots+a_{n+1}-a_n}{n(n+1)}\right| \\
&\leq \frac{|a_{n+1}-a_1|+|a_{n+1}-a_2|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|}{n(n+1)} \\
&\leq \frac{n+(n-1)+\cdots+2+1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Solución del problema 15. Se demostrará que la única solución posible es $n=0$. Dado que $n+8$, $2n+1$ y $4n+1$ son cubos perfectos, entonces $(n+8)(2n+1)(4n+1)=8n^3+70n^2+49n+8$ también es un cubo perfecto.
El propósito será acotar los posibles valores de $8n^3+70n^2+49n+8$. Para ello observamos que si $n\geq 1$, entonces, $(2n+3)^3=8n^3+36n^2+54n+27\leq 8n^3+36n^2+49n+5n^2+8+19n^2<8n^3+70n^2+49n+8<8n^3+72n^2+216n+216=(2n+6)^3$. Así, podemos reducir el problema a los siguientes casos y resolver la ecuación cuadrática que plantean:
a) Si $8n^3+70n^2+49n+8=(2n+2)^3$, entonces $n=0$.
b) Si $8n^3+70n^2+49n+8=(2n+3)^3$, entonces $34n^2-5n-19=0$. Es decir, $n(34n-5)=19$. Es fácil ver que esta ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos al considerar los distintos valores posibles de n entre los divisores de 19.
c) Si $8n^3+70n^2+49n+8=(2n+4)^3$, entonces $22n^2-47n-56=0$. Es decir, $n(22n-47)=56=2(23)$, que no tiene soluciones en los enteros positivos.
d) Si $8n^3+70n^2+49n+8=(2n+5)^3$, entonces $10n^2-101n-117=0$. Es decir, $n(10n-101)=117=9(13)$, que no tiene soluciones en los enteros positivos.
Por último, observemos que la solución $n=0$ cumple con el problema.

Solución del problema 16. Denotemos por $\angle DAB = \alpha$ y $\angle BCD = \gamma$.



Por ser cíclico el cuadrilátero $ABCD$ se tiene que $\angle DAC = \angle DBC$. Por otro lado, por ser I_B e I_C incentros se tiene que

$$\angle DI_BC = 90^\circ + \frac{\angle DAB}{2} \quad \text{y} \quad \angle DI_AC = 90^\circ + \frac{\angle DBC}{2}.$$

Entonces $\angle DI_BC = \angle DI_AC$, de donde se tiene que el cuadrilátero I_AI_BCD es cíclico. Análogamente, el cuadrilátero I_CI_BDA es cíclico. Luego, si P es un punto sobre DI_B con I_B entre D y P, por estos cíclicos se tiene que $\angle I_AI_BP = \angle I_ACD = \frac{\gamma}{2}$ y $\angle PI_BI_C = \angle DAI_C = \frac{\alpha}{2}$. Por lo tanto,

$$\angle I_AI_BI_C = \angle I_AI_BP + \angle PI_BI_C = \frac{\alpha+\gamma}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ,$$

donde la última igualdad es cierta por ser cíclico $ABCD$. De manera similar se demuestra que los demás ángulos son de 90° y entonces el cuadrilátero $I_AI_BI_CI_D$ es un rectángulo.

Solución del problema 17. Si a y b son ambos primos impares, entonces p es par y $p \geq 4$, lo que contradice la condición de que p es primo. Luego, $a = 2$ o $b = 2$.
Supongamos que $a = 2$. Entonces, $b \neq 2$, ya que de lo contrario, $p = 8$ que no es primo. De este modo, b es un primo impar. Sea $b = 2k+1$, donde k es un entero mayor que 1. Entonces,

$$p = 2^{2k+1} + (2k+1)^2 = 2 \cdot 4^k + (2k+1)^2.$$

Demostraremos que $k = 1$.
Supongamos que $k \geq 2$. Si $k \equiv 1 \pmod 3$, entonces $b > 3$ y $b = 2k+1 \equiv 0 \pmod 3$, lo que contradice la condición de que b es primo. Si $k \not\equiv 1 \pmod 3$, entonces

$$p = 2 \cdot 4^k + (2k+1)^2 \equiv 2 + 4k^2 + 4k + 1 \equiv 4k(k+1) \equiv 0 \pmod 3,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $k = 1$ y $b = 3$. Luego, la única solución es $p = 2^3 + 3^2 = 8 + 9 = 17$.

Solución del problema 18. Observemos que

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + 49x_{49} = 1 \cdot x_1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}x_2 + \cdots + \sqrt{49} \cdot \sqrt{49}x_{49}.$$

Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz[5], tenemos que

$$\begin{aligned}(x_1 + 2x_2 + \cdots + 49x_{49})^2 &= (1 \cdot x_1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}x_2 + \cdots + \sqrt{49} \cdot \sqrt{49}x_{49})^2 \\ &\leq (1 + 2 + \cdots + 49)(x_1^2 + 2x_2^2 + \cdots + 49x_{49}^2) \\ &= \frac{49 \cdot 50}{2} \cdot 1 = 35^2,\end{aligned}$$

con la igualdad si y solo si $x_1 = \cdots = x_{49} = \pm\frac{1}{35}$.
Por lo tanto, el valor máximo pedido es 35.

Solución del problema 19. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Si $x_1 = 1$, entonces de la segunda ecuación, tenemos que $n = 1$ y la primera ecuación no se satisface. Luego, $x_1 \geq 2$. Si $x_2 = 2$, entonces $n = 2$ y nuevamente no se satisface la primera ecuación. Por lo tanto, $x_2 \geq 3$. De manera similar, tenemos que $x_3 \geq 4$, $x_4 \geq 5$ y $x_5 \geq 6$. Así, de la primera ecuación deducimos que $x_4 + \cdots + x_n \leq 7$ con $x_4 \geq 5$ y $x_5 \geq 6$. Esto implica que $n \leq 4$.

1. Si $n = 1$, no hay solución.
2. Si $n = 2$, la única solución de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ es $x_1 = x_2 = 2$, la cual no satisface la primera ecuación. Luego, no hay soluciones en este caso.
3. Si $n = 3$, las soluciones de $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3} = 1$ son $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 6), (2, 4, 4)$ y $(3, 3, 3)$. Ninguna de ellas satisface la primera ecuación. Así que tampoco hay soluciones en este caso.
4. Si $n = 4$, de acuerdo con lo discutido en el primer párrafo, las soluciones de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ son:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4) = &(2, 3, 4, 7), (2, 3, 5, 6), (2, 4, 4, 6), (2, 4, 5, 5), \\ &(3, 3, 4, 6), (3, 3, 5, 5), (3, 4, 4, 5), (4, 4, 4, 4).\end{aligned}$$

   De todas ellas, la única que satisface la segunda ecuación es $(4, 4, 4, 4)$.

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución solo cuando $n = 4$ y para este valor de n, la única solución es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 4$.

Solución del problema 20. Sean $b = AC$, $c = AB$, $d = AD$, $p = CD$ y $q = DB$. Nos piden demostrar que $\frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}$, lo cual equivale a demostrar

$$bd + cd = bc.$$

Por tanto, nuestra estrategia será lograr hallar relaciones que involucren esos términos. Por la ley de los cosenos[6] en el triángulo CAD tenemos que,

$$p^2 = b^2 + d^2 - 2bd\cos(60^\circ) = b^2 + d^2 - bd,$$

[5]Ver en el apéndice el teorema 7.
[6]Ver en el apéndice el teorema 13.

esto es,

$$bd = b^2 + d^2 - p^2.$$

Un argumento similar en el triángulo DAB nos arroja

$$cd = c^2 + d^2 - q^2,$$

y por tanto

$$bd + cd = 2d^2 + b^2 + c^2 - p^2 - q^2.$$

Completando el trinomio cuadrado perfecto, obtenemos que

$$-p^2 - q^2 = -(p^2 + 2pq + q^2) + 2pq = -(p+q)^2 + 2pq.$$

Al sustituir resulta que,

$$bd + cd = 2d^2 + b^2 + c^2 - (p+q)^2 + 2pq.$$

Ahora, para que aparezca bc, aplicamos la ley de los cosenos en el triángulo ABC:

$$(p+q)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(120^\circ) = b^2 + c^2 + bc.$$

Sustituimos $(p+q)^2$ y obtenemos,

$$bc + cd = 2d^2 + b^2 + c^2 - (b^2 + c^2 + bc) + 2pq = 2d^2 - bc + 2pq.$$

De modo que solo basta probar que $bc = 2d^2 - bc + 2pq$, esto es, $bc = d^2 + pq$. Esta última ecuación la obtendremos por medio de dos resultados geométricos conocidos: el teorema de Stewart[7] y el teorema de la bisectriz[8].
Por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{p}{q} = \frac{b}{c}$. Si $a = p + q$, tendremos que $a = p + \frac{pc}{b} = \frac{pb+pc}{b}$. Por un argumento simétrico, $a = \frac{qb+qc}{c}$, por lo que

$$p = \frac{ab}{b+c}, \qquad q = \frac{ac}{b+c}.$$

Si sustituimos estos valores en el teorema de Stewart que establece

$$b^2q + c^2p = a(d^2 + pq),$$

entonces se reduce la expresión a: $bc = d^2 + pq$.

[7] Ver en el apéndice el teorema 17.
[8] Ver en el apéndice el teorema 11.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2016 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que los problemas en esta sección no tienen solución, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Si A es el número positivo

$$A = \frac{9}{10} + \frac{99}{10^2} + \frac{999}{10^3} + \cdots + \frac{999\ldots 9}{10^{2016}},$$

en donde el último numerador tiene 2016 nueves, ¿cuántos dígitos iguales a 8 hay en la representación decimal de A?

Problema 2. Drini escribe en una pizarra 2016 veces la letra A, 2017 veces la letra B y 2018 veces la letra C. A continuación efectúa la siguiente operación: puede escoger dos letras diferentes, borrarlas, y añadir una más de la tercera letra (por ejemplo, si borra A y C, añade una letra B). Repite este proceso hasta que solo queda una letra en la pizarra. ¿Qué letras pueden quedar al final?

Problema 3. Demuestra que $(36m+n)(m+36n)$ nunca es una potencia de dos, para cualquier par de enteros positivos m y n.

Problema 4. Demuestra que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{a-b+c}}+\sqrt{\frac{c}{a+b-c}}\geq 3.$$

Problema 5. Sea A un conjunto convexo en el plano (es decir, un conjunto que cumple que para cualesquiera dos puntos $p,q\in A$ el segmento entre p y q está contenido en A). Muestra que existe un punto O tal que para cualesquiera dos puntos X,X' en la frontera de A se satisface que

$$\frac{1}{2}\leq\frac{XO}{X'O}\leq 2.$$

Problema 6. En un salón hay 16 personas, donde cada persona conoce a exactamente 3 personas (la relación es mutua). ¿Será posible repartir siempre a las 16 personas en 8 parejas de tal forma que las personas en cada pareja se conozcan?

Problema 7. Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Se consideran G_A, G_B y G_C los gravicentros de los triángulos BPC, APB y CPA, respectivamente. Sean M, N y L los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente. Demuestra que G_AM, G_BN y G_CL concurren.

Problema 8. Sean b y c números reales positivos fijos tales que $b>2c$. ¿Cuántos triángulos ABC, no congruentes y no degenerados, satisfacen que $|AB|=c$, $|CA|=b$ y $\angle ABC=2\angle BCA$?

Problema 9. Sean ABC un triángulo y H su ortocentro. Si O_1, O_2 y O_3 son los circuncentros de los triángulos BHC, CHA y AHB, respectivamente, demuestra que AO_1, BO_2 y CO_3 concurren.

Problema 10. Sea p un número primo impar. Demuestra que

$$1^{p-2}+2^{p-2}+3^{p-2}+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2}\equiv\frac{2-2^p}{p}\pmod{p}.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2015 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2015. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2015, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Una sucesión está definida de la siguiente forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ y $a_{n+1} = 5(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$ para todo $n \geq 2$. Demuestra que a_n es un entero para todo $n \geq 1$.

Solución. Tenemos que $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$ que es un número entero. Supongamos que $n \geq 4$. Entonces,

$$a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \quad \text{y} \quad a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-2}}{n-2}.$$

Despejando la suma $a_1 + \cdots + a_{n-2}$ de la expresión para a_{n-1} y sustituyéndola en la expresión para a_n obtenemos que

$$a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}a_{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n+3}{n-1}a_{n-1}.$$

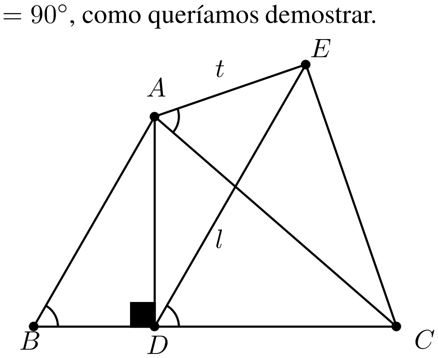
Por lo tanto, para cada $n \geq 4$, tenemos que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+3}{n-1}a_{n-1} = \frac{n+3}{n-1}\cdot\frac{n+2}{n-2}a_{n-2} = \cdots = \frac{(n+3)(n+2)\cdots 7}{(n-1)(n-2)\cdots 3}a_3 \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}360 \\ &= (n+3)(n+2)(n+1)n, \end{aligned}$$

que es un entero.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea AD una altura. Denotemos por l a la recta que pasa por D y es paralela a AB, y por t a la tangente del circuncírculo del triángulo ABC en el punto A. Si E es la intersección de l y t, demuestra que CE y t son perpendiculares entre sí.

Solución. El ángulo semi-inscrito $\angle EAC$ mide lo mismo que el ángulo inscrito $\angle ABC$ y, por el paralelismo entre l y AB, también mide lo mismo que el ángulo $\angle EDC$.
Pero $\angle EAC = \angle EDC$ implica que $EADC$ es un cuadrilátero cíclico y, por tanto, que $\angle CDA + \angle CEA = 180°$. Sin embargo, como $\angle CDA = 90°$, necesariamente se cumplirá que $\angle CEA = 90°$, como queríamos demostrar.



Problema 3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Solución. Utilizando la identidad $ab + bc + ca = 1$ se concluye que

$$c = \frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b}.$$

De manera similar se obtienen expresiones para a y b. Entonces,

$$a+b+c = \frac{1}{a+b} - \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{b+c} - \frac{bc}{b+c} + \frac{1}{c+a} - \frac{ca}{c+a}.$$

Por otro lado, tenemos que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + cd) \geq 3(ab + bc + cd) = 3$. Por lo tanto, $a + b + c \geq \sqrt{3}$, de donde se sigue la desigualdad.

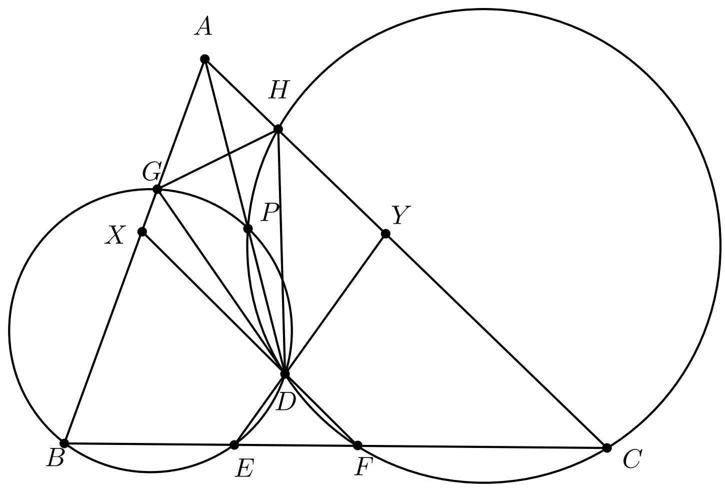
Problema 4. Determina todos los enteros positivos n que no sean cuadrados perfectos, tales que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor^3$ sea divisor de n^2. (Nota. Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución. Supongamos que $n^2 = a \cdot \lfloor \sqrt{n} \rfloor^3$, para algún entero a y $n \neq m^2$ para todo entero positivo m. Entonces, para algún entero k tenemos que $k^2 < n < (k+1)^2$, esto es, $n = k^2 + s$, donde $0 < s < 2k + 1$. Como $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$, la condición del problema se convierte en $(k^2 + s)^2 = ak^3$, con $0 < s < 2k + 1$, esto es, $k^4 + 2sk^2 + s^2 = ak^3$. De aquí tenemos que s es divisible entre k, pero, por las condiciones sobre s, $s = k$ o $s = 2k$.
Si $s = k$, entonces $(k^2 + k)^2 = ak^3$, esto es, $k^4 + 2k^3 + k^2 = ak^3$ o, de manera equivalente, $k^2 = k^3(a - k - 2)$. De aquí que k^2 es divisible entre k^3. Por lo tanto, $k = 1$ y $n = 2$.
Si $s = 2k$, entonces $(k^2 + 2k)^2 = ak^3$, esto es, $k^4 + 4k^3 + 4k^2 = ak^3$, de donde $4k^2$ es divisible entre k^3. Por lo tanto, $k = 1, 2$ o 4. Luego, los valores posibles de n son 3, 8 y 24, respectivamente.
Por lo tanto, los enteros positivos n que satisfacen el problema son $2, 3, 8$ y 24.

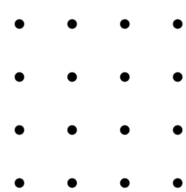
Problema 5. Sean ABC un triángulo y D un punto en su interior. Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias que pasan por B, D y C, D, respectivamente, tales que el segundo punto de intersección de ellas está sobre AD. Las circunferencias ω_1 y ω_2 intersecan al lado BC en los puntos E y F, respectivamente. Sean X la intersección de AB con FD, y Y la intersección de AC con ED. Demuestra que XY y BC son paralelas.

Solución. Sean G y H las intersecciones de Ω_1 con AB y de Ω_2 con AC. Por estar A en el eje radical de Ω_1 y Ω_2, se tiene que el cuadrilátero $GHCB$ es cíclico. Entonces, $\angle HGA = \angle ACB$. Además por ser cíclico $HDFC$ se tiene que $\angle HDX = \angle HCB$

y por lo tanto $\angle HGA = \angle HDX$, entonces el cuadrilátero $HGXD$ es cíclico. Análogamente se tiene que $HGDY$ es cíclico y, por lo tanto, $HGXY$ es cíclico. Por último, como $\angle HGA = \angle ACB$, de este último cuadrilátero se concluye que $\angle ACB = \angle HGA = \angle HYX$, lo cual implica el paralelismo.



Problema 6. Determina la mayor cantidad de puntos que se pueden escoger de la siguiente puntícula de manera que no haya tres de ellos formando un triángulo isósceles.



Solución. Si se eligen los seis puntos que están en la misma fila o en la misma columna que un punto de una esquina, pero sin dicho punto, no se forman triángulos isósceles.
Supongamos que se pueden elegir al menos 7 puntos. Notamos que los 12 vértices de la orilla forman 4 cuadrados, dos de los cuales pueden verse en la figura de la izquierda. Como de cada uno de ellos podemos tomar a lo más dos puntos, tendremos que elegir al menos uno de los 4 puntos centrales. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que elegimos el punto P.
Consideremos ahora los puntos en la cuarta columna y en el cuarto renglón. Forman con P dos triángulos isósceles, mostrados en la figura de la derecha, y un cuadrado (no mostrado). De cada polígono podemos elegir a lo más dos puntos, por lo que, aparte de P, solo podemos elegir tres puntos.

Así que, del cuadrado formado por los tres primeros renglones y las tres primeras columnas, tenemos que elegir tres puntos. Los cuátro vértices de este cuadrado y los cuatro puntos medios forman cuadrados, por lo que, de uno de ellos tendremos que elegir dos puntos, y del otro un punto. Además, los dos elegidos del mismo cuadrado tienen que estar alineados con P. De aquí, es fácil ver que no es posible elegir el otro punto. Por lo tanto, el máximo número de puntos que se pueden elegir es 6.

Problema 7. En una sucesión finita y estrictamente creciente de enteros positivos, cada término en una posición impar es impar y cada término en una posición par es par. El número de dichas sucesiones tales que ninguno de sus términos supera a 4 es 7 y estas son: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,3,4\}$. ¿Cuántas de estas sucesiones hay tales que ninguno de sus términos supera a 20?

Solución. Sea a_n el número de sucesiones que satisfacen las hipótesis y que el mayor número que aparece es n. Notamos que $a_1 = a_2 = 1$ (por las sucesiones $\{1\}$ y $\{1,2\}$). Demostraremos que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para cada $n \geq 3$.
Consideremos una sucesión que se cuenta en a_n. Si el segundo término más grande es $n-1$, entonces podemos quitar el n y obtener una sucesión que se cuenta en a_{n-1}. Si el segundo término más grande no es $n-1$, entonces tampoco puede ser igual a $n-2$. Luego, podemos cambiar el n por un $n-2$ y obtener una sucesión que se cuenta en a_{n-2}. Como todas las sucesiones fueron consideradas, se tiene que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, como queríamos ver. Por lo tanto, a_n coincide con el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci[9], esto es, $a_n = F_n$ para $n \geq 1$. Por lo tanto, el número buscado es igual a

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_{20} &= F_2 + (F_3 - F_1) + (F_4 - F_2) + \cdots + (F_{21} - F_{19}) \\ &= F_{21} + F_{20} - F_1 = F_{22} - F_1 = 17710. \end{aligned}$$

Problema 8. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo. Se sabe que $\angle FAE = \angle BDC$, y que cada uno de los cuadriláteros $ABDF$ y $ACDE$ es cíclico. Demuestra que las rectas BF y CE son paralelas.

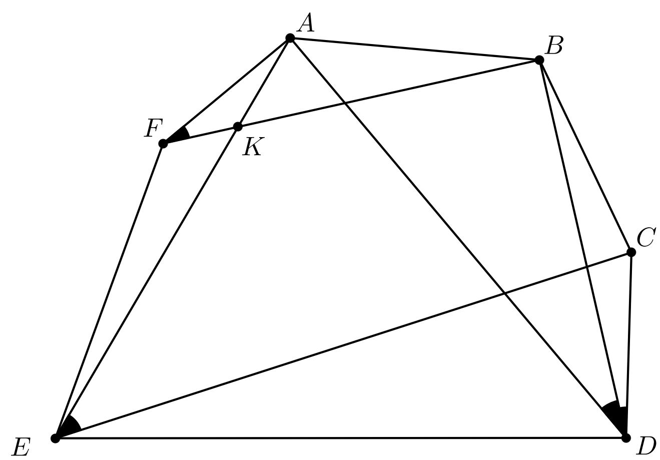
Solución. Sea K el punto de intersección de AE y BF. Como los cuadriláteros $ABDF$ y $ACDE$ son cíclicos, tenemos que $\angle AFB = \angle ADB$ y $\angle ADC = \angle AEC$. De esto

[9] La sucesión de Fibonacci está definida por $F_1 = F_2 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n > 2$.

y de que $\angle FAE = \angle BDC$, concluimos que

$$\angle AKB = \angle AFB + \angle FAE = \angle ADB + \angle BDC = \angle ADC = \angle AEC,$$

de donde se sigue que BF y CE son paralelas.



Problema 9. Un maestro elige dos enteros m y n con $2 \leq m \leq n$. A Pedro le dice el producto y a Esteban la suma. Pedro dice "no puedo deducir el valor de $m + n$", luego Esteban dice "sabiendo eso, sigo sin poder saber el valor de mn", Pedro vuelve a decir "sabiendo eso, sigo sin poder saber el valor de $m + n$" y finalmente, Esteban dice "ahora puedo deducir el valor de mn". Suponiendo que su lógica no tiene errores, ¿cuáles son los valores de m y de n?

Solución. Cuando Pedro dice la primera vez que no puede deducir el valor de $m + n$, podemos deducir que mn no es el producto de dos primos, ni el cuadrado o cubo de un primo. Los primeros posibles valores están en la siguiente tabla.

mn	m n	$m+n$
12	3 4	7
	2 6	8
16	4 4	8
	2 8	10
18	3 6	9
	2 9	11
20	4 5	9
	2 10	12
24	4 6	10
	3 8	11
	2 12	14
28	4 7	11
	2 14	16
30	5 6	11
	3 10	13
	2 15	17

Esteban solamente podría haber deducido el valor de mn en su primera oportunidad si el valor de $m+n$ hubiese sido único, es decir, 7. Como no pudo, el caso $m=3$, $n=4$ queda descartado.
Pedro podría haber deducido el valor de $m+n$ en su segunda oportunidad si el valor de mn hubiese sido único, es decir, 12. Como no pundo, el caso $m=2$, $n=6$ queda descartado.
Como Esteban sí pudo deducir el valor de mn en su segunda oportunidad, el valor de $m+n$ debe ser ahora único, es decir, 8. Por lo tanto $m=n=4$.
Problema 10. Sean m y n enteros positivos. Denotemos por (m,n) al máximo común divisor de m y n.

1. Demuestra que
$$(m,n)=2\sum_{k=0}^{m-1}\left\lfloor\frac{kn}{m}\right\rfloor+m+n-mn.$$

2. Demuestra que para todos los enteros positivos $m\geq 2$ y $n\geq 2$, se cumple que
$$\left\lfloor\frac{n}{m}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2n}{m}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{(m-1)n}{m}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m}{n}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2m}{n}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{(n-1)m}{n}\right\rfloor.$$

Nota. Si x es un número real, $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Solución.

1. En el plano cartesiano consideremos los puntos A, B, C y D, de coordenadas $(0,0)$, $(m,0)$, (m,n) y $(0,n)$, respectivamente. Consideremos el triángulo

$$\triangle ABD = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq -\frac{n}{m}x + n\right\}.$$

Sea M el conjunto de los puntos de coordenadas enteras en el interior o el borde del triángulo ABD. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} |M| &= \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor -k\frac{n}{m} + n \right\rfloor + (m+n+1) = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor (m-k)\frac{n}{m} \right\rfloor + (m+n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + (m+n+1). \end{aligned} \tag{1}$$

Por otra parte, hay $d+1$ puntos de coordenadas enteras sobre la hipotenusa BD, donde d denota al máximo común divisor de m y n. En efecto, si $y_k = -\frac{n}{m}x_k + n$, el conjunto de los enteros x_k entre 0 y m tales que y_k también es un entero es $\{0, \frac{m}{d}, \frac{2m}{d}, \ldots, \frac{(d-1)m}{d}, m\}$. Luego, el número de puntos de coordenadas enteras en el rectángulo $ABCD$ es igual a

$$(m+1)(n+1) = 2|M| - (d+1). \tag{2}$$

Combinando (1) y (2), se sigue el resultado.

2. De acuerdo con el inciso anterior, tenemos que

$$(m,n) = 2\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + m + n - mn. \tag{3}$$

Intercambiando los roles de m y n en la relación anterior, obtenemos que

$$(m,n) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{km}{n} \right\rfloor + m + n - mn. \tag{4}$$

Finalmente, de (3) y (4) se sigue el resultado.

Concursos Estatales

Olimpiada de Matemáticas en Chihuahua, 2015

El proceso de la olimpiada de matemáticas en Chihuahua en el año 2015 comenzó a mediados de abril para terminar en el concurso nacional en el mes de noviembre.

Dicho proceso consistió de varias etapas. La etapa regional se llevó a cabo el sábado 9 de mayo en las sedes de Ciudad Juárez, Chihuahua y Cuauhtémoc. De esta etapa, se seleccionaron cerca de 150 alumnos de todo el estado para participar en la etapa estatal, que se llevó a cabo el sábado 6 de junio. De la etapa estatal se seleccionaron a 32 alumnos, los cuales recibieron entrenamiento en sus localidades de manera gratuita durante el verano.

El primer entrenamiento general se llevó a cabo del 26 al 29 de junio con duración de 8 horas diarias, en Chihuahua, al cual asistieron los 32 alumnos seleccionados de la etapa estatal. Al final se aplicaron dos exámenes selectivos. El segundo entrenamiento general fue intensivo y se llevó a cabo del 24 de julio al 2 de agosto con duración de 9 horas diarias. Al segundo entrenamiento asistieron los 32 alumnos que asistieron al primer entrenamiento, y al final se aplicaron dos exámenes selectivos, con los cuales se realizó un corte. De estos exámenes selectivos se eligieron a los mejores 19 alumnos.

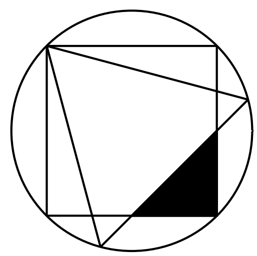
Los 19 alumnos seleccionados tuvieron un tercer entrenamiento intensivo del 4 al 7 de septiembre con duración de 9 horas diarias. Al final se aplicaron dos exámenes selectivos, con los cuales se eligieron a los mejores 13 alumnos. Estos 13 alumnos tuvieron un cuarto entrenamiento intensivo del 1 al 11 de octubre con duración de 9 horas diarias de lunes a viernes. Al final se aplicaron tres exámenes selectivos con los cuales se seleccionó a la delegación estatal.

Previo al concurso nacional, la delegación estatal formada de 6 alumnos, tuvo un quinto entrenamiento intensivo del 14 al 21 de noviembre en Cuernavaca, Morelos. El entrenamiento se hizo en conjunto con la delegación del Estado de Morelos.

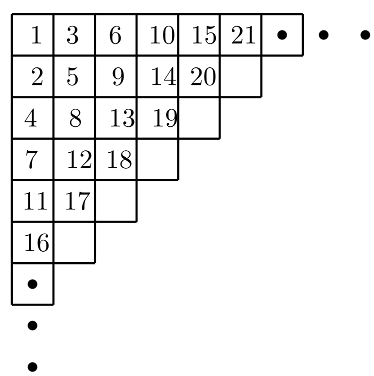
En el concurso nacional llevado a cabo del 22 al 28 de noviembre en la Ciudad de Guadalajara, el Estado de Chihuahua obtuvo el primer lugar por estados, por tercera vez consecutiva, obteniendo 3 medallas de oro y 3 medallas de plata.

A continuación presentamos el examen de la etapa estatal de la olimpiada de matemáticas en Chihuahua en el año 2015. Los alumnos tuvieron 4.5 horas para resolverlo.

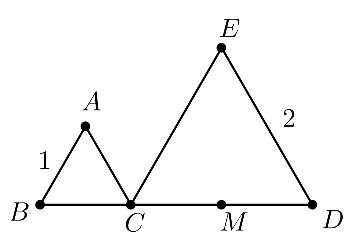
Problema 1. Se tiene un círculo de radio 2. Se dibuja un cuadrado y un triángulo equilátero de tal forma que comparten un vértice como se ve en la figura. Encontrar el área sombreada.



Problema 2. En una cuadrícula que se llena de números con el patrón que se muestra en la figura, hasta llegar al 1991, encuentra la suma de los números en el renglón donde está el 1991.



Problema 3. Se tienen dos triángulos equiláteros ABC y CDE de lados 1 y 2, respectivamente. Si M es el punto medio del segmento CD, demuestra que el triángulo AME es equilátero.



Problema 4. Se tiene una cuadrícula de 9×9, en cada cuadrito se pone una letra. Si en el primer renglón está la palabra OLIMPIADA y en el último renglón la palabra CHIHUAHUA, ¿de cuántas maneras se puede llenar la cuadrícula de 9×9 si se sabe que entre cada renglón consecutivo la palabra difiere exactamente en una letra?

O	L	I	M	P	I	A	D	A
C	H	I	H	U	A	H	U	A

Problema 5. El equipo mexicano para la Olimpiada Centroamericana de Matemáticas conformado por Ariel, Victor y Enrique va a viajar en una avioneta que tiene 10 filas y cada fila tiene 3 asientos. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar los alumnos si la diferencia del número de fila entre dos alumnos cualquiera es a lo más 1?

Problema 6. Encuentra el último dígito de la siguiente suma:

$$\begin{aligned} S = 1^{2015} + 2015^2 + 3^{2015} + 2015^4 + 5^{2015} + 2015^6 + 7^{2015} + 2015^8 + \cdots \\ \cdots + 1001^{2015} + 2015^{1002} + 1003^{2015} + 2015^{1004} + \cdots \\ \cdots + 2015^{2012} + 2013^{2015} + 2015^{2014} + 2015^{2015}. \end{aligned}$$

Problemas de Olimpiadas Internacionales

8^a Romanian Master of Mathematics

Del 24 al 29 de febrero de 2016 se llevó a cabo en la ciudad de Bucarest, Rumania, la 8^a Romanian Master of Mathematics, una competencia de matemáticas a la que solo se invita a un selecto grupo de países de entre los más destacados en Matemáticas en el mundo.

Cada país puede participar con equipos de máximo 6 estudiantes, exceptuando al país anfitrión que participó con dos equipos, así como dos equipos de la escuela anfitriona, la Escuela Nacional de Informática Tudor Vianu, donde se realizó el evento. Los otros 15 países invitados fueron Bulgaria, Brasil, China, Francia, Croacia, Hungría, Italia, República de Korea, Perú, Polonia, Rusia, Serbia, Ucrania, Reino Unido y Estados Unidos. Junto con México y los cuatro equipos anfitriones hubo un total de 20 equipos y 113 estudiantes.

La delegación mexicana estuvo compuesta por Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León), Ariel Leonardo García Morán (Jalisco), Antonio López Guzmán (Chihuahua), Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco), José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo) y Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Julio Brau Ávila (líder) y David Guadalupe Torres Flores (colíder). Esta fue apenas la segunda participación de México en esta competencia, y la primera con equipo completo. Nuestros estudiantes fueron premiados con una medalla de plata para Ariel, así como medallas de bronce para Kevin, Antonio y Olga. Alfredo obtuvo una mención honorífica por haber resuelto completamente un problema pero no haber obtenido puntaje suficiente para una medalla.

Los estudiantes presentaron dos pruebas, contando cada una con 3 problemas para resolver en un máximo de cuatro horas y media. Cada problema fue calificado con un número del 0 al 7, para un máximo de 42 puntos. El puntaje más alto obtenido por un concursante fue de 29 puntos, obtenidos por uno de los norteamericanos.

En esta competencia existe una clasificación oficial por equipos que toma en cuenta solo los tres puntajes más altos de cada equipo. En esta ocasión, México quedó ubicado en la 10^a posición, empatando con Perú. El equipo estadounidense obtuvo el primer lugar de acuerdo a dicha clasificación, con Reino Unido en segunda posición y Polonia en la tercera.

A continuación presentamos los problemas de la 8^a Romanian Master of Mathematics.

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea D un punto en el segmento BC, $D \neq B$ y $D \neq C$. La circunferencia ABD interseca nuevamente al segmento AC en el punto interior E. La circunferencia ACD interseca nuevamente al segmento AB en el punto interior F. Sea A' el simétrico de A con respecto a la recta BC. Las rectas $A'C$ y DE se intersecan en P, y las rectas $A'B$ y DF se intersecan en Q. Pruebe que las rectas AD, BP y CQ son concurrentes (o todas paralelas).

(Problema sugerido por Serbia)

Problema 2. Dados los enteros positivos m y $n \geq m$, determine el mayor número de fichas de dominó (rectángulos de 1×2 o de 2×1) que pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado rectangular de m filas y $2n$ columnas, tales que:

(i) cada ficha cubre exactamente dos casillas adyacentes del tablero;
(ii) no hay dos fichas que se sobrepongan;
(iii) no hay dos fichas que formen un cuadrado de 2×2 ; y
(iv) la fila inferior del tablero está completamente cubierta por n fichas.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 3. Una *sucesión cúbica* es una sucesión de números enteros dada por $a_n = n^3 + bn^2 + cn + d$, donde b, c y d son constantes enteras y n recorre todos los enteros, incluyendo a los enteros negativos.

(a) Pruebe que existe una sucesión cúbica tal que los únicos términos de la sucesión que son cuadrados de enteros son a_{2015} y a_{2016}.

(b) Determine los posibles valores de $a_{2015} \cdot a_{2016}$ para una sucesión cúbica que satisface la condición de la parte **(a)**.

(Problema sugerido por Reino Unido)

Problema 4. Sean x y y reales positivos tales que $x+y^{2016} \geq 1$. Pruebe que $x^{2016}+y > 1 - 1/100$.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 5. Un hexágono convexo $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$ está inscrito en una circunferencia Ω de radio R. Las diagonales A_1B_2, A_2B_3 y A_3B_1 concurren en X. Para $i = 1, 2, 3$, sea ω_i la circunferencia tangente a los segmentos XA_i y XB_i, y al arco A_iB_i de Ω que no contiene otros vértices del hexágono; sea r_i el radio de ω_i.

(a) Pruebe que $R \geq r_1 + r_2 + r_3$.

(b) Si $R = r_1 + r_2 + r_3$, pruebe que los seis puntos de tangencia de las circunferencias ω_i con las diagonales A_1B_2, A_2B_3, A_3B_1 son concíclicos.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 6. Un conjunto de n puntos en el espacio euclidiano tridimensional, que no contiene cuatro puntos coplanares, es particionado en dos subconjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Un $\mathcal{AB}$-*árbol* es una configuración de $n-1$ segmentos, cada uno de los cuales tiene un extremo en $\mathcal{A}$ y el otro en $\mathcal{B}$, tal que no existe un subconjunto de segmentos que formen un ciclo. Un $\mathcal{AB}$-árbol es transformado en otro de la siguiente forma: escogemos tres segmentos distintos A_1B_1, B_1A_2 y A_2B_2 en el $\mathcal{AB}$-árbol tales que A_1 está en $\mathcal{A}$ y $A_1B_1 + A_2B_2 > A_1B_2 + A_2B_1$, y quitamos el segmento A_1B_1 para reemplazarlo por el segmento A_1B_2. Dado cualquier $\mathcal{AB}$-árbol, pruebe que toda secuencia de transformaciones sucesivas termina (ninguna transformación adicional es posible) después de un número finito de pasos.

(Problema sugerido por Rusia)

XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

Durante el mes de marzo de 2016 se aplicó el examen de la XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos preseleccionados para las competencias internacionales y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador es México.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 1 de oro, 1 de plata y 5 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 141 puntos quedando en el lugar número 14 de 36 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León): Medalla de oro.
- Leonardo Ariel García Morán (Jalisco) : Medalla de plata.
- Karol José Gutiérrez Suárez (Colima): Medalla de bronce.
- Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México): Medalla de bronce.
- Arturo Arenas Esparza (Chihuahua): Medalla de bronce.
- Antonio López Guzmán (Chihuahua): Medalla de bronce.
- Maximiliano Sánchez Garza (Nuevo León): Medalla de bronce.
- Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal): Mención honorífica.
- Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa): Mención honorífica.
- José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Decimos que un triángulo ABC es *increíble* si lo siguiente se cumple: para cada punto D en el lado BC, si P y Q son los pies de las perpendiculares desde D a las líneas AB y AC, respectivamente, entonces la reflexión de D sobre la línea PQ está sobre el circuncírculo del triángulo ABC.
Demuestra que un triángulo ABC es increíble si y solo si $\angle A = 90^\circ$ y $AB = AC$.

Problema 2. Un entero positivo es llamado *lujoso* si puede ser expresado en la forma

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}$$

donde a_1, a_2,..., a_{100} son enteros no negativos y no son necesariamente diferentes. Encuentra el menor entero positivo n tal que ninguno de los múltiplos de n es lujoso.

Problema 3. Sean AB y AC dos rayos distintos que no están en la misma línea y sea ω un círculo con centro O que es tangente al rayo AC en E y al rayo AB en F. Sea R un punto en el segmento EF. La línea por O paralela a EF intersecta la línea AB en P. Sea N la intersección de las líneas PR y AC, y sea M la intersección de la línea AB y la línea por R paralela a AC. Demuestra que la línea MN es tangente a ω.

Problema 4. El país Sueñilandia consiste en 2016 ciudades. La línea aerea Estrellados quiere abrir algunos vuelos sencillos entre pares de ciudades de manera que en cada ciudad haya exactamente un vuelo saliendo de ella. Encuentra el menor entero positivo k tal que no importa cómo Estrellados elija sus vuelos, las ciudades pueden ser partidas en k grupos tal que desde cada ciudad no es posible llegar a otra ciudad en el mismo grupo usando a lo más 28 vuelos.

Problema 5. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tales que

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x),$$

para todos los números reales positivos x, y, z.

5^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Una delegación de cuatro dedicadas e inteligentes estudiantes mexicanas rompen los estereotipos de género y prejuicios acerca de que las mujeres no son tan buenas como los hombres para las matemáticas y otras ciencias exactas, y demuestran que en México hay talento para esta disciplina.

Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco), Alka Xavier Earathu (Morelos), Jacqueline Lira Chávez (Morelos) y Marcela Cruz Larios (Campeche) participaron del 10 al 16 de abril de 2016 en la quinta edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO por sus siglas en inglés) que se llevó a cabo en la ciudad de Busteni, Rumania. Los profesores que acompañaron a la delegación mexicana fueron Isabel Hubard Escalera (líder) y Julio César Díaz Calderón (tutor).

Los resultados fueron muy satisfactorios. Olga Medrano obtuvo medalla de oro – la primera presea dorada desde que México participa en la EGMO – mientras que Alka Xavier Earathu obtuvo una medalla de plata. Además en el puntaje por países, México ocupó el lugar 13 de 39 países participantes. Cabe resaltar, que el Problema 3 fue propuesto por México.

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la tercera ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la 5^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sean: n un entero positivo impar, y $x_1, \ldots, x_n$ números reales no negativos. Demostrar que

$$\min_{i=1,\ldots,n} \left\{x_i^2 + x_{i+1}^2\right\} \leq \max_{j=1,\ldots,n} \{2x_j x_{j+1}\},$$

donde $x_{n+1} = x_1$.

Problema 2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, y X la intersección de las diagonales AC y BD. Sean C_1, D_1 y M los puntos medios de los segmentos CX, DX y CD, respectivamente. Las rectas AD_1 y BC_1 se intersecan en Y, la recta MY interseca a las diagonales AC y BD en dos puntos distintos, que llamamos respectivamente E y F. Demostrar que la recta XY es tangente a la circunferencia que pasa por E, F y X.

Problema 3. Sea m un entero positivo. Se considera un tablero de $4m \times 4m$ casillas cuadradas. Dos casillas diferentes están *relacionadas* si pertenecen ya sea a la misma fila o a la misma columna. Ninguna casilla está relacionada con ella misma. Algunas casillas se colorean de azul de tal manera que cada casilla está relacionada con al menos dos casillas azules. Determinar el mínimo número de casillas azules.

Problema 4. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se intersecan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Se considera una circunferencia ω tangente exteriormente a ω_1 en un punto T_1, y tangente interiormente a ω_2 en un punto T_2. Demostrar que las rectas X_1T_1 y X_2T_2 se intersecan en un punto que pertenece a ω.

Problema 5. Sean k y n enteros tales que $k \geq 2$ y $k \leq n \leq 2k - 1$. Se ponen piezas rectangulares, cada una de tamaño $1 \times k$ o $k \times 1$, en un tablero de $n \times n$ casillas cuadradas, de forma que cada pieza cubra exactamente k casillas del tablero y que no haya dos piezas superpuestas. Se hace esto hasta que no se puedan colocar más piezas. Para cada n y k que cumplen las condiciones anteriores, determinar el mínimo número de piezas que puede contener dicho tablero.

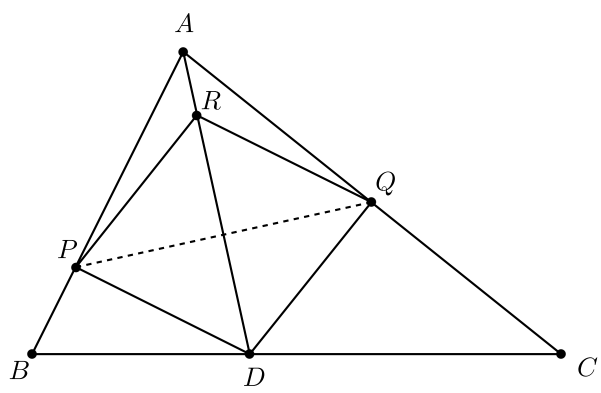
Problema 6. Sea S el conjunto de todos los enteros positivos n tales que n^4 tiene un divisor en el conjunto $\{n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, n^2 + 2n\}$. Demostrar que hay infinitos elementos en S de cada una de las formas $7m, 7m+1, 7m+2, 7m+5$ y $7m+6$, pero S no contiene elementos de la forma $7m + 3$ y $7m + 4$, siendo m un entero.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de la XXVIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

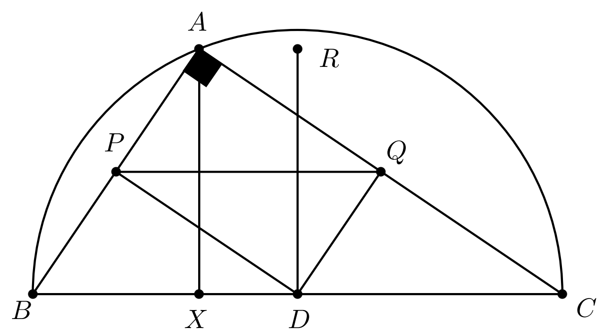
Solución del problema 1. (Solución de Karol José Gutiérrez Suárez). Supongamos primero que el triángulo ABC es increíble. Veremos primero que el ángulo en el vértice A es recto. Consideremos el caso en que D es el punto sobre BC tal que AD es la bisectriz de $\angle CAB$. Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde D sobre AB y AC respectivamente.



Una propiedad conocida del lugar geométrico de la bisectriz establece que $DQ = DP$ y por tanto D está sobre la mediatriz de PQ, de manera que al reflejar D sobre PQ, la reflexión R también estará en AD. Pero el enunciado del problema establece que A, B, C, R son puntos conclíclicos, de manera que la única posibilidad es que $R = A$, en cuyo caso el triángulo AQP es una reflexión del triángulo DQP y al ser $APDQ$

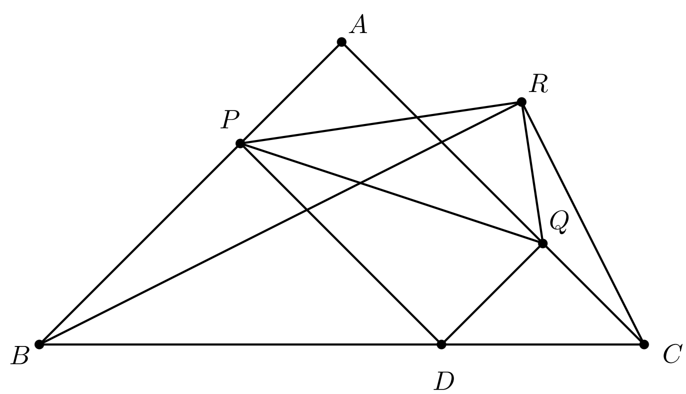
un cuadrilátero cíclico (ya que tiene dos ángulos rectos), $\angle A + \angle D = 180°$ implica que $\angle A = 90°$.

Nos falta verificar que $AB = AC$. Tomemos ahora a D como el punto medio de BC. Dado que $\angle A = 90° = \angle DPB = \angle CQD$, se tendrá $DP \parallel AC$ y $DQ \parallel AB$. Por tanto, P y Q son los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Adicionalmente, si X es el pie de la altura desde A sobre BC, la semejanza en razón $1:2$ permite concluir que AX mide lo mismo que RD, de manera que AR y BC son paralelas.



Como $ARBC$ es cíclico, por hipótesis del problema, de $AR \parallel CB$ concluimos que $AC = BR$ y aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos ACX y RBD, concluimos que $CX = BD$. Mas aún, como D es punto medio de BC, necesariamente $BD = CD$ y por tanto $CX = CD$, es decir, $X = D$. Como la mediana AD resulta ser entonces altura, el triángulo ABC es isósceles y por tanto $AB = AC$.

Supongamos ahora que el triángulo ABC es rectángulo e isósceles, y tomemos D en la hipotenusa CB. Sean P, Q como se describen en el enunciado del problema y sea R la reflexión de D sobre PQ.



El cuadrilátero $APDC$ es cíclico, pues $\angle DQA + \angle DPQ = 90° + 90° = 180°$ y además, QP es diámetro de su circuncírculo. Al ser R reflexión de D sobre PQ, tenemos que los triángulos QRP y QDP son congruentes y por lo tanto, $\angle QRP = 90°$. Esto quiere decir que R está sobre una circunferencia con diámetro QP, por lo que $QRAPD$ es cíclico.

Observemos que el triángulo QCD también es rectángulo isósceles, de manera que $QC = QD$. Dado que R es reflexión de D sobre QP, adicionalmente tendremos $QD = QR$. Esto quiere decir que los triángulos CRQ y DRQ son isósceles. Denotemos por $\alpha = \angle QRD = \angle QDR$ y por $\beta = \angle QRC = \angle QCR$. Dado qe $QRAPD$ es cíclico, tendremos $\alpha = \angle QRD = \angle QAD$ y al ser $APDQ$ rectángulo, también $\angle ADP$ medirá α. Por otro lado, $\angle RQA = 2\beta$ al ser ángulo externo del triángulo RQC y por el pentágono cíclico, $\angle RDA = 2\beta$.
De esta manera $90° = \angle QDP = \alpha + 2\beta + \alpha$ por lo que $\alpha + \beta = 45°$. De este modo $\angle CRD = \beta + \alpha = 45°$ y como $\angle DRA = 90°$ por subtender un diámetro del pentágono cíclico, $\angle CRA = 135°$. Finalmente, como $\angle CRA + \angle ABC = 135° + 45° = 180°$, concluimos que $ABCR$ es un cuadrilátero cíclico y por tanto R está en el circuncírculo del triángulo ABC tal como queríamos demostrar.

Solución del problema 2. (Solución de Karol José Gutiérrez Suárez). Consideraremos los números en base binaria. Si m es un entero positivo, denotaremos por $s(m)$ a la cantidad de unos en su expansión binaria. Como $s(a) + s(b) \geq s(a + b)$ para cualquier par de enteros a y b.
Si m es lujoso, entonces $m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}$, y por tanto

$$s(2^{a_1}) + s(2^{a_2}) + \cdots + s(2^{a_{100}}) \geq s(2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}) = s(m).$$

Mas aún, como $s(2^k) = 1$, concluimos que $100 \geq s(m)$.
El menor número tal que $s(m) \geq 101$ es $m = 111\ldots1_2$ (compuesto de 101 unos) que puede expresarse también como

$$m = 111\ldots1_2 = 2^{101} - 1.$$

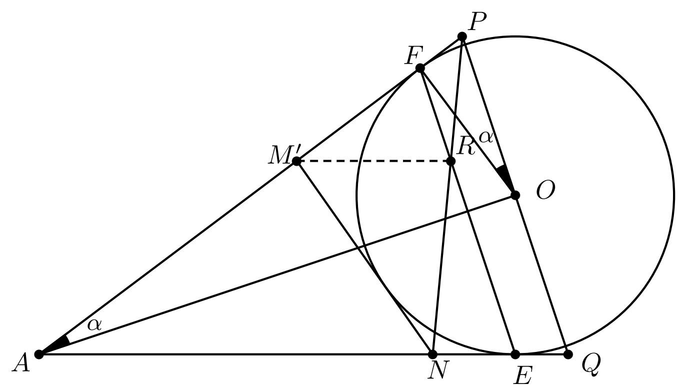
Ningún número n menor que $2^{101} - 1$ puede satisfacer las condiciones del problema, pues el múltiplo $1 \cdot n$ tiene una suma de dígitos binarios (bits) menor o igual que 100 y por tanto será lujoso. Demostraremos que m satisface las condiciones del problema y por tanto será el menor posible.
Supongamos que existen múltiplos lujosos de m y consideremos el menor de ellos. Observando que $2^{101} \equiv 1 \pmod{n}$, podemos construir el siguiente criterio de divisibilidad por m en base 2: dividimos un número en binario en bloques de tamaño 101, cada uno de los bloques lo consideramos como un número binario y hacemos la suma de todos ellos; si el resultado es múltiplo de m, entonces el número original también lo es. Por ejemplo, $2^3 - 1$ divide a 100111_2 si y solo si divide a $100_2 + 111_2$ (lo cual es cierto).
Si w es el menor múltiplo de m que es lujoso, necesariamente tendrá más de 101 bits, por lo que es posible separarlo en bloques $(b_1|b_2|\ldots|b_k)$. Entonces, el criterio de divisibilidad establece que m debe dividir a $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ (considerados como números binarios). Mas aún, como

$$s(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \leq s(b_1) + s(b_2) + \cdots + s(b_k) = s(w) < 101,$$

donde la última desigualdad se obtiene pues w es lujoso, necesariamente $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ será un número cuya suma de dígitos es menor que 101, que además es múltiplo de

m, y estrictamente menor que w, lo cual contradice que w es el menor múltiplo con esas características.
Por tanto, el menor número con las propiedades buscadas es $m = 2^{101} - 1$.

Solución del problema 3. (Solución de Leonardo Ariel García Morán). Sea M' la intersección de AF con la tangente a ω por N. Mostremos que $M = M'$.



Para esto basta probar que $M'R$ y AE son paralelas, o de manera equivalente, que

$$\frac{PR}{RN} = \frac{PM'}{M'A}.$$

Denotemos por $M'N = a$, $NA = b$, $AM' = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ y $\angle FAO = \alpha$. Al aplicar el teorema de Menelao[10] en el triángulo APN se tiene que

$$\frac{PR}{RN} \cdot \frac{NE}{EA} \cdot \frac{AF}{FP} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{PR}{RN} = \frac{FP}{NE} = \frac{FP}{s-b},$$

ya que $AF = AE$ y $NE = s - b$.
Por otro lado tenemos que $AF = s$ de donde se tiene que $OF = s\tan\alpha$ por lo tanto, de la semejanza de los triángulos OFA y PFO se tiene que $FP = OF\tan\alpha = s\tan^2\alpha$.
Luego, $\dfrac{PR}{RN} = \dfrac{s\tan^2\alpha}{s-b}$. Adicionalmente,

$$\frac{PM'}{M'A} = \frac{PF + FM'}{M'A} = \frac{s\tan^2\alpha + (s-c)}{c}.$$

Por lo tanto, basta probar que

$$\frac{s\tan^2\alpha}{s-b} = \frac{s\tan^2\alpha + (s-c)}{c}.$$

[10] Ver en el apéndice el teorema 16.

Esta igualdad es equivalente a

$$\begin{aligned}
& cs\tan^2\alpha = s(s-b)\tan^2\alpha + (s-b)(s-c)\\
\iff\ & s(c-(s-b))\tan^2\alpha = (s-b)(s-c)\\
\iff\ & s(s-a)\tan^2\alpha = (s-b)(s-c)\\
\iff\ & \tan^2\alpha = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.
\end{aligned}$$

Pero esta última igualdad es la ley de las tangentes[11].

Solución del problema 4. (Solución de Kevin William Beuchot Castellanos). Veamos que al menos son necesarios 57 grupos. Tomemos 57 ciudades numeradas del 1 al 57 y supongamos que hay un vuelo de la ciudad 1 a la 2, de la 2 a la 3, de la 3 a la 4 y así sucesivamente, hasta que hay un vuelo de la 56 a la 57 y por último de la 57 a la 1. Además, supongamos que ningún vuelo del resto de las ciudades llega a estas 57 ciudades. En este ciclo, cualquier par de ciudades está a distancia de a lo más 28 vuelos, entonces ninguna ciudad podría estar en el mismo grupo y por lo tanto se necesita al menos un grupo por ciudad, es decir 57 grupos.

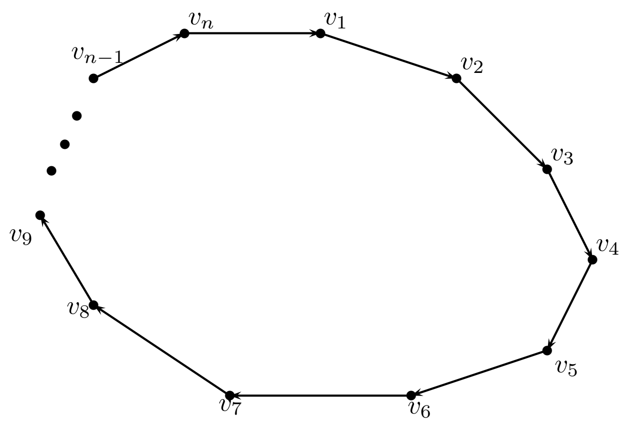
Mostremos ahora que con 57 es posible hacer dicha partición sin importar la configuración de vuelos. Consideremos la digráfica asociada al problema pensando a cada ciudad como vértice y con arista dirigida $a \longrightarrow b$ si hay un vuelo de a hacia b. Analicemos cada componente conexa y veamos que en cada una de ellas se puede partir en a lo más 57 grupos (como las componentes son ajenas si logramos basta dividir cada componente en 57 grupos). Para ello probemos el siguiente lema.

Lema. Cada componente $\mathcal{C}$ de la digráfica contiene un único ciclo.

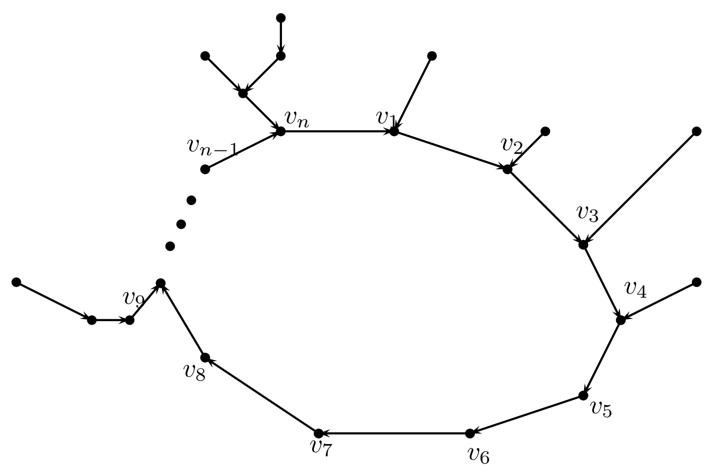
Demostración. Supongamos que no hay ciclos. Como $\mathcal{C}$ es conexa y sin ciclos, entonces es un árbol. Sea V_1 el conjunto de vértices hojas (los értices de grado 1). Como $\mathcal{C}$ es una digráfica y de cada vértice sale una arista, se tiene que de cada vértice de V_1 sale una arista que llega a otro vértice. Sea V_2 el conjunto de vértices que se conectan con V_1 de esta forma. De manera inductiva se define V_{k+1} como el conjunto de los vértices que se conectan con V_k con aristas que salen de V_k a V_{k+1}. Como $\mathcal{C}$ no tienes ciclos, todos los V_i son ajenos y la digráfica es finita, entonces debe existir un valor m tal que V_m no es vacío pero V_{m+1} sí lo es. En esta situación entonces se debe cumplir que los vértices de V_m no tienen aristas que salgan de ellos, lo cual es absurdo pues por hipótesis siempre hay aristas que salen.

Con lo anterior se tiene que debe existir un ciclo. Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ciclo en $\mathcal{C}$ como en la siguiente figura.

[11] Ver en el apéndice el teorema 14. Dado un triángulo de lados a, b, c, área A, semiperímetro s e inradio r, se puede demostrar que $r = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, donde $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ es la fórmula de Herón para el área de un triángulo. Luego, si α es el ángulo opuesto al lado a, es fácil demostrar que $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{r}{s-a}$. Sustituyendo la expresión anterior para r en esta última relación, se obtiene la ley de las tangentes.



Consideremos $\mathcal{C}_1$ los vértices tales que sale una arista hacia algún v_i y que no son del ciclo. Claramente, $\mathcal{C}_1$ es ajena a los vértices del ciclo. De forma recursiva se define $\mathcal{C}_{k+1}$ como el conjunto de los vértices tales que hay arista hacia un vértice de $\mathcal{C}_k$. Veamos que las familias $\mathcal{C}_k$ y $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ son ajenas.
Demostremos esto por inducción sobre k. Si $k = 1$ es obvio. Supongamos que es cierto para todo $k < n$. Sea c un vértice en $\mathcal{C}_n$. Si este pertenece a algún $\mathcal{C}_r$ con $r < n$ o al ciclo, entonces sería un vértice que le sale arista hacia $\mathcal{C}_{n-1}$ y a otro vértice distinto, ya sea en el ciclo o en $\mathcal{C}_{r-1}$ lo cual es un absurdo, pues de cada vértice solo sale una arista.
Con lo anterior el lema está probado y se tiene que cada componente conexa es de la forma



Veamos que con esto podemos etiquetar cada vértice en la componente con un número del 1 al 57 para clasificar en 57 grupos con la propiedad requerida.
Al vértice v_1 lo etiquetamos con 1, al v_n con 2, v_{n-1} con el 3 y así sucesivamente con la condición de que si el ciclo tiene a lo más 57 vértices solo se usan de manera 57 etiquetas y si hay más de 57 se usan 29 etiquetas de forma cíclica hasta que en el último bloque se usan las etiquetas del 30 al 57. Para cada uno de los vértices v de las ramas

nos fijamos en la etiqueta i del vértice al que llega la arista que sale de v y le ponemos la etiqueta $i+1$ módulo 57. Este acomodo cumple lo requerido, pues si hay dos vértices en distintas ramas es imposible llegar de uno de ellos al otro o tienen distancia de 57 al menos, si v está en una rama y u en el ciclo entonces si la distancia de v al ciclo es r de forma reducida módulo 57 para llegar a v que tiene la misma etiqueta, al menos se necesitan $57-r$ o $29-r$ vuelos de donde al menos se requieren en cualquier caso 29 vuelos. Por último si están en el ciclo, la distancia mínima entre dos vértices v_i, v_j de la misma etiqueta es $\min\{|j-i|, 57-|j-i|\}$ pero por construcción cada uno de estos números es al menos 29, por lo tanto la partición de grupos cumple.
Como esto es válido para cada componente y las componentes son ajenas bastan 57 grupos.

Solución del problema 5. La función $f(x)=x$ cumple la ecuación funcional ya que:

$$(z+1)(x+y)=(xz+y)+(yz+x),$$

para todos los números reales positivos x, y, z.
Demostraremos que es la única función, usando los siguientes lemas.

Lema 1. f es inyectiva.
Demostración. Si $f(a)=f(b)$, para $a, b\in\mathbb{R}^+$, al tomar $x=y=1$, $z=a$ en la ecuación funcional, se obtiene que $(a+1)f(2)=2f(f(a)+1)$ y al hacer $x=y=1$, $z=b$ se tiene que $(b+1)f(2)=2f(f(b)+1)$, pero si $f(a)=f(b)$, entonces $(a+1)f(2)=(b+1)f(2)$ por lo que $a=b$. $\square$

Al tomar $x=y$ en la ecuación funcional, se obtiene que

$$(z+1)f(2x)=2f(x(f(z)+1)). \tag{5}$$

Si $z=1$, la inyectividad de f garantiza que $2x=x(f(1)+1)$, por lo que $f(1)=1$.

Lema 2. f es suprayectiva.
Demostración. Bastará ver que para cada $z\in\mathbb{R}^+$, f toma los valores $\frac{z+1}{2}$ y $\frac{2}{z+1}$ (esto basta, ya que cualquier $y\in\mathbb{R}^+$ se puede escribir de la forma $y=\frac{z+1}{2}$ si $y>\frac{1}{2}$ o bien de la forma $y=\frac{2}{z+1}$ si $y<2$).
Al tomar $x=\frac{1}{2}$ en (5), se obtiene que

$$f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right)=\frac{z+1}{2}f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{z+1}{2}.$$

y al tomar $x=\frac{1}{f(z)+1}$ en (5), se tiene que

$$f\left(\frac{2}{f(z)+1}\right)=\frac{2}{z+1}f\left(\frac{f(z)+1}{f(z)+1}\right)=\frac{2}{z+1}.$$

$\square$

Lema 3. La función f satisface que $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1$, para todo número real positivo x.

Demostración. En el lema 2 se obtuvo que:

$$f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right)=\frac{z+1}{2} \quad \text{y} \quad f\left(\frac{2}{f(z)+1}\right)=\frac{2}{z+1},$$

por lo que

$$f\left(\frac{f(z)+1}{2}\right)\cdot f\left(\frac{2}{f(z)+1}\right)=\frac{z+1}{2}\cdot\frac{2}{z+1}=1.$$

Con las mismas ideas del lema 2 se puede garantizar que cualquier número real positivo x es de la forma $\frac{f(z)+1}{2}$ o $\frac{2}{f(z)+1}$ para algún número real positivo z, por lo que $f(x)f(\frac{1}{x})=1$ para todo número real positivo x. □

Tomando $\frac{1}{z}$ en lugar de z en la relación (5) y usando que $f(\frac{1}{z})=\frac{1}{f(z)}$, se tiene que

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)f(2x)=2f\left(x\left(\frac{1}{f(z)}+1\right)\right)=2f\left(\frac{x(f(z)+1)}{f(z)}\right),$$

y como

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)f(2x)=\frac{1}{z}(z+1)f(2x)=\frac{2}{z}f(x(f(z)+1)),$$

se sigue que

$$f\left(\frac{x(f(z)+1)}{f(z)}\right)=\frac{1}{z}f(x(f(z)+1)) \tag{6}$$

para cualesquiera números reales positivos x, z.

Lema 4. La función f satisface que $f(f(z))=z$ para todo número real positivo z.
Demostración. Al tomar $x=\frac{1}{f(z)+1}$ en la relación (6) obtenemos que $f\left(\frac{1}{f(z)}\right)=\frac{1}{z}f(1)=\frac{1}{z}$. Pero, por el Lema 3, $f(f(z))f(\frac{1}{f(z)})=1$. Luego, $f(f(z))\frac{1}{z}=1$. Por lo tanto, $f(f(z))=z$ para todo número real positivo z. □

Lema 5. La función f satisface que $f(xy)=f(x)f(y)$ para todos los números reales positivos x, y.
Demostración. Al hacer $y=x(f(z)+1)$ en la relación (6) obtenemos que $f(\frac{y}{f(z)})=\frac{1}{z}f(y)$ para cualesquiera números reales positivos y, z. Luego, aplicando el Lema 4 obtenemos que $f(\frac{y}{x})=f(\frac{y}{f(f(x))})=\frac{1}{f(x)}f(y)$, por lo que $f(y)=f(\frac{y}{x})f(x)$ para cualesquiera números reales positivos x, y. Luego, $f(xz)=f(\frac{xz}{x})f(x)=f(z)f(x)$ para cualesquiera números reales positivos x, z.

□

Lema 6. La función f satisface que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ para cualesquiera números reales positivos x, y.
Demostración. Tomando $x=1$, en la ecuación (5), se tiene que $(z+1)f(2)=2f(f(z)+1)$. Luego,

$$f(f(z)+1)=\frac{f(2)}{2}(z+1).$$

Al aplicar f de ambos lados de esta igualdad, los lemas 4 y 5 garantizan que $f(z)+1 = f(f(f(z)+1)) = f(f(2))f(\frac{1}{2})f(z+1) = 2\frac{1}{f(2)}f(z+1) = cf(z+1)$. Así,

$$f(z+1) = c(f(z)+1)$$

para todo número real positivo z, donde $c = \frac{f(2)}{2}$.
Tomando $z = \frac{y}{x}$ en la ecuación anterior, se tiene que $f\left(\frac{y}{x}+1\right) = c\left(f\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)$, por lo que

$$f(x+y) = c\,(f(x)+f(y))\,, \tag{7}$$

para todos los números reales positivos x, y.
Si $x = y = 1$ en (7), se tiene que $f(2) = 2c$. Si $x = 2$, $y = 1$ en (7), se tiene que $f(3) = c(f(2)+1) = 2c^2+c$. Si $x = 3$, $y = 1$ en (7), se tiene que $f(4) = c(f(3)+1) = 2c^3+c^2+c$. Por otro lado usando el lema 5, se tiene que $f(4) = f(2)f(2) = 4c^2$, por lo que $4c^2 = 2c^3+c^2+c$, de donde $c = 0$, $c = \frac{1}{2}$ o $c = 1$. Pero $c = 0$ no es posible. Tampoco $c = \frac{1}{2}$ es posible ya que $x = y = 1$ en (7) nos lleva a que $f(2) = 1 = f(1)$, que contradice la inyectividad de f. Luego, debe suceder que $c = 1$ y entonces $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todos los números reales positivos x, y. En particular se tiene que f es creciente, ya que como $f(y) > 0$, $f(x+y) = f(x) + f(y) > f(x)$ para cualesquiera números reales positivos x, y. $\square$

Lema 7. Si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es creciente y $f(f(x)) = x$ para todo número real positivo x, entonces $f(x) = x$ para todo número real positivo x.
Demostración. Si $x < f(x)$ para algún número real positivo x, se tiene por ser f creciente que $f(x) < f(f(x)) = x$, lo que es una contradicción. De manera análoga, si $x > f(x)$, para algún número real positivo x, se tiene por ser f creciente que $f(x) > f(f(x)) = x$, de nuevo una contradicción.
Por lo tanto, $f(x) = x$ para todo número real positivo x. $\square$

5^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 5^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Olga Medrano Martín del Campo). Empecemos por demostrar el siguiente resultado.

Lema. Si $0 \leq a \leq b \leq c$, entonces $a^2+b^2 \leq 2bc$.

Demostración: Si alguno de los números b o c vale 0, entonces $a = b = 0$, por lo que $a^2+b^2 = 0$ y $2bc = 0$ de modo que se cumple $2bc \geq a^2+b^2$. Si ninguno de los dos números b y c es cero, entonces las fracciones $\frac{a^2}{bc}$ y $\frac{b^2}{bc}$ están bien definidas y cada una de ellas es menor o igual que 1. Por lo tanto, $\frac{1}{bc}(a^2+b^2) \leq 2$. Al multiplicar por bc, obtenemos la desigualdad buscada. $\square$
Ahora, dividamos el problema en tres casos:

- $n = 1$. En este caso tenemos que $\text{mín}\{x_i^2+x_{i+1}^2\} = x_1^2+x_1^2$ y $\text{máx}\{2x_ix_{i+1}\} = 2x_1x_1$; por lo que $2x_1^2 = \text{mín}\{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq \text{máx}\{2x_ix_{i+1}\} = 2x_1^2$.

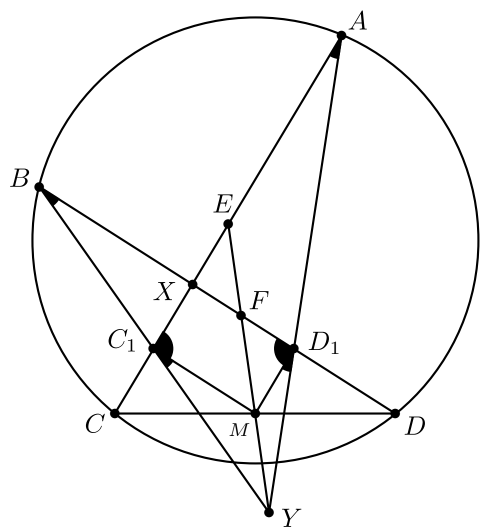
- $n = 3$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, ya que todas las parejas posibles con estos tres números son de la forma (x_i, x_{i+1}). Por el lema anterior tenemos que $\text{mín}\{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2x_2x_3 \leq \text{máx}\{2x_ix_{i+1}\}$.

- $n > 3$. En este caso consideremos una gráfica cuyos vértices sean los números $x_1, \ldots, x_n$, de manera que los vértices x_i, x_{i+1} serán unidos por una arista. Cada arista la pintaremos de color azul si $x_i < x_{i+1}$, y de rojo en caso contrario. Como n es impar, siempre tendremos al menos dos aristas adyacentes x_ix_{i+1} y $x_{i+1}x_{i+2}$ del mismo color (donde x_{n+1} se toma igual a x_1). Consideremos dos casos:

    - Ambas aristas son azules. Entonces, $x_m \leq x_{m+1} \leq x_{m+2}$. Si usamos el lema, tenemos que $x_m^2 + x_{m+1}^2 \leq 2x_{m+1}x_{m+2}$. Como $\text{mín}\{x_i^2 + x_{i+1}^2\} \leq x_m^2+x_{m+1}^2$ y $x_{m+1}^2+x_{m+2}^2 \leq \text{máx}\{2x_ix_{i+1}\}$, tenemos $\text{mín}\{x_i^2+x_{i+1}^2\} \leq \text{máx}\{2x_ix_{i+1}\}$.

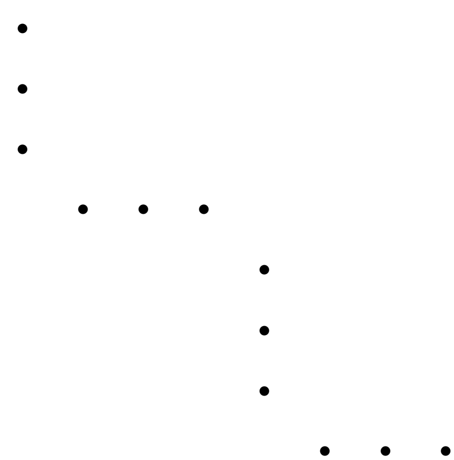
    - Ambas aristas son rojas. En este caso, tenemos que $x_m > x_{m+1} > x_{m+2}$ y podemos usar nuevamente el lema como en el caso anterior.

Solución del problema 2. (Solución de Olga Medrano Martín del Campo). Primero vemos que como $ABCD$ es cíclico, $XA \cdot XC = XB \cdot XD = m$. Luego, por ser C_1 y D_1 puntos medios de CX y DX, respectivamente, $XA \cdot XC_1 = XB \cdot XD_1 = \frac{m}{2}$ y, por lo tanto, ABC_1D_1 es cíclico. Luego, como D_1, C_1 y M son puntos medios de los lados del triángulo DXC, D_1M y C_1M son paralelas a AC y BD, respectivamente, lo que implica que XD_1MC_1 es un paralelogramo. Por estas paralelas y por el cíclico ABC_1D_1, vemos que $\angle MD_1Y = \angle CAY = \angle DBY = \angle MC_1Y = \alpha$. También tenemos que $\angle XC_1M = \angle XD_1M$. Si sumanos los dos ángulos anteriores tenemos que $\angle XC_1Y = \angle XD_1Y = \beta$.



Luego, $\frac{XC_1}{XB} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(180-\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{D_1Y}{BY}$. Ahora, como XD_1MC_1 es paralelogramo, entonces $XC_1 = D_1M$. Por lo tanto, $\frac{D_1M}{XB} = \frac{D_1Y}{DB}$. Entonces, $\frac{D_1M}{D_1Y} = \frac{XB}{DB}$. Esta última igualdad, junto con la ecuación $\angle MD_1Y = \angle XBY = \alpha$, nos lleva a que los triángulos MD_1Y y XBY son semejantes.
Pero como tenemos que D_1M es paralela a AX, los triángulos YD_1M y YAE son semejantes. Por lo que también son semejantes los triángulos YAE y YBX. De la igualdad entre los ángulos correspondientes $\angle YEA = \angle YXB$, se sigue la igualdad entre sus suplementarios, $\angle YEX = \angle YXF$, con lo que concluimos la demostración.

Solución del problema 3. El número mínimo de casillas azules debe ser menor o igual que $6m$, pues esta cantidad se puede lograr al colocar en una diagonal del tablero m bloques de 4×4 de la siguiente forma:



Aseguramos que $6m$ es el mínimo buscado y para demostrarlo, veremos que cualquier combinación de casillas que satisfaga las condiciones del problema tiene al menos $6m$ casillas azules. Consideremos una coloración arbitraria y denotemos por m_1^f al número de filas que contienen exactamente una casilla azul, por m_2^f al número de filas que contienen exactamente dos casillas azules y por m_3^f al número de filas que contienen exactamente tres casillas azules. De manera análoga se definen m_1^c, m_2^c y m_3^c para las columnas.

Iniciemos con la demostración de que $m_3^c \geq m_1^f$ y de que análogamente podemos concluir que $m_3^f \geq m_1^c$. Si una casilla azul está sola en su fila (columna respectiva), entonces hay al menos dos casillas azules en su columna (fila respectiva) y la afirmación anterior queda demostrada.

Supongamos que el número total de casillas azules es menor que $6m$. Probemos que $m_1^f > m_3^f$ y que $m_1^c > m_3^c$, para llegar a la contradicción: $m_1^f > m_3^f \geq m_1^c > m_3^c > m_1^f$.

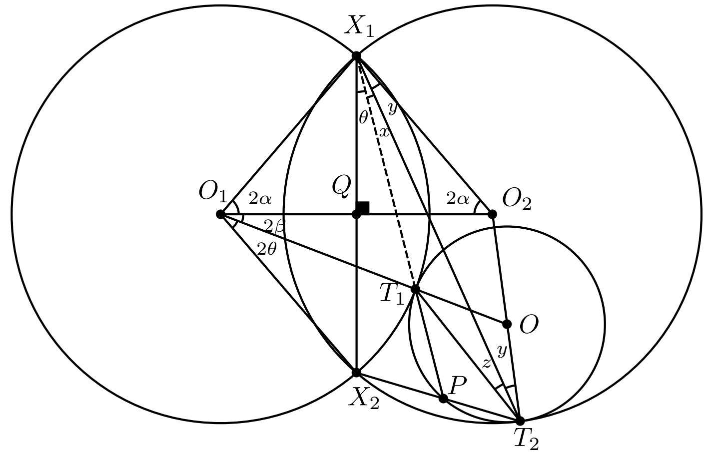
Probemos la primera desigualdad, la segunda se demuestra de manera análoga. Notemos que si hubiera una fila vacía, entonces cada columna contendría al menos dos casillas azules, por lo que el total de casillas azules sería al menos $8m > 6m$, una contradicción. Por lo tanto, no hay una fila vacía. Si contamos las filas tenemos que $m_1^f + \dfrac{m_2^f}{2} + \dfrac{m_3^f}{3} \geq 4m$ y si contamos el número de casillas azules obtenemos que $m_1^f + m_2^f + m_3^f < 6m$. Al sustituir la última ecuación de la anterior multiplicada por $\frac{3}{2}$, obtenemos que $m_1^f - m_3^f > \frac{m_2^f}{2} \geq 0$, con lo que podemos concluir el problema.

Solución alternativa. Para probar que una configuración mínima de casillas azules que satiface las condiciones del problema tiene al menos $6m$ casillas, consideremos una gráfica bipartita cuyas particiones tienen como vértices a las filas y a las columnas del arreglo, respectivamente. Una fila y una columna estarán conectadas por una arista si y solo si se cruzan en una casilla azul. Entonces, el número de casillas azules es igual al número de aristas de esta gráfica. Además, las condiciones del problema implican que por cada fila r y cada columna c, $d(r) + d(c) - \epsilon(r, c) \geq 2$, donde $\epsilon(r, c) = 2$ si r y c están unidos por una arista y $\epsilon(r, c) = 0$ de otra forma. Aquí, $d(r)$ y $d(c)$ denotan los grados de los vértices r y c, respectivamente.

Por lo visto en la solución anterior, observemos que no hay columnas o filas vacías. Entonces, la gráfica no tiene vértices aislados. Por lo tanto, la cardinalidad de cada componente conexa en la gráfica es al menos 4. Esto quiere decir que hay a lo más $2 \cdot \frac{4}{m} = 2m$ componentes conexas. Como resultado, la gráfica tiene al menos $8m - 2m = 6m$ aristas, con lo que terminamos la demostración.

Solución del problema 4. (Solución de Alka Xavier Earathu). Denotemos por O_1, O_2 y O a los centros de ω_1, ω_2 y ω, respectivamente. Si Q es el punto de intersección de X_1X_2 con O_1O_2, y P es el punto de intersección de X_2T_2 con ω, entonces bastará demostrar que los puntos X_1, T_1 y P son colineales.

Definimos los ángulos $2\theta = \angle T_1O_1X_2$, $2\beta = \angle O_2O_1T_1$, $2\alpha = \angle X_1O_1O_2$, $x = \angle T_2X_1T_1$, $y = \angle O_2X_1T_2$ y $z = \angle T_1T_2X_1$.



El segmento O_1O_2 es mediatriz de la cuerda X_1X_2 y por tanto, al ser isósceles el triángulo X_1OX_2, será también su bisectriz, de modo que $2\alpha = 2\beta + 2\theta$. Así, $\alpha = \beta + \theta$, lo cual implica que $\angle X_2O_1X_1 = 4\alpha$. Más aún, como los radios de los círculos son iguales, el triángulo $O_1X_1O_2$ es isósceles y por lo tanto $\angle O_1O_2X_1$ también mide 2α y $\angle X_1O_2X_2 = 4\alpha$.
Por el teorema del ángulo inscrito, $\angle T_1X_1X_2 = \theta$ y $\angle X_2T_2X_1 = 2\alpha$, por lo que $\angle PT_2T_1 = 2\alpha - z$ y $\angle POT_1 = 2\angle PT_2T_1 = 4\alpha - 2z$. Luego, como el triángulo OT_1P es isósceles, $\angle OT_1P = 90° - 2\alpha + z$. De modo análogo, $\angle X_2X_1O_1 = 90° - \alpha$ y $\angle O_1T_1X_1 = 90° - 2\alpha + \theta$. Como O_1, T_1 y O son colineales, entonces $\angle X_1T_1O = 90° + 2\alpha - \theta$.
Por suma de ángulos internos en los triángulos $X_1O_1O_2$ y $X_1T_1T_2$, se tiene que $90° = 2\alpha + \theta + x + y$ y $90° = 2\alpha + 2z + y + x - \theta$. Entonces $\theta = z$ y $\angle OT_1P = 90° - 2\alpha + \theta = \angle X_1T_1O$. Por lo tanto, X_1, T_1 y P son colineales.

Solución del problema 5. (Solución de Olga Medrano Martín del Campo). Vamos a trabajar tres casos:

- $n = k$. En este caso vamos a tener que poner las k fichas, ya sea vertical u horizontalmente. Por tanto, el mínimo es k.

- $n = 2k - m$, con $1 < m < k$. Primero tomemos el acomodo de la Figura 1, en el cual se utilizan $2(k - m + 1)$ fichas. Veamos que ya no se pueden poner más fichas ni en A ni en B: A es un cuadrado de $(k-1) \times (k-1)$, y B es un cuadrado de $(k-m) \times (k-m)$ menos su esquina inferior izquierda.
  Ahora, vamos a probar un lema:

  Lema del sombreado. Si una ficha horizontal se encuentra a distancia menor a k del borde inferior, cada uno de los niveles de abajo deberá tener una ficha horizontal en él.
  Demostración: Si no fuera así, alguno de los niveles de abajo tendría un espacio

de $1 \times k$ libre, en el cual podría ir otra ficha, lo que es una contradicción. □

Supongamos que se utilizaron menos de $2(k-m+1)$ fichas. Por lo tanto, una de ambas direcciones va a ser utilizada $k-m$ o menos veces. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es la vertical. Si usamos el lema del sombreado podemos ver que esas fichas verticales están todas pegadas en la parte izquierda y derecha del tablero (y hay exactamente una en cada columna, ya que $n \leq 2k-1$). Pero como son máximo $k-m$ fichas, hay al menos k hileras en medio, en cada una de las $2k-m$ filas debe haber al menos una ficha horizontal. Pero $2k-m > 2(k-m+1)$, contradicción. Por lo tanto, el mínimo es $2(k-m+1) = 2(n-k+1)$ fichas.

- $n = 2k-1$. Tomamos el acomodo de la Figura 2 que utiliza $2k-1$ fichas. Ya no se pueden poner fichas pues los únicos espacios libres son los a_i, los cuales tienen dimensiones 1 y $k-1$. Supongamos que se pueden usar menos fichas, entonces sin pérdida de generalidad, hubo $k-1$ verticales o menos. Usamos el lema del sombreado para ver que todas nuestras fichas verticales están pegadas desde el borde izquierdo o derecho del tablero, y hay una máximo por columna. Por lo tanto, después de ponerlas todas, nos quedan k columnas libres en medio, las cuales solo pueden ser cubiertas por fichas horizontales, por lo que necesitamos al menos $2k-1$ de ellas. Por lo anterior usamos $2k-1$ fichas, lo que es una contradicción.

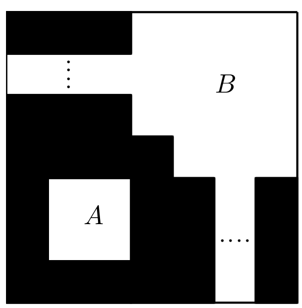


Figura 1

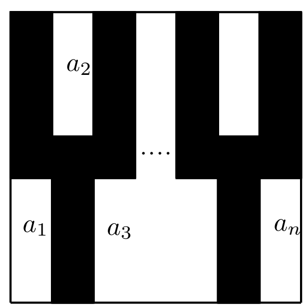


Figura 2

Solución del problema 6. Demostremos que con el siguiente lema podemos concluir el problema y, además, que nos permite dar una descripción recursiva de S. La prueba del lema se da al final de la solución.

Lema. La cuarta potencia de un entero positivo n tiene un divisor en el rango $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+2n$ si y solo si al menos uno de los números $2n^2+1$ o $12n^2+9$ es un cuadrado perfecto.

Aplicando este lema, un entero n pertenece a S si y solo si $m^2-2n^2=1$ o $m^2-12n^2=9$ para algún entero m. La última es una ecuación de Pell cuyas soluciones son $(m_1, n_1) = (3, 2)$ y $(m_{k+1}, n_{k+1}) = (3m_k + 4n_k, 2m_k + 3n_k)$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.

En lo subsecuente, las congruencias se consideran módulo 7. Por iteración, tenemos que $(m_{k+3}, n_{k+3}) \equiv (m_k, n_k)$. Dado que $(m_1, n_1) \equiv (3, 2)$, $(m_2, n_2) \equiv (3, -2)$ y $(m_3, n_3) \equiv (1, 0)$, se sigue que S contiene infinitos enteros de cada una de las clases de residuos 0 y ± 2 módulo 7.
La otra ecuación se puede transformar en una ecuación de Pell, $m'^2 - 12n'^2 = 1$, al notar que m y n son divisibles entre 3 e introducir $m = 3m'$ y $n = 3n'$. En este caso las soluciones son $(m_1, n_1) = (21, 6)$ y $(m_{k+1}, n_{k+1}) = (7m_k + 24n_k, 2m_k + 7n_k)$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$.
Esta vez la iteración demuestra que $(m_{k+4}, n_{k+4}) \equiv (m_k, n_k)$. Dado que $(m_1, n_1) \equiv (0, -1)$, $(m_2, n_2) \equiv (-3, 0)$, $(m_3, n_3) \equiv (0, 1)$ y $(m_4, n_4) \equiv (3, 0)$, se sigue que S contiene infinitos enteros de cada una de las clases de residuos 0 y ± 1 módulo 7. Por último, dado que los enteros n_k son todos los posibles enteros en S, no hay un entero congruente a ± 3 módulo 7 que pertenezca a S.
Ahora demostremos el lema. Sea n un entero que pertenece a S y sea $d = n^2 + m$ un divisor de n^4 en el rango $n^2 + 1, n^2 + 2, \ldots, n^2 + 2n$ (es decir, $1 \leq m \leq 2n$). Al elevar al cuadrado $n^2 = d - m$ obtenemos que d divide a m^2, entonces $\dfrac{m^2}{d}$ es un entero. Dado que $n^2 < d < (n+1)^2$, se sigue que d no es un cuadrado; en particular, $\frac{m^2}{d} \neq 1$, entonces $\frac{m^2}{d} \geq 2$. Por otro lado, $1 \leq m \leq 2n$, entonces $\frac{m^2}{d} = \dfrac{m^2}{n^2 + m} = 2$ o $\frac{m^2}{d} = \dfrac{m^2}{n^2 + m} = 3$. En estos dos casos obtenemos que $12n^2 + 9 = (2m - 3)^2$ o que $2n^2 + 1 = (m - 1)^2$, respectivamente.
Al contrario, si $2n^2 + 1 = m^2$ para algún entero positivo m, entonces $1 < m^2 < 4n^2$. Por lo tanto, $1 < m < 2n$ y $n^4 = (n^2 + m + 1)(n^2 - m + 1)$, el primer factor es el divisor deseado. Análogamente, si $12n^2 + 9 = m^2$ para algún entero positivo m, entonces m es impar, $n \geq 6$ y $n^4 = \left(n^2 + \dfrac{m}{2} + \dfrac{3}{2}\right)\left(n^2 - \dfrac{m}{2} + \dfrac{3}{2}\right)$, el primer factor es el divisor deseado.

Apéndice

Definición 2 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 3 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*

2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*

3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad media aritmética - media geométrica)**.** *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 4 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 5 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

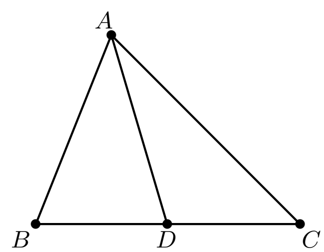
Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Bisectriz generalizada)**.** *Dados un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BA\operatorname{sen}(\angle BAD)}{AC\operatorname{sen}(\angle DAC)}.$$



Teorema 13 (Ley de los cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 14 (Ley de las tangentes)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$ donde α es el ángulo opuesto al lado a y $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.*

Teorema 15 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 16 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Teorema 17 (Teorema de Stewart)**.** *Sea ABC un triángulo y AX una ceviana de longitud p que divide al segmento BC en dos segmentos BX y XC de longitudes m y n, respectivamente. Entonces, $a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$ donde a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente.*

Definición 6 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Rogelio Valdez Delgado (PRESIDENTE)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
valdez@uaem.mx

Víctor Manuel Barrero Calderón
Passport Health
barrero.victor@gmail.com

Julio César Díaz Calderón
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc94@hotmail.com

Héctor Raymundo Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Ignacio Barradas Bibriesca
Centro de Investigación en Matemáticas
barradas@cimat.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
josealfredocobian@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Enrique Treviño López
Lake Forest College
enriquetrevi_o@hotmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://ommenlinea.org/`

¡Síguenos en facebook y en twitter!

`http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas`

`@ommtw`