TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2016, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Agosto de 2016.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2016, Número 3

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su tercer número del 2016. En esta edición encontrarás el artículo *Orden de un número*, escrito por Carlos Jacob Rubio Barrios y Emerson Lucas Soriano Pérez. En teoría de números, hay varios temas que no se entrenan a nivel estatal porque no hay materiales en español accesibles para los entrenadores, de manera que esperamos que este artículo sea uno de los primeros en cubrir ese tipo de necesidades.

En la sección *Concursos Estatales* encontrarás el examen de la cuarta etapa de la Olimpiada de Matemáticas de la Ciudad de México de este año. Queremos expresar nuestro agradecimiento a Isabel Hubard, delegada de la Ciudad de México, y al “Flamante Comité de la Olimpiada Lechona de Matemáticas” por compartirnos el material y aprovechamos para invitar a todos los delegados estatales a que nos envíen sus exámenes

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

selectivos para publicarlos en la revista y de esta manera enriquecer el intercambio de materiales entre todos.
En las secciones de concursos internacionales, hallarás los resultados de México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, y en la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, así como los respectivos exámenes y sus soluciones.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *problemas de práctica* y de *entrenamiento*, mismos que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la OMM.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1997. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar

2016-2017 y, para el 1° de julio de 2017, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 11 de noviembre de 2016 en Acapulco, Guerrero. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2016 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Brasil, julio de 2017) y a la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Argentina, septiembre de 2017).

De entre los concursantes nacidos en 2000 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2017).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) a realizarse en la India en julio de 2017.

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en Zurich, Suiza, en el mes de abril de 2017.

Orden de un número

Por Carlos Jacob Rubio Barrios y Emerson Lucas Soriano Pérez

Nivel Avanzado

Para explicar de manera sencilla la motivación de este artículo, diremos que un entero positivo es *bueno* si todos sus dígitos son iguales a 9. Por ejemplo, los números 9; 999 y 9999 son números buenos.

Se observa que 3 posee un múltiplo bueno, ya que 9 es múltiplo de 3. El número 7 también posee un múltiplo bueno, pues 999999 es múltiplo de 7. En general, si n es coprimo con 10, entonces, por el teorema de Euler[2], tenemos que $10^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, lo cual significa que

$$n \mid \underbrace{999\ldots99}_{\phi(n)\text{ veces}}.$$

Este hecho nos garantiza que cualquier entero positivo n que es coprimo con 10 posee un múltiplo bueno. Además, es fácil notar que si n posee un múltiplo bueno, entonces posee infinitos múltiplos buenos, pero, ¿cuál de todos los múltiplos buenos tiene la menor cantidad de dígitos? En este artículo mostraremos cómo calcular la cantidad de dígitos de ese menor múltiplo bueno de n.

Para mayor facilidad, mencionaremos algunas notaciones usadas a lo largo de este escrito.

- $a \mid b$ significa que a divide a b, a es divisor de b o que b es múltiplo de a.
- Para cada entero positivo n, $\phi(n)$ denota el número de enteros positivos menores o iguales que n, que son coprimos con n. Por ejemplo, si p es un número primo, es fácil demostrar que $\phi(p) = p - 1$ y $\phi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ para todo entero positivo k.

[2]El teorema de Euler afirma que si a y n son enteros positivos coprimos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

- Si p es un número primo y a es un entero positivo, entonces $\nu_p(a)$ denota al mayor entero no negativo tal que $p^{\nu_p(a)} \mid a$.

Teoría y Ejemplos

Para cada par a y n de enteros positivos coprimos, sea $A(a,n)$ el conjunto de los números naturales k tales que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, esto es,

$$A(a,n) = \left\{k \in \mathbb{N} \mid a^k \equiv 1 \pmod{n}\right\}.$$

Ahora, consideremos la siguiente sucesión de números:

$$a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n, a^{n+1}.$$

Por el principio de las casillas, existen índices $i > j$ tales que $a^i \equiv a^j \pmod{n}$. Como a y n son coprimos, se tiene que $a^{i-j} \equiv 1 \pmod{n}$. Por lo tanto, $i - j$ es un elemento de $A(a,n)$, y en consecuencia, $A(a,n)$ es un conjunto no vacío de números naturales. Luego, $A(a,n)$ tiene un elemento mínimo. A dicho elemento mínimo se le conoce como *orden de a módulo n* y se denota por $ord_n a$.

Teorema 1. *Si a, n y k son enteros positivos tales que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$, entonces $ord_n a \mid k$.*

Demostración. Sea $d = \text{ord}_n a$. Por el algoritmo de la división, existen enteros no negativos q y r tales que $k = dq + r$, donde $0 \leq r < d$. Como $a^d \equiv 1 \pmod{n}$, tenemos que

$$1 \equiv a^k = a^{dq+r} = (a^d)^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}.$$

Si $r > 0$, entonces r es elemento de $A(a,n)$, y como d es el elemento mínimo de $A(a,n)$, tenemos que $d \leq r$. Pero esto es una contradicción, pues $r < d$. Por lo tanto, $r = 0$, y en consecuencia $d \mid k$. ☐

Teorema 2. *Si a y n son enteros positivos coprimos, entonces $ord_n a \mid \phi(n)$.*

Demostración. Si a y n son coprimos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ por el teorema de Euler. Luego, por el Teorema 1, se sigue que $\text{ord}_n a \mid \phi(n)$. ☐

Ejemplo 1. *Encontrar el menor múltiplo de 19 cuyos dígitos son todos iguales a 1.*

Solución. Sea N el menor múltiplo de 19 conformado únicamente por dígitos 1 y sea m la cantidad de dígitos de N. Como $19 \mid 9N$ y $9N = 10^m - 1$, se tiene que $10^m \equiv 1 \pmod{19}$. Luego, $m = \text{ord}_{19} 10$, pues N es mínimo.
Para hallar N, básicamente tenemos que encontrar m, es decir, todo se reduce a calcular el valor de $\text{ord}_{19} 10$. En efecto, por el Teorema 2 tenemos que $\text{ord}_{19} 10 \mid 18$ (pues $\phi(19) = 18$), y, en consecuencia, $\text{ord}_{19} 10 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Como

$$\begin{aligned}
10 - 1 &= 9 \equiv 9 \pmod{19},\\
10^2 - 1 &= 99 \equiv 4 \pmod{19},\\
10^3 - 1 &= 999 \equiv 11 \pmod{19},\\
10^6 - 1 &= 999\,999 \equiv 10 \pmod{19},\\
10^9 - 1 &= 999\,999\,999 \equiv -1 \pmod{19},
\end{aligned}$$

concluimos que $10^m \not\equiv 1 \pmod{19}$ para $m = 1, 2, 3, 6$ y 9. Por lo tanto, $\text{ord}_{19}10 = 18$, y así $N = \underbrace{111\ldots11}_{18 \text{ veces}}$. □

Ejemplo 2. *Hallar el valor de ord*$_{101}2$.

Demostración. Sea $d = \text{ord}_{101}2$. Como 101 es primo, tenemos que $\phi(101) = 100$ y, por el teorema de Euler, $2^{100} \equiv 1 \pmod{101}$. Luego, por el Teorema 1 se sigue que $d \mid 100$, esto es, $d \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. Como $0 < 2^d < 101$ si $d = 1, 2, 4, 5$, se sigue que d no puede ser igual a ninguno de estos números. Además, como

$$\begin{aligned}
2^{10} &\equiv 14 \pmod{101},\\
2^{20} &\equiv 95 \pmod{101},\\
2^{25} &\equiv 10 \pmod{101},\\
2^{50} &\equiv 100 \pmod{101},
\end{aligned}$$

se sigue que d tampoco puede ser igual a $10, 20, 25$ o 50. Por lo tanto, $d = 100$. □

Ejemplo 3. *Encontrar el menor entero positivo n tal que 2^{2016} divide a $17^n - 1$.*

Solución. El problema equivale a determinar el valor de $n = \text{ord}_{2^{2016}}17$. Por el teorema de Euler y el Teorema 1, tenemos que

$$n \mid \phi(2^{2016}) = 2^{2015}.$$

Así, $n = 2^k$, para algún $k \in \{1, 2, 3, \ldots, 2015\}$. Tenemos que $2^{2016} \mid 17^{2^k} - 1$. Notemos lo siguiente:

$$17^{2^k} - 1 = (17 - 1)(17 + 1)(17^2 + 1)\cdots(17^{2^{k-1}} + 1).$$

Buscaremos el exponente de 2 en cada uno de los factores del producto. Como $17 \equiv 1 \pmod 4$, tenemos que $17^{2^i} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$ para todo entero $i \geq 0$. Así, el número $17^{2^i} + 1$ es múltiplo de 2, pero no de 4 para todo entero $i \geq 0$. Por lo tanto, $\nu_2(17^{2^k} - 1) = k + 4$, y en consecuencia, $k + 4 \geq 2016$. Luego, se concluye que $n = 2^{2012}$. □

Ejemplo 4. [*Leningrado, 1990*] *Sea n un entero positivo. Demostrar que $n \mid \phi(a^n - 1)$ para todo entero positivo $a > 1$.*

Demostración. Sea $d = \text{ord}_{(a^n-1)}a$. Como a y $a^n - 1$ son coprimos, por el teorema de Euler tenemos que $a^{\phi(a^n-1)} \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, y por el Teorema 1, $d \mid \phi(a^n - 1)$. Basta demostrar entonces que $d = n$.
Como $a^n \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, el Teorema 1 implica que $d \mid n$, y en consecuencia, $d \leq n$. Si $d < n$, entonces $0 < a^d - 1 < a^n - 1$ y por lo tanto $a^d \not\equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $d = n$. □

Ejemplo 5. [*Putnam, 1972*] *Demostrar que no existe entero $n > 1$ tal que $n \mid (2^n - 1)$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, esto es, que existe un entero $n > 1$ tal que $2^n \equiv 1 \pmod{n}$, y sea k el menor de tales enteros. Es claro que 2 y k son coprimos. Sea $d = \text{ord}_k 2$. Como $2^d \equiv 1 \pmod{k}$ y $k > 1$, se sigue que $d > 1$.
Por otro lado, como $2^k \equiv 1 \pmod{k}$, se tiene que $d \mid k$ por el Teorema 1. Luego, $d \leq k$. Como $2^d \equiv 1 \pmod{k}$ y $d \mid k$, se sigue que $2^d \equiv 1 \pmod{d}$ con $d > 1$. Entonces, por definición de k tenemos que $k \leq d$. Concluimos que $d = k$.
Como 2 y k son coprimos, el Teorema 2 garantiza que $d \mid \phi(k)$, esto es, $k \mid \phi(k)$. Luego, $1 < k \leq \phi(k)$, lo cual es una contradicción, ya que $\phi(i) \leq i - 1$ para todo entero $i > 1$. Por lo tanto, no existe ningún entero $n > 1$ tal que $n \mid (2^n - 1)$. $\square$

Ejemplo 6. *Demostrar que si p es un número primo mayor que 3, entonces cualquier divisor positivo del número*

$$\frac{2^p + 1}{3}$$

es de la forma $2kp + 1$, donde k es un entero no negativo.

Demostración. Sea $p > 3$ un número primo arbitrario y sea $m = \frac{2^p+1}{3}$. Es claro que el número 1 es un divisor positivo de m y es de la forma $2kp + 1$ para algún entero no negativo k, a saber $1 = 2p \cdot 0 + 1$. Como el producto de dos números de la forma $2kp + 1$ es de la misma forma, basta demostrar el resultado para los divisores primos de m.
Como $p > 3$, tenemos que $p \equiv 1 \pmod{6}$ o $p \equiv -1 \pmod{6}$. Si $p \equiv 1 \pmod{6}$, entonces $2^p \equiv 2 \pmod{9}$, pues $2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$. Así, $2^p + 1 \equiv 3 \pmod{9}$. De manera análoga, si $p \equiv -1 \pmod{6}$, entonces $2^p + 1 \equiv -3 \pmod{9}$. Luego, $2^p + 1$ es múltiplo de 3, pero no de 9. De esta manera, todo divisor primo de m es mayor o igual que 5.
Sea q un divisor primo de m y sea $d = \text{ord}_q 2$. Como $\frac{2^p+1}{3} \equiv 0 \pmod{q}$, tenemos que $2^p \equiv -1 \pmod{q}$ y $2^{2p} \equiv 1 \pmod{q}$. Luego, por el Teorema 1, tenemos que $d \mid 2p$. De aquí que $d \in \{1, 2, p, 2p\}$. Como $2^1 \equiv 2 \pmod{q}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{q}$, $2^p \equiv -1 \pmod{q}$ y $q \geq 5$, tenemos que $d \neq 1, 2$ y p. Por lo tanto, $d = 2p$. Aplicando el Teorema 2, se sigue que $2p \mid \phi(q)$ (pues 2 y q son coprimos), esto es, $2p \mid (q - 1)$, ya que q es primo. Concluimos que $q = 2pk + 1$ para algún entero positivo k.
Por lo tanto, cada divisor positivo de m es de la forma $2pk+1$ con k entero no negativo. $\square$

Ejemplo 7. *Demostrar que si p es un número primo mayor que 2, entonces cualquier divisor positivo del número $2^p - 1$ es de la forma $2kp + 1$, donde k es un entero no negativo.*

Demostración. Se deja de ejercicio al lector. $\square$

Ejemplo 8. [*Lista larga, IMO 1985*] *Sea $k \geq 2$ un número entero y sean $n_1, n_2, \ldots, n_k$ enteros positivos tales que*

$$n_1 \mid (2^{n_2} - 1),\ n_2 \mid (2^{n_3} - 1),\ \ldots,\ n_k \mid (2^{n_1} - 1).$$

Demostrar que $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$.

Demostración. Sea $n_{k+1} = n_1$. Si existe i tal que $n_i = 1$, entonces necesariamente $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$. Ahora, supongamos que ninguno de los n_i es igual a 1. Para cada $1 \leqslant i \leqslant k$, sea p_i el menor primo que divide a n_i. Luego, como $2^{n_{i+1}} \equiv 1 \pmod{p_i}$, se tiene que 2 y p_i son coprimos, y por el Teorema 1, $\text{ord}_{p_i} 2 \mid n_{i+1}$. Note que $\text{ord}_{p_i} 2 > 1$. En consecuencia, $p_{i+1} \leq \text{ord}_{p_i} 2$ (si $p_{i+1} > \text{ord}_{p_i} 2$, entonces $\text{ord}_{p_i} 2$ tendría un divisor primo menor que p_{i+1}, y por lo tanto, n_{i+1} tendría un divisor primo menor que p_{i+1}, lo que contradice la definición del primo p_{i+1}). Por otra parte, por el teorema pequeño de Fermat[3] tenemos que $2^{p_i - 1} \equiv 1 \pmod{p_i}$, y por el Teorema 1, se sigue que $\text{ord}_{p_i} 2 \mid (p_i - 1)$. De aquí que $\text{ord}_{p_i} 2 \leq p_i - 1 < p_i$. Por lo tanto, $p_{i+1} < p_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Pero esto es una contradicción, pues se tendría que

$$p_1 > p_2 > \cdots > p_k > p_{k+1} = p_1.$$

Finalmente, concluimos que $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$. □

Ejemplo 9. *Encontrar el menor entero $n > 1$ que no es una potencia de 3 tal que*

$$n \mid (2^n + 1).$$

Solución. Claramente n es impar. Como n no es una potencia de 3, entonces n tiene al menos un factor primo distinto de 3. Supongamos que p es el menor de ellos y sea $d = \text{ord}_p 2$. Como $2^n \equiv -1 \pmod{n}$ y $p \mid n$, tenemos que $2^n \equiv -1 \pmod{p}$, de donde $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$. Luego, por el Teorema 1, $d \mid 2n$.
Si d es impar, entonces $d \mid n$, y como $2^d \equiv 1 \pmod{p}$, concluimos que $2^n \equiv 1 \pmod{p}$. Pero entonces, $-1 \equiv 1 \pmod{p}$, lo cual no puede ser porque $p > 3$. Esto demuestra que d es par, esto es, $d = 2k$ para algún entero positivo k. Tenemos entonces que $2k \mid 2n$, lo que implica que $k \mid n$. Como n es impar, k también es impar. Por otro lado, por el teorema pequeño de Fermat tenemos que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, de modo que por el Teorema 1, $d \mid (p-1)$, esto es, $2k \mid (p-1)$. Como $\frac{p-1}{2}$ es entero, concluimos que k divide a $\frac{p-1}{2}$. Si existe un primo $q \geq 5$ tal que $q \mid k$, entonces $q \mid d$ y en consecuencia, $q \mid n$. Pero también, q divide a $\frac{p-1}{2}$. Luego, $q \leq \frac{p-1}{2} < p$ y $q \mid n$, lo que contradice la definición de p. Esto demuestra que k debe ser una potencia de 3. Analizaremos cuatro casos:

1) Si $k = 3$, entonces $d = 6$ y $2^6 \equiv 1 \pmod{p}$ de donde $p = 7$. Esto quiere decir que $n = 21r$, para algún entero positivo r (pues n es múltiplo de p y de k). Como $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$, tenemos que $-1 \equiv 2^n = 2^{21r} = (2^3)^{7r} \equiv 1 \pmod{7}$, lo cual es un absurdo. Luego, en este caso no existe tal n.

2) Si $k = 9$, entonces $d = 18$ y $2^{18} \equiv 1 \pmod{p}$. Luego, p divide a

$$\begin{aligned} 2^{18} - 1 &= (2^9 + 1)(2^9 - 1) \\ &= (2^3 + 1)(2^6 - 2^3 + 1)(2^3 - 1)(2^6 + 2^3 + 1) = 9 \cdot 57 \cdot 7 \cdot 73 \\ &= 3^3 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 73. \end{aligned}$$

[3] Ver en el apéndice el teorema 2.

Como $p > 3$, se sigue que $p \in \{7, 19, 73\}$.
Si $p = 7$, entonces $n = 7 \cdot 9 \cdot r = 63r$ para algún entero positivo r. Sin embargo, ya que $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, tenemos que $2^{63r} + 1 = (2^3)^{21r} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 7$ para todo entero positivo r. Esto demuestra que $7 \nmid (2^{63r} + 1)$ para todo entero positivo r, de modo que no hay valores de n con $p = 7$.
Si $p = 19$, veamos que $n = 9 \cdot 19 = 171$ sí cumple. Tenemos que $2^3 \equiv -1 \pmod 9$ implica que $2^9 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \pmod 9$ y $2^{9 \cdot 19} + 1 \equiv (-1)^{19} + 1 \equiv 0 \pmod 9$, lo que demuestra que $9 \mid (2^{9 \cdot 19} + 1)$. Además, como $2^9 + 1 = 513 = 19 \cdot 27$ y $2^{19} + 1 \mid (2^{9 \cdot 19} + 1)$, tenemos que $19 \mid (2^{9 \cdot 19} + 1)$. Por lo tanto, $n = 171$ satisface las condiciones del problema.
No estamos interesados en buscar valores de n en el caso $p = 73$, pues si existe algún n que cumpla, este es de la forma $n = 9 \cdot 73r$, para algún entero positivo r, pero $n = 9 \cdot 73r \geq 9 \cdot 73 = 657$, es decir, en este caso los n que cumplen (si los hay) son mayores que 171.

3) Si $k = 27$, entonces $d = 54$ y $2^{54} \equiv 1 \pmod p$. Es claro que $p \neq 2$.
Si $p = 3$, entonces $n = 3 \cdot 27r = 3^4 r$ para algún entero positivo r. Como n no puede ser potencia de 3, se debe tener que $r \geq 2$. Si $r = 2$, entonces $n = 81 \cdot 2 = 3(54)$ y $2^{3(54)} + 1 \equiv (2^3)^{54} + 1 \equiv (-1)^{54} + 1 \equiv 2 \pmod 9$. Esto implica que $n = 3(54)$ no divide a $2^n + 1$. Ahora, si $r > 2$, entonces $n > 81 \cdot 3 = 243 > 171$, de manera que en este caso los n que cumplen (si los hay) son mayores que 171.
Sea $p = 5$. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, lo cual implica que $2^{54} = (2^4)^{13} \cdot 2^2 \equiv 4 \pmod 5$. Esto es una contradicción, pues $2^{54} \equiv 1 \pmod p$. Luego, en este caso, no hay soluciones.
Si $p \geq 7$, entonces $n \geq 27 \cdot 7 = 189 > 171$.

4) Si $k = 3^i$ para algún entero $i \geqslant 4$, entonces $k \geq 3^4$ y $p \geq 5$, de modo que por ser coprimos k y p, y ambos divisores de n, tenemos que $n \geq kp \geq 3^4 \cdot 5 = 405 > 171$.

Por lo tanto, concluimos que el menor valor que puede tomar n es $9 \cdot 19 = 171$. $\square$

Ejemplo 10. [*Selectivo Brasil, Cono Sur 2002*] *Encontrar el periodo en la representación decimal de*
$$\frac{1}{3^{2002}}.$$

Solución. Para cada entero $n \geqslant 1$, sea $d_n = \operatorname{ord}_{3^n} 10$. Notemos que d_n es impar, pues si d_n fuera par, entonces como $\operatorname{mcd}(3, 10^{\frac{d_n}{2}} + 1) = 1$, se tendría que

$$\begin{aligned}
10^{d_n} &\equiv 1 \pmod{3^n},\\
\left(10^{\frac{d_n}{2}} + 1\right)\left(10^{\frac{d_n}{2}} - 1\right) &\equiv 0 \pmod{3^n},\\
\left(10^{\frac{d_n}{2}} - 1\right) &\equiv 0 \pmod{3^n},\\
10^{\frac{d_n}{2}} &\equiv 1 \pmod{3^n},
\end{aligned}$$

lo que contradice la minimalidad de d_n.
Es claro que $d_1 = 1$. Demostraremos que $d_n = 3^{n-2}$ y $\nu_3(10^{d_n} - 1) = n$ para todo entero $n \geqslant 2$ por inducción sobre n. En efecto, tenemos que $d_2 = 3^0$ y $\nu_3(10^{d_2} - 1) =$

2. Supongamos que existe un entero $k \geq 2$ tal que $d_k = 3^{k-2}$ y $\nu_3(10^{d_k} - 1) = k$. Observemos que

$$10^{d_{k+1}} \equiv 1 \pmod{3^{k+1}} \Longrightarrow 10^{d_{k+1}} \equiv 1 \pmod{3^k}.$$

Luego, por el Teorema 1, $3^{k-2} \mid d_{k+1}$; y por el Teorema 2, $d_{k+1} \mid \phi(3^{k+1})$, esto es, $d_{k+1} \mid 2 \cdot 3^k$. Como d_{k+1} es impar, se sigue que $d_{k+1} \mid 3^k$, lo que significa que d_{k+1} es una potencia de 3. Tenemos entonces que $3^{k-2} \leq d_{k+1} \leq 3^k$ con d_{k+1} una potencia de 3. Por lo tanto, $d_{k+1} = 3^i$ para algún $i \in \{k-2, k-1, k\}$. Pero $d_{k+1} = 3^{k-2}$ no puede ocurrir, pues

$$\nu_3(10^{d_k} - 1) = \nu_3(10^{3^{k-2}} - 1) = k < k + 1.$$

Esto quiere decir que $d_{k+1} \geq 3^{k-1}$.
Ahora, como $10^{3^{k-1}} - 1 = \left(10^{3^{k-2}} - 1\right)\left(10^{2\cdot 3^{k-2}} + 10^{3^{k-2}} + 1\right)$, tenemos que

$$\nu_3(10^{3^{k-1}} - 1) = \nu_3(10^{3^{k-2}} - 1) + \nu_3(10^{2\cdot 3^{k-2}} + 10^{3^{k-2}} + 1)$$

y por la hipótesis de inducción, se sigue que $\nu_3(10^{3^{k-1}} - 1) = k + 1$ (observe que $\nu_3(10^{2\cdot 3^{k-2}} + 10^{3^{k-2}} + 1) = 1$ ya que $10^{2\cdot 3^{k-2}} + 10^{3^{k-2}} + 1$ es múltiplo de 3 pero no de 9).
Por lo tanto, $d_{k+1} = 3^{k-1}$ y $\nu_3(10^{d_{k+1}} - 1) = k + 1$, quedando completa la inducción.
En particular, la respuesta al problema es $d_{2002} = 3^{2000}$. □

Ejemplo 11. *Demostrar que el número $3^n - 2^n$ no es divisible por n para todo entero $n \geqslant 2$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, y sea $n \geq 2$ el menor entero tal que n divide a $3^n - 2^n$. Es claro que n es coprimo con 2 y 3. Luego, existe un entero a tal que $2a \equiv 1 \pmod{n}$, de donde a y n también son coprimos. De aquí que,

$$3^n \equiv 2^n \pmod{n} \Longleftrightarrow (3a)^n \equiv 1 \pmod{n}.$$

Sea $d = \text{ord}_n 3a$. Por el Teorema 1, tenemos que $d \mid n$.
Por otro lado, el teorema de Euler implica que $3^{\phi(n)} \equiv 2^{\phi(n)} \pmod{n}$, esto es, $(3a)^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. Nuevamente por el Teorema 1, tenemos que $d \mid \phi(n)$, de donde $d \leq \phi(n) \leq n - 1 < n$ (observe que $\phi(n) \leq n - 1$ ya que $n \geq 2$).
Como $3^d \equiv 2^d \pmod{n}$ (pues $(3a)^d \equiv 1 \pmod{n}$) y $d \mid n$, tenemos que $3^d \equiv 2^d \pmod{d}$. Notemos que d no puede ser 1, pues de lo contrario se tendría que $n \mid (3 - 2)$ y $n \geq 2$. Por lo tanto, $2 \leqslant d < n$ y $3^d \equiv 2^d \pmod{d}$, lo que contradice la minimalidad de n. En conclusión, no existe tal n. □

Ejemplo 12. *Demostrar que*

(a) $\text{ord}_{3^n} 2 = 2 \cdot 3^{n-1}$.

(b) Si $2^m \equiv -1 \pmod{3^n}$*, entonces* $3^{n-1} \mid m$.

Demostración. Comenzamos demostrando el siguiente lema.

Lema. Para cada entero positivo n, se cumple que $\nu_3(2^{3^n}+1)=n+1$.

Prueba. La prueba la haremos por inducción en n. En efecto, si $n=1$ el resultado es inmediato, pues $\nu_3(2^{3^1}+1)=\nu_3(9)=2$. Supongamos que $\nu_3(2^{3^k}+1)=k+1$ para algún entero positivo k.
Como $2^{3^{k+1}}+1=(2^{3^k}+1)(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1)$, tenemos que

$$\nu_3(2^{3^{k+1}}+1)=\nu_3(2^{3^k}+1)+\nu_3(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1). \qquad (1)$$

Es fácil ver que $2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1$ es múltiplo de 3, pero no es múltiplo de 9, pues $2^{3^k}=8^{3^{k-1}}\equiv -1 \pmod 9$, y en consecuencia,

$$2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1\equiv(-1)^2-(-1)+1\equiv 3 \pmod 9.$$

Por lo tanto, $\nu_3(2^{2\cdot 3^k}-2^{3^k}+1)=1$, y por la hipótesis de inducción y la relación (1) se tiene que

$$\nu_3(2^{3^{k+1}}+1)=(k+1)+1=k+2.$$

Esto completa la inducción. $\square$

(a) Sea $d=\text{ord}_{3^n}2$. Por el Teorema 2 tenemos que $d\mid\phi(3^n)$, esto es, $d\mid 2\cdot 3^{n-1}$. Luego, existe un entero i tal que $d=3^i$ o $d=2\cdot 3^i$, con $1\le i\le n-1$.
Por el lema anterior, tenemos que $2^{3^n}\equiv -1 \pmod{3^{n+1}}$ para todo entero positivo n. En particular, $2^{3^i}\equiv -1 \pmod{3^i}$ para $1\le i\le n-1$. Luego, $d\neq 3^i$. Entonces, $d=2\cdot 3^i$ para algún $1\le i\le n-1$, y por lo tanto, $\nu_3(2^{2\cdot 3^i}-1)\geqslant n$. Esto es, $\nu_3(2^{3^i}+1)+\nu_3(2^{3^i}-1)\ge n$. Por el lema anterior, tenemos que $\nu_3(2^{3^i}+1)=i+1$; y como 3 no divide a $2^{3^i}-1$, tenemos que $\nu_3(2^{3^i}-1)=0$. Luego, $i+1\ge n$ de donde $i\ge n-1$. Concluimos que $i=n-1$. Así, $d=2\cdot 3^{n-1}$.

(b) Si $2^m\equiv -1 \pmod{3^n}$, entonces $2^{2m}\equiv 1 \pmod{3^n}$. Luego, el Teorema 1 y el inciso anterior, implican que $\text{ord}_{3^n}2=2\cdot 3^{n-1}$ divide a $2m$. Por lo tanto, $3^{n-1}\mid m$.

$\square$

Ejemplo 13. [*Bulgaria, 1997*] *Determinar todos los enteros positivos* $m\ge 2$ *y* $n\ge 2$, *tales que*

$$\frac{1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}}{n}$$

es un número entero.

Solución. Claramente n es impar, $\text{mcd}(m,n)=1$ y $n\geqslant 3$. Supongamos que $n=3$. Como m y n son coprimos, tenemos que $m\equiv 1$ o $-1 \pmod 3$. Si $m\equiv -1 \pmod 3$, entonces

$$1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}\equiv 1-1+1\equiv 1 \pmod 3,$$

lo que significa que $n=3$ no divide a $1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}$. Luego, $m\equiv 1 \pmod 3$ y $1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}\equiv 1+1+1\equiv 0 \pmod 3$. Por lo tanto, las parejas de la forma

$(m,n) = (3k+1, 3)$, con k entero positivo, satisfacen la condición del problema.
Supongamos que $n > 3$ y sea $d = \text{ord}_n m$. Es claro que $d > 1$. Como

$$1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n} = \frac{m^{3^{n+1}} - 1}{m^{3^n} - 1}$$

y n debe dividir a $1+m^{3^n}+m^{2\cdot 3^n}$, se sigue que n divide a $m^{3^{n+1}}-1$, esto es, $m^{3^{n+1}} \equiv 1 \pmod{n}$. Luego, por el Teorema 1, tenemos que $d \mid 3^{n+1}$. En consecuencia, $d = 3^i$ para algún entero i con $1 \le i \le n+1$. Si $i \le n$, entonces $m^{3^n} \equiv 1 \pmod{n}$, y en consecuencia $0 \equiv 1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n} \equiv 3 \pmod{n}$, lo cual es imposible ya que $n > 3$. Por lo tanto, $i = n+1$. Pero por el Teorema 2, tenemos que $d = 3^{n+1}$ divide a $\phi(n)$, lo cual implica que $3^{n+1} \le \phi(n) \le n-1$. Esto es una contradicción, ya que $3^{n+1} \ge n+3$ para todo entero $n \ge 0$. Por lo tanto, no existen enteros m y n que satisfagan las condiciones del problema si $n > 3$.
Concluimos que los pares que cumplen son $(m,n) = (3k+1, 3)$ con k entero positivo. $\square$

Ejemplo 14. *Demostrar que si p es un número primo, entonces $p^p - 1$ tiene un factor de la forma $pk+1$, donde k es un entero positivo.*

Demostración. Sea q un divisor primo de $\frac{p^p-1}{p-1}$ (tal divisor existe ya que $\frac{p^p-1}{p-1}$ es un entero mayor que 1). Entonces, $p^p \equiv 1 \pmod{q}$, y por el Teorema 1, $\text{ord}_q p \mid p$, lo cual implica que $\text{ord}_q p = 1$ o p.

Si $\text{ord}_q p = 1$, entonces $p \equiv 1 \pmod{q}$. Luego, $\displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} p^i \equiv p \pmod{q}$. Pero, como

$$\sum_{i=0}^{p-1} p^i = \frac{p^p - 1}{p-1} \equiv 0 \pmod{q},$$

se sigue que $p \equiv 0 \pmod{q}$. Así, $1 \equiv 0 \pmod{q}$ lo cual es imposible.
Por lo tanto, $\text{ord}_q p = p$, y por el Teorema 2, p divide a $\phi(q) = q-1$, esto es, $q \equiv 1 \pmod{p}$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Ejemplo 15. *Para cada entero no negativo n, sea $F_n = 2^{2^n} + 1$.*

(a) Demostrar que cualquier divisor positivo de F_n es de la forma $2^{n+1}k + 1$ donde k es un entero no negativo.

(b) Demostrar que para cada entero $n \ge 1$ hay una infinidad de números primos de la forma $2^n k + 1$ con k entero positivo.

Demostración.

(a) Sean n un entero no negativo y p un divisor primo de F_n. Como $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$, tenemos que $p > 2$ y $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Luego, por el Teorema 1, $\text{ord}_p 2 \mid 2^{n+1}$, esto es, existe un entero positivo k tal que $\text{ord}_p 2 = 2^k$ con $k \le n+1$. Si $k \leqslant n$, entonces

$$2^{2^k} \equiv 1 \pmod{p} \Longrightarrow -1 \equiv 2^{2^n} \equiv (2^{2^k})^{2^{n-k}} \equiv 1 \pmod{p} \Longrightarrow p = 2,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $k = n+1$, y por el Teorema 2, $\text{ord}_p 2 \mid \phi(p)$, esto es, $2^{n+1} \mid (p-1)$. Por lo tanto, $p = 2^{n+1}k+1$ para algún entero positivo k.
Ahora, sea d un divisor de F_n. Si $d = 1$, tenemos que $1 = 2^{n+1} \cdot 0 + 1$. Si $d > 1$, entonces d es producto de números primos de la forma $2^{n+1}k + 1$, donde k es un entero positivo. Por lo tanto, cualquier divisor positivo de F_n se puede expresar de la forma pedida.

(b) Sean n un entero positivo fijo y r un entero tal que $r \geq n-1$. Tomemos el menor divisor primo de F_r, digamos q_r. Por la parte (a) sabemos que $q_r \equiv 1 \pmod{2^{r+1}}$, y como $r+1 \geq n$, en particular tenemos que $q_r \equiv 1 \pmod{2^n}$. Es conocido que si $i \neq j$, entonces F_i y F_j son coprimos[4]. Luego, cada número de la lista infinita

$$F_r, F_{r+1}, F_{r+2}, \ldots$$

tiene un divisor primo de la forma $2^n k + 1$ que no divide a ningún otro número de la lista, de donde se sigue el resultado.

$\square$

Ejemplo 16. [*Bulgaria, 1995*] *Determinar todos los pares de números primos* (p, q) *tales que el número*

$$\frac{2^p + 2^q}{pq}$$

es entero.

Solución. Sean p y q números primos tales que $2^p + 2^q \equiv 0 \pmod{pq}$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $p \leqslant q$. Si $p = 2$, entonces $2q \mid (2^2 + 2^q)$, esto es, $q \mid (2 + 2^{q-1})$. Es claro que $q = 2$ satisface esta relación de divisibilidad, y por consiguiente, el par $(p, q) = (2, 2)$ es una solución. Si $q > 2$, entonces por el teorema pequeño de Fermat tenemos que $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, lo cual implica que

$$2 + 2^{q-1} \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod{q}.$$

Como $2 + 2^{q-1} \equiv 0 \pmod{q}$, se sique que $3 \equiv 0 \pmod{q}$, y por lo tanto $q = 3$. De aquí que el par $(p, q) = (2, 3)$ también es solución.
Supongamos que $p > 2$. Sean $a = \text{ord}_q 2$ y $b = \text{ord}_p 2$.
Nuevamente, por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que

$$0 \equiv 2^p + 2^q \equiv 2^p + 2 \pmod{q} \Longrightarrow 2^{p-1} \equiv -1 \pmod{q} \Longrightarrow 2^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod{q}.$$

Luego, por el Teorema 1, tenemos que $a \mid 2(p-1)$, y en consecuencia,

$$\nu_2(a) \leq \nu_2(2(p-1)) = \nu_2(p-1) + 1.$$

[4] Se puede demostrar por inducción, que para cada entero $n \geq 1$, $F_n = F_0 \cdots F_{n-1} + 2$, lo cual implica que $F_k \mid (F_n - 2)$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. De aquí que si p es un divisor primo de F_k y F_n, entonces $p \mid 2$, y por lo tanto $p = 2$. Pero esto es una contradicción, pues F_n es impar por definición. Esto muestra que para cada entero $n \geq 1$, F_n y F_k son coprimos para cada $k = 0, 1, \ldots, n-1$. De aquí se sigue que si $i \neq j$, entonces F_i y F_j son coprimos. A los números F_n se les conoce como *números de Fermat*.

Si $\nu_2(a) \leqslant \nu_2(p-1)$, entonces la mayor potencia de 2 que divide al entero a, también divide a $p-1$. Además, como $a \mid 2(p-1)$, la mayor potencia de cada primo impar que divide al entero a divide también a $p-1$, pues tales potencias son coprimos con 2. Luego, $a \mid (p-1)$. Esto implica que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$, de donde $q > 2$. Esto contradice que $2^{p-1} \equiv -1 \pmod{q}$, pues tendríamos que $1 \equiv -1 \pmod{q}$ con $q > 2$. Por lo tanto, $\nu_2(a) = \nu_2(p-1)+1$. Por el Teorema 2 tenemos que $a \mid (q-1)$, lo cual implica que $\nu_2(a) \leq \nu_2(q-1)$. De esta manera, tenemos que $\nu_2(p-1)+1 \leq \nu_2(q-1)$. Haciendo un razonamiento análogo módulo p, obtenemos que $\nu_2(q-1)+1 \leqslant \nu_2(p-1)$. Por lo tanto, $\nu_2(q-1)+1 \leqslant \nu_2(p-1) \leqslant \nu_2(q-1)-1$, que es una contradicción. Esto demuestra que no hay soluciones si $p > 2$.
Concluimos que las soluciones (p,q) con $p \leq q$ son $(2,2)$ y $(2,3)$. De manera análoga, las soluciones (p,q) con $p \geq q$ son $(2,2)$ y $(3,2)$. $\square$

Ejemplo 17. [*Vietnam, 1997*] *Demostrar que para cada entero positivo n existe un entero positivo k tal que $19^k - 97$ es múltiplo de 2^n.*

Demostración. Si $n = 1, 2$ o 3, y $k = 2$, tenemos que $19^2 - 97 = 264 = 8 \cdot 33$ es múltiplo de 2, 2^2 y 2^3.
Supongamos que $n \geq 3$. Demostraremos que $\operatorname{ord}_{2^n} 19 = 2^{n-2}$. Observemos que

$$\begin{aligned} 19^{2^{n-2}} - 1 &= (19-1)(19^{2^0}+1)(19^{2^1}+1)\cdots(19^{2^{n-3}}+1), \\ &= 2^3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot (19^{2^1}+1)(19^{2^2}+1)\cdots(19^{2^{n-3}}+1). \end{aligned}$$

Como $19 \equiv 3 \pmod{4}$, tenemos que $19^2 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$ y

$$19^{2^i} + 1 = (19^2)^{2^{i-1}} + 1 \equiv 1^{2^{i-1}} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}.$$

para todo entero $i \geq 1$. Luego, $2^2 \nmid 19^{2^i} + 1$ para todo entero $i \geq 1$. Esto significa que $\nu_2(19^{2^{n-2}} - 1) = n$ para todo entero $n \geq 3$. En particular, tenemos que $19^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$, y por el Teorema 1, $\operatorname{ord}_{2^n} 19 \mid 2^{n-2}$. De aquí que $\operatorname{ord}_{2^n} 19 = 2^r$ para algún entero $r \leq n-2$. Es fácil ver que $r > 0$. Además,

$$19^{2^r} \equiv 1 \pmod{2^n} \Longrightarrow 19^{2^{r+1}} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}},$$

pues en general, es un ejercicio demostrar que si $a \equiv b \pmod{2^n}$, entonces $a^2 \equiv b^2 \pmod{2^{n+1}}$.
Luego, si $r \leq n-3$, entonces $r+1 \leq n-2$ y

$$19^{2^{r+1}} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}} \Longrightarrow 19^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}},$$

lo que contradice que $\nu_2(19^{2^{n-2}} - 1) = n$. Por lo tanto, $r = n-2$ y $\operatorname{ord}_{2^n} 19 = 2^{n-2}$.
Regresando al problema, procederemos por inducción en n. El caso $n = 3$ ya se hizo antes. Supongamos que para algún entero $n \geq 3$, existe un entero positivo k tal que $19^k \equiv 97 \pmod{2^n}$. Como $19^{2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^n}$, se sigue que $19^{k+2^i} \equiv 97 \pmod{2^n}$, para todo entero $i \geqslant n-2$. En particular, para $i = n-2$ e $i = n-1$, tenemos que

$$19^{k+2^{n-2}} - 97 \equiv 0 \pmod{2^n} \text{ y } 19^{k+2^{n-1}} - 97 \equiv 0 \pmod{2^n},$$

las cuales implican[5] que

$$19^{k+2^{n-2}} - 97 \equiv 0 \text{ o } 2^n \pmod{2^{n+1}} \text{ y } 19^{k+2^{n-1}} - 97 \equiv 0 \text{ o } 2^n \pmod{2^{n+1}}.$$

Supongamos que $19^{k+2^{n-2}} - 97 \equiv 19^{k+2^{n-1}} - 97 \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$. Entonces, $19^{2^{n-1}-2^{n-2}} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$ y por el Teorema 1, $\text{ord}_{2^{n+1}}19 \mid (2^{n-1}-2^{n-2})$, esto es, $2^{n-1} \mid (2^{n-1}-2^{n-2})$. Pero esto implica que $2^{n-1} \mid 2^{n-2}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $19^{k+2^{n-2}} \equiv 97 \pmod{2^{n+1}}$ o $19^{k+2^{n-1}} \equiv 97 \pmod{2^{n+1}}$, lo cual completa la inducción. $\square$

Ejemplo 18. [*Colombia, 2009*] *Determinar todas las ternas* (a, b, n) *de enteros positivos tales que*

$$a^b = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n.$$

Solución. Si $b = 1$, entonces $a = n + 1$. Luego, en este caso las soluciones son las ternas de la forma $(n + 1, 1, n)$, donde n es un entero positivo.
Si $b \geq 2$, consideremos el menor número primo q que divide a b. Tenemos entonces que $a^b \equiv 1 \pmod{q}$, lo cual implica que a y q son coprimos. Luego, por el Teorema 2 se sigue que $\text{ord}_q a \mid \phi(q)$ y por el Teorema 1, tenemos que $\text{ord}_q a \mid b$. Como q es el menor divisor primo de b, resulta que $\text{ord}_q a$ y $\phi(q) = q-1$ son coprimos. Así, tenemos que $\text{ord}_q a = 1$ y, por lo tanto, $a \equiv 1 \pmod{q}$.
Por otra parte, podemos escribir b en la forma $b = q^k M$ con k entero positivo y $\text{mcd}(M, q) = 1$. Notemos que

$$a^b - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) = b(1 + b + b^2 + \cdots + b^{n-1}), \qquad (2)$$

lo cual implica que $\nu_q(a^b - 1) = \nu_q(b) = k$.
De (2) tenemos también que $a^b \equiv 1 \pmod{b}$, de donde $a^b \equiv 1 \pmod{q^k}$. Nuevamente por el Teorema 2, tenemos que $\text{ord}_{q^k} a \mid \phi(q^k)$ y por el Teorema 1, tenemos que $\text{ord}_{q^k} a \mid b$. Como $\text{ord}_{q^k} a$ y $q - 1$ son coprimos (pues $\text{ord}_q a$ y $q - 1$ son coprimos), y $\phi(q^k) = q^{k-1}(q - 1)$, resulta que $\text{ord}_{q^k} a = q^m$ para algún entero m con $1 \leq m \leq k - 1$.
Entonces,

$$E = \frac{a^b - 1}{a^{q^m} - 1} = \frac{(a^{q^m})^{q^{k-m}M} - 1}{a^{q^m} - 1} = 1 + a^{q^m} + (a^{q^m})^2 + \cdots + (a^{q^m})^{q^{k-m}M-1}.$$

Como $a \equiv 1 \pmod{q}$, se sigue que

$$E \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{q^{k-m}M} \equiv q^{k-m}M \equiv 0 \pmod{q},$$

pues $k - m \geq 1$. Esto es, $q \mid E$ y así, $\nu_q(E) \geq 1$.
Como $a^b - 1 = (a^{q^m} - 1)E$, tenemos que $\nu_q(a^b - 1) = \nu_q(a^{q^m} - 1) + \nu_q(E) \geq k+1$, lo que es una contradicción. Esto demuestra que no hay soluciones si $b \geq 2$.
Finalmente, se concluye que las soluciones son las ternas de la forma $(n + 1, 1, n)$, donde n es cualquier entero positivo. $\square$

[5] Si a es un entero tal que $a \equiv 0 \pmod{2^n}$, es fácil demostrar que $a \equiv 0 \text{ o } 2^n \pmod{2^{n+1}}$.

Ejemplo 19. [*APMO, 2016*] *Un entero positivo se llama* alegre *si puede expresarse en la forma* $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}$ *donde* $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ *son enteros no negativos no necesariamente distintos.*
Determinar el menor entero positivo n *tal que ningún múltiplo de* n *es un número alegre.*

Solución. En primer lugar probaremos que si $n < 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{100}$, entonces n es alegre. En efecto, como $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{100}$ es el primer entero positivo que se puede expresar como la suma de 101 potencias distintas de 2 (incluyendo al 1), entonces al escribir a n en base 2, tendrá a lo más 100 cifras, esto es, $n = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \cdots + 2^{x_k}$, donde $k \leq 100$ y $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq 100$.
Si t es un entero positivo, entonces $2^t = 2^{t-1} + 2^{t-1}$, esto es, lo podemos escribir como suma de dos potencias de 2. Consideremos el número

$$n \cdot 2^{100} = 2^{100+x_1} + 2^{100+x_2} + \cdots + 2^{100+x_k}.$$

No es difícil darse cuenta que 2^{100+x_k} lo podemos escribir como suma de exactamente $101 - k$ potencias de 2. Por lo tanto, $n \cdot 2^{100}$ es alegre.
Demostraremos que $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{100} = 2^{101} - 1$ es el mínimo entero positivo tal que todos sus múltiplos no son alegres. En efecto, como $2^{101} \equiv 1 \pmod{2^{101} - 1}$, el Teorema 1 implica que $\text{ord}_{2^{101}-1} 2 \mid 101$, de modo que la única posibilidad es $\text{ord}_{2^{101}-1} 2 = 101$, ya que 101 es primo.
Es fácil ver que los posibles residuos distintos para una potencia de 2 módulo $2^{101} - 1$ son: $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{100}$.
Ahora, supongamos que existe un entero positivo k tal que $(2^{101} - 1)k$ es alegre, esto es, existen $w \leqslant 100$ y $y_1 < y_2 < \cdots < y_w$ tales que

$$(2^{101} - 1)k = 2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_w},$$

y consideremos que k es tal que $y_1 + y_2 + \cdots + y_w$ es mínimo. Como $2^{101} - 1$ divide a $2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_w}$, resulta que $2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_w} \geq 2^{101} - 1$. Esto nos dice que existe un entero j, con $1 \leqslant j \leqslant w$, tal que $y_j > 100$, pues de lo contrario $2^{y_1} + 2^{y_2} + \cdots + 2^{y_w} \leqslant 2^1 + \cdots + 2^{100} = 2^{101} - 2$, lo cual es una contradicción.
Por el algoritmo de la división, para cada $i = 1, 2, \ldots, w$, existen enteros no negativos q_i y r_i tales que $y_i = 101q_i + r_i$, con $0 \leqslant r_i < 101$. Por lo tanto,

$$2^{y_i} \equiv (2^{101})^{q_i} \cdot 2^{r_i} \equiv 2^{r_i} \pmod{2^{101} - 1}.$$

En consecuencia, $2^{101} - 1 \mid 2^{r_1} + 2^{r_2} + \cdots + 2^{r_w}$, lo cual implica que $y_1 + y_2 + \cdots + y_w \leqslant r_1 + r_2 + \cdots + r_w$, pues $y_1 + y_2 + \cdots + y_w$ es mínimo. Pero como existe j tal que $y_j > 100$, entonces

$$\sum_{s=1}^{w} y_s = 101 \sum_{s=1}^{w} q_s + \sum_{s=1}^{w} r_s > \sum_{s=1}^{w} r_s,$$

lo que es una contradicción.
Finalmente, se concluye que el mínimo número buscado es $2^{101} - 1$. $\square$

Ejemplo 20. [*APMO, 2015*] *Una sucesión de números reales $a_0, a_1, \dots$ es llamada* buena *si cumple las siguientes tres condiciones:*

- *El valor de a_0 es un entero positivo.*
- *Para cada entero no negativo i, se tiene $a_{i+1} = 2a_i + 1$ o $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{a_i + 2}$.*
- *Existe un entero positivo k tal que $a_k = 2014$.*

Determinar el menor entero positivo n tal que existe una sucesión buena $a_0, a_1, \dots$ de números reales con la propiedad de que $a_n = 2014$.

Solución. Para mayor comodidad y entendimiento, definamos $w(\frac{a}{b}) = a+b$ para todas las fracciones irreducibles $\frac{a}{b}$.
Como a_0 es un entero positivo, ningún otro término de la sucesión es negativo, 0 o 1. Si el siguiente término de a_i es $2a_i + 1$ diremos que se aplicó el paso (1), y si es $\frac{a_i}{a_i+2}$ diremos que se aplicó el paso (2). Sea $i \geq 1$. Notemos que si $a_i > 1$, entonces al término a_{i-1} se le ha tenido que aplicar el paso (1), pues si se hubiera aplicado el paso (2), a_i sería menor que 1. Si $0 < a_i < 1$, entonces al término a_{i-1} se le aplicó el paso (2), pues si se le hubiera aplicado el paso (1), entonces $2a_{i-1} + 1 = a_i$, y en consecuencia $2a_{i-1} = a_i - 1 < 0$, lo cual no puede ocurrir.
Supongamos que $j \geq 1$ y $a_j = \frac{p}{q}$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$. Si $p > q$, entonces $a_{j-1} = \frac{p-q}{2q}$; y si $p < q$, entonces $a_{j-1} = \frac{2p}{q-p}$. Pero en ambos casos, como p y q son coprimos, el numerador y el denominador de a_{j-1} también son coprimos. Además, es claro que $w(a_i) = w(a_{i-1}) = p + q$.
Ya que la sucesión es buena, existe un entero positivo k tal que $a_k = 2014 = \frac{2014}{1}$, y consideremos al menor de tales enteros k. Observe que $w(a_k) = 2015$. Si encontramos el valor irreducible de los términos $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0$, se tendrá que

$$2015 = w(a_k) = w(a_{k-1}) = \cdots = w(a_1) = w(a_0).$$

Supongamos que $a_1 = \frac{m}{n}$, con m y n coprimos. Si $m > n$, entonces $a_0 = \frac{m-n}{2n}$ y $w(a_0) = (m - n) + 2n = m + n = 2015$, de donde se puede observar que $m - n$ es impar. Como a_0 es entero, entonces $2n \mid m - n$, pero esto es imposible, pues $m - n$ es impar. Con esto se deduce que $a_0 = \frac{2m}{n-m}$, y como a_0 es entero, se tiene que $n - m \mid 2m$, pero ya que $n - m$ es impar, se tiene que $n - m \mid m$, y usando que m y n son coprimos se llega a que $n - m = 1$, pero como $n + m = 2015$, entonces $n = 1008$ y $m = 1007$. Así, $a_0 = 2014$.
Por otro lado, si $j \geq 1$ y $a_j = \frac{p}{q}$, con p y q coprimos, se sabe que el numerador de a_{j-1} es $p - q$ o $2p$, pero como $p - q \equiv 2p \pmod{2015}$, entonces el numerador de a_{j-1} siempre es congruente con el doble del numerador de a_j módulo 2015.
Luego, como el numerador de a_0 es 2014 y el numerador de a_k es 2014, entonces $2014 \cdot 2^k \equiv 2014 \pmod{2015}$, de donde $2^k \equiv 1 \pmod{2015}$. Como k es el menor posible, entonces $k = \text{ord}_{2015}2$.
Para calcular el valor de $\text{ord}_{2015}2$, primero notemos que $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Es fácil calcular que $\text{ord}_5 2 = 4$, $\text{ord}_{13} 2 = 12$ y $\text{ord}_{31} 2 = 5$. Como $2^k \equiv 1 \pmod{5}$, $2^k \equiv 1 \pmod{13}$ y $2^k \equiv 1 \pmod{31}$, tenemos que k es divisible por 4, 12 y 5, esto es, k es divisible por $\text{mcm}(4, 12, 5) = 60$. Luego, al verificar que $2^{60} \equiv 1 \pmod{2015}$, se concluye que $k = \text{ord}_{2015}2 = 60$. $\square$

Ejercicios

1) Determine el menor factor primo del número $12^{2^{15}} + 1$.

2) Sea $k \geqslant 2$ un número entero. Pruebe que existen infinitos números compuestos n tales que $n \mid (a^{n-k} - 1)$ para cualquier entero positivo a coprimo con n.

3) [*Selectivo Perú, Ibero 2010*] Determine el menor entero $k > 1$ para el cual $n^k - n$ es múltiplo de 2010 para todo entero positivo n.

4) Pruebe que si p es un número primo de la forma $4k + 3$, entonces $2p + 1$ también es primo si y solo si $2p + 1$ divide a $2^p - 1$.

5) [*IMO, 1990*] Encuentre todos los enteros $n > 1$ tales que $\dfrac{2^n + 1}{n^2}$ es un número entero.

6) [*Selectivo EUA, IMO 2003*] Determine todas las ternas (p, q, r) de números primos tales que $p \mid (q^r + 1)$, $q \mid (r^p + 1)$ y $r \mid (p^q + 1)$.

7) [*Selectivo China, IMO 2005*] Pruebe que para todo entero $n > 2$, el mayor factor primo de $2^{2^n} + 1$ es mayor o igual que $n \cdot 2^{n+2} + 1$.

8) Encuentre todos los números primos p y q tales que $p^2 + 1$ divide a $2003^q + 1$ y $q^2 + 1$ divide a $2003^p + 1$.

9) Para cada número primo p, sea $f_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$. Demuestre que

   (a) Si m es un entero positivo tal que $p \mid m$, entonces $f_p(m)$ es coprimo con $m(m-1)$.

   (b) Hay una infinidad de enteros positivos n tales que $pn + 1$ es un número primo.

10) [*Selectivo Irán, IMO 2009*] Sea a un entero positivo fijo, y sea A el conjunto de todos los números primos que dividen a alguno de los términos de la secuencia $(a_n)_{n\geqslant 1}$ definida por $a_n = 2^{2^n} + a$ para $n \geqslant 1$. Demuestre que A es infinito.

11) Sea $n > 1$ un número entero. Pruebe que $2^{n-1} \not\equiv -1 \pmod{n}$.

12) [*IMO, 2003*] Sea p un número primo. Demuestre que existe un número primo q tal que, para todo entero n, el número $n^p - p$ no es divisible por q.

Bibliografía

1. TITU ANDREESCU, DORIN ANDRICA, *Number Theory*, Structures, Examples, and Problems.

2. TITU ANDREESCU, GABRIEL DOSPINESCU, *Problems From The Book*.

3. ARTHUR ENGEL, *Problems Solving Strategies*.

4. XIONG BIN, LEE PENG YEE, *Mathematical Olympiad in China*.

5. PIERRE BORNSZTEIN, XAVIER CARUSO, PIERRE NOLIN, MEHDI TIBOUCHI, *Cours d-arithmétique*, Première Partie.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2016.
Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Considera el conjunto de números $A = \{101, 102, 103, \ldots, 120\}$.

a) Muestra que no hay dos números distintos en A cuyo producto sea un cuadrado perfecto.

b) Muestra que hay al menos 16 formas distintas de escoger cuatro números de A de modo que su producto sea un número de la forma $a^2 - 5a + 4$ para a entero.

Problema 2. Sean ABC un triángulo y M el punto medio de BC. Se considera un punto P sobre AM y se denotan por Q y R a las intersecciones de BP con CA y CP con AB, respectivamente. Demuestra que QR es paralela a BC.

Problema 3. ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos se pueden formar a partir del conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$ de tal manera que 4 sea un factor del producto de los tres números en el subconjunto?

Problema 4. Considera un cuadrado $ABCD$ con lados de longitud 1 y cuatro puntos arbitrarios M, N, P y Q sobre sus lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestra que

$$\sqrt{(MBN)} + \sqrt{(NPC)} + \sqrt{(PDQ)} + \sqrt{(QAM)} \leq \sqrt{2},$$

donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos. Demuestra que

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Problema 6. Sea S un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 998, 999, 1000\}$ tal que la suma de cualesquiera dos elementos distintos de S no está en S. ¿Cuál es la máxima cantidad de elementos que puede tener S?

Problema 7. Para cada entero $a > 1$ se construye una lista infinita $\mathcal{L}(a)$ de números como sigue

- a es el primer elemento de la lista.
- Si b está en la lista, el siguiente número es $b+d$, donde d es el divisor más grande de b que no es b.

Encuentra todos los a tales que 2002 aparece en la lista $\mathcal{L}(a)$.

Problema 8. Considera la lista $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$ de números enteros positivos que son suma de una o más potencias distintas de tres, en orden creciente. Determina la mayor potencia de 3 que divide al término 2016.

Problema 9. Los lados de un triángulo acutángulo ABC son diagonales de los cuadrados K_1, K_2, K_3. Demuestra que el triángulo queda completamente cubierto por los cuadrados.

Problema 10. Demuestra que para cualquier entero $n \geq 2$, la máxima potencia de 3 que divide a 2016! es igual a la máxima potencia de 3 que divide a

$$(1)(1+4)(1+4+4^2)\cdots(1+4+\cdots+4^{2015}).$$

Problema 11. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ enteros positivos tales que $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}$. Sea b_k el mayor divisor de a_k tal que $b_k < a_k$. Si $b_1 > b_2 > \cdots > b_{10}$, demuestra que $a_{10} > 500$.

Problema 12. Demuestra que existen cuatro enteros a, b, c, d cuyos valores absolutos son mayores que 10^6 y satisfacen

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{abcd}.$$

Problema 13. Sean n y k enteros positivos. Demuestra que

$$(n^4-1)(n^3-n^2+n-1)^k + (n+1)n^{4k-1}$$

es divisible por n^5+1.

Problema 14. Encuentra una pareja (a, b) de números enteros positivos distintos tales que ninguna de las parejas $(a, b), (a+1, b+1), (a+2, b+2), (a+3, b+3), \dots, (a+2016, b+2016)$ sea de primos relativos.

Problema 15. En un cuadrilátero cíclico $ABCD$ sean L y M los incentros de los triángulos BCA y BCD, respectivamente. Sea R el punto de intersección de las perpendiculares desde los puntos L y M sobre las rectas AC y BD, respectivamente. Demuestra que el triángulo LMR es isósceles.

Problema 16. Si a, b, c son números reales, demuestra que

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 3(a-b)(b-c).$$

¿En qué casos se satisface la igualdad?

Problema 17. Sea ABC un triángulo rectángulo con ángulo recto en el vértice C. Denotemos con a, b y c a las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente.

a) Sea $CXPY$ un cuadrado con P un punto en la hipotenusa y X, Y puntos en los catetos del triángulo ABC. Llamemos t a la longitud de un lado del cuadrado. Demuestra que $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

b) Sea D el pie de la altura desde C sobre la hipotenusa del triángulo ABC y denotemos con d a la longitud del segmento CD. Demuestra que $\dfrac{1}{d^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Problema 18. Sea n un entero positivo. Usamos los números

$$1, 2, 3, \dots, n, -n, -(n-1), \dots, -3, -2, -1$$

para numerar sucesivamente, en el sentido de las manecillas del reloj, a los vértices de un $2n$-ágono regular P. Después se marcarán los vértices de P de la siguiente manera: en un primer paso, se marca el 1, y si n_i es el vértice marcado en el paso i, entonces, en el paso $i+1$ se marcará el vértice al que se llegue al avanzar n_i vértices a partir del vértice marcado en el paso i (en el sentido de las manecillas del reloj si n_i es positivo y en el opuesto si n_i es negativo). Este procedimiento se repite hasta llegar a un vértice ya marcado en algún paso anterior. Sea $f(n)$ el número de vértices no marcados. Demuestra que si $f(n) = 0$, entonces $2n+1$ es un número primo.

Problema 19. Demuestra que para cualesquiera números reales positivos a, b, c se tiene que

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Problema 20. En un archipiélago hay 2016 islas. Entre cada par de islas puede haber exactamente una compañía que hace viajes de ida y vuelta o puede no haber ninguna. ¿Cuál es el mínimo número de compañías que garantiza que se pueda viajar desde cualquier isla hacia cualquier otra?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarlas antes de tener tu propia solución o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas, tan solo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

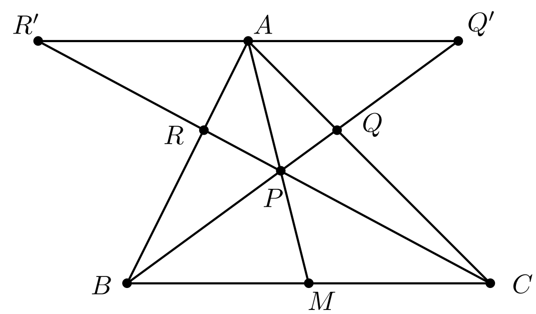
Solución del problema 1.

a) Procedamos por contradicción. Supongamos que hay dos números $a < b$ en A cuyo producto es un cuadrado perfecto. Entonces, existen enteros $x < y$, y un entero z libre de cuadrados para los cuales $a = zx^2$ y $b = zy^2$. De la cadena de desigualdades $10^2 < zx^2 < zy^2 < 11^2$ obtenemos que
$$\frac{10}{x} < \sqrt{z} < \frac{11}{y}.$$
Del lado izquierdo obtenemos que $10 < x\sqrt{z}$. Combinando esto con el lado derecho resulta que
$$y\sqrt{z} < 11 = 10 + 1 < x\sqrt{z} + 1.$$
Así, tenemos que $(y - x)\sqrt{z} < 1$. Esta desigualdad es imposible, pues como x e y son enteros, $y \geq x + 1$ y, además, $\sqrt{z} \geq 1$.

b) Para resolver este inciso, usaremos la siguiente identidad:
$$(b-2)(b-1)(b+1)(b+2) = (b^2-1)(b^2-4) = b^4 - 5b^2 + 4.$$

Notemos que el número a la derecha es de la forma $a^2 - 5a + 4$ para $a = b^2$. Para encontrar las 16 cuartetas, basta tomar $b = 103, 104, \ldots, 118$.

Solución del problema 2. Construyamos una paralela a BC que pase por A y supongamos que esta recta interseca a BP y a CP en Q' y R', respectivamente. Como BC y $Q'R'$ son paralelas, los triángulos CPB y $R'PQ'$ son semejantes. Entonces, al ser PM mediana del triángulo CPB, la recta correspondiente PA es mediana del triángulo $R'PQ'$ (pues divide en los mismos ángulos al $\angle Q'PR'$), y por lo tanto $R'A = AQ'$.



Por otro lado, los triángulos CQB y AQQ' son semejantes porque BC es paralela a AQ'. Entonces, $\frac{AQ}{QC} = \frac{AQ'}{BC}$. Análogamente, $\frac{AR}{RB} = \frac{R'A}{BC}$. Como A es punto medio de $R'Q'$ tenemos que $\frac{AQ'}{BC} = \frac{R'A}{BC}$. Entonces, $\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RB}$, lo que implica el paralelismo de QR y BC.

Solución del problema 3. Tenemos $\binom{20}{3} = 1140$ subconjuntos con 3 elementos. Todos estos subconjuntos tienen elementos que cuando se multiplican tendrán a 4 como un factor, excepto en dos casos:

- todos los elementos son impares, de los cuales hay $\binom{10}{3} = 120$ subconjuntos;
- dos elementos son impares y el tercero es par pero no es múltiplo de 4, de los cuales hay $\binom{10}{2}\binom{5}{1} = 225$ subconjuntos.

Por lo tanto, hay $1140 - (120 + 225) = 795$ subconjuntos con la propiedad requerida.

Solución del problema 4. Llamemos $AM = x$, $BN = y$, $CP = z$ y $DQ = t$. Por la desigualdad media aritmética-media geométrica[6], tenemos que

$$\sqrt{(MBN)} = \sqrt{\frac{1}{2}y(1-x)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y(1-x)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y+1-x}{2}.$$

[6]Ver en el apéndice el teorema 7.

De manera análoga, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{(NPC)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{z+1-y}{2},\\
\sqrt{(PDQ)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t+1-z}{2},\\
\sqrt{(QAM)} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x+1-t}{2}.
\end{aligned}$$

Sumando las cuatro desigualdades anteriores, obtenemos la desigualdad deseada.

Solución del problema 5. De manera equivalente, demostraremos que $L = (a+b)^2(a+c)^2 - 4abc(a+b+c)$ es mayor o igual que cero. Tenemos que $(a+b)^2(a+c)^2 = (a^2 + (ab+bc+ca))^2$ y $(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c)$. Luego,

$$\begin{aligned}
L &= a^2(a^2+b^2+c^2) + b^2c^2 + 2a^2(ab+bc+ca) - 2abc(a+b+c)\\
&= a^2(a+b+c)^2 - 2abc(a+b+c) + b^2c^2\\
&= (a(a+b+c) - bc)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $L \geq 0$ y la desigualdad queda demostrada.

Solución del problema 6. Supongamos que m es el mayor elemento de S. Diferenciemos los siguientes casos.
Caso 1. m es impar. Entonces el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m-1, m\}$ se puede partir en pares de conjuntos de la forma $\{x, m-x\}$ con $1 \leq x \leq \frac{m-1}{2}$, de los cuales a lo más un elemento de cada par puede estar en S, luego $|S| \leq \frac{m-1}{2} + 1 \leq 499 + 1 = 500$.
Caso 2. m es par. Análogamente, el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, m-1, m\}$ se puede partir en pares de conjuntos de la forma $\{x, m-x\}$ con $1 \leq x \leq \frac{m}{2} - 1$ y el conjunto de un solo elemento $\{\frac{m}{2}\}$. Entonces, $|S| \leq \frac{m}{2} - 1 + 1 + 1 \leq 500 - 1 + 1 + 1 = 501$.
Luego, el conjunto tiene a lo más 501 elementos y el conjunto $\{500, 501, \ldots, 999, 1000\}$ tiene 501 elementos y cumple la propiedad.

Solución del problema 7. Claramente 2002 está en la lista $\mathcal{L}(2002)$. Veamos que es el único a que cumple. Supongamos que $\mathcal{L}(a) = \{a, \ldots, b, 2002, \ldots\}$ es una lista donde aparece 2002 y $a \neq 2002$. Los números de la lista son mayores que 1 y van creciendo pues $b < b + c$. Sea p el primo mas pequeño que divide a b, entonces el divisor más grande de b que no es b es $\frac{b}{p} = d$, luego $b+d = pd+d = d(p+1) = 2002 = 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$. Ahora, p no puede ser 2, ya que si lo fuera $3 \mid 2002$, lo cual es falso. Luego, p es impar y, por lo tanto, $p+1$ es un divisor par de 2002 mayor que 2, esto implica que $p \geq 2\cdot 7 - 1 = 13$. Si un primo menor que 13 divide a m, entonces también dividirá a b, lo cual es absurdo por la elección de p. Entonces, ni 7 ni 11 dividen a d, por lo tanto ambos números dividen a p, de donde se tiene que $p \geq 2\cdot 7\cdot 11 - 1 > 13$. Por el mismo razonamiento, 13 no divide a d. La única posibilidad es que $d = 1$ y que $p = 2002 - 1 = 2001 = 3\cdot 667$, el cual no es primo. Por lo tanto, no existe tal lista.

Solución del problema 8. Observemos que es imposible que dos sumas de diferentes potencias de tres nos den un mismo resultado. Para ello, notemos que $3^n \geq 3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0$, lo cual es consecuencia directa de la fórmula para sumar una serie geométrica. Lo anterior quiere decir que 3^n no puede aparecer hasta que hayan aparecido todas las sumas que involucran a los términos con exponente menor (ya que $3^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + 3^2 + 3^1 + 3^0$ es precisamente la mayor de dichas sumas).
Además, si dos sumas son iguales, $3^{a_1} + 3^{a_2} + \cdots + 3^{a_r} = 3^{b_1} + 3^{b_2} + \cdots + 3^{b_s}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 < a_2 < \cdots < a_r$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_s$. Una consecuencia de la desigualdad anterior es que $a_r = b_s$, ya que de lo contrario, uno de ellos sería mayor que toda la suma del lado contrario, lo cual es imposible si las sumas son iguales. Si $a_r = b_s$, podemos restarlos y repetir el argumento con dos sumas más pequeñas. Eventualmente llegaremos a que todos los términos en ambas sumas eran los mismos y, por tanto, en realidad no eran dos sumas distintas.
Una consecuencia de lo anterior es que existe una correspondencia entre los términos de la lista y las formas de seleccionar potencias de tres, lo cual a su vez es una forma distinta de decir que hay una correspondencia entre los números escritos en binario y el desarrollo en base 3 de los números de la lista. Por ejemplo, dado que $6 = 110_2$, entonces el sexto término de la lista será: $0 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 = 12$.
Por tanto, para determinar el término 2016 de la lista expresamos en binario $2016 = 11111100000_2$, de modo que el término correspondiente será

$$0 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^5 + 1 \cdot 3^6 + 1 \cdot 3^7 + 1 \cdot 3^8 + 1 \cdot 3^9 + 1 \cdot 3^{10},$$

y, por tanto, la mayor potencia de tres que lo divide es 3^5.

Solución del problema 9. Sea I el incentro del triángulo ABC y sean F, G, H los puntos de tangencia del incírculo con AB, BC y CA, respectivamente. Sean $\alpha = \angle IAH = \angle IAF$, $\beta = \angle IBF = \angle IBG$, $\gamma = \angle ICG = \angle ICH$. Como el triángulo es acutángulo, todos sus ángulos α, β, γ son menores que $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ y por tanto, la suma de cualesquiera dos de ellos es menor que 90°.
Ahora, en el triángulo IAC, el ángulo $\angle AIC$ es igual a $180^\circ - \alpha - \beta > 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ de modo que $\angle ACI$ es obtuso y, por ello, el triángulo AIC queda completamente contenido dentro del cuadrado con diagonal AC. Un argumento similar aplica para los triángulos IBC y IAB.

Solución del problema 10. Como $1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^r = \frac{4^{r+1}-1}{4-1}$, el producto $(1)(1+4)(1+4+4^2)\cdots(1+4+\cdots+4^{2015})$ es igual a

$$\left(\frac{4^1-1}{4-1}\right)\left(\frac{4^2-1}{4-1}\right)\left(\frac{4^3-1}{4-1}\right)\cdots\left(\frac{4^{2016}-1}{4-1}\right),$$

de modo que basta demostrar que la máxima potencia de 3 que divide a k es la misma que la máxima potencia de 3 que divide a $\frac{4^k-1}{4-1}$. Si escribimos $k = 3^r t$, con $(t,3) = 1$ y $r \geq 0$, entonces,

$$4^k - 1 = 4^{3^r t} - 1 = (4^{3^r} - 1)(4^{3^r(t-1)} + 4^{3^r(t-2)} + \cdots + 4^{3^r} + 1).$$

Primero, probaremos por inducción sobre r que la máxima potencia de 3 que divide a $4^{3^r} - 1$ es 3^{r+1}. Tenemos que $4^{3^0} - 1 = 3^1$ y que $4^{3^1} - 1 = 3^2 \cdot 7$. Así, el resultado es cierto para $r = 0$ y $r = 1$. Supongamos que $r \geq 2$ y que el resultado es cierto para $r - 1$. Tenemos que

$$4^{3^r} - 1 = (4^{3^{r-1}} - 1)(4^{2\cdot 3^{r-1}} + 4^{3^{r-1}} + 1).$$

Observemos que el factor de la derecha $4^{2\cdot 3^{r-1}} + 4^{3^{r-1}} + 1$ es múltiplo de 3 pero no de 9, pues $4^3 \equiv 1 \pmod 9$ y $r \geq 2$. Luego, por la hipótesis de inducción, tenemos que la máxima potencia de 3 que divide a $4^{3^r} - 1$ es 3^{r+1}. Ahora demostremos que el factor $a = 4^{3^r(t-1)} + 4^{3^r(t-2)} + \cdots + 4^{3^r} + 1$ no es múltiplo de 3. Para ello, notemos que $4 \equiv 1 \pmod 3$, de donde cada uno de los t términos de a es congruente con 1 módulo 3 y, así, $a \equiv t \pmod 3$. Como $(t, 3) = 1$, se sigue que a no es múltiplo de 3, como queríamos probar. Al combinar ambos resultados, concluimos el problema.

Solución del problema 11. Si algún a_i con $1 \leq i \leq 9$ es primo, entonces $b_i = 1$ y $1 > b_{10}$, lo que es una contradicción.
Sea p_i el menor divisor primo de a_i. Entonces, $a_i = p_i b_i$ para cada i. Como $b_1 > b_2 > \cdots > b_9$ y $a_1 < a_2 < \cdots < a_9$, deducimos que $p_1 < p_2 < \cdots < p_9$.
Los primeros 9 números primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$. Luego, se sigue que $a_9 = p_9 \cdot b_9 \geq 23 \cdot 23 = 529$ (pues $p_9 \leq b_9$) y que $a_{10} \geq a_9 + 1 \geq 530$.

Solución del problema 12. Demostraremos, de manera más general, que para cada entero positivo N, existen enteros a, b, c y d que satisfacen la ecuación dada y cuyos valores absolutos son mayores que N. En efecto, sean $a = N + 1$, $b = -N - 2$, $p = -ab$, $c = 1 - p$ y $d = p(p - 1) - 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} &= \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p(p-1)-1} \\
&= \frac{1}{p} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p(p-1)-1} \\
&= \frac{1}{p(p-1)[p(p-1)-1]} = \frac{1}{(-ab)(-c)d} = \frac{1}{abcd}.
\end{aligned}$$

Solución del problema 13. Fijemos al entero n y usemos inducción sobre k.
Sea $P_k = (n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k + (n + 1)n^{4k-1}$. Tenemos que $(n^5 + 1) \mid P_1$, ya que

$$\begin{aligned}
P_1 &= (n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^3 \\
&= (n^5 + 1)(n^2 - n + 1).
\end{aligned}$$

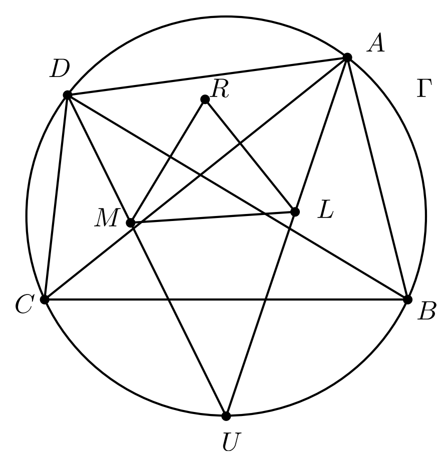
Supongamos entonces que $(n^5 + 1) \mid P_k$ para algún entero $k > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
P_{k+1} &= (n^4 - 1)(n^3 - n^2 + n - 1)^k(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k+3} \\
&= [P_k - (n + 1)n^{4k-1}](n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k+3} \\
&= P_k(n^3 - n^2 + n - 1) + (n + 1)n^{4k-1}(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) \\
&= P_k(n^3 - n^2 + n - 1) + (n^5 + 1)n^{4k-1},
\end{aligned}$$

y, en consecuencia, $(n^5+1) \mid P_{k+1}$.
Por lo tanto, $(n^5+1) \mid P_k$ para cada entero $k \geq 1$.

Solución del problema 14. Si a, b son ambos pares, entonces las parejas $(a,b), (a+2, b+2), (a+4, b+4), \ldots, (a+2k, b+2k), \ldots, (a+2016, b+2016)$ serán divisibles por 2 y, por tanto, ninguna es de primos relativos. Si a, b son ambos divisibles por 3, entonces las parejas $(a,b), (a+3, b+3), (a+6, b+6), \ldots, (a+3k, b+3k), (a+2016, b+2016)$ serán todas divisibles por 3 y, por tanto, ninguna es de primos relativos. De esta manera, si (a,b) son ambos pares y múltiplos de 6, satisfacemos ambas condiciones de forma simultánea. Similarmente, si g divide tanto a a y b, entonces divide a todas las parejas de la forma $(a+gk, b+gk)$. De manera, si tomamos $g = 2016!$ y escogemos a y b como dos múltiplos distintos de g, ninguna de las parejas entre $(a+2, b+2), (a+3, b+3), \ldots, (a+2016, b+2016)$ será de primos relativos.
Un detalle clave es que el 2016 no juega ningún papel especial. Esto es, si tomamos dos múltiplos de $m!$, ninguna de las parejas $(a,b), (a+2, b+2), \ldots, (a+m, b+m)$ será de primos relativos. Sin embargo, aún tenemos el problema de que no podemos garantizar nada acerca de $(a+1, b+1)$.
Sin embargo, aplicando el método para encontrar (c,d) distintos tales que ninguna pareja $(c,d), (c+2, d+2), \ldots, (c+2018, d+2018)$ sea de primos relativos y tomamos $(a,b) = (c+2, d+2)$, habremos encontrado una pareja (a,b) que cumple todas las condiciones del problema.

Solución del problema 15. Asumiremos que el cuadrilátero $ABCD$ es convexo, de manera que A y D están del mismo lado de BC. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC y sea U el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Notemos que AL y DM se intersecan en U. Finalmente, sean $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$ y $\gamma = \angle ACB$.



Como $\angle UBC$ y $\angle UAC$ subtienden el mismo arco de Γ, tenemos que $\angle UBC = \angle UAC = \frac{\alpha}{2}$, y, por lo tanto, $\angle UBL = \frac{\alpha+\beta}{2}$.
Ya que también tenemos que $\angle BUL = \angle BUA = \angle BCA = \gamma$, se sigue que $\angle BLU = 180^\circ - \gamma - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \angle UBL$, de manera que el triángulo BUL es isósceles.

Análogamente, el triángulo MUC es isósceles, de modo que $UB = UC = UL = UM$ y $\angle ULM = \angle UML$.
Además, tenemos que

$$\angle DMR = 90^\circ - \angle BDU = 90^\circ - \angle BAU = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle ALR.$$

Luego, $\angle RLM = 180^\circ - \angle ALR - \angle ULM = 180^\circ - \angle DMR - \angle UML = \angle RML$, lo que significa que el triángulo LMR es isósceles.

Solución del problema 16. Definamos $a - b = x$ y $b - c = y$. Entonces, $a - c = x + y$. La identidad

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - bc = \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$

nos permite reescribir la desigualdad del problema como

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + (x+y)^2) \geq 3xy.$$

Esta última desigualdad se reduce a $x^2 + y^2 \geq 2xy$, la cual es equivalente a $(x - y)^2 \geq 0$. Con lo que queda demostrada la desigualdad inicial y la igualdad se da solo en el caso que $x = y$, es decir, si $2b = a + c$.

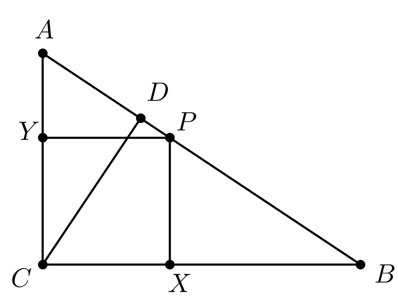
Solución del problema 17.

a) Denotemos con x, y a las longitudes de los segmentos AP y PB, respectivamente. Supongamos que Y está sobre CA y X está sobre BC. Como PY es paralela a BC, los triángulos APY y ABC son semejantes, por tanto, $\frac{PY}{BC} = \frac{t}{a} = \frac{AP}{AB} = \frac{x}{c}$. Análogamente, obtenemos que $\frac{t}{b} = \frac{y}{c}$. Por lo tanto, $\frac{t}{a} + \frac{t}{b} = \frac{x}{c} + \frac{y}{c} = \frac{x+y}{c} = 1$, esto es, $\frac{1}{t} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

b) Llamemos w y z a las longitudes de los segmentos AD y DB, respectivamente. Por el teorema de Pitágoras en los triángulos ADC y CBD obtenemos que

$$d^2 = a^2 - z^2 = b^2 - w^2.$$

Como los triángulos CBD y ABC comparten un ángulo y tienen un ángulo recto, entonces son semejantes, por lo que $\frac{BC}{BA} = \frac{a}{c} = \frac{BD}{BC} = \frac{z}{a}$, esto es, $\frac{z^2}{a^2} = \frac{a^2}{c^2}$. Análogamente, $\frac{w^2}{b^2} = \frac{b^2}{c^2}$. Sumando las dos igualdades anteriores obtenemos que $\frac{z^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1$ y por lo tanto, $1 = 2 - 1 = 2 - (\frac{z^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2}) = \frac{a^2-z^2}{a^2} + \frac{b^2-w^2}{b^2} = \frac{d^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2}$. De lo anterior, concluimos que $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.



Solución del problema 18. Agreguemos un vértice 0 entre los vértices -1 y 1, esto no alterará cómo marquemos los demás vértices, pues por encima de 0 no se va a pasar. Además, una vez que agregamos el 0, podemos sustituir el valor de cualquier vértice negativo k por su congruente correspondiente $(2n+1+k)$ módulo $2n+1$ y seguir las mismas reglas para marcar vértices, ya que se marcan los mismos vértices en ambos casos. Ahora, observemos que los vértices marcados son los congruentes con 2^n módulo $2n+1$, así que el número de vértices marcados es el menor exponente a tal que $2^a \equiv 1 \pmod{2n+1}$ (esto porque si $2^a \equiv 2^b \pmod{2n+1}$ y $a > b$, entonces $2^{a-b} \equiv 1 \pmod{2n+1}$, así que el primer vértice que se repite es el 1).
Supongamos que $f(n) = 0$. Entonces, todos los vértices (salvo 0) quedan marcados, pero, por el teorema de Euler, esto implica que $\phi(2n+1) = 2n$, de donde $2n+1$ es primo.

Solución del problema 19. Podemos escribir $\sqrt[3]{abc}$ como $\sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c}$. Aplicando la desigualdad media aritmética - media geométrica a los números reales positivos $\frac{a}{4}$, b y $4c$, obtenemos que

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{\frac{a}{4} \cdot b \cdot 4c} \leq \frac{\frac{a}{4} + b + 4c}{3} = \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4c}{3}.$$

Si aplicamos ahora la desigualdad media aritmética - media geométrica a los números reales positivos $\frac{a}{2}$ y $2b$, obtenemos que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot 2b} \leq \frac{\frac{a}{2} + 2b}{2} = \frac{a}{4} + b.$$

Luego, sumando las dos desigualdades anteriores y sumando a obtenemos que

$$a + \sqrt{ab} + \sqrt[3]{abc} \leq a + \frac{a}{4} + b + \frac{a}{12} + \frac{b}{3} + \frac{4c}{3} = \frac{4}{3}(a+b+c).$$

Solución del problema 20. El problema lo podemos plantear en el lenguaje de Teoría de Gráficas como: determina el menor número de aristas que garantizan que una gráfica con 2016 vértices sea conexa (es decir, que exista un camino entre cualquier par de vértices).
Observa primero que si un vértice no está conectado con ningún otro (es decir, si no hay ninguna compañía que viaje a cierta isla) entonces el máximo número posible de aristas será $\binom{2015}{2}$ (cuando se conectan todos los demás pares de islas). Demostraremos que $\binom{2015}{2}+1$ aristas son suficientes para conectar todos los vértices, demostrando que el máximo posible de aristas en una gráfica que no es conexa no puede superar $\binom{2015}{2}$.
Supongamos entonces que existen al menos dos vértices u, v para los cuales no existe una forma de ir desde u hasta v. Sea A el conjunto de todos los vértices a los que sí se puede llegar desde u (incluyendo a u) y sea B el conjunto de todos los demás vértices (estamos suponiendo que B no es vacío). Denotemos por m al número de elementos en A y por tanto $2016 - m$ es el número de elementos en B.

El máximo número posible de aristas que puede haber en A es $\binom{m}{2}$, mientras que el máximo posible de aristas que puede haber en B es $\binom{2016-m}{2}$. Queremos entonces determinar el valor máximo posible de

$$\binom{m}{2} + \binom{2016-m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{(2016-m)(2015-m)}{2},$$

que equivale a maximizar

$$\begin{aligned}
&m(m-1) + (2016-m)(2015-m) \\
&= m^2 - m + 2016 \cdot 2015 - (2016+2015)m + m^2 \\
&= 2m^2 - 2 \cdot 2016m + 2016 \cdot 2015.
\end{aligned}$$

Dado que el último término es constante, basta maximizar $2m^2 - 2 \cdot 2016m$ y esto equivale a maximizar $m^2 - 2016m$. Sin embargo, esta es una función creciente para m positivo, y como $m = 2016$ es imposible (ya que supusimos que $m < 2016$), el valor máximo se alcanza cuando $m = 2015$, que es precisamente cuando todos los vértices excepto uno están unidos.

Concluimos entonces que si existieran dos islas para las cuales no existiera una ruta que las conecte, entonces el número máximo de compañías que puede haber es $\binom{2015}{2}$ y, por tanto, con $\binom{2015}{2} + 1$ se garantiza que siempre existe una ruta entre cualquier par de islas.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2016 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que los problemas en esta sección no tienen solución, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90°$. Sea D un punto en el circuncírculo de ABC tal que $AC = CD$ y sea E el pie de la perpendicular a AB trazada desde C. Demuestra que $EB + BD = AE$.

Problema 2. Sea $p(x) = x^2 + ax + b$, donde a es un número real y $b \neq 2$ es un número racional. Si $[p(0)]^2$, $[p(1)]^2$ y $[p(2)]^2$ son enteros, demuestra que a y b también lo son.

Problema 3. Si x, y, z son números reales positivos tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 2xyz$, demuestra que $(1 + x)(1 + y)(1 + z) \leq 4 + 4xyz$.

Problema 4. Sean A, B y C puntos sobre una circunferencia Ω. Sea S la intersección de la tangente por A a Ω con la recta BC. Se toma un punto X tal que $SA = SX$.

Las rectas AX, BX y CX vuelven a intersecar a Ω en M, N y L, respectivamente. Demuestra que $MN = ML$.

Problema 5. Determina todas las parejas (x, y) de números reales que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$x^3 + 1 - xy^2 - y^2 = 0,$$
$$y^3 + 1 - x^2y - x^2 = 0.$$

Problema 6. Determina todas las ternas de enteros no negativos (x, y, n) tales que

$$\frac{x! + y!}{n!} = 3^n,$$

con la convención de que $0! = 1$.

Problema 7. Sean a, b y c números reales positivos tales que $27 + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$. Demuestra que

$$\frac{a^2}{a + 2b} + \frac{b^2}{b + 2c} + \frac{c^2}{c + 2a} \geq \frac{3}{2}.$$

Problema 8. Kevin escribió tres números enteros positivos en su cuaderno: a, b, y c. Estos números cumplen lo siguiente:

- $b = a + p$, donde p es un divisor primo de a,
- $c = b + q$, donde q es un divisor primo de b,
- $p \neq q$.

Kevin se da cuenta que $abc = 2016k$, con $1 \leq k \leq 6$. Encuentra el valor de k.

Problema 9. En un callejón viven 2016 gatos. Quieren salir a cantar durante algunas noches bajo las siguientes reglas:

- Cada noche saldrá a cantar un conjunto de 6 gatos.
- Para cualesquiera dos noches distintas, los conjuntos de gatos que salen en esas dos noches o bien tienen 0 gatos en común, o bien tienen 5 gatos en común.

¿Cuál es el máximo número de noches que los gatos pueden salir a cantar?

Problema 10. Para una pareja (a, b) de números reales positivos, construimos recursivamente las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ como sigue. Definimos $x_0 = y_0 = 1$, $x_1 = a$, $y_1 = b$ y para $n \geq 1$:

$$x_{n+1} = \left(\frac{y_{n-1}}{x_{n-1}}\right)^n \cdot x_n, \qquad y_{n+1} = \left(\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)^n \cdot y_n.$$

Determina todas las parejas (a, b) para las cuales todos los números de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ son enteros.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2015 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2015. En esta ocasión agradecemos a Adrián de Jesús Celestino Rodríguez por habernos compartido sus soluciones a los problemas 3 y 4, y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2016, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Considera la lista

$$\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \dots, \frac{1}{2014\cdot 2015}.$$

Halla todos los grupos de términos consecutivos de la lista cuya suma sea igual a $\frac{1}{6}$.

Solución. Una suma de términos consecutivos tiene la forma:

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+b-1)(a+b)}.$$

Aplicando la identidad $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$, obtenemos que la suma anterior es igual a $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{b}{a(a+b)}$.
Si la suma fuese igual a $\frac{1}{6}$, entonces $6b = a^2 + ab$ y, por tanto, $a^2 = b(6-a)$. Como a y b son enteros positivos, necesariamente $a < 6$. Procedemos a verificar los casos.

- Si $a = 1$, la ecuación es $1^2 = 5b$, que no tiene solución en los enteros.
- Si $a = 2$, la ecuación es $2^2 = 4b$ y, por tanto, $b = 1$. Esto corresponde a la suma de un término $\frac{1}{2\cdot 3}$.
- Si $a = 3$, la ecuación es $3^2 = 3b$ y, por tanto, $b = 3$. Esto corresponde a la suma $\frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6}$.
- Si $a = 4$, la ecuación es $4^2 = 2b$ y, por tanto, $b = 8$. Esto corresponde a la suma $\frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{7\cdot 8}$.
- Si $a = 5$, la ecuación es $5^2 = b$ y, por tanto, $b = 25$. Esto corresponde a la suma $\frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{29\cdot 30}$.

Problema 2. Considera una cuadrícula de 12×12 en la que están escritos números enteros positivos. Tienes dos operaciones que puedes aplicar tantas veces como quieras y en el orden que quieras.

1. Puedes multiplicar todos los números de una fila por 2.

2. Puedes restar 1 de todos los números de una columna.

Demuestra que sin importar cuáles números están originalmente en la cuadrícula, siempre puedes lograr que todos se conviertan en ceros.

Solución. Vamos a proceder columna por columna. Observemos de paso que si alguna columna logra tener solo ceros, la primera operación no le afecta, y que aplicar la segunda operación a otra columna, tampoco. Vamos a lograr los ceros de la primera columna.
Para ello, nos fijamos en el número más pequeño d que contiene la primera columna y aplicamos la segunda operación $d-1$ veces, lo cual es equivalente a restar $d-1$ en cada casilla de la columna (si el número más pequeño era $d=1$, entonces hicimos cero restas). Al terminar este paso, garantizamos que hay algún 1 en la columna (quizás varios, si el número mínimo estaba repetido) y quizás otros números positivos mayores que 1.
Luego, a cada fila que tiene 1 le aplicamos la primera operación y esas posiciones se convierten en 2. Repetimos el proceso (seleccionando el mínimo valor d que esté en la columna y aplicamos la segunda operación $d-1$ veces). Eventualmente lograremos que la columna completa esté llena de unos, ya que en cada paso, tenemos siempre números positivos, pero el máximo disminuye de uno en uno.
Cuando la columna está llena de unos, aplicamos la segunda operación y logramos que esté llena de ceros. El proceso continúa en la segunda columna, y no nos preocupamos de la primera, pues la primera operación nunca la alterará y la segunda se aplicará en una columna distinta. Continuamos de columna en columna y concluimos cuando el tablero completo queda lleno de ceros.

Problema 3. Sea n un entero positivo y sea M el promedio de los divisores positivos de n. Demuestra que $M \geq \sqrt{n}$.

Solución de Adrián de Jesús Celestino Rodríguez. Demostraremos que $M^2 \geq n$. Denotemos por $\sigma(n)$ a la suma de los divisores positivos de n y por $\tau(n)$ a la cantidad de divisores positivos de n. De esta manera $M = \frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$.
Primero notemos que $d \mid n \Leftrightarrow \frac{n}{d} \mid n$, y que si $\frac{n}{d_i} = \frac{n}{d_j}$, entonces $d_i = d_j$. Por lo tanto, si $d_1, d_2, \ldots, d_{\tau(n)}$ es la lista de los divisores positivos de n, esta también puede ser escrita como $\frac{n}{d_1}, \frac{n}{d_2}, \ldots, \frac{n}{d_{\tau(n)}}$. En particular tenemos que

$$\sigma(n) = d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)} = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_{\tau(n)}}.$$

Con las observaciones anteriores tenemos:

$$\begin{aligned} M^2 = \frac{\sigma(n)^2}{\tau(n)^2} &= \frac{1}{\tau(n)^2}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}\right)\left(\frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_{\tau(n)}}\right) \\ &= \frac{n}{\tau(n)^2}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}\right)\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{\tau(n)}}\right). \end{aligned}$$

Para concluir que $M^2 \geq n$, basta probar que

$$\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}\right)\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{\tau(n)}}\right) \geq \tau(n)^2.$$

De la desigualdad media aritmética - media geométrica obtenemos las siguientes desigualdades:

$$0 < \sqrt[\tau(n)]{d_1 d_2 \cdots d_{\tau(n)}} \leq \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}}{\tau(n)}, \tag{3}$$

$$0 < \sqrt[\tau(n)]{\frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_{\tau(n)}}} \leq \frac{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{\tau(n)}}}{\tau(n)}. \tag{4}$$

Multiplicando ambas desigualdades obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt[\tau(n)]{d_1 d_2 \cdots d_{\tau(n)} \frac{1}{d_1 d_2 \cdots d_{\tau(n)}}} \\ &\leq \frac{1}{\tau(n)^2}\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}\right)\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{\tau(n)}}\right), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\left(d_1 + d_2 + \cdots + d_{\tau(n)}\right)\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_{\tau(n)}}\right) \geq \tau(n)^2$, con lo cual terminamos.

Problema 4. Sea n un entero positivo con $n \geq 2$. Demuestra que

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right).$$

Solución de Adrián de Jesús Celestino Rodríguez. Demostraremos, de manera equivalente, que

$$n\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > (n+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

por inducción sobre n. Para $n = 2$ la desigualdad es cierta, pues $\frac{8}{3} > \frac{9}{4}$. Supongamos que es cierta para $n = k \geq 2$, esto es,

$$k\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right) > (k+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k}\right).$$

Sea $n = k+1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
& \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1} \\
= & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1} \\
> & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2}+\frac{k+1}{2k+1} \\
> & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+1}{2k+2}+\frac{1}{2k+1} \\
> & \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2}.
\end{aligned}$$

Aplicando esta desigualdad y la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\begin{aligned}
& (k+1)\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k+1}\right) \\
= & k\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k-1}\right)+\frac{k+1}{2k+1} \\
> & (k+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{k+2}{2k+2} \\
> & (k+2)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right),
\end{aligned}$$

lo cual completa la inducción.

Problema 5. En cada vértice de un dodecágono regular se pone una ficha con un lado blanco y un lado negro. En cada movimiento es posible elegir una ficha negra y darle la vuelta a sus dos vecinos. Encuentra todas las configuraciones iniciales desde las cuales, después de alguna secuencia de movimientos, se puede llegar a que todas las fichas, excepto una, estén en su lado blanco.

Solución. Sean las fichas $d_1, d_2, \ldots, d_{12}$ en el orden de las manecillas del reloj. Sea n el número de fichas que están del lado negro. Veamos tres casos:

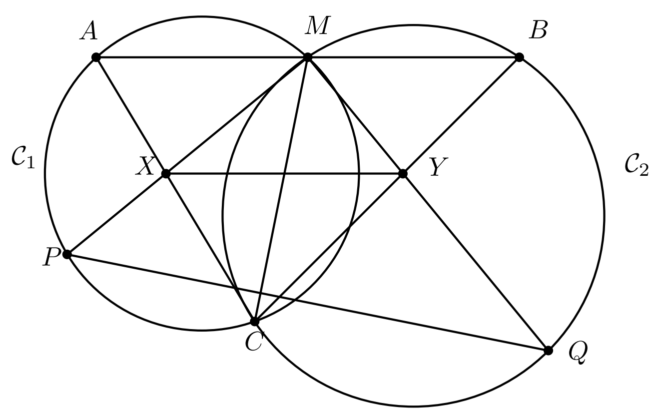
- Caso 1: n es par. Después de cada movimiento, volverá a haber una cantidad par de fichas negras, por lo que es imposible este caso.
- Caso 2: n es impar y las fichas blancas y negras están separadas en dos bloques. Sin pérdida de generalidad, diremos que las fichas negras son $d_1, d_2, \ldots, d_{2i+1}$ y las blancas son $d_{2i+2}, d_{2i+3}, \ldots, d_{12}$. Haciendo la operación con las fichas $d_{2i}, d_{2i-2}, \ldots, d_2$, en ese orden, llegaremos a que las fichas negras serán dos menos: $d_2, d_3, \ldots, d_{2i}$. Repitiendo este proceso, llegaremos a un momento en que solo haya una ficha negra.
- Caso 3: n es impar y las fichas blancas y negras no están separadas. Sin pérdida de generalidad, supongamos que d_6 es negra y que está en el bloque de negras

$d_i, d_{i+1}, \ldots, d_j$ (con $i \leq 6 \leq j$). Esto implica que tanto d_{i-1} como d_{j+1} son blancas. Sea d_k la ficha negra más cercana a d_j (en el sentido de las manecillas del reloj). Luego, se tiene que $d_{j+1}, d_{j+2}, \ldots, d_{k-1}$ son blancas. Haciendo la operación en la ficha d_k, llegamos a que d_{k-1} es negra y la distancia entre el bloque y el siguiente negro disminuyó. Repitiendo este proceso, llegaremos nuevamente al segundo caso.

Por lo tanto, para que se pueda llegar a que una sola ficha sea negra, es necesario y suficiente que el número de fichas negras sea impar.

Problema 6. Sea AB un segmento con punto medio M. Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen como cuerdas los segmentos AM y MB, respectivamente. El segundo punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es C. La bisectriz del ángulo $\angle CMA$ interseca a $\mathcal{C}_1$ en P y la bisectriz del ángulo $\angle CMB$ interseca a $\mathcal{C}_2$ en Q. Muestra que PQ es perpendicular a MC.

Solución. Sean X la intersección del segmento AC con el segmento MP e Y la intersección del segmento BC con MQ. Por el teorema de la bisectriz[7] se tiene que $\frac{CX}{XA} = \frac{MC}{MA}$ y $\frac{CY}{YB} = \frac{MC}{MB}$. Puesto que $MA = MB$, se tiene que $\frac{CX}{XA} = \frac{CY}{YB}$ y, por lo tanto, XY es paralela a AB.



Por otro lado, al ser cíclico el cuadrilátero $CMAP$, se tiene que $\angle MCX = \angle MPA$. Ahora, por ser bisectriz MP se cumple que $\angle AMP = \angle XMC$. De aquí, los triángulos MAP y MXC son semejantes, de donde se tiene que $\frac{MA}{MX} = \frac{MP}{MC}$ o, de forma equivalente, $MX \cdot MP = MA \cdot MC$. De manera análoga se tiene que $MY \cdot MQ = MB \cdot MC$. Utilizando de nuevo que M es el punto medio de AB, se sigue que

$$MX \cdot MP = MY \cdot MQ$$

y, por lo tanto, el cuadrilátero $PQYX$ es cíclico. Con este ultimo cíclico y las parelelas, se tiene que

$$\angle QPM = \angle MYX = \angle YMB.$$

[7]Ver en el apéndice el teorema 12.

Por ser MP y MQ bisectrices de ángulos suplementarios, se tiene que MP y MQ son perpendiculares, de donde

$$90^\circ = \angle PMC + \angle CMQ = \angle PMC + \angle QMB = \angle PMC + \angle YMB = \angle PMC + \angle QPM.$$

Por lo tanto, MC es perpendicular a PQ.

Problema 7. Lalo y César juegan volados. Lanzan n veces una moneda. César gana si la cantidad de águilas obtenidas es múltiplo de 4, y Lalo en otro caso. Encuentra todos los valores de n para los cuales la probabilidad de que gane César sea $\frac{1}{4}$.

Solución. Para encontrar la probabilidad de que gane César, debemos determinar la razón de los casos favorables y los casos totales del juego. Al lanzar n volados los casos totales son 2^n y los casos favorables son cuando apareció exactamente un número múltiplo de cuatro de águilas, lo cual se puede hacer de $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots$ formas. Entonces, la probabilidad buscada es

$$X = \frac{\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots}{2^n}.$$

Consideremos el número complejo i el cual cumple que $i^2 = -1$. Aplicando el teorema del binomio[8], tenemos que

$$\begin{aligned}
A = (1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots \\
B = (1-1)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \cdots \\
C = (1+i)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} - \binom{n}{3} i + \binom{n}{4} + \cdots \\
D = (1-i)^n &= \binom{n}{0} - \binom{n}{1} i - \binom{n}{2} + \binom{n}{3} i + \binom{n}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

Luego,

$$X = \frac{A+B+C+D}{4 \cdot 2^n} = \frac{2^n + (1+i)^n + (1-i)^n}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{4} + \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{4 \cdot 2^n}.$$

Por lo tanto, buscamos los n's en los que $(1+i)^n + (1-i)^n = 0$ y eso solo pasa, por el comportamiento de rotación de los números complejos, en los n's congruentes con 2 módulo 4, que es la respuesta.

Problema 8. Sea $x_0 = x_1 = 1$ y para $n \geq 1$ definimos $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_{n-1} + 2x_n}$. Encuentra una fórmula cerrada para la secuencia $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

[8] Ver en el apéndice el teorema 5.

Solución. Demostraremos por inducción en n que

$$x_n = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}.$$

Si $n = 1$, el resultado es inmediato. Si $n = 2$, tenemos que $x_2 = \frac{1}{3} = \frac{1}{1\cdot 3}$. Supongamos que el resultado es cierto para todo $n \leq k$ con $k \geq 2$. Luego, si $n = k+1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
x_{k+1} = \frac{x_k^2}{x_{k-1} + 2x_k} &= \frac{\left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2}{\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)} + 2\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}} \\
&= \left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2 \frac{1}{\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}} \\
&= \left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2 \frac{1}{\frac{2k-1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)(2k-1)} + \frac{2}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}} \\
&= \left(\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2 \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2k-1+2}\right) \\
&= \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)(2k+1)},
\end{aligned}$$

lo que completa la inducción.

Problema 9. Se tiene un papel cuadriculado de 102×102 y una figura de 101 cuadrados conectados por aristas, cuya forma desconocemos. ¿Cuál es la menor cantidad de copias de la figura que podemos cortar del papel?

Solución. La respuesta es 4. Tenemos que probar dos cosas: que existe una figura de la cual se pueden obtener a lo más 4 copias y que podemos obtener 4 copias de cualquier figura.

- Considera una figura en forma de cruz: una columna de 51 cuadrados y un renglón de 51 cuadrados que se intersecten en sus centros. Supongamos que de ella podemos obtener 5 copias. Cada centro de estas cruces está en el cuadrado central de 52×52 del papel cuadriculado, o se saldría del papel. Luego, por el principio de las casillas, dos de estos centros estarían en el mismo cuadrante de 26×26 del cuadrado central, pero esto es imposible.

- Es un ejercicio sencillo de inducción el demostrar que toda figura compuesta de n cuadrados conectados por sus aristas puede ser contenida en un rectángulo de tamaño $k \times (n+1-k)$ para cierto k entre 1 y n. Luego, cada figura de 101 cuadrados cabe en un rectángulo de $k \times (102-k)$ para cierto k entre 1 y 101. Podemos poner cuatro de estos rectángulos en el papel: dos en la esquina superior izquierda y en la inferior derecha y dos más (rotados $90°$) en las otras dos esquinas. Con esto vemos que sí podríamos obtener cuatro copias.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos a tales que para cualquier entero positivo $n \geq 5$ se cumple que $2^n - n^2$ es divisor de $a^n - n^a$.

Solución. Para cada número primo p, consideremos el número $n = p(p-1) + 4$. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $2^p \equiv 2 \pmod{p}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
2^n - n^2 &= (2^p)^{p-1} \cdot 2^4 - n^2 \equiv 2^{p+3} - n^2 \\
&= 2^p \cdot 2^3 - (p(p-1)+4)^2 \equiv 2^4 - (p(p-1)+4)^2 \\
&\equiv 0 \pmod{p},
\end{aligned}$$

de donde $a^n - n^a \equiv 0 \pmod{p}$.
De manera análoga, usando nuevamente el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $a^p \equiv a \pmod{p}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
a^n - n^a &= (a^p)^{p-1} \cdot a^4 - n^a \equiv a^{p+3} - n^a = a^p \cdot a^3 - n^a \equiv a^4 - n^a \\
&\equiv a^4 - (p(p-1)+4)^a \equiv a^4 - 4^a \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a^4 - 4^a \equiv 0 \pmod{p}$ para todo número primo p, y de aquí, $a^4 - 4^a = 0$. Ahora, es fácil ver que las únicas soluciones de esta ecuación son $a = 2$ y $a = 4$.

Concursos Estatales

Olimpiada de Matemáticas de la Ciudad de México

La Olimpiada de Matemáticas de la Ciudad de México (OM CDMX) consta de tres etapas para elegir a la preselección y otras tres etapas para elegir a la selección para el concurso nacional. La primera etapa se lleva a cabo en febrero y es de opción múltiple. Las escuelas que así lo decidan pueden inscribirse al concurso y de esta manera sus alumnos presentan el examen en la escuela. Los alumnos cuyas escuelas no participan pueden hacer el examen en la UNAM. La participación en esta etapa aumenta año con año. En el 2016 participaron más de siete mil alumnos, de los cuales menos de 100 hicieron el examen en la UNAM y el resto en las 133 escuelas participantes. A la segunda etapa pasan los mejores alumnos de cada escuela. Esta etapa es de opción múltiple y contiene algunas preguntas de respuesta cerrada. El examen de la segunda etapa se basa en el examen canguro. Este año participaron 600 alumnos y se realizó en 6 sedes de distintas delegaciones de la Ciudad de México. A la tercera etapa son invitados los mejores 100 alumnos de la segunda etapa. Ellos son, además, invitados a entrenamientos dos veces a la semana durante 2-3 meses antes del examen de la tercera etapa. Este examen se lleva a cabo únicamente en la UNAM. Este año consistió de 5 preguntas, y fue una mezcla entre el examen que propuso María Luisa Pérez y el examen propuesto por el comité nacional de la OMM.

Con base en el examen de la tercera etapa se otorgan medallas de oro, plata y bronce a los concursantes. Aproximadamente 25 medallas de cada tipo son otorgadas. Los 25 medallistas de oro conforman a partir de ese momento (mediados de junio) la preselección de la Ciudad de México.

Las siguientes tres etapas son para seleccionar a los que participarán en el concurso nacional de la OMM. La primera de ellas (es decir, la cuarta etapa) se lleva a cabo a finales de julio, principios de agosto. Usualmente consta de dos exámenes más una tarea (para la que tienen tres semanas), y uno de los exámenes es el examen eliminatorio de la Olimpiada Lechona (elaborado por el "Flamante Comité de la Olimpiada

Lechona de Matemáticas"). De esta etapa se seleccionan 18 alumnos. La quinta etapa es a principios de septiembre y consta de 3 exámenes. Este año, uno de ellos fue la fase semifinal de la olimpiada lechona, otro fue un examen de la Olimpiada Iraní de Geometría y el tercero se hizo con problemas que propuso María Luisa Pérez. De esta etapa se seleccionan 12 alumnos, a quienes se invita a participar en el concurso regional que es a finales de septiembre. Estas tres últimas etapas eran un poco diferentes en cuanto a números en años pasados, pues se participaba con 10 alumnos en el concurso nacional, y ahora solo serán 6 alumnos.

A continuación presentamos los exámenes de la cuarta etapa de la XXX OM CDMX. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día
(7^a Olimpiada Lechona de Matemáticas. Etapa Eliminatoria)

Problema 1. Encuentra todas las soluciones reales de la ecuación

$$\left(x^2+5x+5\right)^{x^2-10x+21}=1.$$

Problema 2. Determina todos los enteros positivos n tales que existen dos enteros positivos a y b (no necesariamente distintos) tales que dividen a n y $a+b=n+6$.

Problema 3. Se tienen 12 puntos $P_1,\ldots,P_{12}$ alrededor de un círculo, tales que para cualesquiera dos puntos, el segmento que los une es rojo o azul. Coloreamos el segmento P_iP_j de rojo si y solo si coloreamos el segmento $P_{i+1}P_{j+1}$ de azul, para $i\neq j$ con $i,j\in\{1,2,\ldots,12\}$ y $P_1=P_{13}$. Un *paso* consiste en moverse de un punto a otro por medio de un segmento rojo que los une. Demuestra que es posible ir de cualquier punto del círculo a otro haciendo a lo más tres pasos.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea ω la circunferencia inscrita a él. Sea W un punto sobre el arco menor de ω determinado por los puntos de tangencia con $ABCD$, tal que el vértice de $ABCD$ más cercano a W es D. La tangente por W a ω corta a AD y CD en los puntos X y Y respectivamente. Muestra que si $\angle BXY=90^\circ$, entonces

$$\frac{AX}{AD}=\frac{YW}{YX}.$$

Problema 5. Sea m un entero positivo y sea $N_m=\{1,2,3,\ldots,2^m\}$. Muestra que es posible partir al conjunto N_m en dos conjuntos A y B de modo que para cualquier polinomio $P\left(x\right)$ de grado menor a m se tiene que

$$\sum_{x\in A}P\left(x\right)=\sum_{x\in B}P\left(x\right).$$

Segundo día
(Concurso Metropolitano)

Problema 6. Sea ABC un triángulo con M, N y L los puntos medios de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sea PQR un triángulo con QR sobre el lado BC de manera que N está sobre PR y L sobre PQ. Si $\angle ABC + \angle PQC = \angle ACB + \angle PRB = 90°$, demuestra que $\angle PMC = 90°$.

Problema 7. Se tiene un tablero de 2016×2016 con 2016^2 casillas de 1×1. Dentro de cada una de las casillas se colocará un entero positivo entre 1 y 256 (incluyéndolos) de manera que si se toman 4 casillas consecutivas cualesquiera del tablero (ya sea horizontal o verticalmente) se cumple que el producto de los cuatro números escritos en ellas es siempre el mismo. Determina la máxima cantidad de números distintos que pueden colocarse en las casillas del tablero.

Problema 8. En le matecolegio hay 2016 alumnos. Un comité consiste de una cantidad par de alumnos, tal que uno de ellos es el líder. Dos comités se consideran iguales si todos sus miembros coinciden y tienen el mismo líder (entonces, dos comités con los mismos miembros, pero diferentes líderes se consideran diferentes). Sea N la cantidad de comités posibles que se pueden formar. ¿Cuál es el mayor divisor primo de N?

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Primer lugar por países, así como una medalla de oro y dos de plata, trajeron consigo los tres dedicados jóvenes mexicanos que representaron a nuestro país en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se llevó a cabo en Kingston, Jamaica del 17 al 23 de junio de 2016.

Diego Hinojosa Téllez, de Jalisco, obtuvo medalla de oro, mientras que Alfredo Hernández Estrada, de San Luis Potosí y Bruno Gutiérrez Chávez, de Colima ganaron, cada uno, medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Daniel Perales Anaya (líder) y Cecilia Rojas Cuadra (tutora).

Sus logros colocaron a México en el primer lugar general por países, en la que participaron 13 países y un total de 38 estudiantes, quedando por encima de Colombia, Venezuela, Puerto Rico, El Salvador y Cuba entre otros.

A continuación presentamos los problemas de la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Encuentre todos los enteros positivos n de 4 cifras tales que todos sus dígitos son cuadrados perfectos y n es múltiplo de $2, 3, 5$ y 7.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo, Γ su circunferencia circunscrita y M el punto medio del lado BC. Sea N el punto del arco $\widehat{BC}$ de Γ que no contiene a A, tal que $\angle NAC = \angle BAM$. Sea R el punto medio de AM, S el punto medio de AN

y T el pie de la altura desde A al lado BC. Demuestre que los puntos R, S y T son colineales.

Problema 3. El polinomio $Q(x) = x^3 - 21x + 35$ tiene tres raíces reales diferentes. Encuentre números reales a y b tales que el polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$ permute cíclicamente las raíces de Q, es decir que si r, s y t son las raíces de Q (en cierto orden) entonces $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$.

Problema 4. En la pizarra está escrito el número 3. Ana y Bernardo juegan alternadamente, comenzando por Ana, de la siguiente manera: si en la pizarra está escrito el número n, el jugador que tenga el turno lo debe sustituir por cualquier entero m que sea primo relativo con n y tal que $n < m < n^2$. El primer jugador que escriba un número mayor o igual que 2016 pierde. Determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Problema 5. Digamos que un número es *irie* si se puede expresar como $1 + \frac{1}{k}$, para algún entero positivo k. Demuestre que cualquier entero $n \geq 2$ se puede expresar como el producto de r números irie diferentes, para cualquier entero $r \geq n - 1$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncírculo Γ. Sean M y N los puntos de intersección de las rectas BI y CI con Γ. La paralela a MN que pasa por I interseca a AB en P y a AC en Q. Demuestre que la circunferencia que pasa por B, N y P tiene el mismo radio que la circunferencia que pasa por C, M y Q.

57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

México gana terreno como un país que sabe identificar y entrenar a sus jóvenes en matemáticas, una disciplina considerada por muchos como la columna vertebral de las ciencias.

Muestra clara de ello son los resultados obtenidos por la delegación que representó a nuestra nación en la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas llevada a cabo del 6 al 16 de julio de 2016, en la Universidad de Ciencia y Tecnología de Hong Kong en China.

Kevin William Beuchot Castellanos, de Nuevo León; Leonardo Ariel García Morán, de Jalisco; Antonio López Guzmán, de Chihuahua y Victor Hugo Almendra Hernández, de la Ciudad de México, obtuvieron cada uno medalla de plata, mientras que Olga Medrano Martín del Campo, de Jalisco obtuvo una medalla de bronce y José Ramón Tuirán Rangel, de Hidalgo, recibió una mención honorífica. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Rogelio Valdez Delgado (líder), Marco Antonio Figueroa Ibarra (colíder) y Leonardo Ignacio Martínez Sandoval (Observador A).

De los 109 países que participaron, México quedó en el lugar 23 por arriba de otros países como Irán, Australia, Francia y Turquía, además de que ocupó el segundo lugar entre los países latinoamericanos. Es la tercera mejor participación de nuestro país en la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

A continuación presentamos los problemas de la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. El triángulo BCF es rectángulo en B. Sea A el punto de la recta CF tal que $FA = FB$ y F está entre A y C. Se elige el punto D de modo que $DA = DC$ y AC es bisectriz del ángulo $\angle DAB$. Se elige el punto E de modo que $EA = ED$ y AD es bisectriz del ángulo $\angle EAC$. Sea M el punto medio de CF. Sea X el punto tal que $AMXE$ es un paralelogramo (con $AM \parallel EX$ y $AE \parallel MX$). Demostrar que las rectas BD, FX y ME son concurrentes.

(Problema sugerido por Bélgica)

Problema 2. Hallar todos los enteros positivos n para los que en cada casilla de un tablero $n \times n$ se puede escribir una de las letras I, M y O de manera que:

- en cada fila y en cada columna, un tercio de las casillas tiene I, un tercio tiene M y un tercio tiene O; y
- en cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, exactamente un tercio de las casillas tienen I, un tercio tienen M y un tercio tienen O.

Nota. Las filas y las columnas del tablero $n \times n$ se numeran desde 1 hasta n, en su orden natural. Así, cada casilla corresponde a un par de enteros positivos (i, j) con $1 \leq i, j \leq n$. Para $n > 1$, el tablero tiene $4n - 2$ *líneas diagonales* de dos tipos. Una línea diagonal del primer tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i + j$ es una constante, mientras que una línea diagonal del segundo tipo se compone de todas las casillas (i, j) para las que $i - j$ es una constante.

(Problema sugerido por Australia)

Problema 3. Sea $P = A_1A_2 \ldots A_k$ un polígono convexo en el plano. Los vértices $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tienen coordenadas enteras y se encuentran sobre una circunferencia. Sea S el área de P. Sea n un entero positivo impar tal que los cuadrados de las longitudes de los lados de P son todos números enteros divisibles por n. Demostrar que $2S$ es un entero divisible por n.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 4. Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinar el menor número entero positivo b para el cual existe algún número entero no negativo a tal que el conjunto

$$\{P(a + 1), P(a + 2), \ldots, P(a + b)\}$$

es fragante.

(Problema sugerido por Luxemburgo)

Problema 5. En la pizarra está escrita la ecuación

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

que tiene 2016 factores lineales en cada lado. Determinar el menor valor posible de k para el cual pueden borrarse exactamente k de estos 4032 factores lineales, de modo que al menos quede un factor en cada lado y la ecuación que resulte no tenga soluciones reales.

(Problema sugerido por Rusia)

Problema 6. Se tienen $n \geq 2$ segmentos en el plano tales que cada par de segmentos se intersecan en un punto interior a ambos, y no hay tres segmentos que tengan un punto en común. Mafalda debe elegir uno de los extremos de cada segmento y colocar sobre él una rana mirando hacia el otro extremo. Luego silbará $n-1$ veces. En cada silbido, cada rana saltará inmediatamente hacia adelante hasta el siguiente punto de intersección sobre su segmento. Las ranas nunca cambian las direcciones de sus saltos. Mafalda quiere colocar las ranas de tal forma que nunca dos de ellas ocupen al mismo tiempo el mismo punto de intersección.

a) Demostrar que si n es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo.

b) Demostrar que si n es par, Mafalda nunca logrará su objetivo.

(Problema sugerido por República Checa)

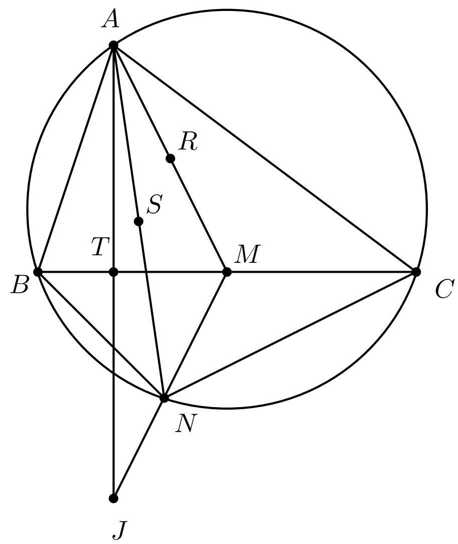
Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

A continuación presentamos las soluciones de la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

Solución del problema 1. (Solución de Alfredo Hernández Estrada). Como todos sus dígitos son cuadrados perfectos por sí mismos, únicamente pueden ser $0, 1, 4, 9$. Dado que el número es múltiplo de 2 y de 5, debe terminar en 0. Pero n es múltiplo de 3, de modo que sus otros tres dígitos deben sumar un múltiplo de 3. Además, como 7 y 10 son primos relativos, si dividimos el número entre 10, obtenemos de nuevo un múltiplo de 7, por lo que, tanto el número, como el número formado por los primeros tres dígitos, son ambos múltiplos de 7. Finalmente, el primer dígito no puede ser cero puesto que el número no sería de cuatro cifras.
Denotemos al número buscado n de cuatro cifras como $abcd$ y procedamos por casos. Notemos adicionalmente que los cuatro dígitos $0, 1, 4, 9$ son congruentes, respectivamente, con $0, 1, 1, 0$ módulo 3.
Cuando las primeras dos cifras son $ab = 10$ que deja residuo 1, es imposible que al sumar $0, 1, 4$ o 9 obtengamos un múltiplo de 3, con lo que descartamos esta posibilidad. En cambio, si las primeras dos cifras son $ab = 11$, entonces c también debe dejar residuo 1 y las posibilidades son $n = 1110$ o $n = 1140$, pero ninguno de ellos es múltiplo de 7.
Considerando que la suma de dígitos es un múltiplo de 3, los posibles casos a considerar para abc son: $111, 114, 141, 144, 411, 414, 441, 444, 900, 909, 990, 999$, de los cuales, el único que es múltiplo de 7 es 441 y, por tanto, $n = 4410$ es la única solución.

Solución del problema 2. (Solución de Diego Hinojosa Téllez). Sea J el punto de intersección de AT con MN. La igualdad de ángulos $\angle BAM = \angle NAC$ implica que $\angle BAN = \angle BAM - \angle MAN = \angle CAN - \angle MAN = \angle MAC$. Por el cíclico $ABNC$ se tiene que $\angle ACB = \angle ANB = \alpha$, también $\angle BAN = \angle BCN = \beta$, luego $\angle MAC = \angle MCN$. Ahora, los triángulos CAM y NAB son semejantes, de modo que $\dfrac{AC}{AN} = \dfrac{MC}{BN}$.



Como $BM = MC$, tenemos que $\frac{AC}{AN} = \frac{MC}{BN} = \frac{BM}{BN}$. De nuevo por el cíclico se tiene que $\angle NBA = \angle NAC$, entonces por el criterio de semejanza LAL se tiene que los triángulos CAN y MBN son semejantes. Por lo tanto,

$$\angle BMN = \angle ACN = \alpha + \beta = \angle AMB,$$

donde la última igualdad ocurre por el cálculo de un ángulo externo en el triángulo CAM. Lo anterior implica que MT es bisectriz del ángulo $\angle AMJ$. Como MT es bisectriz y altura del triángulo MAJ, entonces TM es mediatriz del segmento AJ, de donde $AT = TJ$. Luego, T, S y R son los puntos medios de los segmentos AJ, AN y AM, respectivamente, con J, N y M colineales. Esto implica que T, S y R están sobre la linea media del triángulo AJM y, por lo tanto, son colineales.

Solución del problema 3. Por las fórmulas de Vieta[9] tenemos que

$$\begin{aligned} r + s + t &= 0, \\ rs + st + rt &= -21, \\ rst &= -35. \end{aligned} \tag{5}$$

[9]Ver en el apéndice el teorema 6.

Las condiciones $P(r) = s$, $P(s) = t$ y $P(t) = r$, equivalen a

$$\begin{aligned} r^2 + ar + b &= s, \\ s^2 + as + b &= t, \\ t^2 + at + b &= r. \end{aligned} \tag{6}$$

Sumando estas tres últimas relaciones se obtiene que

$$r^2 + s^2 + t^2 + a(r + s + t) + 3b = r + s + t.$$

Como $r + s + t = 0$ y

$$r^2 + s^2 + t^2 = (r + s + t)^2 - 2(rs + st + rt) = 0 - 2(-21) = 42,$$

resulta que $42 + 3b = 0$ y $b = -14$.
Multiplicando ahora las tres ecuaciones del sistema (6) por r, s y t, respectivamente, se obtiene que

$$\begin{aligned} r^3 + ar^2 + br &= rs, \\ s^3 + as^2 + bs &= st, \\ t^3 + at^2 + bt &= rt, \end{aligned} \tag{7}$$

y sumando estas tres nuevas relaciones, resulta que

$$r^3 + s^3 + t^3 + a(r^2 + s^2 + t^2) + b(r + s + t) = rs + st + rt,$$

esto es,

$$r^3 + s^3 + t^3 + 42a = -21. \tag{8}$$

Por otra parte, como r, s, t son raíces de $Q(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned} r^3 - 21r + 35 &= 0, \\ s^3 - 21s + 35 &= 0, \\ t^3 - 21t + 35 &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

y sumando miembro a miembro, se obtiene $r^3 + s^3 + t^3 - 21(r + s + t) + 105 = 0$, esto es, $r^3 + s^3 + t^3 = -105$. Sustituyendo en (8), resulta $-105 + 42a = -21$, de donde $42a = 84$ y $a = 2$. En conclusión, la única posibilidad para $P(x)$ es $P(x) = x^2 + 2x - 14$.
Ahora, demostraremos que $P(x)$ efectivamente permuta cíclicamente las raíces de $Q(x)$. En primer lugar veamos que si α es raíz de Q, entonces $P(\alpha)$ también lo es. En efecto, si $Q(\alpha) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} Q(P(\alpha)) &= (\alpha^2 + 2\alpha - 14)^3 - 21(\alpha^2 + 2\alpha - 14) + 35 \\ &= \alpha^6 + 6\alpha^5 - 30\alpha^4 - 160\alpha^3 + 399\alpha^2 + 1134\alpha - 2415 \\ &= (\alpha^3 - 21\alpha + 35)(\alpha^3 + 6\alpha^2 - 9\alpha - 69) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora veamos que P no deja fija ninguna raíz de Q, esto es, si $Q(\alpha) = 0$, entonces $P(\alpha) \neq \alpha$. Por contradicción, si $P(\alpha) = \alpha$, entonces $\alpha^2 + 2\alpha - 14 = \alpha$, esto es, $\alpha^2 + \alpha - 14 = 0$. Pero,

$$\alpha^3 - 21\alpha + 35 = (\alpha^2 + \alpha - 14)(\alpha - 1) - 6\alpha + 21,$$

de donde $-6\alpha + 21 = 0$ y $\alpha = 7/2$. Esto es una contradicción, pues $7/2$ no es raíz de Q.
P tampoco intercambia dos raíces de Q, esto es, si $Q(r) = Q(s) = 0$ y $r \neq s$, no puede ser que $P(r) = s$ y $P(s) = r$. En efecto, si $P(r) = s$ y $P(s) = r$, entonces como

$$r^3 - 21r + 35 = (r^2 + 2r - 14)(r - 1) - 3r + 7,$$

resulta que $s(r - 1) - 3r + 7 = 0$. Por simetría, $r(s - 1) - 3s + 7 = 0$, y restando miembro a miembro, se obtiene que $2s - 2r = 0$, de donde $r = s$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, si r es raíz de Q, entonces $s = P(r) \neq r$ es otra raíz de Q, $t = P(s)$ es otra raíz de Q distinta de r y de s, y $Q(t)$ es una raíz de Q distinta de t y de s, por lo cual $Q(t) = r$ y terminamos.

Solución del problema 4. (Solución de Alfredo Hernández Estrada.) Observemos que escribir el número 2015 equivale a ganar, puesto que el siguiente jugador necesariamente pondrá un número mayor o igual a 2016 y perderá. Además, si alguien escribe el 2014, habrá perdido porque en el siguiente turno el otro jugador podrá poner 2015. De hecho, el que escriba cualquier número primo relativo con $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ entre 45 y 2015 habrá perdido, ya que $45 < 2015 < 45^2$ y por tanto el siguiente jugador podrá poner 2015.
Además, escribir los números $2014, 2013, 2012, 2011$ equivale a perder, puesto que son primos relativos con 2015 y, por tanto, el contrincante usará la estrategia ganadora del 2015. El 2010 es un valor ganador, puesto que el contrincante no puede escribir 2015 y, por tanto, pondrá $2011, 2012, 2013, 2014$ (que son perdedores) o directamente un número mayor o igual a 2016. Los valores $2009, 2008, 2007, 2006$ son perdedores (el contrincante puede usar el 2015), pero el 2005 es ganador por un argumento similar al del 2010.
Los valores 2004 y 2003 son perdedores, pero el 2002 es especial, ya que comparte factor 13 con 2015, de modo que el contrincante no puede usar directamente el 2015, aunque en este caso el contrincante puede escribir 2005 que ya dedujimos que es ganador, y así, el que escriba 2002 será perdedor. De todos estos ejemplos notamos que los múltiplos de 5 son posiciones ganadoras.
Proponemos entonces la siguiente estrategia general: escribir siempre múltiplos de 5 de entre los números $5, 25, 625, 2005$ y 2015, con lo cual ganará el primer jugador si sigue los siguientes pasos.
Al inicio, está en la pizarra el 3, el primer jugador escribe 5. El segundo jugador debe escribir un número que no sea múltiplo de 5 y menor que 25, y como lo menos que puede poner es 6, el primer jugador puede responder siempre con $25 < 6^2$. El segundo jugador debe poner un número que esté entre 25 y 625, pero que no sea múltiplo de 5.

Cualquier número que ponga el segundo jugador será respondido por el primer jugador con 625.
A continuación, dado que $625 < 2015 < 625^2$, si el segundo jugador escribe un número que no tenga factor 13 ni 31, el primer jugador siempre puede rematar al poner $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. En caso contrario (el segundo jugador pone un múltiplo de 13 o de 31), el primer jugador siempre puede poner $2005 = 5 \cdot 401$, que también es una posición ganadora, puesto que no hay múltiplos de 401 y 13 o de 401 y 31 que sean menores a 2016. Por tanto, el primer jugador siempre podrá ganar.

Solución del problema 5. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez.) Primero veamos que todo número irie admite una única representación de la forma $1 + \frac{1}{k}$. En efecto, si k y l son enteros positivos tales que $1 + \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{l}$, entonces $\frac{k+1}{k} = \frac{l+1}{l}$, lo que implica que $kl + l = kl + k$, por tanto, $l = k$.
Demostremos el problema por inducción sobre r. La base de inducción es $r = n - 1$. En este caso una construcción válida es:

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)=\frac{n!}{(n-1)!}=n.$$

Ahora suponemos que para un entero positivo $r > n - 1$ se cumple el problema, de forma que existen enteros positivos $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ tales que

$$\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_r}\right)=\left(\frac{k_1+1}{k_1}\right)\cdot\left(\frac{k_2+1}{k_2}\right)\cdots\left(\frac{k_r+1}{k_r}\right)=n.$$

Queremos construir un $(r+1)$-ésimo entero a partir de la expresión anterior. Proponemos sustituir k_r por otros dos enteros, $2k_r$ y $2k_r+1$. Veamos que $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}, 2k_r$, $2k_r + 1$ son $r + 1$ enteros que satisfacen las condiciones del problema. En efecto, $\frac{k_r+1}{k_r} = \frac{2k_r+1}{2k_r} \cdot \frac{(2k_r+1)+1}{2k_r+1}$ y $0 < k_r < 2k_r < 2k_r + 1$, entonces, por la hipótesis de inducción:

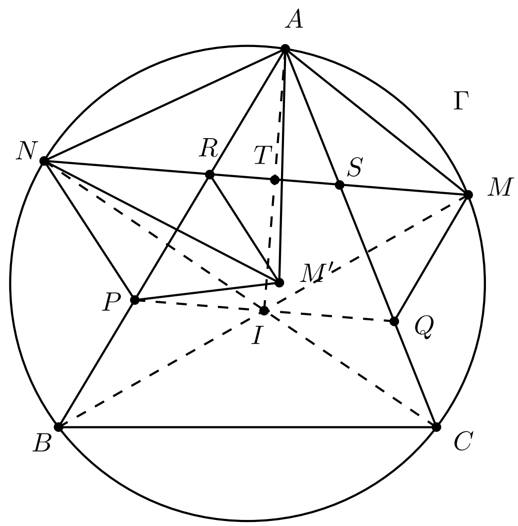
$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{k_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k_{r-1}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2k_r}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2k_r+1}\right)\\ =&\left(\frac{k_1+1}{k_1}\right)\cdot\left(\frac{k_2+1}{k_2}\right)\cdots\left(\frac{k_{r-1}+1}{k_{r-1}}\right)\cdot\left(\frac{2k_r+1}{2k_r}\right)\cdot\left(\frac{(2k_r+1)+1}{2k_r+1}\right)=n\end{aligned}$$

y $k_1 < k_2 < \cdots < k_{r-1} < 2k_r < 2k_r+1$. La última afirmación concluye la inducción y, con ello, el problema.

Solución del problema 6. (Solución de Diego Hinojosa Téllez). En cualquier triángulo isósceles ABC con $AB = AC$, si M es un punto sobre BC y $\alpha = \angle AMC$, entonces $\frac{AB}{\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\alpha}$ pues $AB = AC$ y $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(180^\circ - \alpha)$. Luego, por la Ley de senos[10], se sigue que $2r = 2r'$, donde r y r' son los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos AMB y ACM, respectivamente. Así, $r = r'$.
En el problema, tenemos que el triángulo AMC es isósceles, porque M es el punto medio del arco $\widehat{AC}$ y es conocido que $MA = MI = MC$, donde I es el incentro

[10] Ver en el apéndice el teorema 13.

del triángulo ABC. Como Q está en AC, el circuncírculo del triángulo AMQ tiene el mismo radio que el circuncírculo del triángulo MQC. Análogamente, tenemos que $NB = NI = NA$. Luego, demostrar que el circuncírculo del triángulo MQC tiene el mismo radio que el circuncírculo del triángulo NPC es equivalente a demostrar que los circuncírculos de los triángulos AMQ y ANP tienen el mismo radio.
Sean R la intersección de AP con NM, S la intersección de AQ con NM y T la intersección AI con NM.



Es conocido que si I es el incentro del triángulo ABC, y M, D, N son los puntos medios de los arcos $\widehat{AC}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{AB}$ respectivamente, entonces I es el ortocentro del triángulo MDN. Como A, I y D son colineales por pertenecer a la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, tenemos que AI y NM son perpendiculares. Como se tenía que $MA = MI$ y $NA = NI$, entonces N y M pertenecen a la mediatriz de AI, lo que significa que $AT = TI$, pues T está sobre MN. Por el teorema de Tales[11] tenemos que $\frac{AR}{RP} = \frac{AT}{TI} = \frac{AS}{SQ} = 1$, de donde $AS = SQ$ y $AR = RP$.
Ahora, en el triángulo APQ, AI es bisectriz del ángulo $\angle PAQ$, pues también es altura (porque $AI \perp NM$ y $NM \parallel PQ$, entonces $AI \perp PQ$), lo que significa que $AP = AQ$. Entonces, $AR = \frac{AP}{2} = \frac{AQ}{2} = AS$, de donde $AR = RP = AS$.
Ahora, $\widehat{BN} = \widehat{NA}$ implica que $\gamma = \angle NAP = \angle AMS$. Análogamente, $\beta = \angle MAS = \angle ANM$. Sea M' el punto de intersección de la simediana desde N en el triángulo ANP con el circuncírculo del triángulo ANP. Como $ANPM'$ es cíclico y NM' es simediana, es conocido que también se cumple que NM' es simediana del triángulo $PM'A$. Luego, $\gamma = \angle PAM' = \angle PNM' = \angle RNA$ y $\beta = \angle NAP = \angle NM'P = \angle AM'R$, pues R es el punto medio de AP.
Podemos ver ahora que los triángulos ARM' y ASM son semejantes, ya que tienen sus tres ángulos respectivos iguales. Como $AS = AR$, se sigue que $SM = RM'$,

[11] Ver en el apéndice el teorema 11.

$\triangle MSQ \cong \triangle M'RP$ y $\triangle MAQ \cong \triangle M'AP$. Como $\angle AMQ = \angle AM'P$ y $ANPM'$ es cíclico, tenemos que $\angle AMQ + \angle ANP = 180°$. Luego, $\angle AMQ = 180° - \angle ANP$, de donde $\operatorname{sen}(\angle AMQ) = \operatorname{sen}(180° - \angle ANP) = \operatorname{sen}(\angle ANP)$. Como ya se tenía que $AP = AQ$ se obtiene que

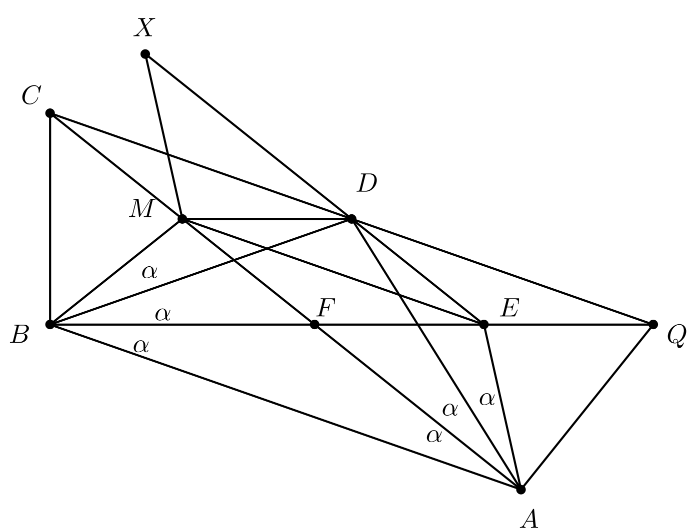
$$\frac{AQ}{\operatorname{sen}(\angle AMQ)} = \frac{AP}{\operatorname{sen}(\angle ANP)},$$

lo que implica, por la Ley de senos[12], que los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos ANP y AMQ son iguales.

57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Antonio Lopéz Guzmán). Vamos a demostrar que los triángulos BEX y DMF están en homotecia, con esto las rectas correspondientes BD, EM y XF concurrirán en el centro de homotecia. Denotemos por $\alpha = \angle ABF = \angle FAB$. Como AC y AD bisecan los ángulos $\angle DAB$ y $\angle EAC$ se tiene que $\angle DAC = \angle EAD = \angle CAB = \alpha$. Como el triángulo DEA es isósceles se tiene que $\alpha = \angle EAD = \angle ADE$. Si se extiende el rayo AE hasta un punto P, por ángulo externo en el triángulo DAE, se tiene que $\angle PED = 2\alpha = \angle EAC$. Por lo tanto, DE y AC son paralelas. Como EX es paralela a AD por construcción, se tiene que D, E y X están sobre la misma recta.



[12] Ver en el apéndice el teorema 13.

Veamos que $\angle ACD = \angle DAC = \alpha = \angle CAB$, entonces $DC \parallel AB$. Sea Q el punto de intersección de CD y BF. Notemos que $\angle ABQ = \alpha = \angle ACQ$, entonces el cuadrilátero $ABCQ$ es cíclico. Como $CQ \parallel AB$, se tiene que $ABCQ$ es un trapecio isósceles. Por suma de ángulos en el triángulo ADQ, se tiene que

$$\begin{aligned}\angle QAD = 180^\circ - \angle ADQ - \angle DQA &= 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - \angle ABC)\\ &= 180^\circ - 2\alpha - (180^\circ - (90^\circ + \alpha))\\ &= 90^\circ - \alpha.\end{aligned}$$

Por el mismo cíclico, se tiene que $\angle DQA = 90^\circ - \alpha$. Entonces, $\angle DQA = \angle QAD$ y, por lo tanto, $DQ = DA = DC$. Luego, D es el circuncentro del cuadrilátero $ABCQ$, por lo que $DQ = DA = DC = DB$. Esto quiere decir que el triángulo DAB es isósceles, de donde $\angle ABD = \alpha + \angle FBD = \angle DAB = 2\alpha$ y de aquí, $\angle FBD = \alpha$.
Como M es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo BCF, se tiene que $CM = MF = MB$, entonces $\angle FBM = \angle MFB = 2\alpha$, de donde se deduce que $\angle DBM = \alpha = \angle DAM$. En particular, el cuadrilátero $MBAD$ es cíclico. Por otro lado, también se tiene que $\angle FCD = \alpha = \angle FBD$, entonces el cuadrilátero $CBFD$ es cíclico. Como M es el circuncentro del triángulo CBF, se tiene que M también es el circuncentro del cuadrilátero $CBFD$, de donde $MF = MD$. Por cálculo de ángulos, se tiene que $\angle FMD = 2\alpha$ y $\angle FDM = \angle DFM = 90^\circ - \alpha$.
Adicionalmente se tiene que $\angle DEA + \angle ABD = 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ$, lo que significa que el cuadrilátero $ABDE$ es cíclico. Como $ED = EA$, resulta que BE biseca al ángulo $\angle ABD$, y como BF también biseca al ángulo $\angle ABD$, tenemos que los puntos B, F y E son colineales.
Por el cíclico $ABMD$ se tiene que $\angle MDB = \angle MAB = \alpha = \angle FBD$, de donde $MD \parallel BE$. Por otro lado, $\angle EMD = \angle EAD = \alpha$ y $\angle DEM = \angle DAM = \alpha$, por lo tanto, el triángulo DEM es isósceles y $DE = DM = MB$, donde la última igualdad se tiene por el isósceles MBD. Con esto y los isósceles usados anteriormente se concluye que $BM = EA$. Como $MXEA$ es un paralelogramo, $MX = EA = BM$. Luego, X está en la circunferencia de centro M y radio MB, la cual pasa por B, C, D y F. Además, los triángulos XMD y BMF son congruentes por ser cada uno isósceles con ángulos en X y en B iguales a 2α. Por lo tanto, XB es paralela a DF por simetría, que era el último par de paralelas buscadas para asegurar la homotecia.

Solución del problema 2. (Solución de Leonardo Ariel García Morán). Para que haya la misma cantidad de letras I, M, O en cada columna, es necesario que el valor de n sea múltiplo de 3, es decir $n = 3k$. Probaremos que el llenado existe si y solo si 9 divide a n, esto es, 3 divide a k.
Diremos que una diagonal es *buena*, si la cantidad de casillas que la forman es múltiplo de 3. Hay dos tipos de diagonales: de tipo I si desciende hacia la derecha y de tipo II si desciende hacia la izquierda.
Observemos que en una diagonal buena tipo I, todas las casillas (i, j) que la componen tienen la misma suma $i + j$ y es múltiplo de 3. En las diagonales buenas tipo II, las casillas (i, j) cumplen que $i - j$ es constante y congruente a 0 módulo 3.
Una casilla será *afortunada* si está en dos diagonales buenas y *desafortunada* si no está en ninguna. Un análisis breve de las condiciones $i + j \equiv 1 \pmod 3$ e $i - j \equiv$

$0 \pmod 3$ nos muestra que una casilla es afortunada si y solo si $(i, j) \equiv (2, 2) \pmod 3$. Además, como $1 \leq i \leq 3k$ y para cada tres valores consecutivos solo hay uno que sea congruente a 2, encontramos que hay k posibles valores de i congruentes con 2 módulo 3, y como el argumento simétrico muestra que hay k valores para j, concluimos que el total de casillas afortunadas es k^2.

A continuación, observemos que para cada valor $1 \leq i \leq k - 1$ podremos hallar dos diagonales tipo I con $3i$ casillas pero solo una que tenga $3k$ casillas (la diagonal principal). Lo mismo sucede con las diagonales tipo II. Entonces la cantidad total de diagonales es $2(k - 1) + 1$ y el número total de casillas en estas diagonales es

$$3[2(1 + 2 + \cdots + (k - 1)) + k] = 3[(k - 1)(k) + k] = 3k^2.$$

Como la hipótesis nos dice que debe haber la misma cantidad de casillas con cada letra, habrá k^2 iguales a I, k^2 iguales a M y k^2 iguales a O. Lo mismo sucede en las diagonales tipo II (aunque las casillas afortunadas las estamos contando doble).

Definimos t_I, t_M y t_O como el número de casillas afortunadas que contienen I, M y O, respectivamente. Observemos que las condiciones del problema nos garantizan en principio que $t_I = t_M = t_O$. Con esta notación, sabemos que en total habrá $k^2 - t_I$ casillas con I en diagonales buenas tipo I que no son afortunadas, y como para M y O obtenemos $k^2 - t_M$ y $k^2 - t_O$ respectivamente, concluimos que $k^2 - t_I = k^2 - t_M = k^2 - t_O$, de manera que $t_I = t_M = t_O$.

Mas aún, como sabemos que $t_I + t_M + t_O$ es igual a k^2, por ser el total de casillas afortunadas, concluimos que k^2 es múltiplo de 3, por lo que k también es múltiplo de 3 (y por tanto, n es múltiplo de 9).

Para terminar, basta dar un llenado que satisfaga las condiciones del problema. Una forma es llenar las primeras k filas con el patrón $IMOIMOIMO\ldots$, las filas que van de $k+1$ hasta $2k$ con $MOIMOIMOI\ldots$ y las últimas k filas con $OIMOIMOIM\ldots$.

De manera alternativa, puede construirse un bloque de 9×9 que satisfaga las condiciones del problema mediante prueba y error, copiando luego este bloque hasta llenar el tablero de $9k \times 9k$.

Solución del problema 3. Sea $P = A_1A_2\ldots A_k$ y sea $A_{k+i} = A_i$ para $i \geq 1$. Es conocido que el área de cualquier polígono convexo de coordenadas enteras es la mitad de un entero[13]. Luego, $2S$ es un entero. Demostraremos por inducción sobre $k \geq 3$ que $2S$ es divisible por n. Claramente, es suficiente considerar $n = p^t$, donde p es un primo impar y $t \geq 1$.

Para el caso base $k = 3$, supongamos que las longitudes de los lados de P son $\sqrt{na}$, $\sqrt{nb}$, $\sqrt{nc}$, donde a, b, c son enteros positivos. Por la fórmula de Herón[14], tenemos que

$$16S^2 = n^2(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2).$$

[13]Si n es el número de lados de un polígono convexo y $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ son sus vértices listados en el sentido de las manecillas del reloj, su área está dada por

$$\frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_{n-1}y_n + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_{n-1}x_n + y_nx_1)\right|.$$

[14]Ver en el apéndice el teorema 15.

Esto demuestra que $16S^2$ es divisible por n^2. Como n es impar, $2S$ es divisible por n. Supongamos que $k \geq 4$. Si el cuadrado de la longitud de una de las diagonales es divisible por n, entonces la diagonal divide a P en dos polígonos más pequeños, a los cuales podemos aplicarles la hipótesis de inducción. Luego, podemos suponer que ninguno de los cuadrados de las longitudes de las diagonales es divisible por n. Denotaremos por $\nu_p(r)$ al mayor entero no negativo tal que $p^{\nu_p(r)} \mid r$, donde p es primo y r es un entero positivo. Afirmamos lo siguiente.

Afirmación. $\nu_p(A_1A_m^2) > \nu_p(A_1A_{m+1}^2)$ para $2 \leq m \leq k-1$.

Demostración. El caso $m = 2$ es trivial ya que $\nu_p(A_1A_2^2) \geq p^t > \nu_p(A_1A_3^2)$ por la condición y la suposición anterior.
Supongamos que $\nu_p(A_1A_2^2) > \nu_p(A_1A_3^2) > \cdots > \nu_p(A_1A_m^2)$ donde $3 \leq m \leq k-1$. Para el paso inductivo, aplicamos el teorema de Ptolomeo[15] al cuadrilátero cíclico $A_1A_{m-1}A_mA_{m+1}$, y obtenemos

$$A_1A_{m+1} \cdot A_{m-1}A_m + A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} = A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1},$$

que puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2 = A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 + A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2 \\ - 2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}. \end{aligned} \tag{10}$$

De esto, se sigue que $2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}$ es un entero. Por la hipótesis de inducción, tenemos que $\nu_p(A_1A_{m-1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2)$. También, tenemos que $\nu_p(A_mA_{m+1}^2) \geq p^t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$. Luego,

$$\nu_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) > \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{11}$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} &\nu_p(4A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2 \cdot A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ &= \nu_p(A_1A_{m-1}^2 \cdot A_mA_{m+1}^2) + \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2) \\ &> 2\nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de la relación (11). Esto implica que

$$\nu_p(2A_1A_{m-1} \cdot A_mA_{m+1} \cdot A_1A_m \cdot A_{m-1}A_{m+1}) > \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2). \tag{12}$$

Combinando (10), (11) y (12), concluimos que

$$\nu_p(A_1A_{m+1}^2 \cdot A_{m-1}A_m^2) = \nu_p(A_1A_m^2 \cdot A_{m-1}A_{m+1}^2).$$

Como $\nu_p(A_{m-1}A_m^2) \geq p^t > \nu_p(A_{m-1}A_{m+1}^2)$, obtenemos que $\nu_p(A_1A_{m+1}^2) < \nu_p(A_1A_m^2)$. El resultado se sigue por inducción. $\square$

[15]Ver en el apéndice el teorema 22.

Aplicando la Afirmación anterior, tenemos una cadena de desigualdades

$$p^t > \nu_p(A_1A_3^2) > \nu_p(A_1A_4^2) > \cdots > \nu_p(A_1A_k^2) \geq p^t,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, se sigue por inducción que $2S$ es divisible por n.

Comentario. La condición de que P es cíclico es crucial. Como contraejemplo, consideremos el rombo con vértices $(0,3)$, $(4,0)$, $(0,-3)$ y $(-4,0)$. Cada uno de los cuadrados de las longitudes de los lados es divisible por 5, mientras que $2S = 48$ no lo es.

Solución del problema 4. (Solución de José Ramón Tuirán Rangel). Notemos primero que para que un primo p divida a $P(c) = c^2 + c + 1$ y a $P(c+r) = (c+r)^2 + (c+r) + 1$ simultáneamente, debe dividir a la resta:

$$p \mid r(2c + r + 1). \tag{13}$$

De la diferencia entre $P(c+r)$ y $(2r+1)P(c)$, al ser ambos divisibles por p, obtenemos que $p \mid r(2c^2 - r + 1)$. Por otro lado, de multiplicar (13) por c y de restar al resultado $r(2c^2 - r + 1)$ obtenemos

$$p \mid r(c(r+1) + r - 1). \tag{14}$$

Finalmente, después de multiplicar la expresión en (13) por $r+1$ y la expresión en (14) por 2, al tomar la diferencia, encontramos que $p \mid r(r^2 + 3)$. Notemos además que p debe ser un primo impar puesto que $n^2 + n + 1$ siempre es un número impar.
Lo anterior nos permite verificar algunos casos pequeños. Por ejemplo:

- Si $r = 1$, tenemos que $p \mid 1$ o $p \mid 4$ lo cual es imposible.
- Si $r = 2$, tenemos que $p \mid 2$ (imposible) o $p \mid 7$ por lo que $p = 7$.
- Si $r = 3$, entonces $p \mid 3$ o $p \mid 12$, y de la paridad concluimos que $p = 3$.

La imposibilidad con $r = 1$ nos muestra además que $P(c)$ y $P(c+1)$ siempre serán primos relativos, por lo cual un conjunto fragante necesariamente tendrá tres o más elementos, esto es, $b > 2$.
Supongamos que el conjunto $\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$ es fragante. Cuando $b = 3$, $P(a+2)$ será primo relativo con $P(a+1)$ y también con $P(a+3)$, lo cual hace imposible que el conjunto sea fragante.
Si hubiera un conjunto fragante con $b = 4$, necesariamente $P(a+2)$ compartiría algún primo con $P(a+4)$. Además, como este caso es equivalente al análisis inicial con $r = 2$, el primo debe ser forzosamente $p = 7$. Sin embargo, el primo que deben compartir $P(a+1)$ y $P(a+3)$ debe ser también 7 (por equivaler también a $r = 2$), lo cual es una contradicción con el hecho de que $P(a+1)$ y $P(a+3)$ son primos relativos.
Cuando $b = 5$, $P(a+3)$ es primo relativo con $P(a+2)$ y con $P(a+4)$, por lo que debe compartir un primo con $P(a+1)$ o con $P(a+5)$. Supongamos que $P(a+1)$

y $P(a+2)$ comparten primo, dado que es un caso con $r = 2$, concluimos que 7 es divisor de ambos. Adicionalmente, deducimos que 7 no es un divisor de $P(a+2)$, pues este número es primo relativo con $P(a+1)$. Pero $P(a+2)$ y $P(a+4)$ solo podrían haber compartido el 7, lo cual implica que son primos relativos.
Pero, si $P(a+2)$, que es primo relativo con $P(a+1)$ y $P(a+3)$, lo es también con $P(a+4)$, forzosamente compartirá primo con $P(a+5)$, lo cual, al ser parte del caso $r = 3$, implica que el único primo que comparten es 3. Por otra parte, $P(a+4)$ es primo relativo con $P(a+3)$ y con $P(a+5)$, de modo que ni el 3 ni el 7 lo dividen, pero como $P(a+4)$ debe compartir primo con $P(a+1)$ o $P(a+2)$, caemos en el caso $r = 2$ o $r = 3$, lo cual causaría que 3 o 7 lo dividan, obteniendo así una contradicción. Por tanto, no puede haber conjuntos fragantes con $b = 5$.
Basta dar un ejemplo específico para mostrar que con $b = 6$ sí es posible satisfacer las condiciones del problema, con lo cual $b = 6$ sería el mínimo. Se puede verificar fácilmente que $a = 196$ y $b = 6$ funcionan.

Solución del problema 5. Dado que hay 2016 factores lineales en ambos lados con diferentes raíces, es necesario borrar al menos 2016 factores. Afirmamos que la ecuación no tiene raíces reales si eliminamos todos los factores $(x-k)$ en el lado izquierdo con $k \equiv 2, 3 \pmod 4$, y todos los factores $(x-m)$ en el lado derecho con $m \equiv 0, 1$ (mod 4). Por lo tanto, es suficiente que demostremos que ningún número real x satisface que

$$\prod_{j=0}^{503}(x-4j-1)(x-4j-4) = \prod_{j=0}^{503}(x-4j-2)(x-4j-3). \qquad (15)$$

Ahora vamos a dividir el problema en cuatro casos:

- Caso 1. $x = 1, 2, \ldots, 2016$.
  En este caso, uno de los lados de (15) es cero y el otro lado no lo es. Entonces, x no podrá satisfacer (15).

- Caso 2. $4k+1 < x < 4k+2$ o $4k+3 < x < 4x+4$ para algún entero $k \in \{0, 1, \ldots, 503\}$.
  Para $j = 0, 1, \ldots, 503$ con $j \neq k$, el producto $(x-4j-1)(x-4j-4)$ es positivo, y para $j = k$, el producto $(x-4j-1)(x-4j-4)$ es negativo. Esto prueba que el lado izquierdo de (15) es negativo. Por otro lado, cada producto $(x-4j-2)(x-4j-3)$ en el lado derecho de (15) es positivo, lo que es una contradicción.

- Caso 3. $x < 1$, $x > 2016$ o $4k < x < 4k+1$ para algún entero $k \in \{0, 1, \ldots, 503\}$.
  La ecuación (15) puede ser reescrita como

  $$1 = \prod_{j=0}^{503}\frac{(x-4j-1)(x-4j-4)}{(x-4j-2)(x-4j-3)} = \prod_{j=0}^{503}\left(1 - \frac{2}{(x-4j-2)(x-4j-3)}\right).$$

  Notemos que en este caso, $(x-4j-2)(x-4j-3) > 2$ siempre que $0 \leq j \leq 503$. Por tanto, cada término en el producto está estrictamente entre 0 y 1 y el producto total debe ser menor que 1, lo cual es imposible.

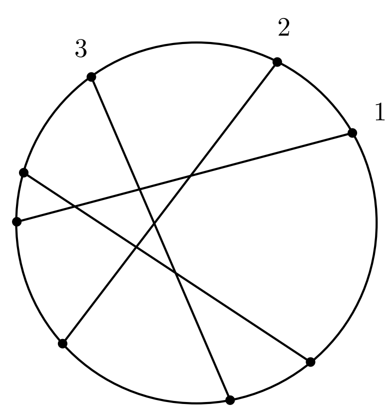
- Caso 4. $4k+2 < x < 4k+3$ para algún entero $k \in \{0, 1, \ldots, 503\}$.
  Esta vez podemos reescribir (15) como

$$1 = \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{j=1}^{503} \frac{(x-4j)(x-4j-1)}{(x-4j+1)(x-4j-2)}$$
$$= \frac{x-1}{x-2} \cdot \frac{x-2016}{x-2015} \cdot \prod_{j=1}^{503} \left(1 + \frac{2}{(x-4j+1)(x-4j-2)}\right).$$

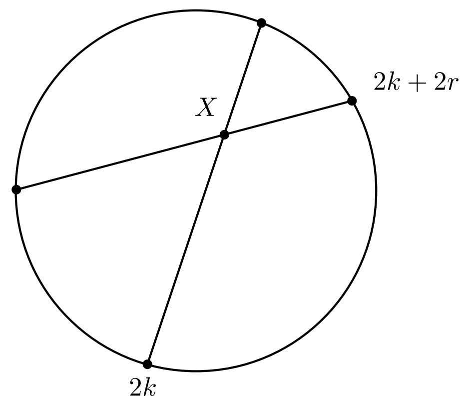
  En este caso, $\frac{x-1}{x-2}$ y $\frac{x-2016}{x-2015}$ son ambos mayores que 1. Para el rango de x en este caso, cada término en el producto es mayor que 1. Entonces, el lado derecho debe ser mayor que 1, lo que es una contradicción.

A partir de los cuatro casos podemos concluir que (15) no tiene raíces reales. Por tanto, el mínimo número de factores lineales que debemos eliminar es 2016.

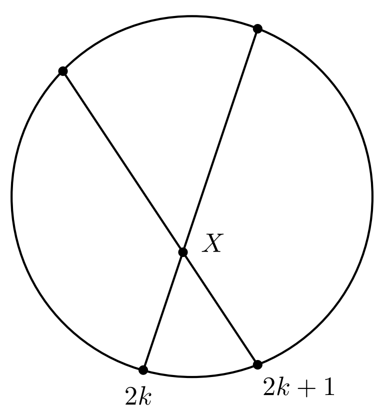
Solución del problema 6. (Solución de Victor Hugo Almendra Hernández). Como trabajamos con segmentos en el plano, podemos construir una circunferencia que los contenga. Vamos a extender cada segmento hasta que corte a la circunferencia y diremos que los extremos de los segmentos son las intersecciones de las extensiones de los segmentos con la circunferencia. Ahora fijemos un extremo de un segmento, le asignamos el número 1 y numeremos el resto en sentido contrario a las manecillas del reloj (del 2 al $2n$). Observemos que el par de extremos correspondientes a cada segmento tienen asignados números de la forma i y $n+i$, donde i es un número en el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.



Si n es impar, demostremos que basta con que Mafalda elija en cada segmento el extremo con un número par asignado. Como n es impar, entonces exactamente uno de i y $n+i$ es par. Además, si tomamos dos segmentos donde las ranas inician en $2k$ y $2k+2r$ y denotamos con X a su punto de intersección, entonces las ranas se encuentran solo si hay la misma cantidad de puntos de intersección entre los puntos X y $2k$ que entre los puntos X y $2k+2r$. Pero lo anterior no puede pasar, pues entre $2k$ y $2k+2r$ hay exactamente $2r-1$ puntos en la circunferencia y cada segmento correspondiente no puede intersecar, al mismo tiempo, tanto al segmento entre X y $2k$, como al segmento entre X y $2k+2r$. Se sigue que las ranas no se encontrarán.



Ahora, si n es par, notemos que los extremos de cualquier segmento tienen asignados números con la misma paridad. Como Mafalda debe elegir n extremos de los $2n$ posibles, entonces debería escoger solo extremos con números asignados de la misma paridad o elegir dos extremos consecutivos. Pero, Mafalda debe elegir $\frac{n}{2}$ extremos con números pares asignados y $\frac{n}{2}$ con impares, por tanto, debe elegir dos extremos consecutivos. Sean $2k$ y $2k+1$ los extremos consecutivos que elige Mafalda.



Observemos que no hay extremos entre $2k$ y $2k+1$, entonces, las dos ranas correspondientes se encontrarán en la intersección de los segmentos, ya sea en el primer o en el último silbido. Con esto queda demostrado que si n es impar, Mafalda siempre puede lograr su objetivo y si n es par nunca lo logrará.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*

2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*

3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Fórmulas de Vieta)**.** *Sea $f = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polinomio con coeficientes complejos y sean r_1, r_2, r_3 las raíces de f. Entonces*

$$\begin{aligned} a_0 &= -r_1r_2r_3, \\ a_1 &= r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3, \\ a_2 &= -(r_1 + r_2 + r_3). \end{aligned}$$

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, $x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz). *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ley de senos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.

Teorema 14 (Ley de cosenos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.

Teorema 15 (Fórmula de Herón). *El área de un triángulo de lados a, b y c y semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ es igual a*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Teorema 16 (Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao). *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito). *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito). *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto).

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Teorema 22 (Ptolomeo). *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Rogelio Valdez Delgado (PRESIDENTE)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
valdez@uaem.mx

Víctor Manuel Barrero Calderón
Passport Health
barrero.victor@gmail.com

Julio César Díaz Calderón
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc94@hotmail.com

Héctor Raymundo Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Ignacio Barradas Bibriesca
Centro de Investigación en Matemáticas
barradas@cimat.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
josealfredocobian@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Enrique Treviño López
Lake Forest College
enriquetrevi_o@hotmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://ommenlinea.org/

¡Síguenos en facebook y en twitter!

http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas

@ommtw