TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2016, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Noviembre de 2016.

Contenido

Presentación IV

Artículos de matemáticas: Escogiendo la gráfica adecuada 1

Problemas de práctica 14

Soluciones a los problemas de práctica 17

Problemas de Entrenamiento 28
- **Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 4** 28
- **Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 1** 30

Concursos Estatales 36
- 2^a **Olimpiada Regional de Matemáticas del Sureste** 36

Problemas de Concursos Internacionales 38
- **Competencia Internacional de Matemáticas 2016** 38
- **XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas** 44

Soluciones de Concursos Internacionales 46
- **Competencia Internacional de Matemáticas 2016** 46
- **XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas** 55

Apéndice 62

Bibliografía 66

Directorio 68

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2016, Número 4

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su cuarto y último número del 2016. En este número encontrarás el artículo *Escogiendo la gráfica adecuada*, escrito por Jorge Garza Vargas, en el cual nos presenta algunas nociones de teoría de gráficas que se utilizan en la olimpiada de matemáticas y aplicaciones a problemas en donde a primera vista no es claro que la construcción de una gráfica pueda ser de ayuda en la solución de un problema.

En la sección *Concursos Estatales* encontrarás el examen de la segunda olimpiada regional del sureste. Aprovechamos para invitar a todos los delegados estatales a que nos envíen sus exámenes selectivos para publicarlos en la revista y de esta manera enriquecer el intercambio de materiales entre todos.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

En las secciones de concursos internacionales, hallarás los resultados de México en la Competencia Internacional de Matemáticas de este año y en la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, así como los respectivos exámenes y sus soluciones.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *problemas de práctica* y de *entrenamiento*, mismos que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la OMM.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1997. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2016-2017 y, para el 1° de julio de 2017, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 11 de noviembre de 2016 en Acapulco, Guerrero. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2016 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Brasil, julio de 2017) y a la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Argentina, septiembre de 2017).

De entre los concursantes nacidos en 2000 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2017).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) a realizarse en la India en julio de 2017.

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en Zurich, Suiza, en el mes de abril de 2017.

Escogiendo la gráfica adecuada

Por Jorge Garza Vargas

Nivel Intermedio

Tanto en la olimpiada como en investigación en matemáticas, la teoría de gráficas es de suma importancia dentro del área de combinatoria. Las gráficas, por ser estructuras abstractas y simples, pueden ser utilizadas para modelar y resolver problemas de diversa índole. En ocasiones la dificultad de un problema reside en "escoger la gráfica adecuada", es decir, abstraer la información del problema, transformándolo en un problema de teoría de gráficas. Una vez enunciado el problema en el lenguaje de gráficas, se puede hacer uso de toda la maquinaria desarrollada en esta teoría.
En este artículo se presentarán algunas nociones básicas de la teoría de gráficas utilizadas en la olimpiada de matemáticas, resultados elementales en el área, y aplicaciones a problemas en donde a primera vista no es claro que la construcción de una gráfica pueda ser de ayuda en la resolución del problema.

Una gráfica consiste de objetos de dos tipos, vértices y aristas. Los vértices son representados por puntos y las aristas por líneas que unen parejas de vértices. A lo largo de este texto solo consideraremos gráficas simples, es decir, gráficas en donde entre cualesquiera dos vértices hay a lo más una arista y en donde ninguna arista une a un vértice consigo mismo. En la figura 1 se muestran tres gráficas distintas.
Diremos que dos vértices son *adyacentes* si están unidos por una arista. En la gráfica A de la figura 1, u_1 y v_1 son adyacentes pues están conectados por la arista e_1. El *grado* de un vértice es la cantidad de vértices que son adyacentes a él. Entonces, en la figura 1 el grado de u_1 es 4, el de u_2 es 3 y el de u_3 es 2. Este simple concepto es suficiente para resolver el siguiente problema.

Problema 1. *Sea $n > 1$ un entero. Demuestra que en una fiesta de n personas hay dos personas que conocen a la misma cantidad de personas.*

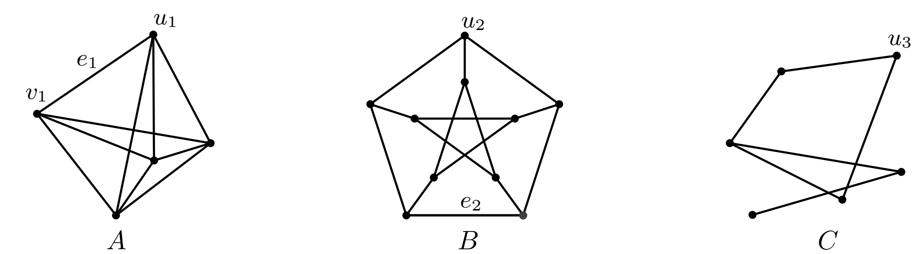


Figura 1: *u_1 es un vértice de la gráfica A y e_2 es una arista de la gráfica B. La gráfica A tiene 5 vértices y 10 aristas, la B tiene 10 vértices y 15 aristas, mientras que la C tiene 6 vértices y 6 aristas.*

Una forma de resolver este problema es construyendo una gráfica. Pondremos un vértice por cada persona en la fiesta y uniremos dos vértices por una arista si las personas asociadas a dichos vértices se conocen. El problema se traduce a la siguiente proposición:

Proposición 1. *Si G es una gráfica con n vértices, hay dos vértices en G que tienen el mismo grado.*

Demostración. Notemos que el grado de cualquier vértice en G es un número entre 0 y $n-1$. Además, si G tiene un vértice aislado, es decir un vértice con grado 0, G no puede tener otro vértice con grado $n-1$, pues este estaría conectado con todos los demás vértices, incluyendo al de grado 0, lo cual es una contradicción. Análogamente, si un vértice de G tiene grado $n-1$, todos los demás vértices tendrán un grado positivo. Por lo tanto, el grado de los vértices de G solo puede asumir $n-1$ valores distintos y dado que hay n vértices, por el principio de casillas, hay dos vértices en G con el mismo grado. $\square$

El Problema 1 puede ser resuelto directamente sin tener que recurrir al lenguaje de gráficas. En este caso, enunciar el problema en lenguaje de gráficas permite obtener un resultado más general, en donde la escencia del problema se esclarece. Por ejemplo, utilicemos la proposición anterior para obtener un resultado general sobre poliedros. Un *poliedro* es un sólido de caras planas poligonales. Diremos que dos caras son adyacentes si tienen un lado en común. Notemos entonces que la cantidad de lados de una cara en un poliedro es igual a la cantidad de caras a las que esta es adyacente. Con esta observación es evidente que el siguiente problema es equivalente al anterior.

Problema 2. *Demuestra que en cualquier poliedro hay dos caras con la misma cantidad de lados.*

Solución. Construyamos una gráfica en donde pondremos un vértice por cada cara del poliedro, dos vértices estarán conectados por una arista si sus caras asociadas son adyacentes. Observemos también que la gráfica tiene más de un vértice, pues todo poliedro tiene más de una cara. Con esto, como la cantidad de lados de una cara es igual al grado del vértice asociado en la gráfica, el problema se reduce a demostrar que en la gráfica hay dos vértices con el mismo grado, lo cual se sigue de la Proposición 1. □

La gráfica que construimos en la solución del problema anterior es conocida como la gráfica dual del poliedro. El dual de un poliedro es nuevamente un poliedro, en la figura 2 se muestran un tetraedro, un cubo y un icosaedro con sus respectivos duales. Con frecuencia, cuando se trabaja con un objeto conformado por regiones planas, construir una gráfica cuyos vértices representen a las regiones y cuyas aristas representen la adyacencia entre regiones, puede ser de suma utilidad. El siguiente problema fue tomado del libro *Putnam and Beyond* [2], en donde se presenta una solución sencilla utilizando inducción. La solución que presentaremos utilizando gráficas es mucho más técnica, sin embargo, además de ser estética, ejemplifica varios métodos estándar usados en la teoría de gráficas.

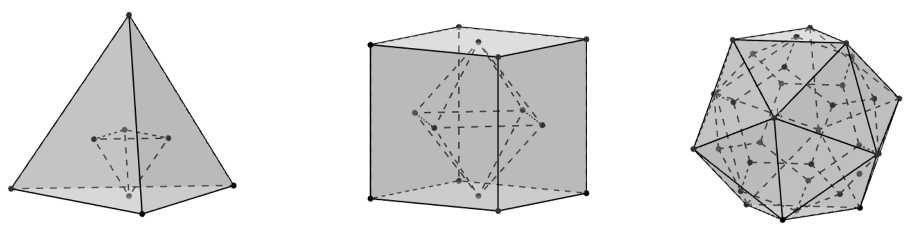


Figura 2: *A la derecha se puede apreciar que el dual del icosaedro es el dodecadedro, el dual del dodecaedro es nuevamente el icosaedro. En general, el dual del dual de un poliedro es el poliedro original. De los 5 sólidos platónicos, el tetraedro es el único autodual, esto se muestra en la imagen de la izquierda.*

Problema 3. *Sea n un entero positivo. En el plano se trazan n líneas de forma que no haya dos de ellas paralelas ni tres concurrentes, dividiendo al plano en varias regiones. Demuestra que es posible colorear estas regiones, utilizando solo blanco y negro, de manera que cualesquiera dos regiones adyacentes tengan distinto color.*

Para resolver este problema construyamos una gráfica G, en donde pondremos un vértice por cada región determinada por las n líneas y uniremos dos vértices con una arista si sus respectivas regiones son adyacentes. Notemos que si es posible colorear las regiones como se indica en el problema, entonces será posible colorear los vértices de G, de blanco y negro, de forma que no haya dos vértices adyacentes del mismo color.
En otras palabras, será suficiente demostrar que los vértices de G se pueden separar en dos conjuntos, de forma que cualesquiera dos vértices en un mismo conjunto no estén conectados por una arista. En teoría de gráficas, cuando un conjunto de vértices cumple

que ningún par de sus vértices está conectado por una arista, decimos que el conjunto es *independiente*. Si los vértices de una gráfica pueden separarse en dos conjuntos independientes, diremos que la gráfica es *bipartita*. En la figura 3, se muestran tres gráficas bipartitas.

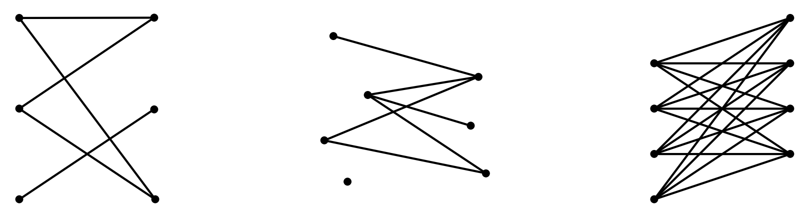


Figura 3: *La gráfica de la derecha tiene dos* componentes *(conjuntos independientes) de tamaño 4. Es claro que no hay otra manera de dividir a la gráfica en dos componentes independientes. En cambio, en la gráfica de enmedio, el vértice aislado puede pertenecer a cualquiera de los dos conjuntos.*

Entonces, el problema es equivalente a demostrar que G es una gráfica bipartita. En caso de que sea una noción nueva para el lector, se le recomienda intentar determinar cuáles de las gráficas en la figura 1 son bipartitas.

Necesitamos un criterio general que nos permita detectar si una gráfica es bipartita. Si el lector hizo el ejercicio de discernir a las gráficas bipartitas en la figura 1, seguramente habrá notado que los "caminos" en la gráfica proveen información importante en esta tarea.

Formalmente, dados dos vértices u y v en una gráfica, una *trayectoria* de u a v es una sucesión de vértices y aristas adyacentes en la gráfica, empezando en u y terminando en v. Una trayectoria se puede pensar como una caminata sobre las aristas de la gráfica, haciendo pequeñas pausas en los vértices. En la figura 4 se muestran tres copias de la misma gráfica, cada una ilustrando una trayectoria distinta. Cuando una trayectoria, no repite vértices ni aristas y empieza en el mismo vértice en el que termina, la trayectoria es llamada *ciclo*. Si en una gráfica se cumple que cualesquiera dos vértices están conectados por una trayectoria diremos que la gráfica es *conexa*.

Si una gráfica es bipartita, por definición se puede dividir en dos conjuntos independientes, me manera que si dos de sus vértices, u_1 y u_2, son adyacentes, estos deberán estar en conjuntos distintos. Luego, si u_2 es adyacente a otro vértice u_3, entonces estos dos vértices deberán pertenecer a conjuntos distintos en la partición y por lo tanto u_3 y u_1 estarán en el mismo conjunto, es decir, no podrán ser adyacentes. Si continuamos este razonamiento con más vértices, $u_4, u_5, \ldots$, nos daremos cuenta que los vértices de la forma u_{2k+1} no pueden estar conectados a u_1. Se sigue que si una gráfica es bipartita, entonces la gráfica no tiene ciclos de longitud impar. Resulta ser que esta propiedad también es suficiente para que una gráfica sea bipartita. Este resultado es conocido como el teorema de König y se resume a continuación. La demostración se deja como ejercicio al lector, pues es elemental y no muy complicada. En cualquier caso, el lector puede consultar la demostración en el libro *Combinatoria para Olimpidas* [8],

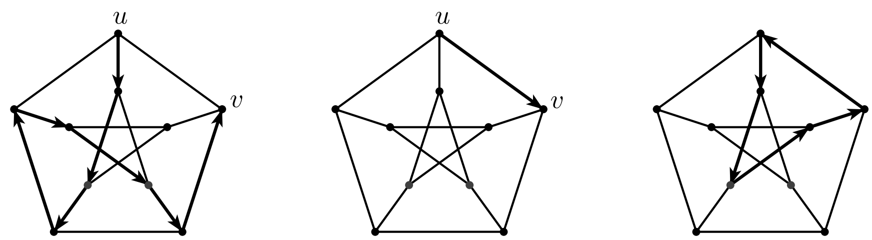


Figura 4: *Las primeras dos imágenes de la izquierda muestran una trayectoria de u a v, la primera de longitud 8, la segunda de longitud 1. La tercera imagen muestra un ciclo de tamaño 5.*

en donde se pueden estudiar otros resultados sobre gráficas bipartitas con aplicaciones interesantes.

Teorema 1 (Teorema de König)**.** *Una gráfica es bipartita si y solo si no tiene ciclos de longitud impar.*

Ahora estamos listos para concluir la solución del Problema 3.

Solución del Problema 3. Como se mencionó anteriormente, el problema se reduce a demostrar que G, la gráfica construida, es bipartita. Por el teorema de König, bastará ver que G no tenga ciclos impares. Tomemos un ciclo en G y sean $u_0, u_1, \ldots, u_k = u_0$ sus vértices. Demostraremos que el ciclo tiene longitud par. Recordemos que cada vértice corresponde a una región en el dibujo, por lo que el ciclo en G describe una caminata sobre las regiones del dibujo. Cada arista en el ciclo está asociada a una adyacencia entre regiones y dicha adyacencia está delimitada por una de las n rectas trazadas, entonces, a cada arista en el ciclo le podemos asociar una única recta en el dibujo. Ahora tomemos una de las n rectas, digamos ℓ, y observemos la cantidad de aristas a las que dicha recta fue asociada. Para esto llamemos F a la región asociada al vértice u_0. Notemos que cada arista asociada a ℓ representa un *cruce* sobre la recta cuando hacemos el recorrido en el dibujo. Como el recorrido empieza en F, la primer parte del recorrido está contenida en el semiplano determinado por ℓ que contiene a F, luego, en el primer *cruce* quedamos en el semiplano que no contiene a F. Así sucesivamente, después de los cruces impares, el recorrido transcurre en el semiplano que no contiene a F. Como el recorrido termina en F, al final se habrán hecho una cantidad par de cruces. Por lo tanto, cada recta en el dibujo está asociada a una cantidad par de aristas. Como toda arista está asociada a una única recta, concluimos que hay una cantidad par de aristas en el ciclo y por lo tanto el ciclo es par. $\square$

El resultado del problema anterior es parecido en naturaleza al famoso *teorema de los cuatro colores*. Este teorema establece que cualquier mapa, en donde los países son regiones conexas, puede ser coloreado utilizando solo cuatro colores, de manera que no

haya dos países colindantes con el mismo color. Este teorema, a pesar de poder enunciarse en términos elementales, duró más de cien años sin resolverse. Dado un mapa, la gráfica obtenida al poner un vértice por cada país y una arista por cada colindancia es la gráfica dual del mapa. Con esto, el problema se reduce a demostrar que en cualquier gráfica proveniente de un mapa, se pueden colorear los vértices, utilizando solo cuatro colores, de manera que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color. Es fácil demostrar que las gráficas que provienen de un mapa son precisamente aquellas que se pueden dibujar en el plano de manera que sus aristas no se intersecten. A las gráficas que cumplen dicha propiedad se les llama *gráficas planas*. A la mínima cantidad de colores necesarios para colorear los vértices de una gráfica de modo que no haya dos adyacentes del mismo color se le conoce como *número cromático*. Por ejemplo, las gráficas bipartitas tienen número cromático menor o igual a dos. Entonces, el teorema de los cuatro colores es equivalente a la proposición de que todas las gráficas planas tienen número cromático menor o igual a cuatro. La primera demostración de la proposición anterior utilizó fuertemente herramientas computacionales. Una demostración reciente, más esclarecedora hace uso de teoría desarrollada en el área de lógica [4].
Notemos que la gráfica C de la figura 5, en donde se muestran tres gráficas planas, es equivalente a la gráfica C presentada en la figura 1, sin embargo, la primera vez que esta gráfica fue dibujada, sus aristas sí se intersectaban. Aunque en este caso fue posible volver a dibujar la gráfica de forma *plana*, hay gráficas para las cuáles esto es imposible. Se deja como ejercicio al lector demostrar que la gráfica A de la figura 1 no es una gráfica plana.

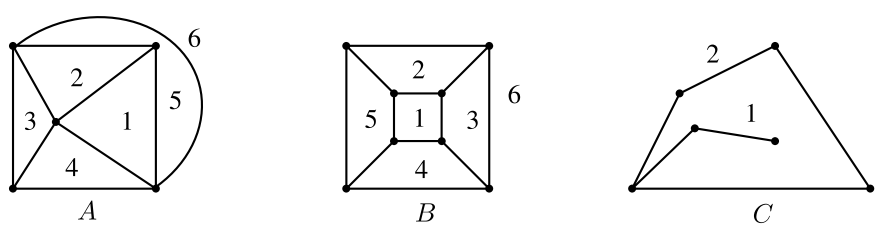


Figura 5: *Hemos numerado las caras en cada gráfica plana.*

Los resultados sobre mapas y gráficas planas son numerosos. Nosotros nos limitaremos a presentar un sencillo resultado probado por uno de los más grandes matemáticos de la historia, Leonard Euler.

Teorema 2 (Identidad de Euler)**.** *Sea G una gráfica plana y conexa. Sea V su número de vértices, A su número de aristas y C su número de caras. Entonces se cumple que $V + C - A = 2$.*

A la invariante $V + C - A$ se le conoce como la característica de Euler-Poincaré y es de suma importancia en el estudio de superficies. Por ejemplo, notemos que los poliedros convexos pueden ser representados como gráficas planas. La gráfica B de la figura 5 es equivalente al cubo. En un inicio podrá resultar extraño el considerar la parte exterior de las gráficas planas como una cara, como se muestra en la figura 5, esto viene del hecho de que para el teorema de Euler en realidad estamos pensando a las gráficas planas dentro de la superficie de una esfera, en vez de en un plano. Dada una esfera, podemos hacer una perforación en uno de sus polos e irla extendiendo poco a poco en un plano. La figura 6 muestra al cubo pensado como una división de la superficie de una esfera en regiones poligonales. Comparando esto con la gráfica plana en la figura 5 que representa al cubo, es claro que la parte "exterior" de la gráfica no es más que la parte restante de la esfera que nos queda cuando esta se convierte en un plano con el procedimiento descrito anteriormente.

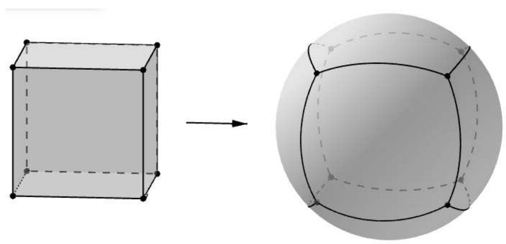


Figura 6: El cubo se puede pensar como un mapa en una esfera.

La mayoría de los poliedros a los que estamos acostumbrados se pueden pensar como una división de la esfera en regiones poligonales. Sin embargo, al dividir otros tipos de superficies en polígonos, como la dona (formalmente el *toro*), obtenemos poliedros de una naturaleza disinta. En la figura 7 se muestra un poliedro toroidal. El lector podrá verificar que en este caso el número $V + C - A$ no es dos, sino 0. De hecho, cualquier poliedro toroidal cumple que su característica es cero. Entonces, la característica de Euler-Poincaré es capaz de discernir entre mapas en el toro y mapas en la esfera. Un desarrollo más detallado, accesible y ameno, se puede encontrar en el capítulo 12 del libro *The Shape of Space* [10].

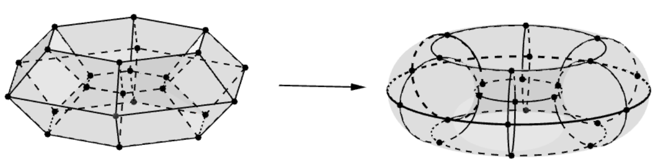


Figura 7: Notemos que en este caso $V = 24, C = 24$ y $A = 48$. Por lo tanto, $V + C - A = 0$.

Habiendo visto que el Teorema 2 es también válido para poliedros, no es difícil demostrar que existen exactamente cinco poliedros regulares (convexos). Es decir, los sólidos platónicos (el tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) son los únicos poliedros regulares. Tanto la demostración del teorema anterior como el resultado sobre la caracterización de sólidos platónicos pueden ser consultados en el libro *Combinatoria Avanzada* [7], en la sección de gráficas planas.

En el Teorema 1 se dio una caracterización de las gráficas bipartitas en términos de

sus ciclos. A partir de propiedades locales de la gráfica (la paridad de sus ciclos) se concluyó una propiedad global (la propiedad de ser bipartita). En la teoría de gráficas es común encontrar resultados que a partir de propiedades globales, por ejemplo la cantidad de aristas en la gráfica, se obtengan resultados estructurales. Es claro que si una gráfica tiene "demasiadas" aristas, no puede ser bipartita. ¿Cuál es la máxima cantidad de aristas que puede tener una gráfica bipartita con n vértices?
Supongamos que G es una gráfica bipartita de n vértices que se puede dividir en dos conjuntos independientes A y B. Supongamos que A tiene a vértices y que B tiene b. Entonces $n = a+b$. Como A es un conjunto independiente sabemos que no hay ninguna arista entre los vértices de A, análogamente con el conjunto B. Es decir, cualquier arista en la gráfica conecta a un vértice de A con uno de B. En el caso extremo en el que todos los vértices de A están conectados con todos los vértices de B, la gráfica G tendrá ab aristas. Utilizando la desigualdad entre media aritmética y media geométrica obtenemos que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{n}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad ab \leq \frac{n^2}{4}.$$

Por lo tanto, la cantidad de aristas de G es menor o igual a $\frac{n^2}{4}$. Como G es una gráfica bipartita arbitraria, podemos concluir que cualquier gráfica bipartita de n vértices tiene a lo más $\frac{n^2}{4}$ aristas, obteniendo la siguiente proposición.

Proposición 2. *Sea G un gráfica de n vértices. Si G tiene más de $\frac{n^2}{4}$ aristas entonces no es una gráfica bipartita.*

De hecho, con un argumento más complejo, podemos obtener un resultado más fuerte. Esta demostración, por ser más técnica que el resto del material presentado en el artículo, puede ser omitida en una primera lectura. Sin embargo, por ser un ejemplo canónico de la *teoría de gráficas extremales*, se recomienda revisarlo eventualmente.

Teorema 3 (Teorema de Turán)**.** *Sea G una gráfica con n vértices. Si G tiene más de $\frac{n^2}{4}$ aristas entonces G tiene un ciclo de tamaño tres.*

Demostración. Supongamos que G no tiene ningún ciclo de tamaño 3. Demostraremos que G tiene menos de $\frac{n^2}{4}+1$ aristas. Sean $v_1,\dots,v_n$ los vértices de G, y E la cantidad de aristas. Para cada $i=1,\dots,n$ sea d_i el grado del vértice v_i. Notemos que si sumamos todos los grados, cada arista "aportará" dos unidades a la suma. Entonces

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2E. \tag{1}$$

Ahora tomemos dos vértices adyacentes v_i y v_j. Por hipótesis, no hay un ciclo de tamaño 3, entonces no puede haber un vértice u que sea adyacente tanto a v_i como a v_j. Por lo tanto, el conjunto de vértices adyacentes a v_i es ajeno al conjunto de vértices adyacentes a v_j. Como dentro de los $n-2$ vértices restantes (los vértices que no son ni v_i ni v_j), v_i tiene $d_i - 1$ vecinos y v_j tiene $d_j - 1$ entonces $(d_i-1)+(d_j-1) \leq n-2$, de donde $d_i + d_j \leq n$. Ahora veamos que si por cada pareja de vértices adyacentes, v_i y v_j, tomamos el término $d_i + d_j$ y sumamos todos los términos, tendremos E términos en la suma, cada uno acotado por n, obteniendo que la suma está acotada por nE. Por otro lado, para cada i se tiene que d_i aparecerá tantas veces en la suma como aristas saliendo de v_i, entonces la suma será igual a la suma de todos los d_i^2. Esto se resume en la siguiente expresión

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{v_i, v_j \text{ adyacentes}} d_i + d_j \leq nE \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) \leq E \tag{2}$$

Utilizando la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática, obtenemos

$$\frac{4E^2}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 \leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) \leq E, \tag{3}$$

donde la primera igualdad se sigue de la ecuación (1). De la expresión (3), se sigue que $\frac{4E^2}{n^2} \leq E$ y por lo tanto $E \leq \frac{n^2}{4}$, como se quería demostrar. $\square$

El caso en el que n es par, la gráfica bipartita cuyos conjuntos independientes tienen $\frac{n}{2}$ vértices cada uno y en donde cualesquiera dos vértices en conjuntos distintos están conectados por una arista, tiene exactamente $\frac{n^2}{4}$ aristas. Como la gráfica es bipartita, no tiene ciclos pares, en particular no tiene ciclos de tamaño tres, por lo tanto la cota anterior no puede ser mejorada. Es natural preguntarse si podemos enunciar un teorema que nos indique cuántas aristas son “suficientes” para garantizar la existencia de ciclos más grandes. De hecho podemos garantizar algo más fuerte, la existencia de conjuntos de vértices en donde cualquier par está conectado por una arista. Diremos que una gráfica es *completa* si cualesquiera dos de sus vértices están conectados por una arista.

Teorema 4 (Teorema de Turán generalizado)**.** *Sea G una gráfica de n vértices y sea r un entero positivo. Si G tiene más de $\frac{(r-2)n^2}{2(r-1)}$ aristas, entonces hay una subgráfica completa de tamaño r, es decir, un conjunto de r vértices en G con la propiedad de que cualesquiera dos vértices en el conjunto están conectados por una arista.*

En el caso en el que $r = 3$, se obtiene el Teorema 3. Se deja como ejercicio al lector demostrar que la cota dada en el teorema anterior es la mejor que se puede dar. Es decir, para todo n, existe una gráfica con $\lfloor \frac{(r-2)n^2}{2(r-1)} \rfloor$ aristas que cumple que entre cualesquiera r vértices hay dos que no están conectados por una arista. Diversas demostraciones del último teorema pueden ser consultadas en el artículo *Turán’s Graph Theorem* [1].
Ahora utilizaremos este resultado para resolver uno de los problemas de la competencia internacional de matemáticas para alumnos de secundaria (IMC) del año 2011.

Problema 4. *Desde un punto O se trazan 15 rayos. ¿Cuál es la mayor cantidad de ángulos obtusos que estos rayos pueden determinar?*
Nota: A cada pareja de rayos se le asocia el ángulo que determinan que mide menos de $180°$.

Solución. Construyamos una gráfica G poniendo un vértice por cada rayo y uniendo dos vértices por una arista cuando el ángulo determinado por los respectivos rayos es obtuso. Notemos que entre cualesquiera cuatro rayos que tomemos habrá dos de ellos determinando un ángulo agudo. Por lo tanto, en G no habrá subgráficas completas de tamaño 4. Si E es la cantidad de aristas en G, aplicando la versión general del teorema de Turán con $r = 4$ y $n = 15$ obtenemos

$$E \leq \frac{4-2}{2(4-1)} 15^2 = 75.$$

Por lo tanto, G tiene a lo más 75 aristas y en el dibujo a lo más hay 75 ángulos obtusos. Para ver que es posible tener 75 ángulos agudos, tomemos un triángulo equilátero con circuncentro en O. Para cada vértice del triángulo trazamos cinco rayos "muy parecidos" al rayo que une a O con el respectivo vértice. Es claro que en este acomodo la cantidad de ángulos obtusos es $3 \cdot 25 = 75$. □

Cuando discutimos el teorema de los cuatro colores se habló sobre colorear vértices. El colorear aristas también es una técnica común y poderosa. Colorear es una forma de clasificar. Por ejemplo, cuando construimos gráficas en donde los vértices representan ciertos objetos que están relacionados entre sí, si las relaciones entre dichos objetos se puede clasificar de manera útil, es conveniente colorear las aristas. Aristas del mismo color indicarán que las relaciones entre los respectivos vértices, o los objetos asociados a dichos vértices, son parecidas en algún sentido. Ilustraremos esto con el siguiente problema tomado del libro *A Course in Combinatorics* [6].

Problema 5. *Del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se escogen n subconjuntos distintos. Demuestra que existe un entero $1 \leq k \leq n$ que cumple que si a cada uno de los n subconjuntos se le retira el elemento k, los subconjuntos resultantes siguen siendo distintos.*

Solución. Sean $A_1, \ldots, A_n$ los subconjuntos. Construyamos una gráfica G con vértices $v_1, \ldots, v_n$ en donde cada vértice v_i representará al conjunto A_i. Utilizaremos n colores para colorear las aristas de la gráfica. Dados dos vértices, v_i y v_j, pondremos una arista de color k entre ellos si al eliminar el elemento k los conjuntos A_i y A_j se vuelven iguales. Es claro que entre dos vértices hay a lo más una arista. El problema se reduce a demostrar que hay un color que no se utilizó en la gráfica.
Ahora veamos que podemos eliminar aristas en G sin que la cantidad de colores utilizados se altere y de forma que eventualmente la gráfica ya no tenga ciclos. Tomemos un ciclo $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r}$, con $v_{i_1} = v_{i_r}$. Sea k un color que aparece en las aristas del ciclo. Observemos la primer arista de color k en el ciclo y supongamos que es una arista con extremos v_{i_j} y $v_{i_{j+1}}$. Entonces los conjuntos A_{i_j} y $A_{i_{j+1}}$ difieren en el elemento k. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $k \in A_{i_j}$ entonces $k \notin A_{i_{j+1}}$. Como $k \in A_{i_j}$ si recorremos el ciclo empezando en v_{i_j} y en la dirección hacia $v_{i_{j+1}}$, en el recorrido eventualmente aparecerá nuevamente un conjunto que tenga a k como elemento y la primera vez que eso suceda también aparecerá una arista de color k. Por lo tanto, borrando la arista entre v_{i_j} y $v_{i_{j+1}}$ garantizamos dos cosas, la cantidad de colores utilizados en la gráfica permanece constante, y la cantidad de ciclos en la gráfica

se reduce en uno. Continuando así llegaremos a una gráfica sin ciclos. Se deja como ejercicio al lector demostrar que una gráfica de n vértices sin ciclos tiene a lo más $n-1$ aristas. Como la gráfica final tiene la misma cantidad de colores que la original y tiene a lo más $n-1$ aristas, entonces la gráfica original tenía a lo más $n-1$ colores. Por lo tanto hay un color que no aparece en G y la demostración está concluida. $\square$

Espero que después de esta breve exposición el lector haya quedado convencido de la versatilidad de la teoría de gráficas, sin embargo esto solo es el comienzo. Recientemente, se ha encontrado un puente entre la teoría de gráficas extremal y la teoría de gráficas aleatorias. Con herramientas extraídas de dichos terrenos, Terence Tao y Ben Green dieron una brillante demostración de que para todo entero k, existe una sucesión de k primos en progresión aritmética [3]. Cuando se colorean las aristas de una gráfica, el estudio de la existencia de subgráficas específicas que cumplen que todas sus aristas tienen el mismo color, ha evolucionado en la teoría de Ramsey. El famoso matemático Paul Erdős y George Szekeres utilizaron los resultados de la teoría de Ramsey para concluir un bello teorema en el área de la geometría combinatoria, conocido como el Problema del Final Feliz [5]. En el área de politopos abstractos se utilizan gráficas para estudiar la simetría de mapas en "superficies" de cualquier dimensión y cualquier característica de Euler [11]. La teoría de gráficas está emergiendo en muchas disciplinas y la olimpiada de matemáticas es un excelente punto de partida para explorarla.
A continuación presentamos 10 problemas que pueden ser resueltos utilizando los conceptos desarrollados en este artículo.

Agradecimientos

Agradezco a Zyanya Tanahara, Rubicelia Vargas y Jorge Garza Olguín por sus valiosos comentarios sobre la escritura y presentación de este texto.

Problemas

1) Demuestra que en cualquier conjunto de 6 números se pueden escoger 3 de forma que el producto de cualesquiera dos es racional, o escoger 3 de manera que el producto de cualesquiera dos de ellos sea irracional.

2) (OMM 2014, versión alternativa) Cada uno de los números del 1 al 2015 se ha coloreado de verde o rojo. Cambiar el color de un número es pasarlo a verde si era rojo, y pasarlo a rojo si era verde.

   Diremos que dos enteros positivos m y n son cuates si alguno de los números $\frac{m}{n}$ o $\frac{n}{m}$ es un número primo. Un *paso* consiste en elegir dos números que sean cuates y cambiar el color de cada uno de los números.

   Muestra que después de realizar algunos pasos es posible hacer que todos los números del 1 al 2014 sean verdes.

3) (Teorema de Euler) Sea G una gráfica conexa que cumple que el grado de cada uno de sus vértices es par. Demuestra que sin importar en cuál vértice se comience, es

posible hacer un recorrdio moviéndose por los vértices y aristas de la gráfica, de manera que cada arista se use exactamente una vez.

4) Sea S un conjunto de $2n$ números. Una pareja de números se dice buena si su diferencia es mayor a 1 pero menor a 2. ¿Cuál es la máxima cantidad de parejas buenas que se pueden formar con elementos de S?

5) (Selectivo UNAM, IMC 2014) Se toman 2016 puntos en el plano de forma que no hay tres de ellos colineales. Se trazan todos los segmentos entre ellos. Muestra que alguna de las siguientes afirmaciones es cierta:

   - Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro utilizando únicamente segmentos de longitud racional.
   - Se puede llegar de cualquier punto a cualquier otro utilizando únicamente segmentos de longitud irracional.

6) Sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ se toma un conjunto S de 2016 puntos de manera que para cualquier hexágono con vértices en S se cumple que sus diagonales no son concurrentes. Cada pareja de puntos en S se une por un segmento. ¿En cuántas regiones queda dividido el interior de $\mathcal{C}$?

7) (OMM 2013) Un cubo de $n \times n \times n$ está construido con cubitos de $1 \times 1 \times 1$, algunos negros y otros blancos, de manera en que cada uno de los subprismas de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ hay exactamente dos cubitos negros y entre ellos hay un número par (posiblemente 0) de cubitos blancos intermedios. Muestra que es posible sustutuir la mitad de los cubitos negros por cubitos blancos para que en cada subprisma de $n \times 1 \times 1$, de $1 \times n \times 1$ y de $1 \times 1 \times n$ haya exactamente un cubito negro.

8) (Teorema de Dirac) Sea $n \geq 3$. En un congreso hay n matemáticos. Si se sabe que cada uno de ellos conoce a al menos $\frac{n}{2}$ de los presentes, demuestra que durante la cena es posible sentarlos a todos alrededor de una mesa, de manera que cada quien conozca a las dos personas sentadas a su lado.

9) (OMM 2016) En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números del $n + 1$ al $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadritos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los números que aparecen en esos cuadritos.
   Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadritos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

10) (Lista corta de IMO 2001) Definimos un k-clan como un grupo de k personas en el cual cualesquiera dos se conocen. En una fiesta se cumple que cualquier par de 3-clanes tiene al menos una persona en común y que no hay 5-clanes. Demuestra que es posible retirar a dos personas de la fiesta de modo que esta se quede sin 3-clanes.

11) (OMM 2009) En una fiesta de n personas se sabe que entre cualesquiera 4 hay 3 que se conocen dos a dos o hay 3 que ninguno de ellos conoce a los otros. Demuestra que las personas de la fiesta se pueden separar en 2 cuartos de manera que en uno todos se conozcan y en otro no haya dos que se conozcan.

Bibliografía

1) Aigner M., *Turán's Graph Theorem*, The American Mathematical Monthly, vol. 102, 1995, pp. 808-816.

2) Andrescu T., Gelca R., *Putnam and Beyond*, Springer, 2007.

3) Colon D., Fox J., Zhao Y., *The Green-Tao Theorem: An Exposition*, EMS Surveys in Mathematical Sciences, 2014, vol. 1, pp. 249-282.

4) Gonthier G., *Formal Proof, The Four-Color Theorem*, Notices of the AMS, vol. 55, 2008.

5) Morris W., Soltan V., *The Erdös Szekeres Problem on Points in Convex Position- A Survey*, Bulletin of The American Mathematical Society, 2000, vol. 37, pp. 437-458.

6) Lint J.H., Wilson R.M., *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Second Edition, 2001.

7) Pérez Seguí M.L., *Combinatoria Avanzada*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a Edición, 2010.

8) Soberón P., *Combinatoria para Olimpiadas*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 1a Edición, 2010.

9) Tang. A., *IMO Training 2008: Graph Theory*.

10) Weeks J. R., *The Shape of Space*, Marcel Dekker Inc., Second Edition.

11) Wilson S., *Maniplexes: Part 1: Maps, Polytopes, Symmetry and Operators*. Symmetry 4, 2012, pp.265-275.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2016.
Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Determina el mayor valor posible del máximo común divisor de dos números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sean P, Q puntos en BC tales que $\angle QAC = \angle ABC$ y $\angle PAB = \angle ACB$. Extendamos AP hasta M de modo que P sea el punto medio de AM y extendamos AQ hasta N de modo que Q sea el punto medio de AN. Si T es el punto de intersección de BM y CN, demuestra que $ABTC$ es un cuadrilátero cíclico.

Problema 3. Sea S la suma de todos los enteros k menores que 10^6 tales que $\lfloor \sqrt{k} \rfloor \mid k$. Determina el valor de S.

Problema 4. Cada diagonal de un pentágono convexo es paralela a un lado del pentágono. Demuestra que la razón entre cualquier diagonal con su correspondiente lado paralelo es la misma para cada una de las diagonales.

Problema 5. Demuestra que es imposible que existan cuatro coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

con $0 \leq k < k+3 \leq n$ que estén en progresión aritmética.

Problema 6. Demuestra que

$$2016\left(2017^{\frac{1}{2016}}-1\right)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2016}.$$

Problema 7. Sean a, b y c enteros tales que

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{2c}{b+c}.$$

Demuestra que el producto bc es un cuadrado.

Problema 8. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles con $\angle CAB = 90°$ y $AB = AC$. Se consideran puntos M y P sobre AB de forma que $AM = BP$. Sea Q un punto sobre BC tal que AQ es perpendicular a CM. Demuestra que $\angle CQA = \angle PQB$.

Problema 9. Decimos que dos números reales a y b son *compatibles* si $a^2 + b$ y $b^2 + a$ son ambos números racionales. Demuestra que si a y b son compatibles y $\frac{a}{b}$ es un número racional distinto de 0 y 1, entonces a y b son números racionales.

Problema 10. Sean a_1, a_2, a_3, a_4 las longitudes de los lados de un cuadrilátero y s su semiperímetro. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{s+a_i}\leq\frac{2}{9}\sum_{1\leq i<j\leq 4}\frac{1}{(s-a_i)(s-a_j)}.$$

Problema 11. Sea X un conjunto con n elementos. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{100}, A_{101}$ subconjuntos de X tales que para cualesquiera 50 de ellos, su unión tiene más de $\frac{50}{51}n$ elementos. Demuestra que de estos subconjuntos es posible escoger 3 tales que por parejas tienen intersección no vacía.

Problema 12. Para cada entero $n \geq 3$ demuestra que existen n enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tales que $a_1!a_2!\cdots a_{n-1}! = a_n!$.

Problema 13. Determina todos los números reales x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}2y &= x+\frac{1}{x},\\ 2z &= y+\frac{1}{y},\\ 2x &= z+\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Problema 14. Sea $ABCDE$ un pentágono cíclico con AC paralela a DE. Denotemos con M al punto medio de BD. Si $\angle AMB = \angle BMC$, demuestra que BE biseca al segmento AC.

Problema 15. Determina el mínimo número de colores necesarios para que se cumpla que los enteros $1, 2, 3, \ldots, 2016$ puedan ser coloreados de tal forma que no haya tres enteros $a < b < c$ del mismo color con la propiedad de que a divide a b y b divide a c.

Problema 16. Sean a, b, c, d números reales tales que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$. Demuestra que

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} + \frac{b+c}{b^2 - bc + c^2} + \frac{c+d}{c^2 - cd + d^2} + \frac{d+a}{d^2 - da + a^2} \leq 2.$$

Problema 17. Demuestra que para todo entero $a \geq 4$ existe una infinidad de enteros positivos n libres de cuadrados que dividen a $a^n - 1$.

Problema 18. En un almacén hay varios recipientes. Los 33 más livianos pesan, entre todos, $\frac{8}{23}$ del peso total; los 30 más pesados pesan, entre todos, $\frac{22}{69}$ del peso total. ¿Cuántos recipientes hay en total?

Problema 19. Denotemos por $k_i(O_i, r_i)$, con $i = 1, 2, 3$, a tres circunferencias que no se intersecan, que son tangentes a los lados de un ángulo y que cumplen que $r_1 < r_2 < r_3$. Uno de los lados es tangente a k_1 y a k_3 en los puntos A y B; el otro lado es tangente a k_2 en el punto C. Sean K la intersección de AC y k_1, L la intersección de AC y k_2, M la intersección de BC y k_2, y N la intersección de BC y k_3. Ahora, sean P, Q, R y S, las intersecciones de las rectas AM y BK, AM y BL, AN y BK, y AN y BL, respectivamente. Las rectas que pasan por C y P, Q, R y S intersecan a la recta AB en los puntos X, Y, Z, T, respectivamente. Demuestra que $XZ = YT$.

Problema 20. En un grupo de n personas hay tres que son familiares y cada una de las tres es familiar de al menos la mitad de todas las personas del grupo. Encuentra el mínimo número posible de tercias de personas de tal forma que las tres sean familiares.

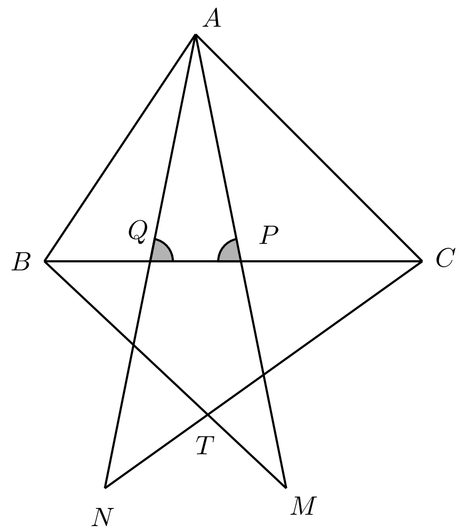
Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de la sección anterior. Sin embargo, no te recomendamos consultarlas antes de tener tu propia solución o por lo menos no sin haberle dedicado bastante tiempo a cada problema. Ten en cuenta que la clave para mejorar tus capacidades está en la perseverancia y el esfuerzo.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas, tan solo son ejemplos que muestran el tipo de razonamiento que busca estimular la olimpiada. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. El máximo común divisor de dos enteros es divisor de cada uno de los dos números, esto es, cada uno de los dos números es múltiplo de su máximo común divisor. Entonces, queremos el mayor valor de d que tenga dos múltiplos positivos menores o iguales que 2016. Como el mayor de los dos múltiplos de d es mayor o igual que $2d$, tenemos que $2d \leq 2016$, esto es, $d \leq 1008$. Como 1008 y $2 \cdot 1008 = 2016$ son ambos menores o iguales que 2016, el valor buscado es 1008.

Solución del problema 2. La igualdad de ángulos del problema implica que los triángulos ACQ y BAP son semejantes, de modo que $\angle AQP = \angle APQ$. Además, $\frac{BP}{AP} = \frac{AQ}{CQ}$. Como $AP = PM$ y $AQ = QN$, se sigue que $\frac{BP}{PM} = \frac{QN}{CQ}$.
Como $\angle AQP = \angle APQ$, los triángulos BPM y NQC son semejantes, y de este modo $\angle PCT = \angle PMB$. Por lo tanto, el cuadrilátero $PCMT$ es cíclico. Finalmente, como $\angle MTC = \angle MPC = \angle BPA = \angle BAC$, concluimos que el cuadrilátero $ACTB$ es cíclico.



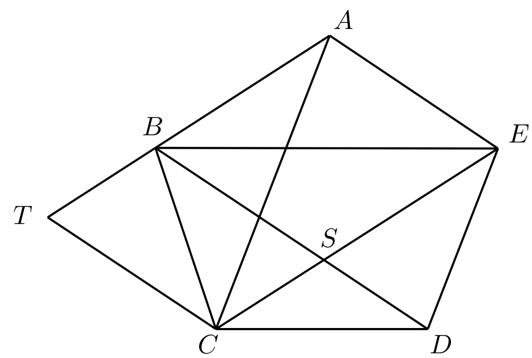
Solución del problema 3. Para cualquier entero k podemos hallar un entero n tal que $n^2 \leq k < (n+1)^2$, lo cual implica que $n = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. Nos interesa sumar todos los números k en el rango $n^2 \leq k \leq (n+1)^2 - 1$ que sean múltiplos de n.
Por otro lado, tenemos que $(n+1)^2 - 1 = n(n+2) + 1 - 1 = n(n+2)$, de manera que los valores de k que nos interesan, para un n fijo, son n^2, $n(n+1)$ y $n(n+2)$ únicamente.
Observemos que $n^2 + n(n+1) + n(n+2) = 3n^2 + 3n$. Como $k < 10^6$, se sigue que $n < 10^3$ y por ello el valor de S es igual al valor de la suma

$$\sum_{n=1}^{999} 3n^2 + 3n,$$

la cual, usando las fórmulas de sumas de cuadrados[2] y de Gauss[3], obtenemos que es igual, después de simplificar, a $999 \cdot 1000 \cdot 1001$.

Solución del problema 4. Sea $ABCDE$ el pentágono y sea S el punto de intersección de EC y BD. Construyamos T en la prolongación de AB tal que $BSCT$ sea un paralelogramo. Denotemos las longitudes de AB por a, AE por b, SC por d y sea $x = \frac{d}{a}$.
Por el paralelismo de la hipótesis, los triángulos DSC y EAB son semejantes, por lo que $\frac{SD}{d} = \frac{b}{a}$ y de aquí $SD = xb$. Por construcción del paralelogramo, tenemos que $SE = a$, $TC = b$ y $BT = d$, puesto que $ABSE$ y $ATCE$ también son paralelogramos.

[2]Suma de cuadrados: $\sum_{n=1}^{k} n^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.
[3]Suma de Gauss: $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$.



Por otro lado, los triángulos ATC y ESD son semejantes, de manera que $\frac{a+d}{b} = \frac{a}{xb}$. De aquí, $x = \frac{a}{a+d} = \frac{1}{1+x}$ y por tanto $x(x+1) = 1$ que tiene por raíz positiva $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Finalmente, tenemos que $\frac{EC}{BA} = \frac{a+d}{a} = 1 + \frac{d}{a} = 1 + x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, y por tanto, las razones son todas iguales a esta constante por un argumento similar en las rotaciones.

Solución del problema 5. Supongamos que sí existen esos coeficientes binomiales, sean $\binom{n}{k} = a$ y la diferencia común igual a d. Entonces, $\binom{n}{k+1} = a + d$, $\binom{n}{k+2} = a + 2d$ y $\binom{n}{k+3} = a + 3d$. Por la identidad de Pascal[4] tenemos que $\binom{n+1}{k+1} = 2a + d$, $\binom{n+1}{k+2} = 2a+3d$ y $\binom{n+1}{k+3} = 2a+5d$, de modo que $\binom{n+2}{k+2} = 4a+4d$ y $\binom{n+2}{k+3} = 4a+8d$. Luego,

$$\binom{n+2}{k+2} = 4\binom{n}{k+1} \quad \text{y} \quad \binom{n+2}{k+3} = 4\binom{n}{k+2}.$$

Desarrollando los factoriales en la primera relación, obtenemos

$$\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!} = \frac{4n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

y tras hacer cancelaciones obtenemos $(n+1)(n+2) = 4(k+2)(n-k)$. El mismo proceso con la segunda relación nos da $(n+2)(n+1) = 4(k+3)(n-k-1)$.
De aquí, $(k+2)(n-k) = (k+3)(n-k-1)$. Desarrollando y cancelando, obtenemos que $n = 2k+3$. Sin embargo, sustituyendo $k = n$ en $\binom{n+2}{k+2} = 4\binom{n}{k+1}$, obtenemos que $1 = 0$ lo que es una contradicción, con lo cual demostramos que es imposible que haya cuatro coeficientes binomiales en progresión aritmética, como se pedía.

Solución del problema 6. Demostraremos en general que

$$n\left((n+1)^{\frac{1}{n}} - 1\right) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

[4] *Identidad de Pascal:* Para $n \geq 1$ y para cualquier entero k se tiene que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Se tiene la siguiente convención para el coeficiente binomial: $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ o $k > n$.

que podemos reescribir como

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}} < n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

Ahora, la raíz n-ésima del lado izquierdo sugiere fuertemente el uso de la desigualdad de las medias aritmética y geométrica[5], lo cual se refuerza si pasamos dividiendo el factor n:

$$\sqrt[n]{n+1} < \frac{n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}.$$

Notemos que en el lado derecho hay $n+1$ sumandos en vez de n. Nuestro objetivo ahora es reorganizar la suma de modo que solo haya n sumandos cuyo producto sea igual a $n+1$, pues en este caso podemos aplicar directamente la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.
Observemos que

$$\begin{aligned} n+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} &= (1+1)+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{2}{1}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}\right). \end{aligned}$$

El resultado se sigue ahora de la desigualdad MA-MG.

Solución del problema 7. Si $b=0$ o $c=0$, entonces bc es un cuadrado. Si $a=0$, entonces de la relación

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}=\frac{2b}{b+c}. \tag{4}$$

se sigue que $b=c$, de donde bc es un cuadrado. Por lo tanto, podemos asumir que todos los números a, b y c son diferentes de 0. Entonces, la relación (4) se puede reescribir como

$$\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}}+\frac{1}{1+\frac{a^2}{c^2}}=\frac{2}{1+\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c}}.$$

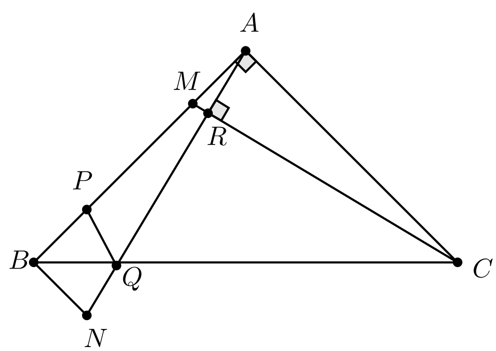
Haciendo $x=\frac{b}{a}$, $y=\frac{a}{c}$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{2}{1+xy} \\ \Leftrightarrow\quad & (2+x^2+y^2)(1+xy)=2(1+x^2)(1+y^2) \\ \Leftrightarrow\quad & 2+x^2+y^2+2xy+x^3y+xy^3=2+2x^2+2y^2+2x^2y^2 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^2+2xy-y^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & xy(x-y)^2-(x-y)^2=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-y)^2(xy-1)=0. \end{aligned}$$

[5]Ver en el apéndice el teorema 7.

Luego, si $x - y = 0$, esto es, $x = y$, entonces $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$ y $bc = a^2$ es un cuadrado. Si $xy = 1$, esto es, $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{c} = 1$, entonces $b = c$ y bc es un cuadrado.

Solución del problema 8. Sea N la intersección de AQ con la perpendicular a AB por B. Como AC y BN son paralelas, tenemos que $\angle ACB = \angle CBN = \angle CBA$, donde la última igualdad es por el triángulo isósceles ABC. Sea R la intersección de AQ con CM. Como $\angle ARM = \angle MAC$ y los triángulos AMR y CMA comparten el ángulo $\angle RMA$, entonces, por suma de ángulos en un triángulo, se tiene que $\angle ACM = \angle MAQ$. Por lo anterior AMC y BNA son triángulos rectángulos con un par de ángulos iguales y, por lo tanto, son semejantes. Adicionalmente, puesto que $AC = BA$ se tiene que los triángulos AMC y BNA son congruentes. En particular, se tiene que $BN = AM = BP$, por lo tanto, P y N son puntos reflejados por BC, de donde se sigue que $\angle PQB = \angle BQN = \angle CQA$.



Solución del problema 9. Supongamos que a y b son compatibles y que $\frac{a}{b} = k$ es un número racional distinto de 0 y 1, esto es, $b \neq 0$, $a \neq 0$ y $a \neq b$. Entonces, $a = kb$ y, por lo tanto, se tiene que $b(1 + k^2 b)$ y $b(b + k)$ son racionales. Luego, $r = \frac{1+k^2 b}{b+k}$ es racional. Ahora, si $r = k^2$, la ecuación anterior implicaría que $k^3 = 1$, de donde $k = 1$, lo cual no puede ser porque $\frac{a}{b} \neq 1$. Entonces, $r \neq k^2$ y, por lo tanto, $b = \frac{1-rk}{r-k^2}$ es racional; de aquí se sigue que $a = b\frac{a}{b}$ también es racional, como se quería.

Solución del problema 10. Por la desigualdad del triángulo, los números $s - a_i$ son todos positivos para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Luego, por la desigualdad MA-MG se tiene que

$$\frac{1}{3}\sum_{j\neq i}(s - a_j) \geq \left(\prod_{j\neq i}(s - a_j)\right)^{\frac{1}{3}}$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4$.
Como $\sum_{j\neq i}(s - a_j) = s + a_i$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$, la desigualdad anterior se puede reescribir en la forma

$$\frac{3}{s + a_i} \leq \left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{\sqrt{s - a_j}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Por otra parte, nuevamente por la desigualdad MA-MG, se tiene que

$$\frac{1}{3}\sum_{\substack{j<k\\ j\neq i,k\neq i}}\frac{1}{(\sqrt{s-a_j})(\sqrt{s-a_k})}\geq\left(\prod_{\substack{j<k\\ j\neq i,k\neq i}}\frac{1}{(\sqrt{s-a_j})(\sqrt{s-a_k})}\right)^{\frac{2}{3}}$$
$$=\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{\sqrt{s-a_j}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Combinando esta desigualdad con la segunda desigualdad y sumando, obtenemos la desigualdad requerida.

Solución del problema 11. Consideremos una gráfica cuyos vértices sean los subconjuntos A_1, $A_2, \ldots, A_{101}$. Dos vértices estarán unidos por una arista si y solo si tienen intersección no vacía. Demostraremos que si esta gráfica no tiene triángulos, entonces debe tener al menos 51 vértices con grado a lo más 50. Supongamos lo contrario. Si hay a lo más 50 vértices con grado a lo más 50, entonces hay otros 51 vértices con grado al menos 51. Así, algún par de estos 51 vértices deben ser adyacentes (hay una arista entre ellos), digamos A y B. Como cada uno de A y B es adyacente con otros 50 vértices de entre los 99 restantes, debe existir otro vértice en común C, lo cual es un absurdo.
Sean entonces $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_{51}}$ vértices con grado a lo más 50. Como cada uno de estos A_{i_k} es adyacente con a lo más 50 vértices, existen otros 50 vértices tales que A_{i_k} está contenido en el complemento de la unión de ellos. Pero como la unión de cada 50 conjuntos tiene más de $\frac{50}{51}n$ elementos, esto implica que en A_{i_k} hay menos de $\frac{1}{51}n$ elementos. Sin embargo, lo anterior implica que la cantidad de elementos en $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup\ldots\cup A_{i_{50}}$ es menor que $\frac{50}{51}n$, lo cual es un absurdo. Luego, debe de existir un triángulo, como se buscaba.

Solución del problema 12. Demostraremos por inducción en n que existen tales números. Para $n = 3$ los números $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 6$ funcionan. Supongamos que existen los números para $n = k$ y sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ dichos números. Luego, si $b = (a_k! - 1)$, entonces

$$a_1!a_2!\cdots a_{k-1}!b! = a_k!(a_k!-1)! = (a_k!)!.$$

Si denotamos por $a'_k = b$ y $a_{k+1} = a_k!$, obtenemos

$$a_1!a_2!\cdots a_{k-1}!a'_k! = a_{k+1}!,$$

donde los nuevos números son distintos a los anteriores, pues $b+1 = a_k!$ es el factorial de un número mayor a todos los anteriores y mayor que 2.

Solución del problema 13. Sumando las tres ecuaciones, obtenemos que

$$2x+2y+2z = x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\Longleftrightarrow x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Notemos que x, y y z tienen el mismo signo. En efecto, si $x > 0$, entonces $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0$ y $z = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) > 0$. De manera análoga, si $x < 0$, entonces $y < 0$ y $z < 0$.
Aplicando ahora la desigualdad MA-MG, tenemos que

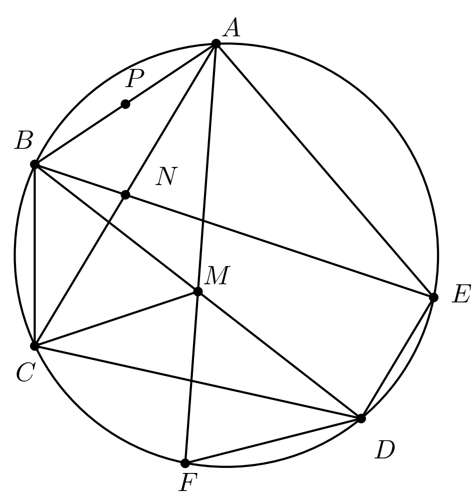
$$|y| = \frac{1}{2}\left|x + \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{2}\left(|x| + \frac{1}{|x|}\right) \geq \sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = 1.$$

Análogamente, tenemos que $|x| \geq 1$ y $|z| \geq 1$. Luego, $\frac{1}{|x|} \leq 1$, $\frac{1}{|y|} \leq 1$ y $\frac{1}{|z|} \leq 1$.
Como x, y, z tienen el mismo signo, se sigue que

$$|x + y + z| = |x| + |y| + |z| \geq 3 \quad \text{y} \quad \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| + \left|\frac{1}{y}\right| + \left|\frac{1}{z}\right| \leq 3.$$

Como $|x + y + z| = \left|\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right|$, se sigue que $|x| + |y| + |z| = 3$. Como $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$ y $|z| \geq 1$, obtenemos que $|x| = |y| = |z| = 1$. Como x, y, z tienen el mismo signo, las únicas posibilidades son $x = y = z = 1$ y $x = y = z = -1$. Finalmente, es fácil verificar que ambas posibilidades son soluciones del sistema original, por lo tanto, son todas las soluciones.

Solución del problema 14. Sea N el punto de intersección de BE con AC y sea P el punto medio de AB. Nombremos a los siguientes ángulos: $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$, $\angle ABE = \angle CBD = \beta$ y $\angle ADB = \angle ACB = \gamma$. Observemos que los triángulos ABN y DBC son semejantes, de modo que también lo son los triángulos BPN y BMC. Denotemos a los ángulos $\angle AMB = \angle BMC = \varphi$. Tenemos por lo anterior que $\angle BPN = \varphi$.



Recordemos que si dos cuerdas de una circunferencia bisecan a una tercera y determinan ángulos iguales con ella, entonces las longitudes de las cuerdas son iguales y su punto de intersección divide a las cuerdas en partes iguales (basta con utilizar congruencia de triángulos o la simetría a lo largo de una recta). Sea F la intersección del rayo AM y la circunferencia, entonces, por el comentario anterior, $CM = FM$ y, por tanto, los triángulos BMC y DMF son congruentes. Luego, $BC = DF$ y $\angle MAD = \angle BDC = \alpha$. Del triángulo AMD tenemos que $\varphi = \alpha + \gamma$ y del triángulo APN obtenemos que $\angle ANP = \varphi - \alpha = \gamma = \angle ACB$. En conclusión, NP y BC son paralelas. Lo anterior implica que N es el punto medio de AC, lo que concluye la demostración.

Solución del problema 15. Denotemos por $f(n)$ al menor número de colores tales que los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$ pueden ser coloreados de la forma deseada. Demostraremos que $f(n) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, donde $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Observemos que en la secuencia $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{k-1}$ no podemos tener tres números del mismo color, lo que significa que $f(n) \geq \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Ahora consideremos la siguiente coloración con $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ colores (cada color se identificará con un entero entre $1, 2, \ldots, \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$): si $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t} \leq n < 2^k$, donde los p_i son primos, entonces tenemos que $h(m) := \alpha_1 + \cdots + \alpha_t < k$ y es posible colorear m del color $\lfloor \frac{h(m)+1}{2} \rfloor$. Para ver que efectivamente esta coloración funciona, notemos que si a divide a b y b divide a c, entonces $h(a) < h(b) < h(c)$, es decir, $h(c) - h(a) \geq 2$. Lo anterior implica que los números a y c tienen asociados colores correspondientes a números diferentes. Por lo tanto, $f(n) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$. Si aplicamos la fórmula anterior a $n = 2016$, obtenemos que $f(2016) = 6$.

Solución del problema 16. Sean $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ y $u = \frac{1}{d}$. Entonces, $x + y + z + u = 1$, $xyzu \neq 0$ y la desigualdad dada se puede reescribir en la forma

$$\frac{xy(x+y)}{x^2 - xy + y^2} + \frac{yz(y+z)}{y^2 - yz + z^2} + \frac{zu(z+u)}{z^2 - zu + u^2} + \frac{ux(u+x)}{u^2 - ux + x^2} \leq 2, \qquad (5)$$

ya que

$$\frac{a+b}{a^2 - ab + b^2} = \frac{ab(b^{-1} + a^{-1})}{a^2b^2(b^{-2} + a^{-1}b^{-1} + a^{-2})} = \frac{xy(y+x)}{y^2 - xy + x^2}.$$

Argumentos similares aplican a los otros sumandos.
Ya que para $x \neq 0$ e $y \neq 0$ tenemos que $x^2 - xy + y^2 = x^2 - xy + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} = (x - \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ y $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x^2 - xy + y^2) - xy$, tenemos que $x^2 - xy + y^2 \geq xy$ y $\frac{xy}{x^2 - xy + y^2} \leq 1$. De manera análoga, tenemos que $\frac{yz}{y^2 - yz + z^2} \leq 1$, $\frac{zu}{z^2 - zu + u^2} \leq 1$ y $\frac{ux}{u^2 - ux + x^2} \leq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \frac{xy(x+y)}{x^2 - xy + y^2} + \frac{yz(y+z)}{y^2 - yz + z^2} + \frac{zu(z+u)}{z^2 - zu + u^2} + \frac{ux(u+x)}{u^2 - ux + x^2} \\ \leq \quad & (x+y) + (y+z) + (z+u) + (u+x) = 2(x+y+z+u). \end{aligned}$$

Como $x + y + z + u = 1$, obtenemos la desigualdad (5). Note que la igualdad ocurre cuando $x = y = z = u = \frac{1}{4}$, esto es, cuando $a = b = c = d = 4$.

Solución del problema 17. Demostremos primero un lema:

Lema. Sea $p \geq 3$ un divisor impar de b, entonces existe un primo impar q que divide a $(b+1)^p - 1$ pero que no divide a b.

Demostración del lema. Si $b = pc$, entonces

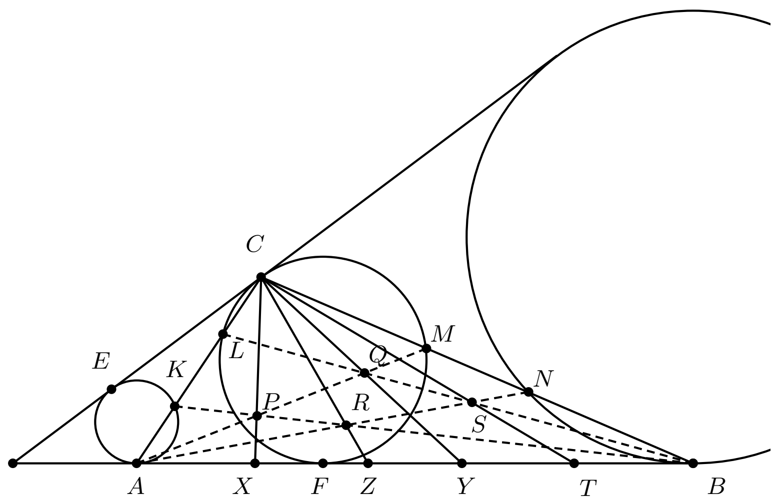
$$(b+1)^p - 1 = b((b+1)^{p-1} + \cdots + b + 1) = b(B \cdot b^2 + \frac{p(p-1)}{2} \cdot b + p)$$
$$= bp(b(Bc + \frac{p-1}{2}) + 1)) = bpd.$$

Si demostramos que d es impar, entonces basta con tomar un divisor de d para terminar el lema. Si b es par, entonces $d = bK + 1$ es impar; si b es impar, entonces $(b+1)^p - 1$ es impar, lo que implica que d es impar. Por tanto, d es impar y concluimos el lema. Ahora demostraremos que si $a \neq 2^k + 1$, entonces existe una secuencia de primos impares $p_1, p_2, \ldots$, tales que p_1 divide a $a - 1$ y si $P_n = a^{p_0 \cdot p_1 \cdots p_n} - 1$ (donde $p_0 = 1$), entonces p_{n+1} divide a P_n, pero no divide a P_{n-1}, para $n \geq 1$. Supongamos que p_1 es un primo impar arbitrario de $a - 1$ y que ya elegimos los primos $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Si aplicamos el lema para $b = P_k$ y $p = p_k$, encontraremos un primo p_{k+1} que divide a P_k pero que no divide a P_{k-1}. Dado que P_{k-1} es divisible por $p_1, p_2, \ldots, p_k$, concluimos que p_{k+1} es diferente de ellos. Por tanto, los números $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}$ tienen la propiedad deseada. La sucesión infinita $p_1, p_2, \ldots$ resolverá el problema. Si $a = 2^l + 1$ con $l \geq 2$, entonces $a^2 \neq 2^m + 1$ y basta con multiplicar por 2 a los números que se obtuvieron para el caso a^2.

Solución del problema 18. Notemos que $\frac{8}{23} + \frac{22}{69} = \frac{2}{3} < 1$, luego hay más envases, aparte de los 33 más livianos y los 30 más pesados. Llamémoslos *medianos*. Sea k la cantidad de envases medianos, que pesan, entre todos $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ del peso total. Como $\frac{8}{23} > \frac{1}{3}$, tenemos que $k \leq 32$. En otro caso, habría por lo menos 33 envases medianos, y entre todos pesan $\frac{1}{3}$, que debe ser por lo menos $\frac{8}{23}$ que es lo que pesan los 33 envases livianos, lo cual es una contradicción.

Observemos ahora que el promedio de los k envases medianos no supera el promedio de los 30 más pesados (esto se debe al hecho de que el promedio de varios números siempre se encuentra entre el menor y el mayor de esos números). Se sigue que $\frac{1}{3k} \leq \frac{22}{(69)(30)}$, lo que implica que $k \geq \frac{690}{22} = 31.3636\ldots$. Como k es entero, tenemos que $k \geq 32$. Por lo tanto, $k = 32$, de modo que hay $33 + 32 + 30 = 95$ envases.

Solución del problema 19. Si E y F son los segundos puntos de tangencia de k_1 y de k_2 con los lados del ángulo, entonces $AF^2 = AL \cdot AC$ y $CE^2 = CK \cdot CA$. Pero, $AF = CE$, entonces $AL = CK$. Por tanto, $AK = CL$. Análogamente, $CM = BN$.



Por otro lado, el teorema de Ceva[6] establece que

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AK \cdot CM}{KC \cdot MB} \quad \text{y} \quad \frac{AT}{TB} = \frac{AL \cdot CN}{LC \cdot NB}.$$

Si multiplicamos estas dos igualdades obtenemos que $\frac{AX}{XB} = \frac{TB}{AT}$ y, por tanto,

$$\frac{AX + XB}{XB} = \frac{TB + AT}{AT}.$$

Lo anterior implica que $AT = BX$, entonces $AX = BT$. Análogamente, $AZ = YB$. En conclusión, $XZ = YT$.

Solución del problema 20. Denotemos por A, B y C a los tres familiares en el grupo. Dividamos el problema en dos casos de acuerdo a la paridad de n.

Supongamos que $n = 2k+1$ con k un entero positivo. Por las condiciones del problema A, B y C tienen al menos $k+1$ familiares (de los cuales $k-1$ son diferentes de A, B y C). Sea T el conjunto de todas las personas menos A, B y C y sea a_i, con $i = 0, 1, 2, 3$, el conjunto de personas en T que tienen exactamente a i familiares entre A, B y C. Entonces, $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ es el número total de elementos de T, es decir

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2k - 1.$$

Por otro lado, $a_1 + 2a_2 + 3a_3$ es el número de todos los familiares de A, B y C, por tanto

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \geq 3k - 3.$$

Lo anterior implica que

$$3k - 3 \leq a_1 + 2a_2 + 3a_3 \leq a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_2 + 2a_3 = 2k - 2 + a_2 + 2a_3,$$

[6] Ver en el apéndice el teorema 16.

y, por tanto, $a_2 + 2a_3 \geq k - 1$.
Dado que todo familiar a dos personas entre A, B y C es miembro de una tercia de personas que son familiares y que todo familiar de A, B y C es miembro de tres tercias de personas que son familiares, entonces el número de esas tercias es al menos $1 + a_2 + 3a_3$. Pero, $1 + a_2 + 3a_3 > a_2 + 2a_3 \geq k - 1$, lo que implica que el número de tercias es al menos k.
Para acabar con este caso basta construir un ejemplo con k tercias de personas que son familiares. Supongamos que no hay familiares en T, que A es familiar de exactamente $k - 1$ personas de T y que B y C son familiares del resto de las $k - 1$ personas en T y solo a ellas en T, entonces, el número de tercias es k.
Ahora, supongamos que $n = 2k$. Como en el caso previo, podemos llegar a que el número de tercias de personas que son familiares es al menos $k + 1$. Si A y B tienen exactamente una persona como familiar común en T (es posible, pues $|T| = 2k - 3$ y los familiares a A y a B son al menos $k - 1$) y C tiene $k - 1$ familiares en T que no son el familiar que tienen en común A y B, entonces el número de tercias es exactamente $k + 1$. Por tanto, la respuesta al problema es k para $n = 2k + 1$, y $k + 1$ para $n = 2k$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2016 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Considera 64 números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{64}$, cada uno igual a 1 o -1, escritos en una pizarra. A continuación se reemplazan esos números por

$$x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_4, \ldots,\ x_{63}x_{64},\ x_{64}x_1.$$

Demuestra que no importa cómo se asignen los valores 1 y -1, si se repite la operación varias veces, es posible lograr que todos los números escritos en la pizarra sean positivos.

Problema 2. En el triángulo ABC considera un punto D en AB y un punto E en BC tales que DE sea paralela a BC. Sea P un punto arbitrario en el interior de triángulo ADE, y sean F y G las intersecciones de BP y CP con DE, respectivamente. Si O_1 y

O_2 son los circuncentros de los triángulos DPG y EPF, respectivamente, demuestra que AP y O_1O_2 son perpendiculares.

Problema 3. Demuestra que no existe un conjunto de 7 enteros positivos distintos y menores o iguales que 24 tales que las sumas de los elementos de todos sus subconjuntos son distintas.

Problema 4. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_k \geq y_1y_2\cdots y_k$ para cualquier $1 \leq k \leq n$. Demuestra que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Problema 5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ y $f(2n + 1) = 1 + f(2n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Encuentra el valor máximo $f(n)$ que toma esta función cuando $1 \leq n \leq 2016$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo. Los puntos D y E son los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. Se toma un punto X sobre la altura desde A y se construye el punto Y como la intersección de la recta que se obtiene de reflejar XD por BD y la recta que se obtiene de reflejar XE por CE. Si el cuadrilátero $DYEX$ es cíclico, demuestra que la recta tangente por Y al circuncírculo del cuadrilátero $DYEX$, la recta BC y la recta DE concurren.

Problema 7. Sean $a \geq 2$ y $n \geq 1$ enteros. Demuestra que la congruencia

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

tiene solución para una infinidad de primos p.

Problema 8. Sea $ABCD$ un trapecio con la propiedad de que los triángulos ABC, ACD, ABD y BCD tienen el mismo inradio. Demuestra que los puntos A, B, C y D son los vértices de un rectángulo.

Problema 9. Dados 2016 números reales tales que su suma es igual a 1, demuestra que se pueden distribuir alrededor de una circunferencia de manera que la suma de los 2016 productos obtenidos al multiplicar cualesquiera dos números vecinos sea menor que $\frac{1}{2016}$.

Problema 10. Demuestra que en todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, hay dos triángulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ y $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (donde $P_6 = P_1$ y $P_7 = P_2$) formados por tres vértices consecutivos del pentágono, tales que

$$(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \leq \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \leq (P_jP_{j+1}P_{j+2}),$$

donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 1.

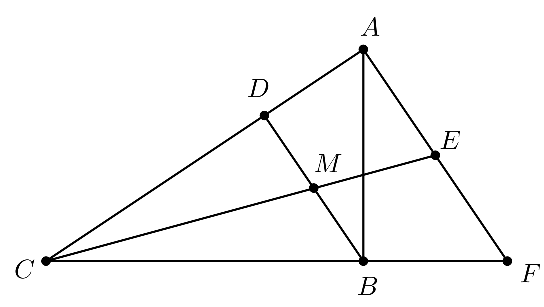
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2016. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2016, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. ¿Cuál es el número entero más grande que tiene todos sus dígitos diferentes y además no es múltiplo de 9?

Solución. Primero notemos que el número más grande que se puede formar con todos sus dígitos diferentes no es 987654321, sino 9876543210. Sin embargo, este número sí es múltiplo de 9, ya que la suma de sus dígitos es $9+8+7+6+5+4+3+2+1+0 = 45$, y por el criterio de divisibilidad del 9, el número 9876543210 se divide entre 9.
Dado cualquier conjunto de dígitos, el mayor número que se puede obtener es el que lista los dígitos en orden decreciente. Así, como necesitamos números grandes, si queremos que los dígitos sean distintos, la forma de lograrlo es borrando algunos de ellos en 9876543210.
Si eliminamos el 0, la suma de los dígitos no cambia, por lo que nuevamente obtenemos un múltiplo de 9. Si eliminamos el 1 nos queda 987654320 que sí es un posible candidato. Ahora, si eliminamos cualquier otro dígito, obtendremos un número menor, lo mismo que si eliminamos dos o más dígitos. Concluimos entonces que la respuesta es 987654320.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $\angle B = 90°$. Sobre el lado AC se considera un punto D y sea M el punto medio de BD. Sea E la intersección de CM con la mediatriz del lado AB. Demuestra que AE es paralela a BD.

Solución. Sea F la intersección de AE con BC. Como E está en la mediatriz de AB, tenemos que $AE = EB$ y como el triángulo ABF es rectángulo, tenemos que $BE = BF$, por lo que E es el punto medio de AF.



Sea F' el punto sobre CB tal que AF' es paralela a BD, consideremos E' el punto de intersección de CE con AF'. Por el teorema de Tales se tiene que E' es el punto medio de AF', luego E' y E son los puntos medios de AF' y AF, entonces EE' tiene que ser paralela a FF' pero las rectas EC y BC se intersecan, luego la única posibilidad es que $F = F'$ y $E = E'$ de donde se tiene que AF es paralela a BD.

Problema 3. Sean p y q números reales tales que la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tiene tres raíces distintas. Demuestra que $p < 0$.

Solución. Consideremos u, v dos raíces distintas, entonces

$$u^3 + pu + q = 0 \quad \text{y} \quad v^3 + pv + q = 0.$$

Restando las ecuaciones obtenemos que $u^3 - v^3 + p(u - v) = 0$, esto es, $(u - v)(u^2 + uv + v^2 + p) = 0$. Como $u \neq v$ se debe tener que $u^2 + uv + v^2 = -p$ lo cual es equivalente a que $(u + v)^2 + u^2 + v^2 = -2p$. Como el lado izquierdo de esta expresión es positivo por ser suma de números positivos se concluye que $p < 0$.

Problema 4. En una fiesta se sabe que cada mujer bailó con al menos un hombre y no hay un hombre que bailara con cada mujer. Demuestra que existen dos hombres H y H', y dos mujeres M y M', tales que H bailó con M, H' bailó con M', H no bailó con M' y H' no bailó con M.

Solución. Sea H un hombre que bailó con el máximo número de mujeres. Sean M' una mujer que no bailó con H y H' un hombre que bailó con M', si H' hubiera bailado con todas las mujeres que bailó H se tendría que H' bailó con más mujeres que H lo cual es absurdo, por lo tanto existe una mujer M que bailó con H y no con H'.

Problema 5. Determina todas las soluciones enteras positivas del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x = \frac{y^3(z-1) + 2z}{z+1}, \quad y = \frac{z^3(x-1) + 2x}{x+1}, \quad z = \frac{x^3(y-1) + 2y}{y+1}.$$

Solución. Si alguno de x, y, z es igual a 1, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 1$. Luego, $y = \frac{z^3(1-1)+2(1)}{1+1} = 1$ y $z = \frac{x^3(1-1)+2}{1+1} = 1$. Por tanto, si alguno de x, y, z es igual a 1, entonces los tres son iguales a 1 y $(1, 1, 1)$ cumple con el problema. Supongamos que ninguno de x, y, z es igual a 1. Tenemos que,

$$\begin{aligned}
x = \frac{y^3(z-1) + 2z}{z+1} &\Leftrightarrow x = \frac{y^3 z - y^3 + z - 1 + z + 1}{z+1} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{(y^3+1)(z-1) + z + 1}{z+1} = 1 + \frac{(y^3+1)(z-1)}{z+1} \\
&\Leftrightarrow x - 1 = \frac{(y^3+1)(z-1)}{z+1} \\
&\Leftrightarrow (x-1)(z+1) = (y^3+1)(z-1).
\end{aligned}$$

Análogamente $(y-1)(x+1) = (z^3+1)(x-1)$ y $(z-1)(y+1) = (x^3+1)(y-1)$. Cuando multiplicamos los lados izquierdos y los lados derechos de las tres ecuaciones obtenemos:

$$\begin{aligned}&(x-1)(z+1)(y-1)(x+1)(z-1)(y+1)\\ =\ &(y^3+1)(z-1)(z^3+1)(x-1)(x^3+1)(y-1).\end{aligned}$$

Como todos los números son diferentes de 1, podemos dividir entre $(x-1)(y-1)(z-1)$, obteniendo $(x+1)(y+1)(z+1) = (y^3+1)(z^3+1)(x^3+1)$. Sabemos que $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1) = (x+1)(x(x-1)+1)$ y $x+1 > 0$, entonces $1 = (x(x-1)+1)(y(y-1)+1)(z(z-1)+1)$. Todos los factores del último producto son mayores que 1 porque x, y y z son enteros positivos y no son 1. Eso es una contradicción. Con lo que concluimos que la única solución del sistema en enteros positivos es $(1,1,1)$.

Problema 6. ¿Cuántos triángulos (no degenerados) se pueden formar tales que sus lados tengan longitudes enteras y menores o iguales que 2016?

Solución. Sea $X = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq 2016 \text{ y } a+b > c\}$. Los elementos de X cumplen que sus entradas satisfacen las desigualdades del triángulo. Entonces, toda tercia en X tiene como entradas a números enteros con los que se puede construir un triángulo no degenerado de tal forma que sus lados tengan esas longitudes. Además, todo triángulo no degenerado, con lados de longitudes enteras y menores o iguales que 2016, se puede representar por una tercia (a,b,c), en la que cada entrada sea la longitud de uno de sus lados, tal que $a \leq b \leq c$ y $a+b > c$. Por lo tanto, el problema se traduce en encontrar $|X|$, el número de elementos de X.
Consideremos los conjuntos $Y = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq 2016 \text{ y } a+b \leq c\}$ y $Z = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq 2016\}$. Observemos que $Z = X \cup Y$ y que $X \cap Y = \emptyset$. Entonces, $|Z| = |X| + |Y|$.
Para contar los elementos de Z, consideremos $2016+3 = 2019$ casillas alineadas en las que colocaremos tres separadores. Esto se puede hacer, por definición de combinación, de $\binom{2019}{3}$ formas distintas. El número de casillas que haya a la izquierda del primer separador, representará el valor de a; el número de casillas que haya a la izquierda del segundo separador menos la casilla donde está el primer separador, representará el valor de b; y el número de casillas que haya a la izquierda del tercer separador menos las dos casillas donde están los otros separadores, representará el valor de c. Por lo tanto, $|Z| = 673 \cdot 1009 \cdot 2017$.
Ahora, para contar los elementos de Y, consideremos $2016+3 = 2019$ casillas alineadas en las que colocaremos tres separadores. Esto se puede hacer de $\binom{2019}{3}$ formas distintas como en el caso anterior, pero la traducción en ternas (a,b,c) será diferente. El número de casillas que haya a la izquierda del primer separador, representará el valor de a; el número de casillas que haya entre el primero y el segundo separador, representará el valor de b; y el número de casillas que haya a la izquierda del tercer separador menos las dos casillas donde están los otros separadores, representará el valor de c. En estos casos no se respeta el orden $a \leq b \leq c$, lo único que se sabe es que $a \leq c$ y $b \leq c$. Cada tercia (a,b,c) se cuenta dos veces si $a \neq b$ y una si $a = b$.
Entonces, debemos encontrar el número de tercias (a,a,c) que cumplan $2a = a+b \leq c$. Esto es equivalente a contar el número de enteros pares menores o iguales a un entero

fijo c entre 0 y 2016. Esto es,

$$\begin{aligned}\left\lfloor\frac{0}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{1}{2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{2015}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2016}{2}\right\rfloor &= 0+0+1+1+\cdots+1008+1008+1009\\ &= 2(1+2+\cdots+1008)+1009\\ &= 1008\cdot 1009+1009=1009^2,\end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se sigue por la suma de Gauss.

Por lo tanto, $|Z|=\frac{\binom{2019}{3}-1009^2}{2}+1009^2=\frac{\binom{2019}{3}+1009^2}{2}$ y $|X|=|Z|-|Y|=\binom{2019}{3}-\frac{\binom{2019}{3}+1009^2}{2}=\frac{\binom{2019}{3}-1009^2}{2}$.

Problema 7. Pablo se encuentra en el punto $X=(3,0)$ del plano coordenado y quiere visitar a sus cuatro amigos que se localizan en los puntos $A=(0,10)$, $B=(0,0)$, $C=(8,0)$ y $D=(8,4)$. Existen 5 carreteras que van en ambas direcciones: de A a B, de A a C, de B a C, de B a D y de D a C. Pablo quiere ir de un punto a otro por las carreteras que hay entre ellos. ¿Cuál es la distancia mínima que debe recorrer Pablo para visitar exactamente una vez a cada uno de sus cuatro amigos?

Solución. Observemos que el problema equivale a dar una sucesión de puntos $(X_1=X,X_2,\ldots,X_5)$, con $\{X_1,X_2,\ldots,X_5\}=\{X,A,B,C,D\}$, que represente el orden en el que visita a cada amigo. Pablo tiene dos formas de elegir X_2, moverse a la derecha o a la izquierda. Una vez que elige X_2, tiene dos opciones para elegir X_3, recorrer la carretera al Norte o elegir la carretera en diagonal. Una vez que se escogen los puntos X_2 y X_3, el resto de los puntos queda determinado. Entonces, lo único que debemos hacer es determinar cuál de los cuatro caminos es el más corto. Sean $C_1=(X,B,A,C,D)$, $C_2=(X,B,D,C,A)$, $C_3=(X,C,D,B,A)$ y $C_4=(X,C,A,B,D)$, los cuatro caminos posibles.

Denotemos por YZ y $|YZ|$ a la carretera y a la distancia, respectivamente, que va desde Y hasta Z. Si comparamos C_1 y C_2, nos damos cuenta que la única diferencia en distancia recorrida es que en C_1 se recorre BA y en C_2 se recorre BD. Si aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo BDC, tenemos que $|BD|^2=|DC|^2+|CB|^2=16+64=80$. Como $|BA|^2=100$, entonces, $|BA|>|BD|$. Por lo tanto, en C_2 se recorre menos distancia que en C_1. Ahora, si comparamos C_3 y C_4, nos damos cuenta que la única diferencia en distancia recorrida es que en C_3 se recorre CD y en C_4 se recorre CA. Como CA es la hipotenusa y BA es un cateto del mismo triángulo rectángulo ABC, $|CA|>|BA|$. Pero, $10=|BA|>|CD|=4$, entonces, $|CA|>|CD|$. Por lo tanto, en C_3 se recorre menos distancia que en C_4.

Por último, comparemos C_2 y C_3. La diferencia en distancia recorrida entre ambos caminos resulta de que en C_2 se recorre XB y CA y en C_2 se recorre XC y BA. Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC, tenemos que $|CA|=\sqrt{|AB|^2+|BC|^2}=\sqrt{100+64}=\sqrt{164}$. Entonces, $|XB|+|CA|=3+\sqrt{164}>3+\sqrt{144}=3+12=5+10=|XC|+|BA|$. Por lo tanto, en C_3 se recorre menos distancia que en C_2. En conclusión, el camino C_3 es en el que se recorre una menor distancia. Esto quiere decir que la distancia mínima es $|XC|+|CD|+|DB|+|BA|=5+4+\sqrt{80}+10=19+\sqrt{80}$.

Problema 8. Si a, b, c y d son enteros positivos, determina el valor mínimo de la expresión

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor.$$

(Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución. Notemos que $\lfloor x \rfloor > x - 1$ para todo número real x. Luego, la expresión dada es estrictamente mayor que

$$\frac{a+b+c}{d} + \frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} - 4,$$

la cual se puede reescribir como

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b}\right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) - 4.$$

Como $t + \frac{1}{t} \geq 2$ si $t > 0$, tenemos que $6(2) - 4 = 8$ es una cota inferior estricta para la expresión dada. Como los valores que toma son enteros, el valor mínimo es por lo menos 9.

Para concluir que el valor mínimo es 9, basta dar un ejemplo de enteros a, b, c y d donde se alcanza la cota. Es fácil ver que con $a = b = c = 5$ y $d = 4$ se obtiene el valor 9. Por lo tanto, la respuesta es 9.

Problema 9. Sean a, b y c enteros positivos distintos. Demuestra que,

$$\text{mcd}(ab+1, ac+1, bc+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b < c$ y sea d el máximo común divisor de $ab+1$, $ac+1$ y $bc+1$. Supongamos que $d > \frac{a+b+c}{3}$. Es claro que d es primo relativo con a, con b y con c. Además, tenemos que d divide a $bc+1-(ab+1) = b(c-a)$, de donde $d \mid (c-a)$. De manera análoga, tenemos que $d \mid (c-b)$ y $d \mid (b-a)$. Escribamos $c - a = dk$ para algún entero $k \geq 1$.

Si $k = 1$, entonces $c - a = d$. Como $d \mid (c-b)$ y $c - b > 0$, tenemos que $d \leq c - b$, esto es, $c - a \leq c - b$. Pero esto significa que $b \leq a$, lo cual es una contradicción.

Si $k = 2$, entonces $c - a = 2d$. Luego, $\frac{a+b+c}{3} < d = \frac{c-a}{2}$ de donde tenemos que $5a + 2b < c$. Como $d \mid (b-a)$ y $b - a > 0$, resulta que $d \leq b - a$. Luego, $d + a \leq b$ y por lo tanto $5a + 2d + 2a \leq 5a + 2b < c$. Esto implica que $d < \frac{c-7a}{2}$, esto es, $\frac{c-a}{2} < \frac{c-7a}{2}$ lo cual es imposible.

Si $k \geq 3$, entonces $c - a \geq 3d$, es decir, $d \leq \frac{c-a}{3}$. Luego, $\frac{a+b+c}{3} < d \leq \frac{c-a}{3}$ lo cual implica que $0 < a + b < -a$ y por lo tanto $a < 0$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $d \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Problema 10. Encuentra todas las cuartetas (a, b, c, d) de números reales positivos tales que $abcd = 1$, $a^{2016} + 2016b = 2016c + d^{2016}$ y $2016a + b^{2016} = c^{2016} + 2016d$.

Solución. Las últimas dos ecuaciones se pueden reescribir de la siguiente forma,

$$a^{2016} - d^{2016} = 2016(c - b), \quad c^{2016} - b^{2016} = 2016(a - d). \tag{6}$$

Ahora, es claro que $a = d$ si y solo si $c = b$. En ese caso, las últimas dos ecuaciones se satisfacen, y la condición $abcd = 1$ nos lleva a un conjunto de cuartetas válidas de la forma $(a, b, c, d) = (t, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t)$ para cualquier $t > 0$.
Demostraremos que no hay otras soluciones. Supongamos que $a \neq d$ y $c \neq b$. Multiplicando las dos relaciones en (6) obtenemos

$$(a^{2016} - d^{2016})(c^{2016} - b^{2016}) = 2016^2(c - b)(a - d).$$

Como $(c - b)(a - d) \neq 0$, se sigue que,

$$\frac{a^{2015} + \cdots + a^{2015-i}d^i + \cdots + d^{2015}}{2016} \cdot \frac{c^{2015} + \cdots + c^{2015-i}b^i + \cdots + b^{2015}}{2016} = 1.$$

Aplicando ahora la desigualdad media aritmética-media geométrica al primer factor del lado izquierdo de la igualdad anterior obtenemos,

$$\frac{a^{2015} + \cdots + a^{2015-i}d^i + \cdots + d^{2015}}{2016} > \sqrt[2016]{(ad)^{\frac{2015 \times 2016}{2}}} = (ad)^{\frac{2015}{2}}.$$

La desigualdad anterior es estricta, ya que la igualdad se da solo si todos los términos en el promedio son iguales entre sí, lo cual sucede solo si $a = d$. De manera análoga, tenemos que

$$\frac{c^{2015} + \cdots + c^{2015-i}b^i + \cdots + b^{2015}}{2016} > \sqrt[2016]{(cb)^{\frac{2015 \times 2016}{2}}} = (cb)^{\frac{2015}{2}}.$$

Multiplicando estas dos desigualdades, obtenemos

$$(ad)^{\frac{2015}{2}}(cb)^{\frac{2015}{2}} < 1$$

que es equivalente a la desigualdad $abcd < 1$, lo cual es una contradicción.

Concursos Estatales

2^a Olimpiada Regional de Matemáticas del Sureste

Del 6 al 9 de octubre de 2016, previo al concurso nacional de la XXX Olimpiada Mexicana de Matemáticas, se llevó a cabo en la ciudad de Oaxaca de Juárez, Oaxaca, la 2^a olimpiada regional de matemáticas del sureste. Participaron los estados: Campeche, Chiapas, Oaxaca, Quintana Roo y Tabasco.

El número de alumnos participantes fue de 39: 5 de Campeche, 8 de Chiapas, 10 de Oaxaca, 8 de Quintana Roo y 8 de Tabasco. Se entregaron 4 medallas de oro, 4 medallas de plata y 11 medallas de bronce, así como 2 menciones honoríficas.

A continuación presentamos los problemas de la 2^a Olimpiada Regional de Matemáticas del Sureste. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. Sobre una circunferencia hay 99 números naturales. Si a y b son dos números consecutivos en el círculo, entonces deben cumplir una de las siguientes condiciones: $a-b=1$, $a-b=2$ o $\frac{a}{b}=2$. Demuestra que en la circunferencia existe un número que es múltiplo de 3.

Problema 2. Sean $ABCD$ un trapecio con AB paralela a CD, Ω el circuncírculo de $ABCD$ y A_1, B_1 puntos sobre los segmentos AC y BC respectivamente, tales que DA_1B_1C es un cuadrilátero cíclico. Sean A_2 y B_2 los puntos simétricos de A_1 y B_1 respecto al punto medio de AC y BC, respectivamente. Demuestra que los puntos A, B, A_2 y B_2 son concíclicos.

Problema 3. Sea $n>1$ un entero. Encuentra todos los polinomios reales $P(x)$ tales que para todo número real x,

$$P(x)P(x^2)P(x^3)\cdots P(x^n) = P(x^{\frac{n(n+1)}{2}}).$$

Segundo día

Problema 4. Las diagonales de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se intersecan en el punto E. Sean S_1, S_2, S_3 y S_4 las áreas de los triángulos AEB, BEC, CED y DEA respectivamente. Demuestra que si existen números reales w, x, y, z tales que

$$S_1 = x + y + xy, \quad S_2 = y + z + yz, \quad S_3 = w + z + wz \quad \text{y} \quad S_4 = w + x + wx,$$

entonces E es el punto medio de AC o E es el punto medio de BD.

Problema 5. Martín y Chayo tienen una bolsa con 2016 chocolates cada uno. Cada uno vacía su bolsa sobre una mesa haciendo un montón de chocolates. Deciden hacer una competencia para ver quién se queda con todos los chocolates, de la siguiente manera: Un movimiento consiste en que un jugador toma dos chocolates de su montón, guarda un chocolate en su bolsa y el otro chocolate lo pone en el montón del otro jugador; en su turno el jugador debe realizar al menos un movimiento y lo puede repetir tantas veces lo desee antes de pasar el turno. Pierde el primer jugador que no pueda realizar al menos un movimiento en su turno. Si Martín inicia el juego, ¿quién de los dos puede asegurar que gana y se queda con todos los chocolates?

Problema 6. Sea M el punto medio del lado AC de un triángulo acutángulo ABC con $AB > BC$. Sea Ω el circuncírculo de ABC. Las tangentes a Ω en los puntos A y C se intersecan en P y BP interseca a AC en S. Sean AD la altura del triángulo ABP con D en BP y ω el circuncírculo del triángulo CSD. Si ω y Ω se intersecan en los puntos K y C con $K \neq C$, demuestra que $\angle CKM = 90°$.

Problemas de Concursos Internacionales

Competencia Internacional de Matemáticas 2016

Del 14 al 20 de agosto de 2016 se llevó a cabo la décimo séptima edición de la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) en Chiang Mai, Tailandia. Participaron más de 60 equipos provenientes de 29 países, principalmente asiáticos.

Los participantes de esta competencia son alumnos de secundaria menores de 16 años y participan por equipos de 4 integrantes. En la competencia hay 2 exámenes, uno individual que consiste de 15 problemas (de los cuales los primeros 12 problemas valen 5 puntos cada uno, y los otros 3 problemas valen 20 puntos cada uno) y un examen por equipo que consiste de 10 problemas que resuelven entre los 4 integrantes del equipo. Las duraciones de esos exámenes son de 2 horas y una hora, respectivamente.

México participó con dos equipos, de 4 alumnos cada uno, donde los alumnos participantes fueron:

Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato).
Nuria SydyKova Méndez (Ciudad de México).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Bruno Gutiérrez Chávez (Colima).
Ricardo Balam Ek (Yucatán).
Sebastián Stephan Dunlong (Ciudad de México).
Jonatán Alejandro González Cázares (Jalisco).
Diego Hinojosa Téllez (Jalisco).

Jesús Omar, Nuria, Eric Iván y Bruno obtuvieron medalla de bronce en el examen individual, mientras que Ricardo, Sebastián, Jonatán y Diego obtuvieron mención honorífica.
En la prueba por equipos, los dos equipos obtuvieron medalla de bronce.

A continuación presentamos los problemas de la décimo séptima edición de la Competencia Internacional de Matemáticas.

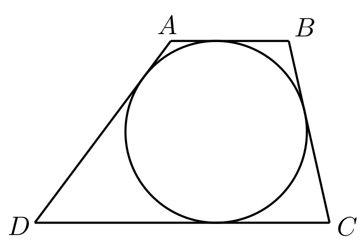
Prueba Individual

Sección A

Problema 1. La cafetería de la escuela elabora 289 bolillos diariamente. En una semana sucedió que cada día se consumió una cantidad diferente de bolillos. En algunos días sobraron bolillos y en otros días hicieron falta, de modo que hubo que preparar más. Cada día se registró la cantidad de bolillos sobrantes o faltantes: si sobraron se considera un número positivo, pero si hicieron falta se considera un número negativo. Al final de la semana, se multiplicaron estos siete números y el resultado fue -252. ¿Cuál fue la cantidad total de bolillos que se comieron en la cafetería durante esa semana?

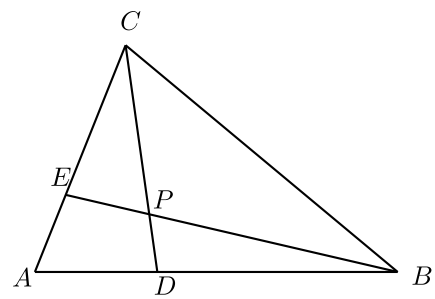
Problema 2. Encuentra el mayor entero x para el cual existe un entero positivo y tal que $2^{2x} - 3^{2y} = 55$.

Problema 3. Un círculo de radio 12 cm toca los cuatro lados de un cuadrilátero $ABCD$ donde AB y DC son paralelos. Si $BC = 25$ cm y el área de $ABCD$ es 648 cm^2, determine la longitud, en cm, de DA.



Problema 4. El producto de dos de los primeros 17 enteros positivos es igual a la suma de los restantes 15. ¿Cuál es la suma de estos dos números?

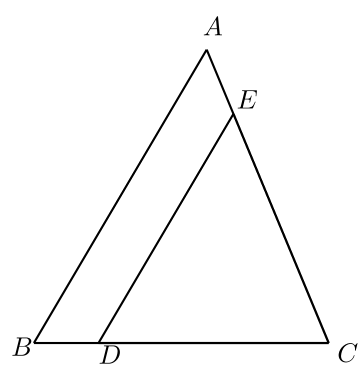
Problema 5. En el triángulo ABC, D es un punto en el lado AB y E es un punto en el lado AC. Sea P la intersección de BE y CD. El área del triángulo ABC es 12 cm^2. Si el triángulo BPD, el triángulo CPE y el cuadrilátero $ADPE$ tienen todos la misma área, ¿cuál es el área, en cm^2, de $ADPE$?



Problema 6. Considera el producto de un número de 2016 dígitos, todos ellos 6's, con otro número de 2016 dígitos, todos ellos 9's. Encuentra la suma de los dígitos de dicho producto.

Problema 7. Sea n un entero positivo. Tanto Tom como Jerry tienen algunas monedas. Si Tom le da n monedas a Jerry, entonces Jerry tendrá 2 veces el número de monedas que le quedaron a Tom. Si por el contrario, Jerry le da 2 monedas a Tom, Tom tendrá n veces el número de monedas que le quedaron a Jerry. Halla la suma de todos los posibles valores de n.

Problema 8. En el triángulo ABC, $BC = 13$ cm, $CA = 14$ cm y $BA = 15$ cm. D y E son puntos en los lados BC y AC, respectivamente, tales que DE y AB son paralelos. Si el triángulo EDC tiene el mismo perímetro que el cuadrilátero $ABDE$, determina la razón $\frac{BD}{DC}$.

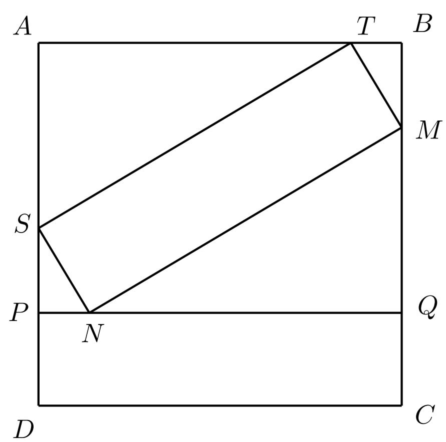


Problema 9. Tres rectas paralelas L_1, L_2 y L_3 satisfacen que L_1 está 1 cm arriba de L_2 y L_3 está 2 cm abajo de L_2. Un triángulo rectángulo isósceles tiene un vértice en cada una de estas rectas. ¿Cuál es la suma, en cm^2, de todos los posibles valores del área de este triángulo?

Problema 10. Cuando una persona con un IQ de 104 se mudó del pueblo A al pueblo B, el promedio de los IQ de cada uno de los pueblos aumentó 1 punto. La suma del número de habitantes de los dos pueblos es un número primo y la suma de sus IQ es 6102. Halla la suma de los IQ de los habitantes del pueblo B, incluyendo el de la persona que se mudó.

Problema 11. Alicia se encuentra en el origen $(0, 0)$ del plano coordenado. Ella se mueve, de acuerdo al resultado de tirar un dado, de la siguiente manera: si cae 1, se mueve 1 unidad a la derecha, si cae 2 o 3 se mueve una unidad a la izquierda, si cae 4, 5 o 6, se mueve una unidad hacia arriba. ¿Cuál es la probabilidad que después de 4 tiradas Alicia se encuentre en el punto $(1, 1)$ por primera vez?

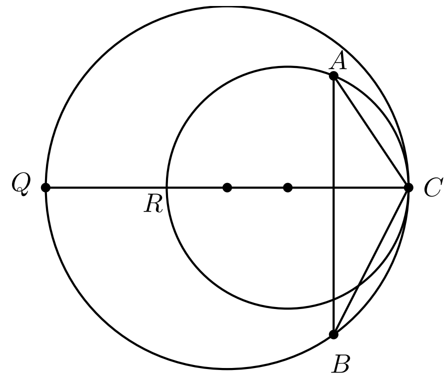
Problema 12. En la siguiente figura, cada lado del cuadrado $ABCD$ mide 234 cm. Si los rectángulos $CDPQ$ y $MNST$ son congruentes, halla la longitud, en cm, de CM.



Sección B

Problema 1. Sean a, b y c números reales positivos tales que $\dfrac{8a^2}{a^2+9} = b$, $\dfrac{10b^2}{b^2+16} = c$ y $\dfrac{6c^2}{c^2+25} = a$. Encuentra $a + b + c$.

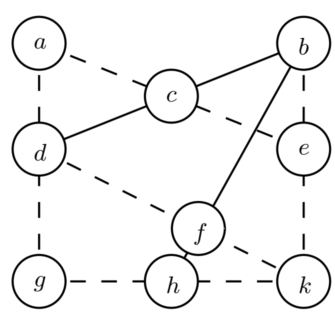
Problema 2. R es un punto en el segmento CQ tal que $CR = 4$ cm. Una recta perpendicular a CQ interseca los círculos con diámetros CR y CQ en A y B, respectivamente, de manera que A y B estén en lados opuestos de CQ. Si el circunradio del triángulo ABC mide $\sqrt{6}$ cm, encuentra la longitud, en cm, de CQ.



Problema 3. ¿Cuál es el mayor entero $n < 999$ tal que $(n-1)^2$ divide a $n^{2016} - 1$?

Prueba por equipos

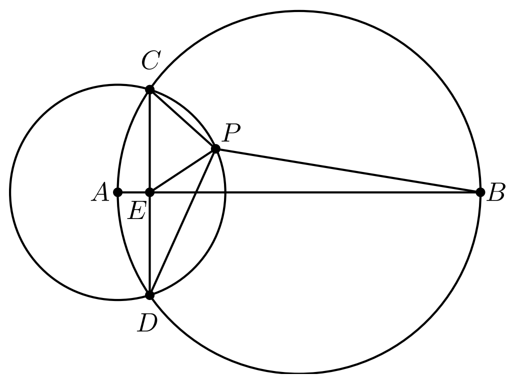
Problema 1. En el diagrama que se muestra a continuación se han unido nueve círculos con siete líneas, con tres círculos en cada línea. Reemplaza cada una de las letras $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ por un número diferente de entre los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tal que el número que esté en el círculo del centro de una línea continua sea igual a la suma de los números en los otros dos círculos de dicha línea y el número que esté en el círculo del centro de una línea punteada sea igual a la diferencia de los números en los otros dos círculos de dicha línea.



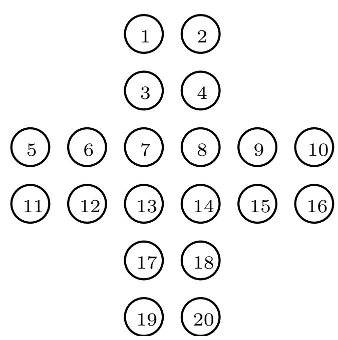
Problema 2. Cuando los dígitos de un número x, de tres dígitos, se escriben en orden inverso, obtenemos un número y tal que $x + 2y = 2016$. Determina la suma de todos los posibles valores de x.

Problema 3. ¿Cuántos de los primeros 2016 enteros positivos pueden ser expresados de la forma $1+2+\cdots+(k-1)+mk$, donde k y m son enteros positivos? Por ejemplo, tenemos al $6 = 1 + 2 + 1 \cdot 3$ y al $11 = 1 + 5 \cdot 2$.

Problema 4. Una circunferencia con diámetro AB interseca a una circunferencia con centro A en C y D. E es el punto de intersección de AB y CD. P es un punto sobre la segunda circunferencia tal que $PC = 16$ cm, $PD = 28$ cm y $PE = 14$ cm. Encuentra la longitud, en cm, de PB.



Problema 5. El siguiente diagrama muestra un arreglo de 20 círculos numerados. Note que los círculos 3, 9, 12 y 18 determinan un cuadrado. ¿Cuál es la mínima cantidad de círculos que debemos quitar del arreglo para que entre los restantes no haya cuatro de ellos que determinen un cuadrado?

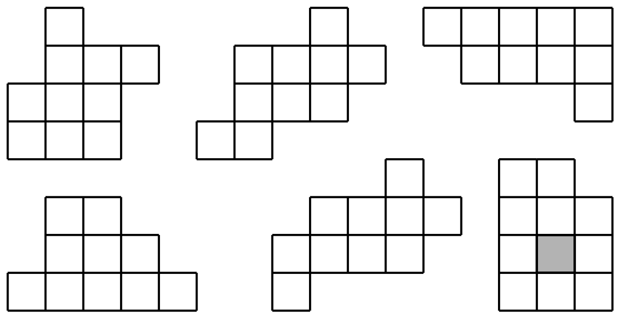


Problema 6. Un examen de Matemáticas consiste de 3 problemas, en cada uno se puede obtener un número entero de puntos desde 1 hasta 10. Cada estudiante obtiene más de 15 puntos y cualesquiera dos estudiantes obtuvieron puntaje diferente en al menos un problema. Determina el máximo número de estudiantes.

Problema 7. Sean x, y, z números reales positivos tales que $\sqrt{16 - x^2} + \sqrt{25 - y^2} + \sqrt{36 - z^2} = 12$. Si la suma de x, y, z es 9, encuentra su producto.

Problema 8. ¿Cuál es la mayor cantidad de números enteros que se pueden seleccionar desde el 1 al 2016, inclusive, tal que el mínimo común múltiplo de cualquier cantidad de números enteros seleccionada es también un número seleccionado?

Problema 9. Corta las seis figuras del diagrama de abajo en doce piezas, donde cada pieza consista de cinco cuadrados, tal que no haya dos de las doce piezas que sean iguales considerando rotaciones y reflexiones.



Problema 10. Sea $T(n)$ la cantidad de divisores positivos de un entero positivo n. ¿Cuántos enteros positivos n satisfacen $T(n) = T(39n) - 39 = T(55n) - 55$?

XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 23 de septiembre al 1 de octubre de 2016 se celebró en Antofagasta, Chile, la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos Victor Hugo Almendra Hernández (Ciudad de México), Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México), Karol José Gutiérrez Suárez (Colima) y Antonio López Guzmán (Chihuahua). En total hubo 88 alumnos participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Luis Eduardo García Hernández (tutor).

Victor Hugo, Alfredo Alef y Karol obtuvieron medalla de plata, y Antonio obtuvo medalla de bronce. México ocupó el cuarto lugar de los 22 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Determine todos los números primos positivos p, q, r, k tales que

$$pq + qr + rp = 12k + 1.$$

Problema 2. Encuentre todas las soluciones reales positivas del sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{y^2+y-1},\\
y &= \frac{1}{z^2+z-1},\\
z &= \frac{1}{x^2+x-1}.
\end{aligned}
$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuya circunferencia circunscrita es Γ. Las tangentes a Γ por B y C se cortan en P. Sobre el arco AC que no contiene a B se toma un punto M, distinto de A y de C, tal que la recta AM corta a la recta BC en K. Sean R el punto simétrico de P con respecto a la recta AM y Q el punto de intersección de las rectas RA y PM. Sean J el punto medio de BC y L el punto donde la recta paralela por A a la recta PR corta a la recta PJ. Demuestre que los puntos L, J, A, Q y K están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Determine la mayor cantidad de alfiles que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 8×8, tal que no haya dos alfiles en la misma casilla y cada alfil sea amenazado como máximo por uno de los otros alfiles.
Nota: Un alfil amenaza a otro si ambos se encuentran en dos casillas distintas de una misma diagonal. El tablero tiene por diagonales las 2 diagonales principales y las paralelas a ellas.

Problema 5. Las circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se cortan en dos puntos distintos A y K. La tangente común a $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ más cercana a K toca a $\mathcal{C}_1$ en B y a $\mathcal{C}_2$ en C. Sean P el pie de la perpendicular desde B sobre AC, y Q el pie de la perpendicular desde C sobre AB. Si E y F son los puntos simétricos de K respecto de las rectas PQ y BC, respectivamente, pruebe que los puntos A, E y F son colineales.

Problema 6. Sean k un entero positivo y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dígitos. Pruebe que existe un entero positivo n tal que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son, en este orden, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ para ciertos dígitos $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

Soluciones de Concursos Internacionales

Competencia Internacional de Matemáticas 2016

A continuación presentamos las soluciones de la décimo séptima edición de la Competencia Internacional de Matemáticas.

Prueba Individual

Sección A

Solución del problema 1. Como el número de piezas que se comieron por día son diferentes, los siete números registrados son también diferentes. Por otro lado $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ es producto de siete enteros distintos en una sola forma, como producto de $-3, -2, -1, 1, 2, 3$, y 7. Por tanto, el número total de piezas que se comieron durante la semana es $7 \cdot 289 - 7 = 2016$.

Solución del problema 2. Tenemos que $5 \cdot 11 = 55 = (2^x + 3^y)(2^x - 3^y)$. Si $2^x + 3^y = 1$ y $2^x - 3^y = 55$, entonces $2^{x+1} = 56$, que no es posible. Si $2^x + 3^y = 11$ y $2^x - 3^y = 5$, entonces $2^{x+1} = 16 = 2^4$, de donde $x = 3$. Este es el único y por tanto el mayor de tales enteros.

Solución del problema 3. Sean E, F, G, H los puntos de tangencia de la circunferencia con los lados AB, BC, CD, DA respectivamente. Tenemos que $AH = AE, BE = BF, CF = CG, DG = DH$. Observamos que $GE = 24$ cm es la distancia entre AB y CD, de donde se sigue que $AD + BC = AB + CD = \frac{2 \cdot 648}{24} = 54$ cm y por tanto $DA = AB + CD - BC = 29$ cm.

Solución del problema 4. La suma de los primeros 17 enteros positivos es $17 \cdot 18/2 = 153$, lo cual es igual a la suma de dos de los números con su producto. Si x, y son ambos números, entonces

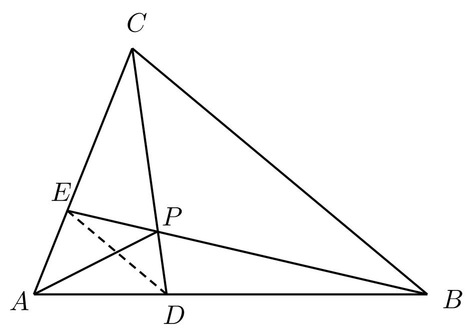
$$154 = xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1) = 1 \cdot 154 = 2 \cdot 77 = 7 \cdot 22 = 11 \cdot 14.$$

Como x, y son menores o iguales a 17, uno de ellos es $11 - 1 = 10$ y el otro es $14 - 1 = 13$. Tenemos, por tanto $10 + 13 = 23$.

Solución del problema 5. Denotemos por (ABC) al área de cualquier triángulo ABC. Como $(BPD) = (CPE)$, se sigue que DE es paralela a BC. Luego,

$$\frac{(DAP)}{(DBP)} = \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE} = \frac{(EAP)}{(ECP)}.$$

Por tanto, $(DAP) = (EAP) = \frac{(ADPE)}{2}$. Más aún, $\frac{(DPB)}{(PCB)} = \frac{DP}{CP} = \frac{(DAP)}{(CAP)} = \frac{1}{3}$, de donde se sigue que $(ADPE) = \frac{12}{1+1+1+3} = 2$.



Solución del problema 6. Sea n el primer número. El producto es igual a $n(10^{2016} - 1 = n \cdot 10^{2016} - n$. Este número consiste de 2015 copias de 6 seguidas por un 5, 2015 copias de 3 y luego un 4. Por tanto, la suma de sus dígitos es $9 \times 2016 = 18144$.

Solución del problema 7. Si Tom tiene x monedas y Jerry tiene y, entonces $y + n = 2(x - n)$ y $x + 2 = n(y - 2)$. Eliminando x, tenemos $y = \frac{7n+4}{2n-1}$ y por tanto

$$2y = \frac{14n + 8}{2n - 1} = 7 + \frac{15}{2n - 1},$$

lo cual es posible solo cuando $2n - 1 = 1, 3, 5$ o 15. Los valores correspondientes de (x, y) en cada uno de esos casos son $(7, 11), (6, 6), (7, 5)$ y $(14, 4)$, lo cual quiere decir que la suma de los valores posibles para n es $1 + 2 + 3 + 8 = 14$.

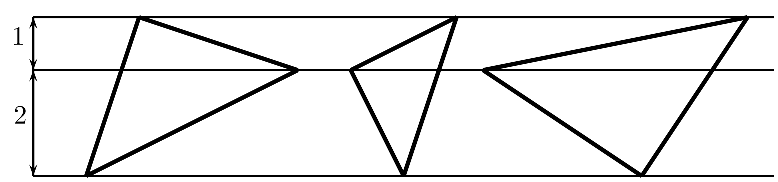
Solución del problema 8. Sea $r = \frac{DC}{BC} = \frac{EC}{AC}$. Por tanto $EC = r \cdot AC$ y $DC = r \cdot BC$. Sea $a = BC, b = AC, c = AB$. Como el triángulo EDC tiene el mismo perímetro que el cuadrilátero $ABDE$, tenemos que $EC + DE = AE + AB + BD$ y por tanto

$$r(a + b) = c + a(1 - r) + b(1 - r).$$

Resolviendo para r, obtenemos que $r = \frac{a+b+c}{2(a+b)} = \frac{21}{27}$. Por lo tanto,

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BC}{DC} - \frac{DC}{DC} = \frac{1}{r} - 1 = \frac{2}{7}.$$

Solución del problema 9. Hay tres posibles valores, dependiendo de qué línea contiene el vértice del ángulo recto. En cada caso, el triángulo es la mitad de un cuadrado de lado de longitud x centímetros. Como se ve en la figura, $x^2 = (2+1)^2 + 1^2 = 10$, $x^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ y $x^2 = (2+1)^2 + 2^2 = 13$. La suma deseada es, por tanto, $\frac{10+5+13}{2} = 14$.



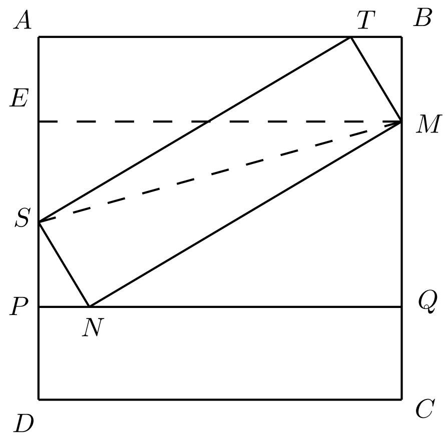
Solución del problema 10. Antes de la migración, sea a la cantidad de personas en el pueblo A con un IQ total de x y sea b la cantidad de personas en el pueblo B con un IQ total de y.
Entonces, $\frac{x-104}{a-1} = \frac{x}{a} + 1$ y $\frac{y+104}{b+1} = \frac{y}{b} + 1$. Por tanto, $x = a(103+a)$, mientras que $y = b(103-b)$. Se sigue que

$$x + y = (a+b)(103+a-b) = 6102 = 2 \cdot 3^3 \cdot 113.$$

Como $a+b$ es primo, debe ser $2, 3$ o 113. Si es 2 o 3, entonces $103 + a - b < 105$ y $x + y < 6102$. Por tanto, $a + b = 113$ por lo que $103 + a - b = 54$. Luego, $a = 32, b = 81$ e $y = 81(103-81) = 1782$. Por lo tanto, $1782 + 104 = 1886$ es la suma buscada.

Solución del problema 11. Para llegar a $(1,1)$ en cuatro movimientos, Alicia debe moverse hacia arriba una vez, hacia la derecha dos veces y a la izquierda una. Sin considerar el orden en el que esto ocurre, la probabilidad es $\left(\frac{3}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{6}\right) = \frac{1}{216}$. Hay cuatro elecciones de cuándo moverse hacia arriba y 3 elecciones de cuándo moverse a la izquierda, lo cual determina completamente el movimiento. Sin embargo, las sucesiones $(D,A,D,I), (D,A,I,D), (A,D,D,I)$ y (A,D,I,D) llegan al $(1,1)$ en el cuarto movimiento por segunda vez. Por lo tanto, la probabilidad es $\frac{4 \cdot 3 - 4}{216} = \frac{1}{27}$.

Solución del problema 12. Sea E en el punto de AB tal que ME es perpendicular a AB. Tenemos que $MN = ME$, $MS = MS$ y $\angle MES = 90° = \angle MNS$. Lo anterior quiere decir que los triángulos MES y MNS son congruentes, por lo que $ES = NS$.



De lo anterior se sigue que $MQ = ES+SP = SN+SP = QC+BM$, de modo que $MQ = \frac{BC}{2} = \frac{MN}{2} = 117$ cm. Esto significa que $\angle MNQ = 30°$ de modo que $QN = 117\sqrt{3}$. Así, $PN = 234 - 117\sqrt{3} = 117(2-\sqrt{3})$ cm, $PD = NS = 234(2-\sqrt{3})$ cm y $CM = CQ + MQ = PD + MQ = 117(5-2\sqrt{3})$ cm.

Sección B

Solución del problema 1. Al manipular las tres expresiones, obtenemos

$$1 + \frac{9}{a^2} = \frac{8}{b}, \quad 1 + \frac{16}{b^2} = \frac{10}{c}, \quad 1 + \frac{25}{c^2} = \frac{6}{a}.$$

Combinándolas todas nos da

$$1 - \frac{6}{a} + \frac{9}{a^2} + 1 - \frac{8}{b} + \frac{16}{b^2} + 1 - \frac{10}{c} + \frac{25}{c^2} = 0$$

lo cual implica que

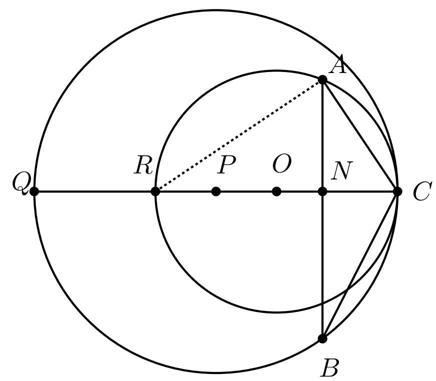
$$\left(1 - \frac{3}{a}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{b}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{c}\right)^2 = 0.$$

De lo anterior se sigue que $1 - \frac{3}{a} = 0$, $1 - \frac{4}{b} = 0$ y $1 - \frac{5}{c} = 0$, esto es, $a = 3$, $b = 4$ y $c = 5$, de modo que $a + b + c = 12$.

Solución del problema 2. Haremos uso del lema que establece que si r es el circunradio del triángulo ABC, entonces el área del triángulo es $\frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4r}$.
Para demostrar el lema, consideremos al circuncentro O del triángulo ABC y sea H el pie de la altura desde A sobre BC. Tracemos los diámetros AE y BE. Dado que $\angle ABE = 90° = \angle AHC$ y $\angle AEB = \angle ACH$, los triángulos ABE y AHC son semejantes y por tanto $\frac{AB}{AH} = \frac{AE}{AC}$, de $AB \cdot AC = AE \cdot AH$. Multiplicando por BC a ambos lados de la igualdad obtenemos que

$$AB \cdot BC \cdot AC = AE \cdot AH \cdot BC = 2r \cdot AH \cdot BC.$$

De esta forma, el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4r}$.
Regresando al problema, sean CR y CQ los diámetros de los círculos grande y pequeño, respectivamente. Entonces $CR = 4$. Sea N el punto de intersección de AB con CQ.



Dado que CN es una altura, tenemos que

$$(ABC) = \frac{CA \cdot CB \cdot AB}{4\sqrt{6}} = \frac{AB \cdot CN}{2},$$

de donde $CA \cdot CB = 2\sqrt{6}CN$. Al ser CAR un triángulo rectángulo, $CA^2 = CN \cdot CR$. De manera similar $CB^2 = CN \cdot CQ$. Luego, $24CN^2 = CA^2 \cdot CB^2 = 4CN^2 \cdot CQ$ y por tanto $CQ = 6$ cm.

Solución del problema 3. Del hecho que $n^{2016} - 1 = (n-1)(n^{2015} + n^{2014} + \cdots + n + 1)$ vemos que $n-1$ debe dividir a $n^{2015} + n^{2014} + \cdots + n + 1$. Notemos, por otro lado, que

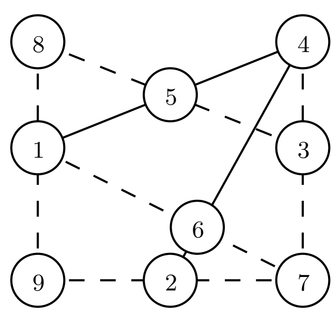
$$n^{2015} + n^{2014} + \cdots + n + 1 = (n^{2015} - 1) + (n^{2014} - 1) + \cdots + (n^2 - 1) + (n-1) + 2016.$$

Ahora, como $(n-1)$ divide a $(n^k - 1)$ para todo k, deberá necesariamente dividir a 2016, y como $2016 = 1 \cdot 2016 = 2 \cdot 1008 = 3 \cdot 672 = \cdots$, el mayor entero menor que 999 es 673.

Prueba por equipos

Solución del problema 1. Tenemos que $c = b + d = |a - e|$, $f = b + h = |d - k|$, $e = |b - k|$, $h = |g - k|$ y $d = |a - g|$. La última ecuación implica que a, d, g son todos pares o exactamente solo uno de ellos es par. Consideramos cuatro casos.

Caso 1: a, d, g son pares. Entonces b, c, e tienen la misma paridad, así como f, h, k, lo cual es imposible poque tres o seis de los números deben ser pares.
Caso 2: d es par, a, g son impares. Entonces b, c tienen paridad contraria a la de e, mientras que f, k tienen la opuesta a h. Los números pares, además de d, pueden ser e, f y k, o b, c y h. En la primera opción, no podemos tener $e = |b - k|$ mientras que en la segunda no podemos tener $f = b + h$.
Caso 3: g es par, mientras que a, d son impares. Entonces b, e tienen la misma paridad opuesta a la de c, mientras que h, k tienen la paridad opuesta a f. Los números pares además de g pueden ser b, e y f, o c, h y k. En la primera opción no podemos tener $f = b + h$ y en la última debe suceder $a = 9$ y $c = 4$ u 8. Supongamos que fuese $c = 8$, y entonces $e = 1, \{b, d\} = \{3, 5\}$. Si $d = 5$, ni g ni k pueden ser 6. Si $d = 3$ entonces $g = 6, k = 4, h = 2, f = 7$ pero tenemos $f = d + k$ en vez de $f = d - k$. Supongamos que $c = 4$, entonces $e = 5, \{b, d\} = \{1, 3\}$. Cuando $d = 3$ tanto g como k deben ser 6, lo cual es imposible. Finalmente, si $d = 1$ entonces $g = 8, k = 2$ y no hay valor posible para f.
Caso 4: a es par, d, g son impares. Aquí c, e tienen paridad opuesta a b, mientras que f, h tienen paridad opuesta a k. Los números pares, además de a , son c, e, k o b, f, h. En la primera opción no podemos lograr $f = b+h$, mientras que en la segunda tenemos $a = 4$ u 8. Supongamos $a = 4$ y entonces $f = 8, k = 9, d = 1, g = 3$ o $g = 5$. Cuando $g = 5$ entonces $h = 4 = a$. Si $g = 3$ entonces $h = 6, b = 2, c = 3 = g$. Supongamos $a = 8$. Entonces $f = 6$ y tendremos $g = 9$ o $k = 9$, pero si $k = 9$ entonces $d = 3, g = 5, h = 4, b = 2, c = 3 = d$. Suponiendo $g = 9$ tenemos $d = 1, k = 7, h = 2, b = 4, c = 5$ y $e = 3$, lo cual da la única solución.



Solución del problema 2. Como $x = 100a + 10b + c, y = 100c + 10b + a$, tenemos $2y + x = 102a + 30b + 201c = 2016$. Notemos que $102a, 30b, 2016$ son pares pero 201 no, por lo que c debe ser par, y tenemos $c = 2, 4, 6$ u 8. Notemos que $102 \cdot 9 + 30 \cdot 9 = 1188$ de modo que $201c \geq 2016 - 1188 = 828$, y así $c > 4$.
Si $c = 6$, entonces $102a + 30b = 2016 - 1206 = 810$ y por tanto $17a + 4b = 135$. Esto quiere decir que $17a$ es múltiplo de 5 y así $a = 5$. Luego, $85 + 5b = 135$ implica que $b = 10$ y por tanto no hay solución.
Si $c = 8$, entonces $102a + 30b = 2016 - 1608 = 408$ por lo que $17a + 5b = 68$. Por tanto b es par y $17a$ termina en 8, lo cual quiere decir que $a = 4$, $17 \cdot 4 + 5b = 68$ y

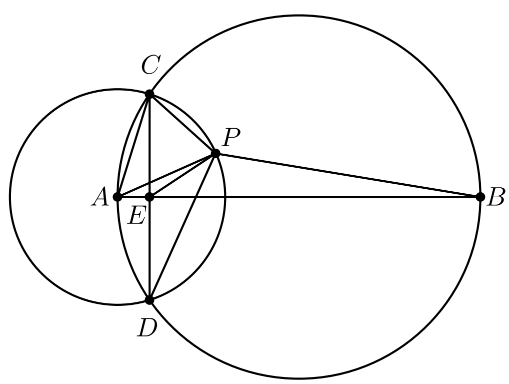
por tanto $b = 0$. Como $408 + 2 \times 804 = 2016$, encontramos una solución.

Solución del problema 3. Si $n = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + mk$ entonces $2n = k(k+2m-1)$. Ahora, los números k y $k+m-1$ tienen paridad contraria y ambos son mayores que 1. Se sigue que si n es una potencia de 2 entonces la expresión buscada es imposible. Recíprocamente, sea n cualquier entero positivo que no es una potencia de 2. Entonces $2n = pq$ para algunos enteros positivos p, q donde $p > 1$ es impar y q es par. Si $p < q$ entonces $2q = p+2m-1$ para algún m, y $n = 1+2+\cdots+(k-1)+mk$ donde $k = p$. Si $p > q$ entonces $p = q + 2m - 1$ para algún m, y por tanto $n = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + mk$ donde $k = q$. Hay 11 potencias de 2 menores que 2016 y por tanto hay $2016 - 11 = 2005$ enteros con la propiedad buscada.

Solución del problema 4. Al ser E el punto medio de CD, el teorema de Apolonio nos dice que $PC^2 + PD^2 = 2PE^2 + 2CE^2$ y por tanto $CE = 18$ cm. De la fórmula de Herón tenemos que el área del triángulo CDP es $96\sqrt{5}$ cm^2. Más aún, como CA es su circunradio tenemos que

$$CA = \frac{16 \cdot 28 \cdot 36}{4 \cdot 96\sqrt{5}} = \frac{42}{\sqrt{5}}.$$

Del teorema de Pitágoras, $AE = \frac{12}{\sqrt{5}}$ y como los triángulos AEC y ACB son semejantes tenemos que $AE \cdot AB = AC^2 = AP^2$. Concluimos que los triángulos AEP y APB son semejantes y por tanto $\frac{AE}{AP} = \frac{EP}{PB}$, resultando en $PB = 49$ cm.



Solución del problema 5. Primero identificamos los cuadrados, del menor al mayor.
Tipo 1: (1, 2, 3, 4), (3, 4, 7, 8), (5, 6, 11, 12), (6, 7, 12, 13), (7, 8, 13, 14), (8, 9, 14, 15), (9, 10, 15, 16), (13, 14, 17, 18) y (17, 18, 19, 20).
Tipo 2: (3, 6, 8, 13), (4, 7, 9, 14), (7, 12, 14, 17) y (8, 13, 15, 18).
Tipo 3: (3, 9, 12, 18) y (4, 6, 15, 17).
Tipo 4: (1, 5, 9, 17), (2, 6, 10, 18), (3, 11, 15, 19) y (4, 12, 16, 20).

Tipo 5: (1, 10, 11, 20) y (2, 5, 16, 19).

En total hay 21 cuadrados, pero debemos quitar al menos un círculo en cada uno de (1, 2, 3, 4), (5, 6, 11, 12), (7, 8, 13, 14), (9, 10, 15, 16) y (17, 18, 19, 20). Y debemos retirar al menos dos de cada uno de (1, 2, 5, 10, 11, 16, 19, 20) y (3, 4, 6, 9, 12, 15, 17, 18).

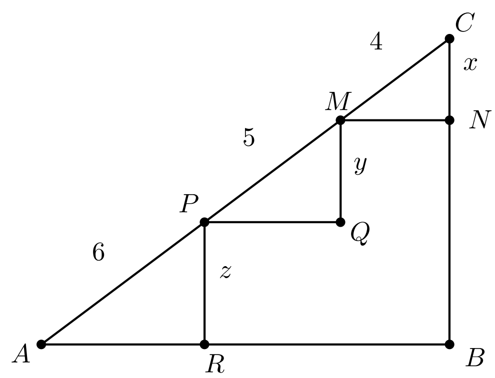
Supongamos que quitamos solo 5 círculos. Por simetría, podemos suponer que se quitó el 14. Entones debemos borrar 3 o 4, 6 o 12, 10 o 16 y 19 o 20. Ahora, el cuadrado $(1, 5, 9, 17)$ se mantiene. Por otra parte, si borramos los círculos $3, 5, 6, 14, 15$ y 20, no sobrevive ninguno de los cuadrados. Por tanto, la respuesta es 6.

Solución del problema 6. Sean x, y, z el número de puntos obtenidos en cada problema, respectivamente. Calcularemos el número de casos en los cuales la suma de estos puntos es a lo más 15 y lo restaremos de $10^3 = 1000$. Esto es, contaremos el número de soluciones (x, y, z) de la desigualdad $x + y + z \leq 15$ que satisfacen $1 \leq x, y, z \leq 10$, el cual es equivalente al número de soluciones enteras (a, b, c) de la desigualdad $a + b + c \leq 12$ con $0 \leq a, b, c \leq 9$. Además, esto es también equivalente al número de soluciones (a, b, c, d) de $a+b+c+d = 12$ que satisfacen $0 \leq a, b, c \leq 9$ y $0 \leq d \leq 12$. Si no hubiera restricción en los valores máximos de las variables, el número de soluciones hubiera sido $\binom{13}{3} = 455$.

Aplicando el principio de inclusión-exclusión, debemos restar el número de casos en los cuales al menos una de las variables a, b, c es al menos 10 (d no puede ser mayor a 12). Hay diez casos para que solo uno de a, b, c es al menos 10, y por tanto un total de 30 casos de que alguno de ellos es al menos 10. Finalmente, el número total de casos en los que el total de puntos en la prueba es al menos 15 es $455 - 30 = 425$ y de esta forma, el número pedido es $1000 - 425 = 575$.

Solución del problema 7. Consideremos un triángulo ABC tal que $AC = 15, AB = 12, BC = 9$. Por el recíproco del teorema de Pitágoras, $\angle ABC = 90°$. Construimos el triángulo rectángulo MNC con $MC = 4, CN = x, MN = \sqrt{16 - x^2}$. Del mismo modo, construimos triángulos rectángulos PQM y ARP con $MP = 5, MQ = y, PQ = \sqrt{25 - y^2}$ y $AP = 6, PR = z, AR = \sqrt{36 - z^2}$, respectivamente.

Entonces tenemos que $CM + MP + PA = 15$, lo que significa que los puntos M, P están en el segmento AC. Los triángulos MNC, PQM, ARP son semejantes y $CN : MQ : PR = x : y : z = 4 : 5 : 6$. Usando que $x + y + z = 9$, obtenemos $(x, y, z) = (2.4, 3, 3.6)$. Así, $xyz = 2.4 \times 3 \times 3.6 = 25.92$.



Solución del problema 8. Sea m el mayor entero seleccionado. El mínimo común múltiplo de m y cualquiera de los otros enteros es al menos m, y como sí fue seleccioando, será exactamente m. Se sigue que todos los números seleccionados son divisores de m y podemos tomarlos todos. Así que el problema se reduce a encontrar qué número entre 1 y 2016, inclusive, tiene el mayor número de divisores positivos. Consideramos los siguientes casos.

Entre los enteros con solo un divisor primo, $2014 = 2^{10}$ es el mayor, con 11 divisores positivos.

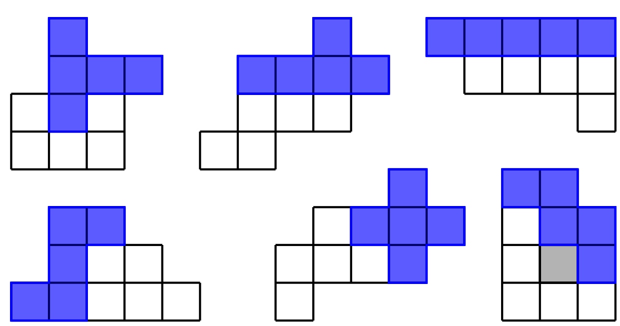
Entre los que tienen dos divisores primos, $2^6 \cdot 3^3 = 1728$ es el que tiene más, con 28 divisores positivos.

Entre los que tienen tres divisores primos, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$, es el que ms divisores tiene, con 36 divisores positivos.

Entre los que tienen 4 divisores primos, $2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 1680$ es el que va a la cabeza, con 40 divisores primos.

No podemos tomar uno con 5 divisores primos, puesto que $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 > 2016$. Concluimos que a lo más 40 enteros pueden ser seleccionados.

Solución del problema 9. La disección se muestra en la siguiente figura.



Solución del problema 10. Sea $n = 3^a 5^b 11^c 13^d x$ para algunos enteros no negativos a, b, c, d y algún entero positivo x primo relativo con $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$.
Entonces

$$\begin{aligned}
T(n) &= (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)T(x),\\
T(39n) &= (2+a)(1+b)(1+c)(2+d)T(x),\\
T(55n) &= (1+a)(2+b)(2+c)(1+d)T(x).
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
39 &= T(39n) - T(n)\\
&= (2+a)(1+b)(1+c)(2+d)T(x) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)T(x)\\
&= (1+b)(1+c)T(x)[(2+a)(2+d) - (1+a)(1+d)],\\
55 &= T(55n) - T(n)\\
&= (1+a)(2+b)(2+c)(1+d)T(x) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)T(x)\\
&= (1+a)(1+d)T(x)[(2+b)(2+d) - (1+b)(1+d)].
\end{aligned}$$

Como 39 y 55 son primos relativos, debemos tener $T(x) = 1$ y por tanto $x = 1$. Ahora,

$$\begin{aligned}
39 &= (1+b)(1+c)(3+a+d),\\
55 &= (1+a)(1+d)(3+b+c).
\end{aligned}$$

Se sigue que uno de b o c es 0 y uno de a, d es 0. Hay varios casos.
Caso 1: $c = d = 0$. Entonces $39 = 3 \cdot 13 = (1+b)(3+a)$, $55 = 5 \cdot 11 = (1+a)(3+b)$ y de ahí $a = 10, b = 2$ y por tanto $n = 3^{10}5^2$.
Caso 2: $a = b = 0$. Entonces $39 = (1+c)(3+d)$, $55 = (1+d)(3+c)$ y por tanto $d = 10, c = 2$ y $n = 11^2 13^{10}$.
Caso 3: $b = d = 0$, que lleva a $n = 3^{10}11^2$.
Caso 4: $a = c = 0$, que lleva a $n = 5^2 13^{10}$.
En conclusión tenemos que $n = 3^{10}5^2,\ 11^2 13^{10},\ 3^{10}11^2$ o $5^2 13^{10}$.

XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Karol José Gutiérrez Suárez). Considerando la ecuación dada módulo 3 tenemos que $pq + qr + rp \equiv 1 \pmod 3$. Si ninguno de los números p, q y r es 0 módulo 3, entonces son 1 o 2 módulo 3. La cantidad de tales números congruentes con 2 módulo 3 puede ser 3, 2, 1 o 0. Lo anterior nos permite dividir el problema en los siguientes casos.

- Si $(p, q, r) \equiv (2, 2, 2) \pmod 3$, entonces $pq + qr + rp \equiv 4 + 4 + 4 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$, lo que es una contradicción, pues $1 \not\equiv 0 \pmod 3$.

- Si $(p,q,r) \equiv (2,2,1) \pmod 3$ en algún orden, entonces $pq+qr+rp \equiv 4+2+2 \equiv 2 \pmod 3$, lo que es una contradicción.
- Si $(p,q,r) \equiv (2,1,1) \pmod 3$ en algún orden, entonces $pq+qr+rp \equiv 2+2+1 \equiv 2 \pmod 3$, lo que es una contradicción.
- Si $(p,q,r) \equiv (1,1,1) \pmod 3$, entonces $pq+qr+rp \equiv 1+1+1 \equiv 0 \pmod 3$, lo que es una contradicción.

Entonces, alguno de p, q o r debe ser múltiplo de 3; sin embargo, como son números primos, uno de ellos es igual a 3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p=3$. Sustituyendo en la ecuación original, tenemos que $qr+3q+3r=12k+1$, lo cual implica que $qr+3q+3r+9=12k+10$. Esto es, $(q+3)(r+3) \equiv 2 \pmod 4$. Si ambos q y r son impares, tenemos que $q+3$ y $r+3$ son pares y, por lo tanto, $(q+3)(r+3)$ es múltiplo de 4, lo cual no es posible. Luego, alguno de q o r es par. Como el único primo par es 2, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $q=2$. Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos que $2\cdot 3+2r+3r=5r+6=12k+1$, lo cual implica que $5r+5=12k$. Esto es, $12k \equiv 0 \pmod 5$, de donde se sigue que $k \equiv 0 \pmod 5$ ya que 12 y 5 son primos relativos. Tenemos entonces que $5r+5=12(5)=60$, de donde $r=11$ el cual es primo. Por lo tanto, las soluciones son $k=5$ y p,q,r iguales a $2,3,11$ en algún orden.

Solución del problema 2. (Solución de Antonio López Guzmán). De la ecuación $x=\frac{1}{y^2+y-1}$ obtenemos $xy^2+xy-x=1$ y, por tanto, $xy^2+xy=x+1$. Esto es, $xy(y+1)=x+1$. Haciendo lo mismo con las otras ecuaciones obtenemos que $yz(z+1)=y+1$ y $zx(x+1)=z+1$.

Multiplicando las tres ecuaciones obtenemos que $x^2y^2z^2(x+1)(y+1)(z+1)=(x+1)(y+1)(z+1)$. Como x,y,z son positivos, concluimos que $x^2y^2z^2=1$, es decir, $xyz=1$.

Con este resultado, regresamos a la ecuación original que daba $xy^2+xy-x=1$ y sustituimos $xy^2=\frac{y}{z}$, $xy=\frac{1}{z}$ para obtener $\frac{y+1}{z}=x+1$. Por tanto, $y+1=xz+z$ y, de ahí, $y+1-\frac{1}{y}=z$.

Por simetría tenemos que $z+1-\frac{1}{z}=x$ y $x+1-\frac{1}{x}=y$. Sumando las tres ecuaciones resulta que

$$x+y+z+3-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=x+y+z$$

y, por tanto, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$. Usando que $xyz=1$, la última expresión es equivalente a $xy+yz+zx=3$.

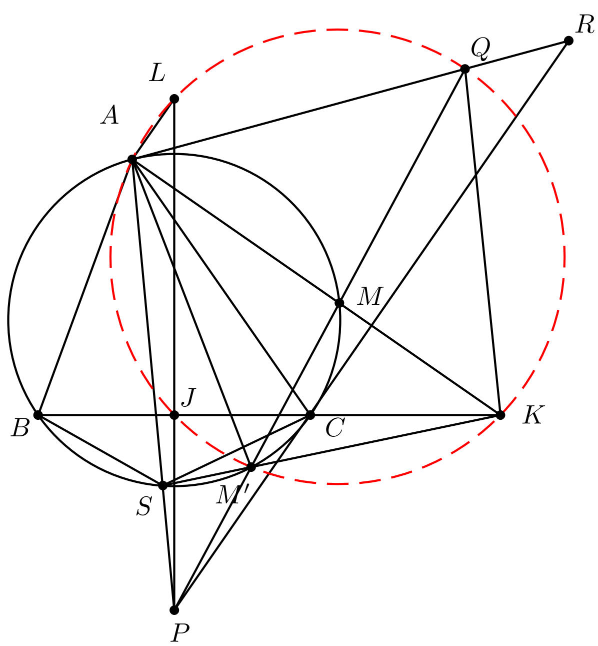
Regresando a la ecuación original, $x=\frac{1}{y^2+y-1}$, cambiamos x por $\frac{1}{yz}$ y obtenemos $yz=y^2+y-1$. Por la simetría del problema, tenemos que $xz=z^2+z-1$ y $xy=x^2+x-1$. Sumando las tres expresiones resulta que

$$xy+yz+zx=(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)-3$$

y, por tanto, $6=(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)$. Usando la identidad $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$, se sigue que $12=(x+y+z)^2+(x+y+z)$. Con

el cambio de variable $u = x + y + z$, obtenemos la ecuación cuadrática $12 = u^2 + u$. Las soluciones de esta ecuación son $u = 3$ y $u = -4$, la segunda se descarta pues $x + y + z$ es positivo. Todo este proceso nos permite deducir que $x + y + z = 3$ y de ahí, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.
Como $x+y+z = 3$ y $xy+yz+zx = (x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)-3$, tenemos que $2(xy+yz+zx) = 2(x^2+y^2+z^2)$, esto es, $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) = 0$. Sin embargo, $2(x^2+y^2+z^2)-2(xy+yz+zx) = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, de modo que $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = 0$. Pero, si la suma de tres cuadrados vale cero, entonces cada uno de ellos también. Por lo tanto, $x = y = z$, lo cual permite concluir que $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ es la única solución.

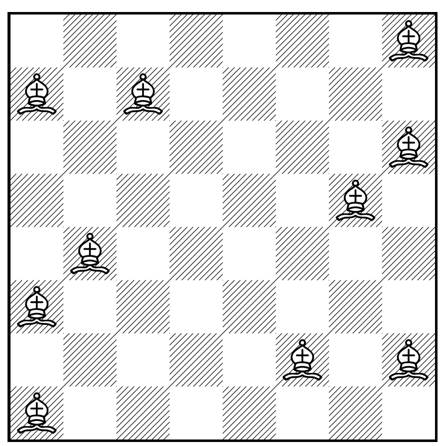
Solución del problema 3. Por ser PBC un triángulo isósceles, se tiene que PJ es altura desde P, lo cual implica que $\angle KJL = 90°$. Por otro lado, al ser R y P puntos simétricos con respecto a AM se tiene que AM y RP son perpendiculares. Del paralelismo de AL con PR, se tiene que $\angle KAL = 90° = \angle KJL$ y, por lo tanto, $AJKL$ es un cuadrilátero cíclico. Solo resta probar que Q está en el mismo circuncírculo de alguno de estos tres. Sean M' y S los puntos de intersección de PM y PA con Γ.



Por construcción BC es la polar de P con respecto a Γ, por lo tanto, las diagonales del cuadrilátero $ASMM'$ deben cortarse en BC, entonces AM y SM' concurren sobre BC. Por el cuadrilátero cíclico $ASMM'$, se tiene que $\angle KM'Q = \angle KM'M = \angle SAM = \angle PAM$.
Por otro lado, $\angle PAM = \angle MAQ = \angle KAQ$ por la simetría de R y P con respecto

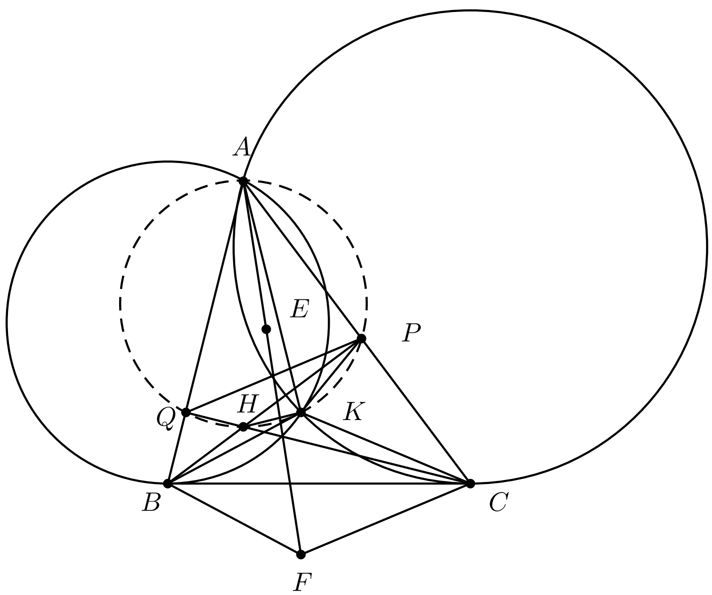
a AM, con esto y la igualdad de ángulos anterior se tiene que $\angle KM'Q = \angle KAQ$, de donde se sigue que $KM'AQ$ es cíclico. Entonces, $\angle AQK = \angle AM'S = \angle ACS$ (la última igualdad se da por el cuadrilátero cíclico $ASM'C$). Luego, si probamos que $\angle AJB = \angle ACS$, se tendrá que el cuadrilátero $AJKQ$ es cíclico (pues los ángulos $\angle AQK$ y $\angle KJA$ serían suplementarios).
Para probar esto último recordemos que AP es simediana del triángulo ABC desde A, entonces AP y AJ son isogonales con respecto al ángulo $\angle BAC$, por lo tanto, $\angle BAJ = \angle SAC$. Por otro lado, tenemos que $\angle CSA = \angle CBA = \angle JBA$. De esto se concluye por el criterio AA que los triángulos ABJ y ASC son semejantes, de donde $\angle AJB = \angle ACS$ como se quería probar.

Solución del problema 4. (Solución de Víctor Hugo Almendra Hernández). Demostraremos que los alfiles en casillas negras solo atacarán casillas negras y los alfiles en casillas blancas solo atacarán casillas blancas. Por esto, podemos restringir nuestro análisis únicamente a alfiles en casillas de un solo color, digamos, negras.
En total hay 7 diagonales $\nearrow$ y 8 diagonales $\searrow$, resultando un total de 15 diagonales. Sea k la cantidad total de alfiles negros en una configuración que cumpla las condiciones del problema. Cada alfil estará en la intersección de 2 diagonales y cada alfil es atacado por a lo más otro alfil, de modo que al contar las dos diagonales involucradas en cada uno de ellos, repetimos a lo más $\frac{k}{2}$ diagonales (pues los alfiles se emparejan según los ataques). Por lo tanto, $2k - \frac{k}{2}$ (que es la cantidad de diagonales al contarlas por alfiles) no puede exceder a 15 (que es la cantidad total de diagonales).
De la desigualdad $2k - \frac{k}{2} \leq 15$ concluimos que $k \leq 10$. Solo falta ver que $k = 10$ se puede alcanzar, lo cual ilustramos poniendo un alfil en cada casilla marcada en la siguiente figura.



Reflejamos ese arreglo respecto de la horizontal para colocar los alfiles de las casillas blancas y con esto hemos demostrado que sí es posible acomodar 20 alfiles y que es la mayor cantidad posible.

Solución del problema 5. (Solución de Karol José Gutiérrez Suárez). Por las tangentes veamos que $\angle BCK = \angle CAK$ y $\angle KBC = \angle KAB$, entonces $\angle BKC = 180^\circ - (\angle KBC + \angle BCK) = 180^\circ - (\angle CAK + \angle KAB) = 180^\circ - \angle BAC = \angle BFC$ donde la última igualdad se da por la reflexión de K sobre BC. Entonces, el cuadrilátero $ABFC$ es cíclico, pues $\angle BAC + \angle BFC = 180^\circ$. Sea H la intersección de BP y CQ, claramente H es el ortocentro del triángulo ABC. Por ser H el ortocentro podemos ver también que $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC$, entonces $\angle BHC = \angle BKC$ de donde se tiene que $BHKC$ es cíclico. También, como $\angle APH = \angle HQA = 90^\circ$, se tiene que $AQHP$ es cíclico al igual que $PQBC$, en particular se concluye del cíclico $PQBC$ que los triángulos ABC y APQ son semejantes. Por el cíclico $HKBC$ se tiene que $\angle QHK = \angle KBC = \angle KAB$, entonces $\angle KHQ = \angle KAQ$. Luego, $KQAH$ es cíclico, pero $APHQ$ también es cíclico, de manera que $AQKHP$ es un pentágono cíclico, por lo tanto, $\angle KPQ = \angle KHQ = \angle KBC = \angle CBF$. Análogamente, $\angle PQK = \angle BCF$.



Por los ángulos tenemos que $AQKP$ y $ACFB$ son semejantes, pues los triángulos APQ y ABC son semejantes, así como también lo son los triángulos PQK y BCF. Luego, E es a K en el triángulo AQP como K es a F en el triángulo ABC, pues son los reflejados. Entonces, como PQ y BC son antiparalelas con respecto a AB y a AC, tenemos que los ángulos se intercalan, por lo que $\angle FAB = \angle KAP = \angle EAB$. Así, los puntos A, E y F son colineales.

Solución del problema 6. (Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes). Primero demostraremos dos lemas.

Lema 1 El orden de 2 módulo 5^n es $\phi(5^n)$ para todo entero $n \geq 1$.

Demostración: Sea k el orden de 2 módulo 5^n, esto es, k es el menor entero positivo tal que $2^k \equiv 1 \pmod{5^n}$. Es conocido[7] que $k \mid \phi(5^n)$, esto es, $k \mid 4 \cdot 5^{n-1}$. Entonces, k es de la forma $5^i \cdot s$, con $0 \leq i \leq n-1$ y $s =$ 1,2 o 4. Observemos que $k \neq 1$ y que $k \neq 2$ para cualquier entero n.
Supongamos que $k = 5^i$ con $i > 0$, entonces $5 \mid 2^k - 1 = 2^{5^i} - 1$. Demostremos por inducción que $2^n \equiv 2 \pmod 5$. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $2^5 \equiv 2 \pmod 5$. Si para algún entero l se tiene que $2^l \equiv 2 \pmod 5$, entonces $2^{5^{l+1}} \equiv (2^{5^l})^5 \equiv 2^5 \equiv 2 \pmod 5$, con lo que el paso inductivo queda demostrado. En particular, $2^{5^i} \equiv 2 \pmod 5$. Pero, $5 \mid 2^{5^i} - 1$, esto es, $2^{5^i} \equiv 1 \pmod 5$, lo que es una contradicción. Por tanto, $s = 2$ o 4.
Ahora, supongamos que $k = 5^i \cdot 2$, con $i > 0$. Entonces, $2^{5^i \cdot 2} \equiv (2^{5^i})^2 \equiv 1 \pmod 5$. Pero, por lo visto en el caso anterior, $2^{5^i} \equiv 2 \pmod 5$, por tanto, $(2^{5^i})^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod 5$, que es una contradicción. Por tanto, $k = 5^i \cdot 4$.
Como $5 \mid 2^4 - 1 = 15$ y 5 no divide ni a 2, ni a 1, entonces es un lema conocido (Lifting The Exponent Lemma) que $\nu_5((2^4)^{5^i} - (1)^{5^i}) = \nu_5(2^4 - 1) + \nu_5(5^i) = 1 + i$. Pero, $5^n \mid 2^{5^i \cdot 4} - 1$, entonces $\nu_5(2^{5^i \cdot 4} - 1) = i + 1 \geq n$, es decir, $i \geq n - 1$. Sin embargo, ya se demostró que $i \leq n - 1$, por tanto, $k = 5^{n-1} \cdot 4 = \phi(5^n)$, como se quería.

Lema 2 Existen dígitos $c_1, c_2, \ldots, c_k$ y $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tales que los enteros

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_k c_1 c_2 \cdots c_k} \text{ y } \overline{a_1 a_2 \cdots a_k d_1 d_2 \cdots d_k}$$

son múltiplos consecutivos de 4^k.

Demostración: Consideremos los 10^k enteros consecutivos de $2k$ dígitos:

$$\overline{a_1 a_2 \cdots a_k 00 \cdots 0}, \ \overline{a_1 a_2 \cdots a_k 00 \cdots 1}, \ \ldots, \ \overline{a_1 a_2 \cdots a_k 99 \cdots 9}.$$

Es conocido que entre cualesquiera ms enteros consecutivos, con m y s enteros no negativos, hay al menos m múltiplos consecutivos de s. Entonces, para que existan dos enteros que sean múltiplos consecutivos de 4^k entre los 10^k enteros anteriores, basta con demostrar que $10^k = 2^k \cdot 5^k \geq 2 \cdot 4^k$, esta última desigualdad es cierta para $k \geq 1$ y el lema queda demostrado.

Sean $M \cdot 4^k$ y $(M+1) \cdot 4^k$ los dos múltiplos de 4^k del lema 2. Supongamos que 5 divide a ambos enteros. Como 5 divide a $M \cdot 4^k$, entonces 5 divide a M. Análogamente, 5 divide a $M + 1$. Lo anterior implica que 5 divide a dos números consecutivos (M y $M + 1$), algo que no puede suceder. Por tanto, existe un múltiplo de 4^k de la forma $S = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k b_1 b_2 \cdots b_k}$, con $b_1, b_2, \ldots, b_k$ dígitos, tal que no es múltiplo de 5, en particular 5 no divide a b_k. Demostremos que existe un entero n tal que la representación decimal de 2^n termina en S.
Como el orden de 2 módulo 5^{2k} es $\phi(5^{2k})$ (por el lema 1), entonces para todo valor a, con $\text{mcd}(a, 5^{2k}) = 1 = \text{mcd}(a, 5)$, hay un entero s tal que $2^s \equiv a \pmod{5^{2k}}$ y $1 \leq s \leq \phi(5^{2k})$. Pero, $\text{mcd}(S, 5) = 1$, entonces existe un entero l entre 1 y $\phi(5^{2k})$ tal que $2^l \equiv S \pmod{5^{2k}}$. Además, el teorema de Euler[8] nos garantiza que

[7] Ver el artículo *Orden de un número* de Tzaloa No. 3, 2016.
[8] Ver en el apéndice el teorema 3.

$2^{\phi(5^{2k})} \equiv 1 \pmod{5^{2k}}$; por tanto, $2^{l+s\phi(5^{2k})} \equiv (2^l) \cdot (2^{\phi(5^{2k})})^s \equiv 2^l \equiv S \pmod{5^{2k}}$ para todo entero $s \geq 0$. Entonces, hay un entero $n > 2k$ tal que $2^n \equiv S \pmod{5^{2k}}$. Además, como $n > 2k$, $2^n \equiv 0 \pmod{2^{2k}}$. Recordemos que $S \equiv 0 \pmod{2^{2k}}$, entonces $2^n \equiv S \pmod{2^{2k}}$. Como $2^n \equiv S \pmod{5^{2k}}$, $2^n \equiv S \pmod{2^{2k}}$ y $\operatorname{mcd}(5^{2k}, 2^{2k}) = 1$, tenemos que $2^n \equiv S \pmod{10^{2k}}$. Esto último implica que los últimos $2k$ dígitos de 2^n son $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k$, en ese orden, como queríamos.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ $(mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $c \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv d$ $(mod\ m)$.*
2. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $b \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd$ $(mod\ m)$.*
3. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n$ $(mod\ m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv c$ $(mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ $(mod\ p)$.*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1$ $(mod\ n)$.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y sólo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.

Teorema 14 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.

Teorema 15 (Fórmula de Herón)**.** *El área de un triángulo de lados a, b y c y semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ es igual a*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Teorema 16 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas* AB *y* CD *de una circunferencia se intersectan en un punto* P*, entonces* $PA \cdot PB = PC \cdot PD$*.*

2. *Si* A*,* B *y* T *son puntos sobre una circunferencia y la tangente en* T *intersecta en un punto* P *a la prolongación de la cuerda* AB*, entonces* $PT^2 = PA \cdot PB$*.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 21 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a* $180°$*, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Teorema 22 (Ptolomeo)**.** *Un cuadrilátero convexo* $ABCD$ *es cíclico si y solo si*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Rogelio Valdez Delgado (PRESIDENTE)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
valdez@uaem.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Centro de Investigación en Matemáticas
barradas@cimat.mx

Víctor Manuel Barrero Calderón
Passport Health
barrero.victor@gmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
josealfredocobian@gmail.com

Julio César Díaz Calderón
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc94@hotmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Raymundo Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Enrique Treviño López
Lake Forest College
enriquetrevi_o@hotmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://ommenlinea.org/

¡Síguenos en facebook y en twitter!

http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas

@ommtw