TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2017, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
Ciudad de México
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2017.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2017, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su noveno año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Es así que iniciamos este 2017 llenos de entusiasmo.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Enteros como suma de dos y de cuatro cuadrados*, de nuestro amigo Julio César Díaz Calderón. En él, se introducen al lector principiante y también al lector avanzado, algunas técnicas de resolución de ecuaciones diofantinas desde el estudio de un ejemplo muy particular, como es el teorema de Fermat de la suma de dos cuadrados. Estamos seguros que este trabajo será de mucha utilidad para el lector interesado en el tema.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2017.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1998. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2017-2018 y, para el 1° de julio de 2018, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 10 de noviembre de 2017 en Monterrey, Nuevo León. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2017 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rumania, julio de 2018) y a la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Portugal y España, septiembre de 2018).

De entre los concursantes nacidos en 2001 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Cuba, junio de 2018).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2018.

1ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2017, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Primera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2017.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de 2017.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2017.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 1^a OMMEB se realizará en Oaxtepec, Morelos, del 15 al 18 de junio de 2017. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se realizará en Burgas, Bulgaria durante el verano de 2018.

Enteros como suma de dos y de cuatro cuadrados

Por Julio César Díaz Calderón

Nivel Avanzado[2]

Introducción

El propósito de este texto es introducir algunas técnicas de resolución de problemas en ecuaciones diofantinas desde el estudio de un ejemplo particular: el teorema de Fermat de la suma de dos cuadrados. Una ecuación diofantina es cualquier ecuación de la forma

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

donde f es una función polinomial en n variables con coeficientes racionales. El caso que nos interesa es cuando f es un polinomio con coeficientes enteros con $n \geq 2$ y la ecuación (1) en este caso se denomina ecuación diofantina algebraica. En este contexto, resolver una ecuación diofantina algebraica significa determinar cuáles son todas las configuraciones $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números enteros que satisfacen (1).

El estudio de técnicas para resolver cierto tipo de ecuaciones diofantinas se vuelve muy importante a partir de la resolución del problema diez de Hilbert, el cual establece que no hay un método general para resolverlas. La lista de problemas de Hilbert es la más famosa en el ámbito matemático y consiste de 23 problemas que formuló el matemático David Hilbert en el Congreso Internacional de Matemáticas en París en 1900. Según Hilbert, dichos problemas era en los que valía la pena trabajar en el nuevo milenio.

[2]Este artículo está basado en una plática titulada *Técnicas de resolución de problemas en ecuaciones diofantinas* que se presentó el 25 de octubre de 2016 en la sesión especial por el treinta aniversario de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Esta sesión tuvo lugar en el XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana en Aguascalientes, Aguascalientes.

El problema diez de Hilbert consiste en determinar si es posible encontrar un proceso en el que en una cantifidad finita de operaciones se señale si una ecuación diofantina tiene una solución en los números racionales. En 1970, Yuri Matiyasevich demostró, con la ayuda del trabajo previo de Martin Davis, Hilary Putnam y Julia Robinson, que no es posible decidir la existencia de soluciones de una ecuación diofantina. Más aún, demostró que existe un polinomio explícito $F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tal que no hay un algoritmo que, dado un entero a como entrada, pueda decidir en un número finito de pasos si la ecuación $F(a, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ tiene una solución en los enteros.
Como las técnicas de resolución de ecuaciones diofantinas son demasiadas, nos limitaremos a desarrollar las que surgen al trabajar con una ecuación diofantina particular:

$$n = a^2 + b^2. \tag{2}$$

Esta ecuación aparece de manera natural cuando se estudian las ecuaciones diofantinas en tres variables cuyo máximo exponente es 2. Una ecuación más sencilla que también sirve de motivación para (2), es la ecuación de las ternas pitagóricas:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

Se puede demostrar que las soluciones en los enteros positivos de (3) son de la forma $a = p^2 - q^2, b = 2pq, c = p^2 + q^2$, para cualesquiera dos enteros p y q tales que $p > q$. El problema 1 ayuda a demostrar este hecho.
Este artículo se divide en tres partes. En la primera se dará respuesta a la interrogante detrás del teorema de Fermat: ¿cuáles son los enteros que se pueden escribir como suma de dos cuadrados de enteros? Las siguientes dos secciones desarrollan dos preguntas de investigación relacionadas con el teorema principal. Se concluye con una lista de problemas para aplicar lo expuesto en el artículo.

El teorema de Fermat de la suma de dos cuadrados

Si se hacen los cálculos para los primeros enteros positivos, es posible determinar que 3 no se puede escribir como suma de dos cuadrados. Los siguientes: 6, 7, 11, 12, 14, 15, etc., no arrojan demasiada información respecto a cómo deben ser estos números. La clave en estas situaciones es restringir el problema a una familia de enteros, por ello, se resolverá primero la ecuación diofantina:

$$p = a^2 + b^2, \tag{4}$$

con p un primo. Para poder resolver (4) será necesario desarrollar una teoría llamada *aritmética modular*.

Definición 1 (Congruencias). *Dos enteros a y b son congruentes módulo un entero n si n divide a $a - b$. Se escribirá $a \equiv b \pmod{n}$ para indicar que a es congruente a b módulo n.*

Bajo la definición anterior, todo entero es congruente a $0, 1, 2$ o 3, módulo 4. Además, el cuadrado de todo entero será congruente a 0 o 1 módulo 4. Así, $p = a^2 + b^2 \equiv 0, 1$ o 2 (mod 4). Esto elimina la posibilidad de que un primo de la forma $4k + 3$ se pueda escribir como la suma de dos cuadrados. Un desarrollo introductorio de la aritmética modular se puede consultar en el libro *Teoría de números* de María Luisa Pérez Seguí. Todo número primo distinto de 2, es de la forma $4k + 1$ o de la forma $4k + 3$. Por la observación anterior, para que un primo sea suma de dos cuadrados, entonces p debe ser 2 o de la forma $4k + 1$. Resulta que estos números sí se pueden escribir como suma de dos cuadrados. Para probarlo y eliminar algunos casos en la versión general del problema se demostrará el siguiente lema:

Lema de Lagrange: La ecuación $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ tiene solución si y solo si $p \equiv 1 \pmod{4}$ o $p = 2$.

Demostración: Este lema utiliza dos teoremas clásicos de teoría de números, el teorema pequeño de Fermat y el teorema de Wilson.

Teorema pequeño de Fermat: Si p es un primo y a es un entero que no es múltiplo de p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Teorema de Wilson: Si p es un primo, entonces $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Las demostraciones de ambos teoremas, así como ejemplos y ejercicios, se pueden consultar en el libro *Teoría de números*. Supongamos que la ecuación $u^2 + 1 \equiv 0$ (mod p) tiene solución y que $p = 4k + 3$ con k un entero positivo. Como $u^2 + 1 \equiv 0$ (mod p), entonces $\text{mcd}(u, p) = 1$; así, por el teorema pequeño de Fermat, $u^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Entonces, $u^{4k+2} \equiv 1 \pmod{p}$. Sin embargo, $u^{4k+2} = (u^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1$ (mod p). Por tanto, $1 \equiv -1 \pmod{p}$, es decir, $p = 2$, lo cual es una contradicción. Entonces, $p \equiv 1 \pmod{4}$ o $p = 2$.
Ahora, si $p = 4k + 1$ para algún entero positivo k, el teorema de Wilson nos garantiza que:

$$\begin{aligned}
0 &\equiv (p-1)! + 1 \\
&\equiv 1 \cdot 2 \cdots (2k-1) \cdot (2k) \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) \cdots (4k-1) \cdot (4k) + 1 \\
&\equiv 1 \cdot 2 \cdots (2k-1) \cdot (2k) \cdot (-2k) \cdot (-(2k-1)) \cdots (-2) \cdot (-1) + 1 \\
&\equiv (-1)^{2k}((2k)!)^2 + 1 \\
&\equiv ((2k)!)^2 + 1 \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Así, $u = (2k)!$ es una solución de $u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$. Para el caso $p = 2$, basta con verificar que $u = 1$ cumple. Con lo que queda demostrado el lema de Lagrange.
Para concluir que todos los primos de la forma $p = 4k + 1$ pueden escribirse como suma de dos cuadrados es necesario introducir una nueva herramienta: el principio de las casillas.

Principio de las casillas: El principio de las casillas establece que si se colocan $k+1$ objetos en k casillas, entonces se tendrán que colocar dos objetos en una misma casilla.

La dificultad de los problemas que se resuelven al aplicar un argumento que usa el principio de las casillas radica en identificar cuáles son los objetos y cuáles son las casillas. Para una discusión a profundidad de cómo utilizar el principio de las casillas, se recomienda consultar el libro *Principio de las casillas* de José Antonio Gómez Ortega, Rogelio Valdez Delgado y Rita Vázquez Padilla. Demostraremos el siguiente lema:

Lema 1: Los primos de la forma $4k+1$ se pueden escribir como suma de dos cuadrados.

Demostración: En este caso las casillas serán los números $0, 1, 2, \ldots, p-1$, estos cumplen que cada entero es congruente a uno de ellos módulo p. Los objetos corresponderán a los enteros de la forma $ux - y$, donde u es el entero que se obtuvo en el lema de Lagrange y $0 \leq x, y < \sqrt{p}$. El número de parejas (x, y), que cumplen las condiciones del problema es $(\lfloor \sqrt{p} \rfloor + 1)^2 > (\sqrt{p})^2 = p$. Por tanto, hay al menos $p+1$ enteros de la forma $ux - y$ y p posibles congruencias módulo p, entonces el principio de las casillas nos garantiza que existen dos enteros $ux_1 - y_1$ y $ux_2 - y_2$ tales que $ux_1 - y_1 \equiv ux_2 - y_2 \pmod{p}$. Entonces, $u(x_1 - x_2) \equiv -(y_1 - y_2) \pmod{p}$, por tanto, $u^2(x_1 - x_2)^2 \equiv (y_1 - y_2)^2 \pmod{p}$. Pero, $u^2 \equiv -1 \pmod{p}$, entonces $-(x_1 - x_2)^2 \equiv (y_1 - y_2)^2 \pmod{p}$. Luego, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ es un múltiplo de p. Sin embargo, $0 < (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < (\sqrt{p})^2 + (\sqrt{p})^2 = 2p$. Por tanto, $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = p$, con lo que queda demostrado el lema. $\square$

Para demostrar el teorema principal es necesario probar un lema que se obtiene por medio de una manipulación algebraica conocida como la identidad de Brahmagupta. Su demostración es inmediata al desarrollar ambos lados.

Identidad de Brahmagupta: Si a, b, c, d son números reales, entonces

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Lema 2: Si n y m se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, entonces nm también se puede escribir como la suma de dos cuadrados.

Demostración: Si $n = a^2 + b^2$ y $m = c^2 + d^2$, la identidad de Brahmagupta garantiza que $mn = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Por tanto, mn se puede escribir como suma de dos cuadrados. $\square$

Definición 2. *Un entero m es libre de cuadrados si todo primo p que divide a m es tal que p^2 no divide a m.*

Teorema de Fermat de la suma de dos cuadrados: Un entero positivo n es la suma de dos cuadrados si y solo si cada factor primo p de n tal que $p \equiv 3 \pmod{4}$ aparece con un exponente par en la factorización en primos de n.

Demostración: Sea n un entero, entonces lo podemos escribir como $n = r^2m$ donde m es un entero libre de cuadrados. Si $n = a^2 + b^2$, con $n, a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $n = d^2(x^2 + y^2)$ donde $d = \text{mcd}(a, b)$, $a = dx$ y $b = dy$. Así, $\frac{n}{d^2} = \frac{r^2m}{d^2} = x^2 + y^2$. Como m es libre de cuadrados, entonces d^2 divide a r^2, por tanto, $x^2 + y^2 = tm$, para algún entero t. Sea p un primo divisor de m. Supongamos que $p = 4k + 3$, para un entero k. Se sabe que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod p$ y que $\text{mcd}(x, y) = 1$, entonces $\text{mcd}(x, p) = \text{mcd}(y, p) = 1$. Además, $x^2 \equiv -y^2 \pmod p$, entonces $(x^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1}(y^2)^{2k+1} \pmod p$, que equivale a $x^{p-1} \equiv -y^{p-1} \pmod p$. Pero, $\text{mcd}(x, p) = \text{mcd}(y, p) = 1$, entonces el teorema pequeño de Fermat asegura que $x^{p-1} \equiv y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, así $1 \equiv -1 \pmod p$. Por tanto, $p = 2$, lo cual es una contradicción. Entonces, todo divisor primo p de m cumple que $p \equiv 1 \pmod 4$ o $p = 2$.
Ahora, si todo factor primo p tal que $p \equiv 3 \pmod 4$ aparece con exponente par en la descomposición en factores primos de n, entonces m solo puede tener como factores primos a 2 y a primos p tales que $p \equiv 1 \pmod 4$. Dado que $2 = 1^2 + 1^2$ y el lema 1 es cierto, entonces todo factor primo de m se puede escribir como suma de dos cuadrados. Por tanto, el lema 2 garantiza que m se podrá escribir como suma de dos cuadrados, así $m = x^2 + y^2$, con x e y enteros. Entonces, $n = (rx)^2 + (ry)^2$. En conclusión, n se puede escribir como suma de dos cuadrados. $\square$

La siguiente demostración de Dietmann y Elsholtz ilustra cómo utilizar el teorema anterior para resolver ecuaciones diofantinas. Se invita al lector a intentar resolver el problema antes de ver su solución.

Problema 1: Sea p un primo con $p \equiv 7 \pmod 8$. Demuestra que no hay enteros positivos x, y, z tales que $x^2 + y^2 + z^4 = p^2$.

Demostración: Si existiera una solución, entonces $x^2 + y^2 = (p - z^2)(p + z^2)$. Si z es par, entonces $p - z^2 \equiv 3 \pmod 4$. Si z es impar, entonces $p + z^2 \equiv 3 \pmod 4$. En ambos casos $p - z^2$ o $p + z^2$ contiene un primo divisor q tal que $q \equiv 3 \pmod 4$ y que es de multiplicidad impar. En efecto, si $n = p + z^2$ o $n = p + z^2$ y si

$$n = 2^\alpha \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} p^{\beta_p} \prod_{q \equiv 3 \pmod 4} q^{\gamma_q}$$

donde p corre sobre todos los primos de n de la forma $4k + 1$ en el primer producto, q corre sobre todos los primos de n de la forma $4k + 3$ en el segundo producto y γ_q son todos pares, entonces

$$\begin{aligned} n &\equiv 2^\alpha \prod_{p \equiv 1 \pmod 4} 1^{\beta_p} \prod_{q \equiv 3 \pmod 4} (4k_q + 3)^{\gamma_q} \equiv 2^\alpha \prod_{q \equiv 3 \pmod 4} (16k_q^2 + 24k_q + 9)^{\frac{\gamma_q}{2}} \\ &\equiv 2^\alpha \pmod 4, \end{aligned}$$

que no puede ser congruente con 3 módulo 4. Por tanto, por el teorema de Fermat de la suma de dos cuadrados, tanto $p - z^2$ como $p + z^2$ son divisibles por q. Luego, la suma de ambos números, $2p$, y su diferencia, $-2z^2$, son divisibles entre q. Dado que p es un primo, entonces $p = q$; además como $z \neq 0$, entonces q divide a z. Lo anterior implica una contradicción pues $x^2 + y^2 + z^4 > q^4 > q^2 = p^2$.

Unicidad de las soluciones

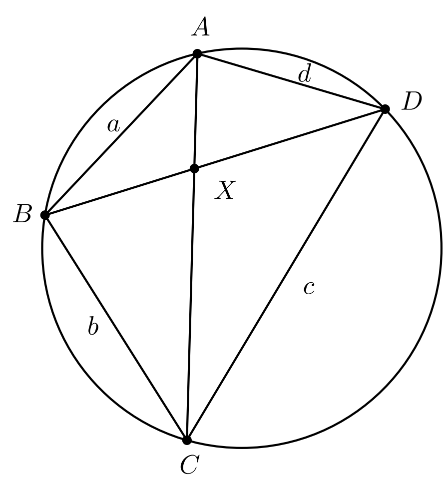
Una vez resuelto el problema inicial sobre qué enteros se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, la pregunta que surge es: ¿dicha representación es única en los enteros positivos? Es decir, ¿puede ocurrir que $n = a^2+b^2 = c^2+d^2$ con $n, a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ y $\{a, b\} \neq \{c, d\}$? La respuesta es afirmativa, por ejemplo: $65 = 1^2+8^2 = 4^2+7^2$. Sin embargo, conocer cuántas representaciones tiene un número como suma de dos cuadrados es complicado. En este apartado resolveremos el problema anterior para los primos.

Lema 3: Si hay dos pares no ordenados (x, y) de enteros positivos que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = n,$$

entonces n es compuesto.

Demostración 1: Suponga que existe un primo $n = p$ tal que $x^2 + y^2 = n$ tiene dos soluciones enteras positivas (a, b) y (c, d). Sin pérdida de generalidad, $ac + bd \geq ad + bc$. Sea ω una circunferencia de diámetro $\sqrt{p}$. Por el teorema de Pitágoras es posible construir un cuadrilátero convexo $ABCD$ con vértices en ω tal que $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ y $AC = \sqrt{p}$. Sea $BD = r$ y sea X la intersección de AC y BD. Como $ABCD$ es cíclico, el teorema de Ptolomeo[3] garantiza que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$, es decir, $r\sqrt{p} = ac + bd$. Denotemos por $u = BX$, $v = XD$ y $t = AX$.



La ley de senos en el $\triangle AXB$ dice que $\frac{u}{t} = \frac{BX}{AX} = \frac{\operatorname{sen}(\angle BAC)}{\operatorname{sen}(\angle ABD)}$. Pero, por la ley de senos en $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$, se tiene que $\frac{b}{\operatorname{sen}(\angle BAC)} = \frac{BC}{\operatorname{sen}(\angle BAC)} = \sqrt{p} =$

[3] Ver en el apéndice el teorema 23.

$\frac{DA}{\text{sen}(\angle ABD)} = \frac{d}{\text{sen}(\angle ABD)}$; entonces, $\frac{b}{d} = \frac{\text{sen}(\angle BAC)}{\text{sen}(\angle ABD)}$. Por tanto, $\frac{u}{t} = \frac{b}{d}$, que equivale a $u = \frac{bt}{d}$. De manera análoga se demuestra que $v = \frac{ct}{a}$. Así, $r = u + v = t\left(\frac{ab+cd}{ad}\right)$. Ahora, por potencia de un punto desde X se tiene que $AX \cdot XC = BX \cdot XD$, es decir, $t(\sqrt{p} - t) = uv = t^2\left(\frac{bc}{ad}\right)$. Entonces, $t = \sqrt{p}\left(\frac{ad}{bc+ad}\right)$. Por tanto, $r = \sqrt{p}\left(\frac{ab+cd}{bc+ad}\right)$. Pero, $r\sqrt{p} = ac + bd$, entonces, $p = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$. Así, p divide a $ac + bd$ o divide a $ad + bc$. Si p divide a $ac + bd$, entonces $p \leq ac + bd = r\sqrt{p}$, que equivale a $\sqrt{p} \leq r$. No obstante, se sabe que $BD = r$ es una cuerda y $AC = \sqrt{p}$ es un diámetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo, que implica que $a = c$ y $b = d$, una contradicción. Ahora, si p divide a $ad + bc$, entonces $p \leq ad + bc \leq ac + bd = r\sqrt{p}$, que equivale a $\sqrt{p} \leq r$; la conclusión se sigue como en el caso anterior. Por tanto, n debe ser compuesto[4]. $\square$

Demostración 2: Sean (a, b) y (c, d) dos soluciones de $x^2+y^2 = n$. Entonces, $a \neq c$ y $a \neq d$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a > c$. Entonces, $(a+c)(a-c) = (d+b)(d-b)$. Por tanto, existen enteros m, n, p, q tales que $\text{mcd}(n, p) = 1$, $a + c = mn$, $a - c = pq$, $d + b = mp$, $d - b = nq$. Entonces, $a = \frac{1}{2}(mn + pq)$, $b = \frac{1}{2}(nq+mp)$ y $4n = 4(a^2+b^2) = (mn+pq)^2+(nq+mp)^2 = (m^2+q^2)(n^2+p^2)$. Asuma que n es primo. Entonces, sin pérdida de generalidad, $m^2+q^2 = 2$ o $m^2+q^2 = 4$. En el primer caso $m = q = 1$, lo que implica que $a = d$, que es una contradicción. El segundo es imposible para enteros positivos. Por tanto, n debe ser compuesto. $\square$

El siguiente teorema resuelve el problema del número de representaciones de un entero positivo como suma de dos cuadrados, el lector interesado puede consultar su demostración en el punto 5.10 del libro *Introducción a la teoría de los números* de Ivan Niven y Herbert S. Zuckerman.

Teorema 2: Sea n un entero positivo y escribamos

$$n = 2^\alpha \prod_{p\equiv 1 \pmod 4} p^{\beta_p} \prod_{q\equiv 3 \pmod 4} q^{\gamma_q},$$

donde p corre sobre todos los primos de n de la forma $4k + 1$ en el primer producto y q corre sobre todos los primos de n de la forma $4k + 3$ en el segundo producto. Sea $N(n)$ el número de soluciones de $x^2 + y^2 = n$ y sea $Q(n)$ el número de parejas (x, y) de enteros tales que $(x, y) = 1$ y $x^2 + y^2 = n$. Si α es 0 o 1 y todos los γ_q son 0, entonces $Q(n) = 2^{t+2}$ donde t es el número de primos de la forma $4k + 1$ que dividen a n. En otro caso, $Q(n) = 0$. Si todos los γ_q son pares, entonces $N(n) = 4\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}(\beta_p + 1)$. En otro caso, $N(n) = 0$.

[4]Esta demostración fue comentada al autor por Pablo Soberón Bravo. La identidad $p = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$ es un caso particular del siguiente resultado: en un cuadrilátero cíclico $ABCD$, si a, b, c, d, x e y denotan las longitudes de los segmentos AB, BC, CD, DA, AC y BD, respectivamente, entonces $x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$ e $y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}$, una demostración de este resultado se puede consultar en la página 25 del libro *Advanced Trigonometry* de C. V. Durell y A. Robson.

El problema de Waring

Alrededor de 1770, Waring afirmó que todo número natural se puede expresar como suma de 4 cuadrados, 9 cubos, 19 potencias cuartas y así en adelante. El problema que planteaba esa afirmación era que para cada entero positivo k existía un entero positivo s tal que todo número natural se puede expresar como suma de s enteros elevados a la k-ésima potencia. Esto quiere decir que todo número natural n tiene una expresión de la forma:

$$n = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k. \tag{5}$$

El siguiente lema demuestra que dado un entero positivo k, un s demasiado pequeño no funcionará.

Lema 4: Dado un entero positivo k, existe un entero que no se puede expresar como suma de $2^k + (\frac{3}{2})^k - 3$ enteros a la k-ésima potencia.

Demostración: Sea $q = (\frac{3}{2})^k$. Considera el número $n = 2^k q - 1 < 3^k$ que solo puede representarse con términos de la forma 1^k y 2^k. Dado que $n = (q-1)2^k + (2^k - 1)1^k$, entonces n requiere $2^k + q - 2$ sumandos a la k-ésima potencia. $\square$

Hilbert probó en 1909 que para cada entero positivo k existía una s tal que la ecuación (5) tiene solución en los enteros para todo natural n. El problema de Waring consiste en encontrar para cada entero positivo k el menor entero s, que se denota como $g(k)$, para el cual la ecuación (5) tiene solución en los enteros para todo natural n. Dicho problema aún está abierto. Hardy se dio cuenta que solo unos números muy especiales necesitaban 9 cubos para poder escribirse como suma de cubos y que, en general, son pocos los números que necesitan $g(k)$ sumandos para escribirse como suma de enteros a la k-ésima potencia. A partir de dicha observación, Hardy planteó el problema de encontrar $G(k)$, el menor valor de s tal que todos los números suficientemente grandes, es decir, con un número finito de excepciones, pueden ser representados como la suma de s enteros elevados a la k-ésima potencia. En particular, $G(k) \leq g(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Los siguientes lemas y teoremas se usarán para demostrar que $G(2) = g(2) = 4$.

Lema 5: Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \equiv 7 \pmod 8$, entonces, n no se puede representar como suma de tres cuadrados.

Demostración: Con un simple cálculo de los diferentes casos se demuestra que todo cuadrado de un entero módulo 8 es congruente a 0, 1 o 4. Así, si $x, y, z \in \mathbb{Z}$, entonces $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5$ o $6 \pmod 8$. En ningún caso $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod 8$. $\square$

Lema 6: Si p es un primo impar, entonces existen enteros x, y y m con $0 < m < p$, tales que $1 + x^2 + y^2 = mp$.

Demostración: Si x_1, x_2 son dos enteros positivos tales que $x_1^2 \equiv x_2^2 \pmod{p}$, entonces $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \equiv 0 \pmod{p}$, por tanto $x_1 \equiv \pm x_2 \pmod{p}$. Así, para $x = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$, los números x^2 serán todos diferentes módulo p. De la misma manera, para $y = 0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}$, los números $-1 - y^2$ serán todos diferentes módulo p. Dado que hay $p + 1$ números entre los elementos de ambos conjuntos y solo p congruencias distintas módulo p, debe existir un entero $x \in \{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ y un entero $y \in \{0, 1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ tales que $x^2 \equiv -1 - y^2 \pmod{p}$, entonces $x^2 + 1 + y^2 = mp$, para algún entero positivo m. Sin embargo, $x^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$ y $y^2 < \left(\frac{p}{2}\right)^2$, entonces $mp = x^2 + 1 + y^2 < 1 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^2 < p^2$; por tanto, $m < p$. □

Para probar el siguiente lema es necesario introducir una técnica clásica para la resolución de ecuaciones diofantinas: el método de descenso infinito de Fermat. También será necesario introducir la identidad de Euler.

Método de descenso infinito de Fermat: Sea k un entero que no es negativo. Sea P una propiedad sobre los enteros no negativos y sea $(P(n))_{n \geq 1}$ la secuencia de proposiciones dada por: $P(n) =$ "n satisface la propiedad P". Suponga que siempre que $P(m)$ es verdadero para un entero $m > k$, entonces existe un entero j, con $m > j > k$, para el cual $P(j)$ es verdadero. Entonces, $P(n)$ es falso para todo $n > k$. Se llama descenso infinito porque si $P(n)$ fuera cierto para $n > k$, entonces sería posible construir una secuencia $n > n_1 > n_2 > \cdots$ de enteros tales que todos son mayores que k. Sin embargo, esa clase de secuencias infinitas decrecientes no existen en los enteros que no son negativos.

Identidad de Euler Si $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
&(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)+ \\
= &(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3)^2 \\
&+ (x_1y_3 - x_3y_1 + x_4y_2 - x_2y_4)^2 + (x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2)^2.
\end{aligned}$$

Lema 7: Si p es un primo impar, entonces existen enteros x, y, z, w tales que $p = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$.

Demostración: Por el lema 6, para todo primo impar p, debe existir un entero m tal que $0 < m < p$ y que $mp = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Se debe probar que el menor entero m que cumple las propiedades anteriores es $m = 1$. Sea m_0 el menor entero que cumple las dos propiedades anteriores. Suponga que $1 < m_0 < p$. Si m_0 es par, entonces por paridad todos tienen la misma paridad o dos son pares y dos son impares. Sin pérdida de generalidad, x_1 y x_2 tienen la misma paridad, entonces los cuatro números $x_1 \pm x_2$ y $x_3 \pm x_4$ son pares. Por tanto,

$$\frac{m_0}{2} \cdot p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2$$

lo que contradice que m_0 era mínimo. Así, m_0 es impar.
Dado que todo entero es congruente módulo m_0 a un elemento del conjunto:

$$\left\{-\frac{m_0-1}{2}, -\frac{m_0-3}{2}, \ldots, \frac{m_0-3}{2}, \frac{m_0-1}{2}\right\},$$

es posible escoger y_i, con $i \in \{1,2,3,4\}$, tal que $y_i \equiv x_i$ (mod m_0) y $\mid y_i \mid < \dfrac{m_0}{2}$.
Ahora, si m_0 divide a todos los enteros x_i, entonces m_0^2 dividiría a $m_0 p$, lo que implicaría que m_0 dividiría a p, lo cual es una contradicción. Por tanto, $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 > 0$. Así, $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 < m_0^2$ y $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 \equiv 0$ (mod m_0), lo que implica que $y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 = m_0 m_1$ con $0 < m_1 < m_0$. Pero, $m_0 p = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, entonces la identidad de Euler garantiza que existen enteros z_i, con $i \in \{1,2,3,4\}$, tales que

$$m_1 m_0^2 p = z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2. \tag{6}$$

Sin embargo, $z_1 = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4 \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \equiv 0$ (mod m_0). De manera análoga se demuestra que $z_i \equiv 0$ (mod m_0), con $i \in \{2,3,4\}$. Por tanto, es posible escribir $z_i \equiv m_0 w_i$, con $i \in \{1,2,3,4\}$. Si se divide la ecuación (6) entre m_0^2, se tiene que $m_1 p = w_1^2+w_2^2+w_3^2+w_4^2$, lo que contradice que m_0 es mínimo. En conclusión, $m_0 = 1$.
El problema $2-b$) y el problema 7 permiten concluir que $G(2) = g(2) = 4$. $\square$

Ejercicios

1) a) Observa que si $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0)$ es solución de la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$, entonces $(x,y,z) = (kx_0,ky_0,kz_0)$ también es solución para cualquier entero k. ¿Por qué basta con investigar las ternas en las que sus elementos son primos relativos por parejas para encontrar todas las soluciones de la ecuación?

   b) Una solución (x_0,y_0,z_0) de $z^2 = x^2+y^2$ se llama primitiva si x_0, y_0 y z_0 son primos relativos por parejas. Demuestra que $(x_0 = m^2-n^2, y_0 = 2mn, z_0 = m^2+n^2)$, con m y n enteros positivos tales que $m > n$ y $m+n$ impar, es una solución primitiva de $z^2 = x^2+y^2$.

   c) Demuestra que toda solución primitiva de $z^2 = x^2+y^2$ cumple, sin pérdida de generalidad, que $y = 2a$, $z+x = 2b$ y $z-x = 2c$, con a, b y c enteros.

   d) Demuestra que todas las soluciones primitivas de $z^2 = x^2+y^2$ son como en el inciso b).

2) a) Demuestra que hay una infinidad de primos de la forma $4k+3$. Concluye que hay una infinidad de enteros positivos que no se pueden escribir como suma de dos cuadrados.

   b) Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos que no se pueden escribir como suma de tres cuadrados.

3) Demuestra que todas las soluciones de la ecuación $x^2+y^2+z^2 = t^2$, donde x, y, z y t son enteros positivos y y y z son pares, están dadas por

$$x^2 = \frac{l^2+m^2-n^2}{n}, \quad y = 2l, \quad z = 2m, \quad t = \frac{l^2+m^2+n^2}{n},$$

para l y m enteros positivos arbitrarios y n cualquier divisor de l^2+m^2 menor que $\sqrt{l^2+m^2}$. Además, demuestra que cada solución aparece exactamente una vez por la forma en que se describió.

4) (F. Smarandache). Resuelve en los enteros positivos la ecuación

$$(x!)^2 + (y!)^2 = (z!)^2.$$

5) Demuestra que si $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, entonces la ecuación $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene soluciones en los enteros.

6) (Bulgaria 1999/6). Demuestra que la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$ tiene infinitas soluciones en los enteros.

7) (Teorema de Lagrange). Demuestra que todo entero positivo se puede escribir como suma de cuatro cuadrados.

8) Se tardó mucho en descubrir que la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ tiene soluciones. La solución más pequeña es $(-283059965, -2218888517, 2220422932)$ y fue descubierta en 1999 por E. Pine, K. Yarbrough, W. Tarrant y M. Beck al seguir una sugerencia de N. Elkies. Decidir si la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = 33$ tiene soluciones es un problema abierto. Pese a la dificultad de estos problemas, es posible descartar fácilmente algunos valores de x, y, z. Demuestra que la ecuación $x^3+y^3+z^3 = 30$ no tiene soluciones si:

   a) $x, y, z > 0$.

   b) $x < 0, y > 0$ y $z > 0$.

9) (IMO 2001/6). Sean a, b, c, d enteros con $a > b > c > d$. Supón que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

   Demuestra que $ab + cd$ no es primo.

10) El propósito de este problema es demostrar el caso $n = 3$ del famoso teorema de Fermat. Dicho teorema establece que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones en los enteros positivos si $n > 2$. Fue demostrado en su versión general por Andrew Wiles en 1995 con la ayuda de Richard Taylor.

    a) Reduce el problema mediante un cambio de variables a demostrar que $w^3 = 2u(u^2 + 3v^2)$ no tiene soluciones en los enteros positivos.

    b) Demuestra que si $\mathrm{mcd}(a, b) = 1$, entonces cada factor de $a^2 + 3b^2$ es de la forma $d^2 + 3c^2$.

    c) ¿Cuánto puede valer $\mathrm{mcd}(2u, 3v^2)$?

    d) Resuelve los dos casos posibles con descenso infinito.

Bibliografía

1) Andreescu T., Andrica D., Cucurezeanu I. *An Introduction to Diophantine Equations: A Problem-Based Approach*, Birkhäuser, 2010.

2) Bhaskar J. *Sum of Two Squares*, 2008.

3) Clark P. L. *Thue-Vinogradov and Integers of the Form* $x^2 + Dy^2$, 2011.

4) Dietmann R., Elsholtz C. *Sums of Two Squares and One Biquadrate*.

5) Durell C. V., Robson A. *Advanced Trigonometry*, Dover Publications, 2003.

6) Gómez Ortega J. A., Valdez Delgado R., Vázquez Padilla R. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2014.

7) Hardy G. H., Wright E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 1975.

8) Lalín M. N. *Every Positive Integer is the Sum of Four Squares! (and other exciting problems)*, 2002.

9) Niven I., Zuckerman H. S. *Introducción a la teoría de los números*. Editorial Limusa, 1969.

10) Niven I., Zuckerman H. S., Montgomery H. L. *An Introduction to the Theory of Numbers*. John Wiley & Sons, 1991.

11) Pérez Seguí M. L. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

12) Sandor J. *Selected Chapters of Geometry, Analysis and Number Theory: Classical Topics in New Perspectives*, LAP Lambert Academic Publishing, 2009.

13) Santos D. A. *Number Theory for Mathematical Contests*, 2005.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 problemas seleccionados especialmente para comenzar tu preparación de este año. Los problemas de esta sección se presentan en formato de opción múltiple. Esto se debe en parte, a que el filtro inicial de la mayoría de los concursos estatales suele ser presentado así.

Ten en cuenta que en la olimpiada de matemáticas no solo se trata de saber la respuesta correcta, sino que además, es necesario justificar dicha respuesta. En las etapas más avanzadas de la olimpiada, las preguntas siempre son abiertas y no se utiliza el formato de opción múltiple. En el caso de esta publicación, dicho formato se adopta con el fin de que el estudiante que recién se inicia se vaya familiarizando con el concurso y sus etapas.

El material que hemos escogido para esta sección está pensado mayoritariamente para principiantes y no es muy elevado. Conforme el año transcurra, su nivel se irá incrementando paulatinamente, de forma que, para el último número del año, el material será en su mayoría de nivel avanzado.

Problema 1. Se acomodan los números en una tabla siguiendo el patrón de la figura, ¿En qué columna queda el número 2017?

1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	2	3				
	4	5	6			
		7	8	9	$\ddots$	

(a) 672 (b) 673 (c) 674 (d) 675 (e) 676

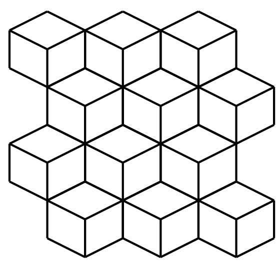
Problema 2. En un tablero de 6 renglones y 9 columnas, se colocan 32 fichas en algunas casillas, sin poner dos fichas en una misma casilla. Entonces se puede asegurar

que:
(a) Todas las columnas tienen por lo menos 3 fichas
(b) Ninguna columna tiene más de tres fichas
(c) Alguna columna no tiene fichas
(d) Algún renglón tiene por lo menos 6 fichas
(e) Todos los renglones tienen por lo menos 4 casillas ocupadas

Problema 3. Un número se llama *merengue* si se puede obtener como resultado de sumar 4 a un múltiplo de 5 y todos sus dígitos son diferentes. Por ejemplo, 29 es merengue porque es $25 + 4$). ¿Cuánto suman los dígitos del mayor número merengue de cuatro dígitos?

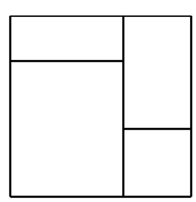
(a) 23 (b) 28 (c) 30 (d) 34 (e) 39

Problema 4. La figura muestra una configuración en la que unas lozas blancas con forma de rombo cubren cierto jardín. Cada una de las lozas será pintada con un color distinto al blanco. ¿Cuál es la menor cantidad de colores que se necesitan para que no queden lozas del mismo color que tengan un lado en común?



(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

Problema 5. Un cuadrado se cortó en 4 piezas rectangulares como se muestra en la figura. Si la suma de los perímetros de los rectángulos es 160 cm, ¿cuánto mide cada lado del cuadrado?

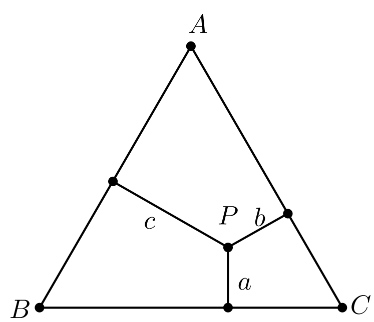


(a) 20 cm (b) 16 cm (c) 15 cm (d) 10 cm (e) 8 cm

Problema 6. Si el máximo común divisor de $2^{2017}+1$ y $2^{2017}+2$ es a y el mínimo común mútiplo de b y $b+1$ es 6, ¿cuánto vale $a+b$?

(a) 2017 (b) 7 (c) 5 (d) 3 (e) 1

Problema 7. Desde un punto P en el interior de un triángulo equilátero de altura 7 cm se trazan segmentos perpendiculares a los lados como en la figura. Si las longitudes, en cm, de los segmentos son a, b y c ¿Cuánto vale la suma $a+b+c$?

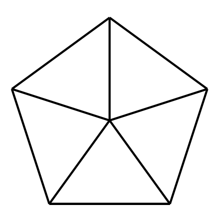


(a) 6 cm (b) 7 cm (c) 8 cm (d) 9 cm (e) Depende del punto P

Problema 8. ¿Cuántos números de seis dígitos de la forma $aaabbb$ son múltiplos de 18?

(a) 6 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 30

Problema 9. Un pentágono está dividido en cinco partes como en la figura. Si cada parte puede colorearse de negro o dejarse en blanco, ¿cuántas posibles coloraciones distintas hay? (Dos coloraciones son iguales si se puede obtener una a partir de otra por un giro).



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 10. Sean a y b dos números distintos tales que $a^2+a=2b^2+b=50a-49b$. ¿Cuánto vale la suma $a+b$?

(a) 0 (b) 2 (c) 5 (d) 16 (e) 24

Problema 11. Pablo tiene dos enteros que suman 26. Carlos suma dos enteros y obtiene 41. Pedro suma dos enteros y obtiene 58. ¿Al menos cuántos de los seis enteros que fueron sumados son pares?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 12. Cinco enteros están escritos alrededor de una circunferencia. Dos números vecinos nunca suman un múltiplo de 3 y, también, un número y sus dos vecinos nunca suman un múltiplo de 3. ¿Cuántos de los cinco enteros son múltiplos de 3?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 2 y 3 son ambos posibles

Problema 13. Se tiene un tablero cuadrado de 4×4. Al principio todos los cuadraditos son blancos. Ahora, queremos colorear de negro algunos de los cuadraditos de tal manera que cada cuadradito negro sea adyacente exactamente a un cuadradito blanco (dos cuadraditos son adyacentes si tienen un lado en común). ¿Cuál es el máximo número de cuadraditos que podemos colorear de negro?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

Problema 14. Sean a, b y c tres enteros positivos distintos tales que $a + 2b + 3c < 12$. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es verdadera?

(a) $3a + 2b + c < 17$ (b) $a + b + c < 7$ (c) $a - b + c < 4$
(d) $b + c - a < 3$ (e) $3b + 3c - a < 6$

Problema 15. Los 30 cuentos de un libro tienen entre 1 y 30 páginas de extensión. El primer cuento empieza en la primera página. En el libro no hay páginas en blanco ni dos cuentos que compartan una página. Si no hay dos cuentos que tengan la misma extensión, ¿cuál es la mayor cantidad de cuentos que pueden comenzar en una página impar?

(a) 15 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) 23

Problema 16. Sea $ABCD$ un paralelogramo. Sean E y F puntos en los lados AB y BC, respectivamente, tales que DE es la bisectriz de $\angle ADF$ y $AE + CF = DF$. La línea por C que es perpendicular a DE interseca a AD en L. Si $AE = 5$, ¿cuánto mide DL?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 17. Sean a, b, c, d enteros positivos. Si d es el mayor de los cuatro enteros, $a+b+c = 2017$ y $(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd) = (d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2$, ¿cuánto vale d?

(a) 2016 (b) 2017 (c) 2018 (d) 4032 (e) 4034

Problema 18. La sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_{2017})$ se define como $a_1 = 0$ y $a_{n+1} = a_n + 4n + 3$ para $n \geq 1$. ¿Cuál es la máxima potencia de 2 que divide a a_{2017}?

(a) 2^4 (b) 2^5 (c) 2^6 (d) 2^7 (e) 2^8

Problema 19. En un torneo bicontinental de fútbol los equipos latinoamericanos son 9 más que los equipos africanos. Cada par de equipos se enfrentan exactamente una vez y los equipos latinoamericanos ganaron nueve veces más puntos que los equipos africanos (el ganador se lleva un punto y el perdedor se lleva cero puntos). ¿Cuál es el máximo valor posible de puntos que pudo ganar un equipo africano?

(a) 11 (b) 10 (c) 9 (d) 8 (e) 7

Problema 20. Sea I el incentro de un triángulo ABC y sea M el punto medio del lado AB. Si $CI = MI$, ¿cuál es el menor valor posible de $\angle CIM$?

(a) $180°$ (b) $150°$ (c) $120°$ (d) $90°$ (e) $45°$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (b).
Observemos que el final de cada fila es un múltiplo de 3, y en particular el número $3m$ queda en la columna $m + 2$. Ahora, la fila que contiene a 2017 terminará en 2019, que es el siguiente múltiplo de 3. Como $2019 = 673 \cdot 3$ queda en la columna 675, al retroceder dos lugares hasta el 2017, se concluye que la columna buscada es la 673.

Solución del problema 2. La respuesta es (d).
La opción (a) se descarta colocando todas las fichas en las primeras 5 columnas (usando 30 fichas) y dos en la sexta columna. Esto nos da también un contraejemplo para la opción (b), pues la primera columna queda con seis fichas y no hay columnas vacías. Para descartar la opción (c) basta con colocar 4 fichas en las primeras 5 columnas y 3 fichas en las otras 4 columnas. La opción (e) se descarta colocando todas las fichas en los primeros tres renglones (usando 27 fichas) y colocando cinco fichas en el cuarto renglón, ya que de este modo hay renglones sin fichas. Se puede asegurar la opción (d), ya que si todos los renglones tuvieran 5 o menos fichas, a lo más habría $5 \cdot 6 = 30$ fichas en el tablero.

Solución del problema 3. La respuesta es (b).
Para obtener el mayor número merengue basta con colocar los tres dígitos de la izquierda con 987, ya que todos sus dígitos son distintos. Así, el número buscado es de la forma 987_. Ahora, el último dígito no puede ser 6 ya que los números que se obtienen sumando 4 a los múltiplos de 5, necesariamente terminan en 4 o en 9. Pero no podemos poner 9, ya que los dígitos no se deben repetir. Entonces 9874 es el mayor número buscado y, por tanto, la suma de sus dígitos es 28.

Solución del problema 4. La respuesta es (c).
No puede hacerse con un solo color, ya que hay lozas que comparten lado. Veamos qué sucede con dos colores. Consideremos dos lozas adyacentes, que por tanto, deberán ser coloreadas con diferente color. Siempre habrá una loza que comparte un lado con cada una de esas dos lozas coloreadas y, por tanto, si solo hubiera dos colores, alguno se repetiría.

De este modo, se necesitan al menos tres colores y basta con estos, observando que hay tres diferentes orientaciones de los rombos y si coloreamos los rombos de la misma orientación con el mismo color, no habrán lozas adyacentes del mismo color.

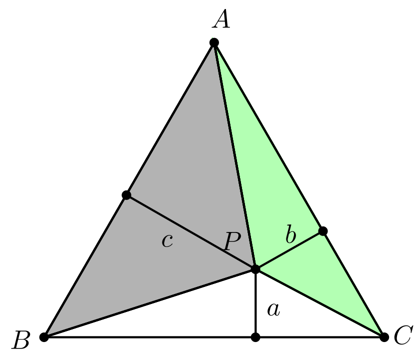
Solución del problema 5. La respuesta es (a).
Al sumar los perímetros de los cuatro rectángulos, estamos sumando los dos lados verticales del cuadrado y también dos veces la línea vertical interior, además de sumar los dos lados horizontales del cuadrado y también dos veces las líneas horizontales en el interior. Por lo tanto, la suma total equivale a 8 veces el lado del cuadrado. Esto significa que cada lado del cuadrado mide $\frac{160}{8} = 20$ cm.

Solución del problema 6. La respuesta es (d).
Como $2^{2017} + 1$ y $2^{2017} + 2$ son consecutivos, son primos relativos y, por tanto, $a = 1$. Ahora, si $\text{mcm}(b, b + 1) = 6$, entonces b no puede exceder a 6. Revisando los casos obtenemos que $b = 2$ y $b + 1 = 3$, por lo que $a + b = 1 + 2 = 3$.

Solución del problema 7. La respuesta es (b).
Si x denota el lado del triángulo equilátero, tenemos que las áreas de los triángulos CPB, APC y BPA son $\frac{ax}{2}$, $\frac{bx}{2}$ y $\frac{cx}{2}$, respectivamente. Sumando estas áreas obtenemos el área del triángulo equilátero que es $\frac{7x}{2}$. Así que

$$(a + b + c)\frac{x}{2} = \frac{ax + bx + cx}{2} = \frac{7x}{2},$$

de donde $a + b + c = 7$ cm.



Solución del problema 8. La respuesta es (c).
Veamos que si un número es múltiplo de 18, entonces es múltiplo de 2 y, por lo tanto, b debe ser par. Además, como el número también es múltiplo de 9, se debe cumplir que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 9, es decir, $3(a+b)$ debe ser múltiplo de 9, lo cual es equivalente a que $a+b$ sea múltiplo de 3. Adicionalmente, a no puede ser cero pues no se obtendría un número de 6 dígitos. Si $b=0$, entonces a puede ser $3,6,9$; si $b=2$, entonces a puede ser $1,4,7$; si $b=4$, entonces a puede ser $2,5,8$; si $b=6$, entonces a puede ser $3,6,9$, por último si $b=8$, entonces a puede ser $1,4,7$. Luego, para cada caso tenemos 3 números, por lo tanto hay 15 números con la propiedad pedida.

Solución del problema 9. La respuesta es (e).
Si no se colorea ningún triángulo hay una única forma, si solo se colorea un triángulo hay una sola coloración posible. Si se colorean dos triángulos, hay solo 2 coloraciones posibles (dos triángulos negros juntos y dos triángulos negros con uno blanco en medio). Por simetría, también hay 2 coloraciones con tres triángulos coloreados. Si se colorean cuatro triángulos, solo hay una coloración posible. Finalmente, si se colorean todos los triángulos hay solo una coloración. En total son 8.

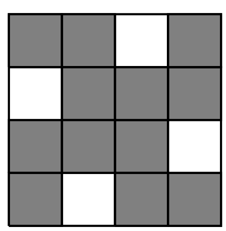
Solución del problema 10. La respuesta es (e).
De $a^2+a=50a-49b$, se obtiene que $a^2=49(a-b)$. De $2b^2+b=50a-49b$, se tiene que $b^2=25(a-b)$. Luego, $a^2-b^2=49(a-b)-25(a-b)$, esto es, $(a-b)(a+b)=24(a-b)$. Como $a-b\neq 0$, se tiene que $a+b=24$.

Solución del problema 11. La respuesta es (c).
Los dos números de Pablo son ambos pares o son ambos impares, pues su suma es un número par. Como la suma de los dos números de Carlos es $41-26=15$, uno de sus números es par y el otro es impar. La suma de los dos números de Pedro es $58-41=17$, lo cual implica que exactamente uno de sus números es par. Se sigue que el mínimo número de números pares es 2. Un ejemplo es que Pablo tenga los números 11 y 15, Carlos tenga los números 7 y 8, y Pedro tenga los números 4 y 13.

Solución del problema 12. La respuesta es (b).
Si tres o más de los números son múltiplos de 3, entonces hay dos vecinos múltiplos de

3 y estos suman un múltiplo de 3. Como esto no está permitido, concluimos que hay a lo más dos múltiplos de 3 alrededor de la circunferencia.
Supongamos que a lo más uno de los números es múltiplo de 3. Entonces, hay cuatro números sucesivos alrededor de la circunferencia que no son múltiplos de 3. Estos números no pueden tener todos el mismo residuo cuando se dividen entre 3, puesto que la suma de tres números sucesivos no debe ser múltiplo de 3. Así que de los cuatro números, al menos uno deja residuo 1 y al menos uno deja residuo 2 al dividirse por 3. En particular, podemos encontrar dos números vecinos de los cuales uno tiene residuo 1 y el otro tiene residuo 2 al dividirse por 3. Entonces, su suma es divisible por 3, lo cual no puede ser. Por lo tanto, al menos dos de los números son múltiplos de 3.
De todo lo anterior, concluimos que exactamente dos de los números son múltiplos de 3. Tomando los cinco enteros 3, 4, 7, 6 y 1 en sentido de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia, obtenemos una configuración que cumple con el problema y que tiene exactamente dos números que son divisibles por 3. En efecto, $3+4$, $4+7$, $7+6$, $6+1$ y $1+3$ no son divisibles por 3, y tampoco lo son $3+4+7$, $4+7+6$, $7+6+1$, $6+1+3$ y $1+3+4$.

Solución del problema 13. La respuesta es (d).
Una coloración con 12 cuadraditos negros en la que cada uno de ellos es adyacente con exactamente un cuadradito blanco se muestra en la figura. Demostraremos que no hay coloraciones con más de 12 cuadraditos negros que cumplan la condición del problema. En una coloración con 13 o más cuadraditos negros, hay a lo más 3 cuadraditos blancos. Estos cuadraditos blancos juntos tienen a lo más $3 \cdot 4 = 12$ cuadraditos vecinos. Luego, al menos uno de los cuadraditos negros no tiene un cuadradito vecino blanco.

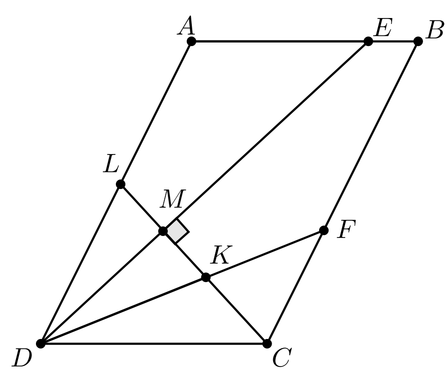


Solución del problema 14. La respuesta es (d).
Primero determinaremos todas las posibles soluciones (a, b, c) de la desigualdad $a + 2b + 3c < 12$, donde a, b y c son enteros positivos distintos. Podemos reescribir la desigualdad como $3c < 12-a-2b$. Como $a+2b \geq 3$, tenemos que $3c < 12-a-2b \leq 9$, de donde se sigue que $c < 3$. Así, $c = 2$ o $c = 1$.
Si $c = 2$, tenemos que $a + 2b < 6$ y, por lo tanto, $b < 3$. Como b y c son distintos, b debe ser 1. Por lo tanto, tenemos la terna $(a, b, c) = (3, 1, 2)$.
Si $c = 1$, tenemos que $2b < 9 - a \leq 8$ y, por lo tanto, $b < 4$. Si $b = 3$, entonces $a < 3$ y a no puede ser 1. Luego, obtenemos la única solución $(a, b, c) = (2, 3, 1)$. Si $b = 2$, entonces $a < 5$ y, por lo tanto, $a = 3$ o $a = 4$, pues a no puede ser 1 o 2. Luego,

tenemos dos soluciones $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ y $(a, b, c) = (4, 2, 1)$.
De las cuatro soluciones obtenidas, la terna $(4, 2, 1)$ no satisface las desigualdades de (a) y (b). La terna $(3, 1, 2)$ no satisface las desigualdades de (c) y (e). Sin embargo, las cuatro soluciones de la desigualdad original satisfacen la desigualdad en (d).

Solución del problema 15. La respuesta es (e).
Si al principio del libro acomodamos todos los cuentos con extensión par, esos 15 cuentos cumplirían con la condición. Si enseguida acomodamos todos los cuentos con extensión impar, tendríamos 8 cuentos más que cumplen con la condición, dando un total de 23 cuentos. Tratemos de encontrar un acomodo mejor. Observemos que si un cuento comienza en una página impar y su extensión es impar, entonces el siguiente cuento empieza con una página par (y no cumple). Así, si m es la cantidad de cuentos con extensión impar que cumplen, hay al menos $m - 1$ cuentos que no cumplen con la condición (suponiendo que el último sea uno de los de extensión impar que sí cumplen). Para que el acomodo sea mejor al que dimos necesitamos que $m \leq 8$ (si no, $30 - (m - 1) < 23$), pero entonces la cantidad máxima de cuentos que pueden cumplir es $15 + 8 = 23$. Entonces, no podemos encontrar un acomodo con más de 23 cuentos que cumplan la condición.

Solución del problema 16. La respuesta es (a).
Sean M y K los puntos de intersección de DE y DF con CL, respectivamente. Entonces, DM es una altura y una bisectriz del triángulo LKD, lo que implica que $DL = DK$. Como AD es paralela a CB, los triángulos LKD y CKF son semejantes, lo que implica que $KF = CF$. Así, $AE = DF - CF = DF - KF = DK = DL$. Por tanto, $DL = 5$.



Solución del problema 17. La respuesta es (b).
Basta desarrollar los dos lados de la identidad

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2$$

para verificar que si $d = a + b + c$, entonces la igualdad se satisface. La desigualdad $ab + cd > (d - a)(d - b)$ equivale a $cd > d^2 - (a + b)d$, es decir, se satisface si y solo si $d(a+b+c) > d^2$. Así, si se asume que $(a+b+c) > d$, entonces $ab+cd > (d-a)(d-b)$. De manera análoga se cumpliría que $bc+ad > (d-b)(d-c)$ y que $ac+bd > (d-a)(d-c)$. Luego, la multiplicación de las tres desigualdades anteriores llevaría a que $(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd) > (d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2$, lo que es una contradicción. Argumentos equivalentes demuestran que la desigualdad $(a+b+c) < d$ implica una contradicción. Por tanto, $d = a+b+c = 2017$.

Solución del problema 18. La respuesta es (b).
De la relación de recurrencia se tiene que

$$\begin{aligned}
a_{2017} &= a_{2016} + 4(2017-1) + 3 \\
&= a_{2015} + 4(2017-1) + 4(2016-1) + 3 \cdot 2 \\
&= a_{2014} + 4(2017-1) + 4(2016-1) + 4(2015-1) + 3 \cdot 3 \\
&\;\;\vdots \\
&= a_1 + 4(2016 + 2015 + \cdots + 1) + 3 \cdot 2016 \\
&= 4\left(\frac{2017(2016)}{2}\right) + 3 \cdot 2016 = 2016(2(2017)+3).
\end{aligned}$$

Así, la máxima potencia de 2 que divide a a_{2017} es igual a la máxima potencia de 2 que divide a 2016, es decir, es 2^5.

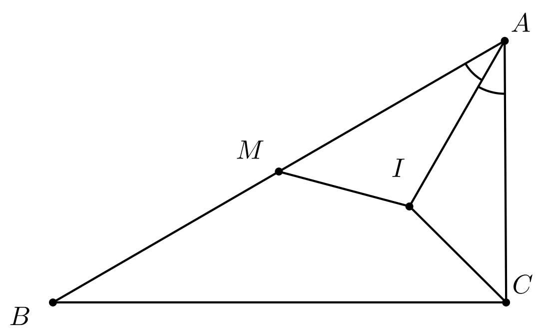
Solución del problema 19. La respuesta es (a).
Denotemos por x al número de equipos africanos. Entonces, el número de equipos latinoamericanos es $x+9$. Los equipos africanos jugaron entre ellos $\frac{(x-1)x}{2}$ partidos; por tanto, los puntos que ganaron los equipos africanos fueron $\frac{(x-1)x}{2} + k$, donde k es el número de triunfos sobre los equipos latinoamericanos.
De la misma forma, los puntos que ganaron los equipos latinoamericanos fueron

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k.$$

Por tanto, $9\left(\frac{(x-1)x}{2} + k\right) = \frac{(x+8)(x+9)}{2} + x(x+9) - k$, es decir, $3x^2 - 22x + 10k - 36 = 0$, así, $x = \frac{22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4(3)(10k-36)}}{6} = \frac{22 \pm 2\sqrt{121 - 3(10k-36)}}{6}$. Dado que x es un entero, se debe tener que $121 - 3(10k-36) = 229 - 30k$ es un cuadrado perfecto. Entonces, $k \leq 7$ y una verificación directa demuestra que solo se pueden obtener cuadrados cuando $k = 2$ y $k = 6$. Para $k = 2$ se tiene que $x = 8$, así que el mejor equipo africano tuvo a lo más $7 + 2 = 9$ puntos.
Si $k = 6$, entonces $x = 6$ y hay 6 equipos africanos y 15 latinoamericanos. En este caso, el mejor equipo africano tiene a lo más $5 + 6$ puntos, que sucede cuando gana sobre el resto de los equipos africanos y le gana a 6 de los equipos latinoamericanos (el resto de los equipos africanos perderían ante todos los equipos latinoamericanos). En conclusión, la respuesta es 11.

Solución del problema 20. La respuesta es (b).
Se puede asumir sin pérdida de generalidad que $AC < BC$. Dado que $\angle ACI$ y

$\angle AMI$ son agudos, $CI = MI$, $\angle IAC = \angle MAI$ y comparten AI, entonces los triángulos ACI y AMI son congruentes. Por tanto, $AC = AM$ y $\angle AIC = \angle AIM$, entonces $\angle CIM = 360° - 2\angle AIC$. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, tenemos que $\angle AIC = 180° - \angle ACI - \angle IAC$ y $\angle ABC = 180° - \angle BCA - \angle CAB$. Dado que $\angle ACI = \frac{\angle BCA}{2}$ y $\angle IAC = \frac{\angle CAB}{2}$, entonces $2\angle AIC = 180° + \angle ABC$. Así, $\angle CIM = 180° - \angle ABC$. Por la ley de senos, $\frac{AC}{\operatorname{sen}(\angle ABC)} = \frac{BA}{\operatorname{sen}(\angle BCA)}$; sin embargo, $2AC = BA$, entonces $\angle ABC$ es agudo y $2\operatorname{sen}(\angle ABC) = \operatorname{sen}(\angle BCA)$. Por tanto, $\angle ABC$ es máximo cuando $\operatorname{sen}(\angle BCA)$ es máximo, esto último ocurre cuando $\angle BCA = 90°$. Así, $\angle ABC = 30°$ es su máximo valor. En conclusión, el mínimo valor de $\angle CIM$ es $150°$.



Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2017 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. La banda de los 5 piratas, y su capitán se repartieron un botín como sigue: el primer pirata tomó la mitad de los doblones de oro, el segundo pirata tomó la tercera parte de los doblones restantes, el siguiente pirata tomó la cuarta parte de los doblones sobrantes, y así sucesivamente. Al final, quedaron 10 doblones que tomó el capitán. ¿Cuántos doblones de oro había en el botín?

Problema 2. Sean m y n enteros positivos. Si $2^m - 2^n = 1792$, ¿cuánto vale $m^2 + n^2$?

Problema 3. Demuestra que el número de enteros positivos de 10 dígitos que tienen la propiedad de que cada dígito es divisor de 2016, es un cubo perfecto.

Problema 4. Encuentra todos los números enteros positivos n tales que el producto de sus dígitos es igual a $n^2 - 10n - 22$.

Problema 5. Demuestra que en un conjunto de 10 números enteros positivos distintos siempre es posible encontrar dos subconjuntos disjuntos que tienen la misma suma.

Problema 6. Determina todas las ternas de enteros positivos (a, b, c), con $a \leq b \leq c$, que satisfacen la igualdad

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

Problema 7. Sea n un entero positivo. Diego escribe n enteros positivos distintos. Juan borra algunos de los números (puede no borrar números o borrarlos todos), coloca un signo $+$ o $-$ enfrente de cada uno de los números y suma todos los enteros con signo. Juan gana si el resultado no es cero y 2017 lo divide, en otro caso gana Diego. ¿Quién tiene una estrategia ganadora?

Problema 8. Un conjunto finito C de enteros positivos se llamará *bueno* si para cada entero k, existen $a, b \in C$, $a \neq b$, tales que los números $a + k$ y $b + k$ no son coprimos. Demuestra que si la suma de los elementos de un conjunto bueno C es 2017, entonces existe un elemento $c \in C$ para el cual el conjunto $C - \{c\}$ es bueno.

Problema 9. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias con centros O y P, respectivamente. Supón que las circunferencias se intersecan en los puntos X e Y de forma que $\angle OXP = \angle OYP = 90°$. Sea AB un diámetro de Γ_1 tal que B está dentro de Γ_2. Las dos circunferencias que son tangentes a Γ_2 y que pasan por O y A tocan a Γ_2 en F y G. Demuestra que $FGOB$ es cíclico.

Problema 10. Un conjunto de enteros positivos con al menos tres elementos se llama *uniforme* si el conjunto que queda al remover cualquiera de sus elementos se puede dividir en dos subconjuntos que satisfacen que las sumas de sus elementos son iguales. ¿Cuál es el menor número de elementos que puede tener un conjunto uniforme? Nota: como consideramos el conjunto, no hay dos elementos iguales.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2016. En esta ocasión agradecemos a Erick Gómez por habernos compartido su solución al problema 6 y a Bruno Cuevas Villa por habernos compartido su solución al problema 9. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2016, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Si A es el número positivo

$$A = \frac{9}{10} + \frac{99}{10^2} + \frac{999}{10^3} + \cdots + \frac{999\ldots9}{10^{2016}},$$

en donde el último numerador tiene 2016 nueves, ¿cuántos dígitos iguales a 8 hay en la representación decimal de A?

Solución. Observa que la suma se puede reescribir como

$$A = \left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{10^{2016}}\right)$$

que a su vez es igual a

$$2016 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^{2016}}\right) = 2016 - 0.1111\ldots1$$

en donde el término restado tiene 2016 decimales. La resta es igual a $2015.888\ldots89$ en donde hay 2016 decimales, de los cuales 2015 son iguales a 8 y el último es 9. Esto también es posible verificarlo realizando la suma con decimales de ese número con $0.111\ldots1$, la cual comienza por la derecha y al sumar 9 con 1, empieza a llevar 1 en todos los demás decimales, resultando en $2016.0000\ldots0$. En otras palabras, hay 2015 dígitos iguales a 8.
Es importante señalar que el cálculo de la parte entera también era necesario, puesto que aunque hay 2015 dígitos iguales a 8 en la parte decimal, podría haber sucedido que la parte entera tuviera ochos adicionales, en cuyo caso la respuesta habría sido mayor al 2015 que obtuvimos.

Problema 2. Drini escribe en una pizarra 2016 veces la letra A, 2017 veces la letra B y 2018 veces la letra C. A continuación efectúa la siguiente operación: puede escoger dos letras diferentes, borrarlas, y añadir una más de la tercera letra (por ejemplo, si borra A y C, añade una letra B). Repite este proceso hasta que solo queda una letra en la pizarra. ¿Qué letras pueden quedar al final?

Solución. Este es un problema clásico de invarianza. Observa que en cada operación estás cambiando la cantidad de letras de cada tipo en la pizarra por 1, ya sea restando 1 (al borrar dos letras diferentes) o sumando 1 (al añadir una nueva). Por tanto, en cada operación, la paridad de las cantidades de las letras A, B, C está alternando.
Existe además otro invariante: en cada paso, la cantidad total de letras está disminuyendo en 1 (puesto que se restan dos pero se suma una). Por ello, si se comienza con $2016 + 2017 + 2018 = 6051$ letras y se efectúa el proceso hasta que solo quede una, necesariamente se hicieron 6050 pasos.
Finalmente, al inicio, las cantidades de letras A, B, C son respectivamente *par, impar,*

par, de modo que en el primer cambio se vuelven *impar, par, impar*, luego *par, impar, par*, etc. Al cabo de 6050 pasos (cuando solo quede una letra), la paridad deberá ser *par, impar, par* (ya que, además, las cantidades son respectivamente, $0, 1, 0$) y por tanto la letra que queda necesariamente es la letra B.

Problema 3. Demuestra que $(36m+n)(m+36n)$ nunca es una potencia de dos, para cualquier par de enteros positivos m y n.

Solución. Para que fuese una potencia de dos, ambos factores deberían ser también potencias de dos, de manera simultánea. En particular, como cada factor es mayor que 2, necesariamente serán múltiplos de $2^2 = 4$.
Pero si $36m + n$ es múltiplo de 4, necesariamente n lo será, y por un razonamiento análogo con $m + 36n$, m también debe ser múltiplo de 4. Sustituimos $m = 4a$ y $n = 4b$:

$$(36m+n)(m+36n) = (16(9a)+4b)(4b+16(9a)) = 16(36a+b)(b+36a).$$

Esto quiere decir que a y b cumplen nuevamente con una relación idéntica a la original, por lo que cada uno deberá ser divisible por 4 (el argumento se repite), y al sustituir se obtiene otra vez una expresión similar. Por lo tanto, se podría hacer un descenso infinito cancelando factores 4 tanto en m como en n, lo cual es imposible.
Concluimos entonces que no existen parejas de enteros positivos con la propiedad pedida.

Problema 4. Demuestra que si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo, entonces

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a-b+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3.$$

Solución. Dado que a, b y c son los lados de un triángulo, los números $-a+b+c$, $a-b+c$ y $a+b-c$ son reales positivos. La desigualdad entre la media geométrica y la media armónica[5] establece que

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} = \sqrt{1 \cdot \frac{a}{-a+b+c}} \geq \frac{2}{1+\frac{-a+b+c}{a}} = \frac{2a}{b+c}.$$

Si aplicamos un razonamiento análogo para las otras dos ecuaciones podemos reducir el problema a demostrar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Pero esta última es la desigualdad de Nesbitt[6], por lo que el problema queda demostrado.

[5] Ver en el apéndice el teorema 8.
[6] Ver en el apéndice el teorema 9.

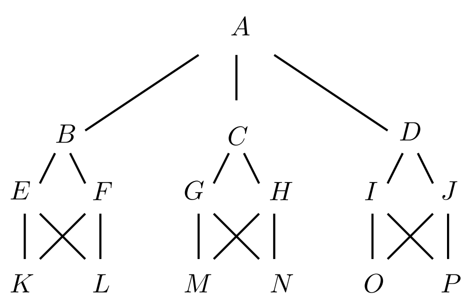
Problema 5. Sea A un conjunto convexo en el plano (es decir, un conjunto que cumple que para cualesquiera dos puntos $p, q \in A$ el segmento entre p y q está contenido en A). Muestra que existe un punto O tal que para cualesquiera dos puntos X, X' en la frontera de A se satisface que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{XO}{X'O} \leq 2.$$

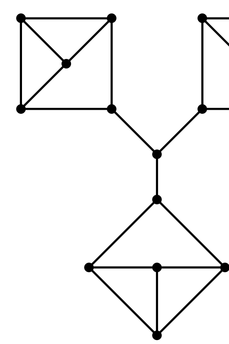
Solución. Para cada punto P en la frontera consideremos la homotecia con razón $\frac{2}{3}$ que manda A en A_P. Sean M, N y L puntos en la frontera, por construcción el gravicentro del triángulo MNL está en A_M, A_N y A_L. Por el teorema de Helly, todos los convexos A_P se intersecan. Sea O un punto en la intersección. Por construcción, si XX' es un segmento con extremos en la frontera de A que pasa por O, al estar en A_X, cumplirá que $OX \leq \frac{2XX'}{3}$ y $OX' \geq \frac{XX'}{3}$, de modo que $\frac{1}{OX'} \leq \frac{3}{XX'}$ y por tanto $\frac{OX}{OX'} = OX \cdot \frac{1}{OX'} \leq \frac{2XX'}{3} \cdot \frac{3}{XX'} = 2$. Por otra parte, al estar O en $A_{X'}$ tendremos que $OX' \leq \frac{2XX'}{3}$ y $OX \geq \frac{XX'}{3}$ y el mismo argumento revela que $\frac{OX'}{OX} \leq 2$ y por lo tanto $\frac{OX}{OX'} \geq \frac{1}{2}$.

Problema 6. En un salón hay 16 personas, donde cada persona conoce a exactamente 3 personas (la relación es mutua). ¿Será posible repartir siempre a las 16 personas en 8 parejas de tal forma que las personas en cada pareja se conozcan?

Solución de Erick Gómez. Se demostrará que no siempre es posible hacer el reparto correspondiente, para ello se dará un ejemplo. La estrategia es formar tres grupos de cinco amigos en los que se conozcan entre ellos lo más posible. La siguiente gráfica representa una configuración que no cumple con el problema, en ella cada vértice representa una persona y una arista indica que las personas correspondientes a sus vértices incidentes se conocen.
Para ver que no es posible dividir a las 16 personas en 8 parejas, se utilizará el argumento de contradicción. Si fuera posible, A debería estar agrupada con B, C o D. Sin embargo, dado que los otros dos conocidos de A no se conocen entre ellos, una vez que se escoge la pareja de A quedarán dos grupos de 5 personas que no conocen a los demás. En particular, dado que el número de personas en cada grupo es impar, dentro de cada grupo no se podrá hacer la agrupación en parejas. Por lo tanto, no siempre es posible.



Solución alternativa. No siempre es posible. Se puede probar que 16 es el menor número de personas que debe tener un salón en el que cada persona conoce a exactamente 3 personas para que no sea posible repartirlos en parejas de tal forma que no haya dos personas en la misma pareja y que las personas en cada pareja se conozcan. Un ejemplo en el que no es posible se muestra en la siguiente gráfica, donde los puntos corresponden a las personas y dos puntos están unidos si las personas se conocen. Es imposible escoger 8 líneas que no se toquen y que cubran todos los puntos de la gráfica.



Problema 7. Sea ABC un triángulo y P un punto en su interior. Se consideran G_A, G_B y G_C los gravicentros de los triángulos BPC, APB y CPA, respectivamente. Sean M, N y L los puntos medios de AP, BP y CP, respectivamente. Demuestra que G_AM, G_BN y G_CL concurren.

Solución. Identifiquemos a cada punto con un vector desde un origen arbitrario. Se tiene que $M = \frac{A+P}{2}$, $N = \frac{B+P}{2}$, $L = \frac{C+P}{2}$, $G_A = \frac{B+C+P}{3}$, $G_B = \frac{C+A+P}{3}$ y $G_C = \frac{A+B+P}{3}$.
Un resultado de geometría vectorial establece que un punto P está en el segmento AB si el vector asociado a P se puede expresar en la forma $rA + (1-r)B$ donde r es un número real entre 0 y 1, identificando a A y B con sus vectores.
Consideremos $\lambda = \frac{2}{5}$. Entonces, al efectuar las operaciones obtenemos que

$$\lambda G_A + (1-\lambda)M = \lambda G_B + (1-\lambda)N = \lambda G_C + (1-\lambda)L = \frac{A+B+C+2P}{5}$$

y por tanto, el punto asociado a $\frac{A+B+C+2P}{5}$ está en cada uno de los segmentos G_AM, G_BN y G_CL, de donde se sigue que estos segmentos son concurrentes.

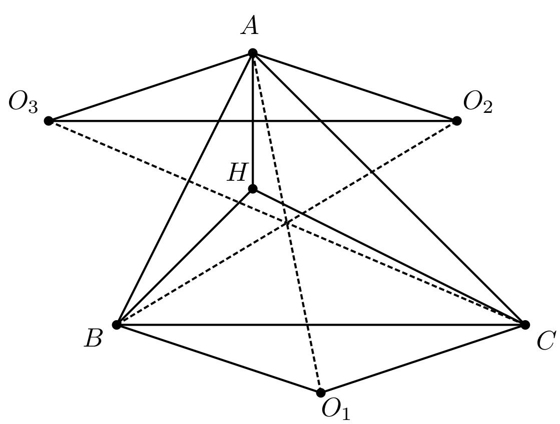
Problema 8. Sean b y c números reales positivos fijos tales que $b > 2c$. ¿Cuántos triángulos ABC, no congruentes y no degenerados, satisfacen que $|AB| = c$, $|CA| = b$ y $\angle ABC = 2\angle BCA$?

Solución. Supongamos que existe un triángulo ABC no degenerado tal que $|AB| = c$, $|CA| = b$ y $\angle ABC = 2\angle BCA$. Sean $|BC| = a$, $\angle ABC = B$ y $\angle BCA = C$. Por la

ley de senos $\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{b}{\operatorname{sen}(2C)}$. La última igualdad es por la condición $B = 2C$ del problema. Entonces, $b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen}(2C) = 2c \operatorname{sen} C \cos C$.
La igualdad $\operatorname{sen} C = 0$ no es posible porque el triángulo ABC no es degenerado. Por lo tanto, $\cos C = \frac{b}{2c}$.
Por la ley de cosenos, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - \frac{ab^2}{c}$. Si resolvemos la cuadrática anterior con respecto a a, obtenemos dos soluciones: $a_1 = c$ y $a_2 = \frac{b^2-c^2}{c}$. Sabemos que $a_2 > 0$ porque $b > c$. Entonces ABC debe tener lados de longitudes b, c y c o b, c y $\frac{b^2-c^2}{c}$. Los dos casos posibles anteriores son efectivamente triángulos no degenerados porque se cumple que $2c > b$, con lo que se garantizan las desigualdades del triángulo en el primer caso, y que $b < c + \frac{b^2-c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$, con lo que se cumplen las desigualdades del triángulo en el segundo caso. Basta revertir los pasos para ver que ambas opciones satisfacen los requisitos del problema. Además, por el criterio de congruencia LLL, sabemos que no habrá otro triángulo no congruente con los dos anteriores.

Problema 9. Sean ABC un triángulo y H su ortocentro. Si O_1, O_2 y O_3 son los circuncentros de los triángulos BHC, CHA y AHB, respectivamente, demuestra que AO_1, BO_2 y CO_3 concurren.

Solución de Bruno Cuevas Villa. Sean D, E y F los pies de las alturas del triángulo ABC desde A, B y C, respectivamente. Como H es ortocentro, AD, BE y CF concurren en H. Asimismo, como BE y CF son alturas, $\angle BEC = 90° = \angle BFC$, por lo que el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico. Análogamente, se llega a que $CAFD$ y $ABDE$ son cíclicos. Sean $\angle CAD = \alpha$ y $\angle BAD = \beta$. Como $CAFD$ es cíclico, $\angle BCF = \angle BAD = \beta$; además, $ABDE$ es cíclico y $\angle CBE = \angle CAD = \alpha$.



Fijándonos en el triángulo BHC, por la suma de sus ángulos internos, $\angle BHC = 180 - \alpha - \beta$. Como O_1 es circuncentro de BHC, $\angle BO_1C$ es un ángulo central, por lo que $\angle BO_1C = 2(180° - \angle BHC) = 2(\alpha + \beta) = 2\alpha + 2\beta$. Además, O_1B y O_1C son radios, así que $O_1B = O_1C$, por lo que BO_1C es isósceles y $\angle BCO_1 = \angle CBO_1 =$

$\frac{180^\circ-2\alpha-2\beta}{2}=90^\circ-\alpha-\beta=90^\circ-\angle BAC$. Por un argumento similar, se llega a que $\angle CAO_2=\angle ACO_2=90^\circ-\angle ABC$ y $\angle BAO_3=\angle ABO_3=90^\circ-\angle BCA$.
Luego, se sigue que $\angle BAO_2+\angle ABO_1=(90^\circ-\angle ABC+\angle BAC)+(90^\circ-\angle BAC+\angle ABC)=180^\circ$, por lo que $AO_2\parallel BO_1$. Similarmente, $\angle ACO_1+\angle CAO_3=180^\circ$ y $AO_3\parallel CO_1$. Por último, veamos que los circuncírculos de CHA y AHB se intersecan en A y H, por lo que la recta AH es eje radical de ambas circunferencias. De esto se deduce que AH es perpendicular a la recta O_2O_3 que une a los centros de las circunferencias, sin embargo AH también es perpendicular a BC, de lo que se sigue que $O_2O_3\parallel BC$. Entonces, BO_1C tiene sus lados paralelos a los de O_2AO_3, por lo que BO_1C y O_2AO_3 son homotéticos, así que AO_1, BO_2 y CO_3 concurren en su centro de homotecia, completando nuestra prueba.

Solución alternativa. Notemos que las circunferencias de los nueve puntos de los tres triángulos BHC, CHA y AHB son todas iguales a la de los nueve puntos del triángulo ABC. Además las rectas AO_1, BO_2 y CO_3 son las rectas de Euler de los triángulos BHC, CHA y AHB, pues A, B y C son los ortocentros, respectivamente. Por lo anterior, estas tres rectas pasan por el centro de las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos pero al coincidir todas estas, concurren en el centro de la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC.

Problema 10. Sea p un número primo impar. Demuestra que

$$1^{p-2}+2^{p-2}+3^{p-2}+\cdots+\left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2}\equiv\frac{2-2^p}{p}\pmod p.$$

Solución. Primero, para cada $i=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2i}{p}\binom{p}{2i}&=\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-(2i-1))}{(2i-1)!}\\&\equiv\frac{(-1)(-2)\cdots(-(2i-1))}{(2i-1)!}\equiv-1\pmod p.\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{(p-1)/2}i^{p-2}&\equiv-\sum_{i=1}^{(p-1)/2}i^{p-2}\frac{2i}{p}\binom{p}{2i}\equiv-\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{(p-1)/2}i^{p-1}\binom{p}{2i}\\&\equiv-\frac{2}{p}\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\binom{p}{2i}\pmod p,\end{aligned}$$

donde la última congruencia se sigue por el teorema pequeño de Fermat.
La suma $\sum_{i=1}^{(p-1)/2}\binom{p}{2i}$ cuenta el número de subconjuntos no vacíos de un conjunto de p elementos, de los cuales hay $2^{p-1}-1$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{(p-1)/2}i^{p-2}\equiv-\frac{2}{p}(2^{p-1}-1)=\frac{2-2^p}{p}\pmod p.$$

Concursos Estatales

XXX Olimpiada de Matemáticas en San Luis Potosí

La Olimpiada de Matemáticas en San Luis Potosí es un proceso que dura aproximadamente seis meses. Desde marzo y hasta septiembre se realizan se realizan seis y media eliminatorias para determinar la delegación para el concurso nacional. El concurso se vuelve presencial en marzo con la etapa regional – la tradicional época del examen canguro matemático, que ahora coincide bien con el examen de invitación – como un concurso en tres categorías: Koala (nivel primaria), Walabi (primero y segundo de secundaria) y Canguro (tercero de secundaria en adelante). Esta división permanece las primeras tres etapas: Escolar, Regional y Estatal. Estas tres etapas se realizan en distintas sedes repartidas por todo el Estado. Las sedes tradicionales son la Facultad de Ciencias de la UASLP, el Colegio de Bachilleres planteles 03 (Cedral), 05 (Ciudad Fernández) y 06 (Ciudad Valles), las Escuelas Secundarias Generales Jesús Romero Flores (Aquismón), Moisés Sáenz (Axtla) y Justo Sierra Méndez (Tamazunchale); aunque cada ciclo puede incluir escuelas nuevas.

Luego del Estatal, se entregan reconocimientos de medallas de oro, plata y bronce a participantes. Los ganadores de oro en Walabi y Canguro forman parte de la preselección estatal mientras que los ganadores de oro en Koala junto con los ganadores de plata en Walabi y Canguro realizan una media etapa adicional – llamada Desempate – donde presentan el mismo examen para unirse a la preselección estatal. Desde que este sistema está en funciones, siempre ha habido participantes de primaria en la preselección. Hay una premiación a principios de junio y, desde entonces, el proceso se centraliza en San Luis capital.

El entrenamiento más intensivo se realiza durante el verano. En total, contando exámenes, son dos bloques de tres semanas de trabajo a sesión doble – excepto sábados y viernes. El programa de entrenamiento incluye ciertas actividades ya tradicionales, pensadas para mejorar la convivencia entre participantes – se realiza un Rally al final de los cursos y una Pijamada después de los exámenes. Los cursos del verano de

2016 fueron impartidos por Siddhartha Morales, Alejandra Rascón, Juan Luis Guerrero, Manuel Jiménez, Karla Govea, Eugenio Flores y una visita de Ramón Iván García. Para este año se espera incluir a Isabel Cristina y Verónica Bailón, quienes llevan tiempo trabajando con estudiantes más jóvenes; además, es común que los participantes con más experiencia se involucren en el entrenamiento de los demás.

La olimpiada de matemáticas en San Luis Potosí tiene una presencia en línea relativamente importante vía Facebook en Facebook.com/ommslp y vía el blog oficial en ommslp.blogspot.mx, donde se comparten resultados, noticias y material de entrenamiento. Desde el 2011 la olimpiada de matemáticas en San Luis Potosí se ha beneficiado de la presencia y el trabajo de CARMA y sus proyectos como Editorial Dinosaurio y las Olimpiadas de Otoño y Femenil.

Para el proceso 2016 se decidió aplicar más de dos pruebas por eliminatoria, con la intención de proveer más oportunidades a cada participante de mostrarse y así permitir tomar la mejor decisión – cualquiera tiene un día malo, tres o cuatro quizás no sean coincidencia.

A continuación presentamos tres de las cuatro pruebas que se aplicaron para el quinto selectivo, en julio y agosto de 2016.

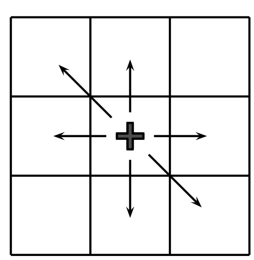
Quinto examen selectivo

Día 2: sábado 30 de julio

Problema 1. Encuentra los últimos tres dígitos de $3^3 \times 33^{33} \times 333^{333} \times 3333^{3333}$.

Problema 2. En un triángulo acutángulo ABC, sean K, L y M los puntos medios de los lados AB, BC y CA, respectivamente. Desde cada uno de K, L y M se trazan las perpendiculares a los otros dos lados. Las seis perpendiculares resultantes se intersecan en Q, S y T, de modo que se forma un hexágono $KQLSMT$ adentro del triángulo ABC. Demuestra que el área del hexágono $KQLSMT$ es la mitad del área del triángulo ABC original.

Problema 3. Un *Rey cojo* en ajedrez es una pieza que se puede mover en cualquier dirección excepto noreste y suroeste.



En un tablero de ajedrez estándar de 8×8, exactamente 32 cuadritos serán destruidos. Un tablero se dice *bueno* si existe un camino que permite que el Rey cruce desde la orilla superior hasta la orilla inferior, con movimientos válidos a través de cuadritos no destruidos. ¿Cuántos tableros buenos hay?
NOTA: Si toda la orilla superior, toda la orilla inferior – o ambas – están destruidas, el Rey no puede cruzar.

Día 3: jueves 4 de agosto

Problema 1. Sean a y b enteros positivos. Demuestra que $(a+36b)(b+36a)$ nunca es una potencia de 2.

Problema 2. Sea $ABCD$ un trapecio con $BC \parallel AD$, $AD > BC$ y AB no es paralela a CD. Sea M la intersección de AC con BD. Sea ω_1 la circunferencia que pasa por M y es tangente a AD en A y sea ω_2 la circunferencia que pasa por M y es tangente a AD en D. Sean S la intersección de AB con CD, X la intersección de ω_1 con AS, Y la intersección de ω_2 con DS y O el circuncentro del triángulo ASD. Demuestra que SO es perpendicular a XY.

Problema 3. Los boletos del Gatobus son folios de seis dígitos (del 000000 al 999999). Un boleto se dice *suertudo* si la suma de sus primeros tres dígitos es igual a la suma de sus últimos tres dígitos. Un boleto se dice *promedio* si la suma de todos sus dígitos es 27. Si hay A boletos suertudos y B boletos promedio, encuentra el valor de $A - B$.

Día 4: viernes 5 de agosto

Problema 1. ¿Es posible acomodar los números del 0 al 9 en un círculo, de manera que cualesquiera tres consecutivos – en el círculo – sumen 13, 14 o 15?

Problema 2. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes exteriormente en un punto A. Se traza una recta tangente a $\mathcal{C}_1$ en B y secante a $\mathcal{C}_2$ en C y D; luego se prolonga el segmento AB hasta intersecar a $\mathcal{C}_2$ en un punto E. Sea F el punto medio del arco $\widehat{CD}$ sobre $\mathcal{C}_2$ que no contiene a E y sea H la intersección de BF con $\mathcal{C}_2$. Demuestra que CD, AF y EH son concurrentes.

Problema 3. Una cuarteta de enteros positivos (p, a, b, c) es llamada **pokeloca** si:

a) p es un primo impar.

b) a, b y c son distintos.

c) $ab+1$, $bc+1$ y $ca+1$ son divisibles simultáneamente por p.

Prueba que para todas las cuartetas pokelocas se cumple que $p+2 \leq \frac{a+b+c}{3}$ y menciona cuándo ocurre la igualdad.

Concurso Nacional 2016 30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 6 al 11 de noviembre de 2016 se llevó a cabo en Acapulco, Guerrero, el Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados del país.

Los 18 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Axel Barba Razo (Baja California).
Sergio Felipe López Robles (Colima).
Edwin Tomy George (Chihuahua).
José Eduardo Payán Sosa (Chihuahua).
Alberto Sosa Borunda (Chihuahua).
Oriol Solé Pi (Ciudad de México).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Maximiliano Sánchez Garza (Nuevo León).
Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México).
Enrique Aguilar Méndez (Puebla).
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí).
Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa).
Carlos Yaddiel Cortes Ruelas (Tlaxcala).
Fernando Issaí Saénz Meza (Tlaxcala).
Rodrigo Jesús Pantoja Vázquez (Yucatán).
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Los 8 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el

Caribe fueron:

Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas).
Bryan Calderón Rivera (Chihuahua).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato).
David Vega Mena (Morelos).
Kenny Eduard Vercaemer González (Morelos).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche).
Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas).
Arely Elizabeth Nataren Hidalgo (Chiapas).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México).
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México).
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato).
Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos).
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 30^a OMM.

1. Nuevo León.
2. Chihuahua.
3. Jalisco.
4. Morelos.
5. Ciudad de México.
6. Yucatán.
7. San Luis Potosí.
8. Tlaxcala.
9. Puebla.
10. Sinaloa.

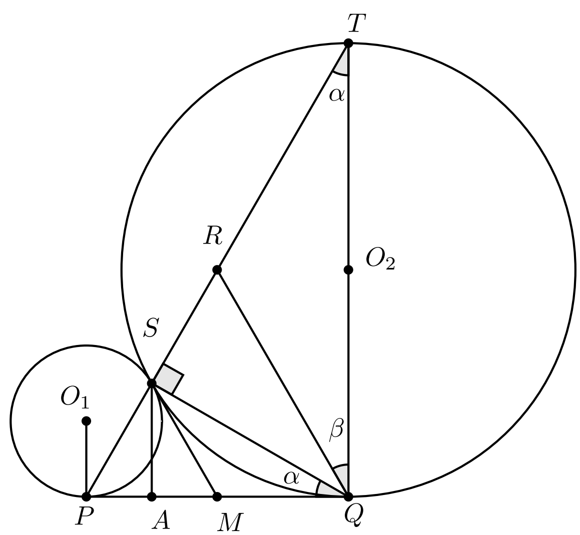
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Jaguar**", y fue ganado por Tlaxcala. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Tabasco y Durango, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional 2016 de la OMM. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos circunferencias tangentes externamente en S tales que el radio de $\mathcal{C}_2$ es el triple del radio de $\mathcal{C}_1$. Sea l una recta que es tangente a $\mathcal{C}_1$ en P y tangente a $\mathcal{C}_2$ en Q, con P y Q distintos de S. Sea T el punto en $\mathcal{C}_2$ tal que TQ es diámetro de $\mathcal{C}_2$ y sea R la intersección de la bisectriz de $\angle SQT$ con el segmento ST. Demuestra que $QR = RT$.

(Problema sugerido por Víctor Hugo Antonio de la Fuente Jiménez)

Solución de Rafael Alonso Galdámez Pérez.[7] Sean $\alpha = \angle RTQ$ y $\beta = \angle RQT = \angle SQR$. Basta demostrar que $\alpha = \beta$ y obtendremos $QR = RT$. Como $\angle QST$ inscribe medio círculo, $\angle QST$ es recto y por tanto $\alpha + 2\beta = 90°$.
Tenemos el paralelismo $O_1P \parallel O_2Q$, de modo que si A es el punto de intersección de una recta paralela a O_1P que pasa por S con la recta PQ, el teorema de Tales[8] establece que $\frac{PA}{AQ} = \frac{O_1S}{SO_2} = \frac{1}{3}$ y adicionalmente $AS \perp PQ$.
Si trazamos ahora la tangente común a ambas circunferencias, por el punto S, denotamos por M a la intersección de dicha tangente con PQ, y como las tangentes externas desde un mismo punto a un círculo son iguales, se cumplirá $PM = MS$ y $MS = MQ$. Concluimos que M es el centro de un círculo que pasa por P, Q, S y por tanto el triángulo PSQ es rectángulo con ángulo recto en S, y como $\angle QST$ también es recto, los puntos P, S y T son colineales.



Por otra parte, como $MS = MQ$, $\angle MSQ = \angle MQS$ y como este último es semiinscrito en el arco $\widehat{SQ}$, también medirá α, al igual que $\angle STQ$. Pero $\angle PMS$ es externo

[7]Participante por el estado de Chiapas obteniendo una mención honorífica en el concurso nacional.
[8]Ver en el apéndice el teorema 12.

al triángulo MSQ, lo cual quiere decir que $\angle PMS = 2\alpha$. Además, al ser $\triangle PSQ$ rectángulo, el ángulo $\angle SPQ$ mide 2β pues $\angle PQS = \alpha$.
Finalmente, de la relación $AQ = 3PA$ encontrada anteriormente, tendremos $PQ = 4PA$ y como $PM = MQ$ llegamos a $PM = 2PA$ y por tanto $AM = PA$. Pero por el criterio de congruencia LAL, los triángulos PAS y MAS serán congruentes, de modo que $2\alpha = 2\beta$ y con esto concluimos el problema.

Problema 2. Una pareja de enteros positivos m, n es *guerrera* si existen enteros positivos a, b, c, d con $m = ab$, $n = cd$ y $a + b = c + d$. Por ejemplo, la pareja $8, 9$ es guerrera pues $8 = 4 \cdot 2$, $9 = 3 \cdot 3$ y $4 + 2 = 3 + 3$. Se colorean los enteros positivos de la siguiente manera:

- Empezamos coloreando el 3 y el 5.
- Después, si algún entero positivo no está coloreado y este tiene una pareja guerrera que ya está coloreado, entonces lo coloreamos.

Encuentra todos los enteros positivos que eventualmente se colorean.

(Problema sugerido por Germán Puga Castillo)

Solución de Carlos Yeddiel Cortes Ruelas. Primero se demostrará que no es posible colorear el 1 y el 2. Observemos que la única descomposición de 1 en dos factores enteros positivos es $1 = 1 \cdot 1$ y que la única pareja de enteros positivos que suma dos es $(1, 1)$, entonces para colorear el 1 sería necesario que el 1 estuviera coloreado inicialmente, lo cual no puede suceder. De manera similar, la única descomposición de 2 en dos factores enteros positivos es $2 = 2 \cdot 1$, así, para colorear 2 sería necesario que el 2 ya estuviera coloreado, que es imposible. Por tanto, no es posible colorear el 1 y el 2.
Ahora se demostrará por contradicción que se colorearán todos los enteros positivos n tales que $n \geq 3$. Supongamos que k es un entero positivo mayor que 3 que no se puede colorear. Como $k = k \cdot 1$, los números de la forma $(i + 1)(k - i)$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, no se pueden colorear, pues si alguno de ellos se pudiera colorear, entonces formaría una pareja guerrera con k y sería posible colorear a k.
Como $3 = 3 \cdot 1$ y $3 + 1 = 2 + 2$, entonces $2 \cdot 2 = 4$ se puede colorear. Así, $k \geq 6$, por tanto, no es posible colorear el $6(k - 5) = 3(2k - 10)$. Esto significa que tampoco se podrán colorear los números que puedan expresarse como el producto de dos enteros positivos que sumen $2k - 7 = 3 + (2k - 10)$, en particular, no es posible colorear a $1(2k - 8) = 2(k - 4)$. Si se aplica el mismo razonamiento anterior, se llega a que no se podrá colorear $1(k - 3) = k - 3$, pues $1 + (k - 3) = 2 + (k - 4)$. Es posible repetir el mismo razonamiento con $k_1 = k - 3$ para llegar a que $k_1 - 3 = k - 6$ no se puede colorear. Por un argumento inductivo inmediato se concluye que $k - 3n$ no se puede colorear para $n \in \mathbb{N}$. En conclusión, si $k \equiv 0 \pmod 3$, $k \equiv 1 \pmod 3$ o $k \equiv 2 \pmod 3$, entonces 6, 7 u 8 no se podrían colorear, respectivamente. Sin embargo, demostraremos que estos tres números sí se pueden colorear.

- $3 = 3 \cdot 1$, $3 + 1 = 2 + 2$, $2 \cdot 2 = 4 = 4 \cdot 1$, $4 + 1 = 3 + 2$, $3 \cdot 2 = 6$.

- $6 = 6 \cdot 1, 6 + 1 = 3 + 4, 3 \cdot 4 = 12 = 2 \cdot 6, 2 + 6 = 7 + 1, 7 \cdot 1 = 7$.
- $5 = 5 \cdot 1, 5 + 1 = 2 + 4, 2 \cdot 4 = 8$.

Lo anterior lleva a una contradicción. Por tanto, es posible colorear a todos los enteros positivos n tales que $n \geq 3$.

Problema 3. Encuentra el menor número real x que cumpla todas las siguientes desigualdades:

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor x^2 \rfloor < \lfloor x^3 \rfloor < \cdots < \lfloor x^n \rfloor < \lfloor x^{n+1} \rfloor < \cdots$$

Nota: $\lfloor x \rfloor$ es el mayor número entero menor o igual a x, es decir, es el único número entero que cumple que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

(Problema sugerido por Juan José Alba González)

Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes. Vamos a considerar tres casos: $x < 0$, $0 \leq x < 1$ y $1 \leq x$.
En el primer caso tenemos que $\lfloor x^3 \rfloor \leq x^3 < 0$. También sabemos que $x^2 > 0$ y por lo tanto $\lfloor x^2 \rfloor \geq 0 > \lfloor x^3 \rfloor$, lo cual contradice el enunciado del problema.
Si $0 \leq x < 1$, tenemos que $0 \leq x^2 < 1$. Entonces, $\lfloor x \rfloor = \lfloor x^2 \rfloor = 0$ lo que también es una contradicción.
Finalmente, si $x \geq 1$, tenemos que $\lfloor x \rfloor \geq 1$. Por lo tanto, $\lfloor x^2 \rfloor > \lfloor x \rfloor \geq 1$ y entonces $\lfloor x^2 \rfloor \geq 2$. De igual forma, $\lfloor x^3 \rfloor > \lfloor x^2 \rfloor \geq 2$, por lo que $\lfloor x^3 \rfloor \geq 3$.
Por definición tenemos que $x^3 \geq \lfloor x^3 \rfloor$, de manera que $x^3 \geq 3$ y, por lo tanto, $x \geq \sqrt[3]{3}$.
Vamos a probar que $a = \sqrt[3]{3}$ es el menor número que satisface el problema.
Dado que $8 > 3 = a^3$, tenemos que $2 > \sqrt[3]{3}$, por lo que $2 > a > 1$ y, por tanto, $\lfloor a \rfloor = 1$.
También sabemos que $27 > a^6 = 9 > 8$. Entonces, tomando raíz cúbica, tenemos que $3 > a^2 > 2$ y, por lo tanto, $\lfloor a^2 \rfloor = 2$ y $\lfloor a^3 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$.
Ahora veamos que $a^3 = 3 > \frac{64}{27}$, entonces tomando raíz cúbica sabemos que $a > \frac{4}{3}$ y, por tanto, $3 > \frac{1}{a-1}$. Esto implica para $n \geq 3$ que $a^n \geq 3 > \frac{1}{a-1}$. Esto es, $a^{n+1} - a^n > 1$ o $a^{n+1} - 1 > a^n$.
Por lo tanto, tenemos que $\lfloor a^{n+1} \rfloor > a^{n+1} - 1 > a^n \geq \lfloor a^n \rfloor$ para $n \geq 3$ y probamos que $\lfloor a \rfloor < \lfloor a^2 \rfloor < \lfloor a^3 \rfloor$ porque $\lfloor a \rfloor = 1$, $\lfloor a^2 \rfloor = 2$ y $\lfloor a^3 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$. Por lo tanto, el mínimo buscado es $\sqrt[3]{3}$.

Problema 4. Decimos que un número entero no-negativo n "contiene" a otro número entero no-negativo m, si los dígitos de su expansión (o desarrollo) decimal aparecen en forma consecutiva en la expansión (o desarrollo) decimal de n. Por ejemplo, 2016 contiene a $2, 0, 1, 6, 20, 16, 201$ y 2016. Determina el mayor número entero n que no contiene a ningún múltiplo de 7.

(Problema sugerido por David Guadalupe Torres Flores)

Solución de Maximiliano Sánchez Garza. Sea $x = \overline{a_n a_{n-1}, \ldots, a_2 a_1}$ un entero positivo que no contiene a un múltiplo de 7. Entonces, $a_i \neq 0, 7$ y $\overline{a_{n-1}, \ldots, a_2 a_1}$ tampoco

contiene múltiplos de 7. En general, $\overline{a_{n-2},\dots,a_2a_1}$, $\overline{a_{n-3},\dots,a_2a_1}$, $\overline{a_2a_1}$ y $\overline{a_1}$, tampoco contienen a un múltiplo de 7. Si $n \geq 7$, los números $\overline{a_7,\dots,a_2a_1}$, $\overline{a_6,\dots,a_2a_1}$, $\overline{a_2a_1}$ y $\overline{a_1}$ no contienen a un múltiplo de 7.
Sea $X = \{10 \cdot a_2, 10 \cdot a_2 + 10^2 \cdot a^3, \dots, 10 \cdot a_2 + 10^2 \cdot a^3 + \cdots + 10^6 \cdot a_7\}$. Si dos de los elementos de X tienen el mismo residuo módulo 7, la resta será un múltiplo de 7 y será de la forma $10^i \cdot a_{i+1} + 10^{i-1} \cdot a_i + \cdots + 10^j \cdot a_{j+1}$, con $0 \leq j \leq i \leq 6$. Así, $10^j(\overline{a_{i+1},\dots,a_j})$ es múltiplo de 7, pero $\operatorname{mcd}(10^j, 7) = 1$, entonces, 7 divide a $\overline{a_{i+1},\dots,a_j}$, lo cual no puede ocurrir porque x no contiene un múltiplo de 7. Por tanto, los 6 enteros de X tienen diferente congruencia módulo 7.
Si algún elemento $10 \cdot a_2 + 10^2 \cdot a^3 + \cdots + 10^i \cdot a_{i+1}$, con $1 \leq i \leq 6$, de X es múltiplo de 7, se puede repetir un argumento similar al anterior para concluir que 7 divide a $\overline{a_{i+1},\dots,a_2}$, lo cual no puede suceder. Ahora, a_1 no es congruente a 0 módulo 7; así, si a cada uno de los números de X (que tienen congruencias diferentes entre ellos y diferentes de 0 módulo 7) se le suma a_1, entonces uno de los números resultantes y será múltiplo de 7. Pero y está contenido en x, entonces no es posible que sea múltiplo de 7, lo cual es una contradicción. Por tanto, x tiene a lo más seis dígitos.
Se demostrará que 999993 es el máximo valor de x. Como x es de seis dígitos, solo se debe demostrar que si $z = 10 \cdot 99999 + y$ con $4 \leq y \leq 9$, entonces z contiene a un múltiplo de 7. En efecto, 994, 99995, 9996, 7, 98, 999999 son múltiplos de 7, entonces, 999993 es el máximo valor de x.

Problema 5. En una cuadrícula de $n \times n$ se escriben los números del 1 al n^2 en ese orden, por renglones, de manera que en el primer renglón aparecen los números del 1 al n, en el segundo los números de $n+1$ a $2n$, y así sucesivamente. Una operación permitida en la cuadrícula consiste en escoger cualesquiera dos cuadraditos que compartan un lado y sumar (o restar) el mismo número entero a los dos números que aparecen en esos cuadraditos. Por ejemplo, aquí abajo se muestran dos operaciones sucesivas permitidas en una cuadrícula de 4×4; primero restando 7 a los cuadraditos sombreados y luego sumando 5 a los sombreados.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	2	3	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

$\rightarrow$

1	7	8	4
5	6	0	8
9	10	4	12
13	14	15	16

Determina para qué valores de n es posible lograr que todos los cuadraditos tengan escrito el número 0 después de repetir la operación tantas veces como sea necesario y, en los casos en que sea posible, determina el mínimo número de operaciones necesarias.

(Problema sugerido por María Luisa Pérez Seguí y Miguel Raggi Pérez)

Solución de Oriol Solé Pi. La suma de todos los números escritos en el tablero es $\frac{n^2(n^2+1)}{4}$ y si n es impar, como n^2 es congruente a 1 módulo 4, la suma total será

impar. Pero como cada cambio afecta dos casillas con un mismo valor, el valor de la suma total se altera en una cantidad par siempre, sumada o restada, y por tanto nunca se podrá obtener una suma total igual a cero. Concluimos entonces que n debe ser par y tomamos $n = 2k$.
Podemos observar que si cambiamos varias veces un mismo par de casillas, podemos combinar todos esos cambios en uno solo, y que tampoco afecta el orden en que se realizan los movimientos respecto del resultado final.
Afirmamos que el número mínimo de cambios es $3k^2$ y primero veremos que es imposible lograrlo en una menor cantidad de movimientos. Para ello, consideremos una gráfica G donde los vértices sean las casillas del tablero y un par de vértices es adyacente cuando las casillas correspondientes fueron alteradas con un mismo movimiento. Esta gráfica no tiene por qué ser conexa, así que consideremos $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$ sus componentes conexas. Sabemos que si una gráfica con r vértices es conexa, tiene al menos $r - 1$ aristas (en cuyo caso es un árbol), de modo que el número de aristas en la gráfica G cumplirá:

$$A_G = A_{G_1} + A_{G_2} + \cdots + A_{G_m} \geq (|G_1| - 1) + (|G_2| - 1) + \cdots + (|G_m| - 1).$$

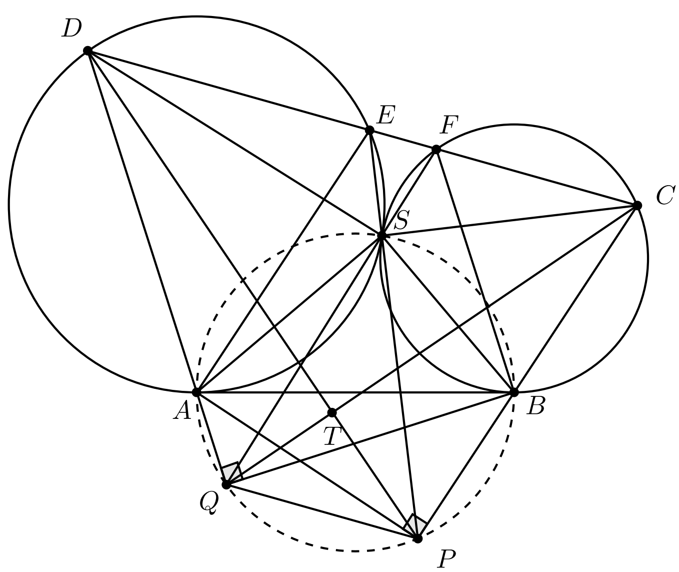
Por un lado, estamos suponiendo que el número de cambios (y por tanto el número de aristas A_G) es menor que $3k^2$, y por el otro, $|G_1|+|G_2|+\cdots+|G_m|$ es igual $4k^2 = n^2$ por ser el número de vértices en toda la gráfica. Tenemos entonces $3k^2 > 4k^2 - m$ de donde $m > k^2$. Pero si el número de componentes es mayor a k^2, alguna debe tener menos de 4 vértices, pues si todas las componentes tuvieran 4 o más vértices, el total en toda la gráfica sería $4m \geq 4k^2$ lo cual es imposible.
Así, existe alguna componente conexa que tiene menos de cuatro vértices. Esta componente no puede tener sólo un vértices, ya que ello querría decir que no se modificó y por tanto no puede alcanzar el valor cero, y tampoco puede tener dos vértices pues ello quiere decir que sólo se modificaron simultáneamente y si ambos fueran cero, tendrían que haber tenido el mismo valor inicial, lo cual es imposible. Concluimos que dicha componente tiene que tener exactamente tres vértices.
Esta componente no puede tener ciclos pues considerando la coloración del tablero, ello querría decir que se modificaron al mismo tiempo dos casillas blancas o dos casillas negras y por tanto debe tener solo dos aristas y uno de los vértices está unido a los demás. Sin embargo, como se dejaron las tres casillas en cero, ello quiere decir que el vértice de en medio es igual a la suma de los vértices a los que está unido, pues fue modificado al mismo tiempo que los otros dos y por las mismas cantidades. Pero siendo el vértice mayor, la única forma en que los números pudieran estar acomodados es que el vértice mayor esté a la derecha de uno y debajo del otro.
Sin embargo, si dos vértices consecutivos son horizontales, tienen los valores $a - 1, a$, y si b es el vértice que queda sobre a, para que se cumpla $a = (a-1)+b$ será necesario que b sea 1 lo cual es imposible ya que b está al menos en la segunda columna mientras que 1 se coloca en la esquina superior izquierda del tablero.
La contradicción anterior surge de haber supuesto que el total de cambios en el tablero (y por tanto de aristas en la gráfica) es menor a $3k^2$. Para terminar el problema, basta dar una forma de realizar el proceso con $3k^2$ cambios.
Consideremos una región de 2×2, con números $a, a + 1, b, b + 1$. Si restamos a a los dos de arriba y b a los dos de abajo, obtenemos que quedan respectivamente $0, 1, 0, 1$.

Restando 1 a los dos de la derecha, logramos que en las cuatro posiciones haya ceros. Usamos 3 movimientos para lograrlo, y podemos repetir este proceso en las $n^2/4 = k^2$ regiones en que se divide el tablero en subtableros de 2×2, por lo que el tablero completo se puede reducir a ceros en $3k^2$ cambios.

Problema 6. Sean $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, l_1 la recta paralela a BC que pasa por A y l_2 la recta paralela a AD que pasa por B. La recta DC corta a l_1 y l_2 en los puntos E y F, respectivamente. La recta perpendicular a l_1 que pasa por A corta a BC en P y la recta perpendicular a l_2 por B corta a AD en Q. Sean Γ_1 y Γ_2 las circunferencias que pasan por los vértices de los triángulos ADE y BFC, respectivamente. Demuestra que Γ_1 y Γ_2 son tangentes si y solo si DP es perpendicular a CQ.

(Problema sugerido por Germán Puga Castillo)

Solución de Leonardo Ariel García Morán. Sea $\angle CDA = \alpha$ en ángulos dirigidos. Entonces $\angle CBA = \alpha$ pues el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, además $\angle CFB = \angle CDA = \alpha$ pues $AD \parallel BF$. Luego $\angle CFB = \angle CBA = \alpha$ y AB es tangente a Γ_2. Análogamente Γ_1 es tangente a AB. Entonces tenemos que $\angle EAB = \angle EDA = \alpha = \angle CFB = \angle EFB$ pues AB es tangente a Γ_1, entonces $EABF$ es cíclico.
Sea T la intersección de DP con CQ. Probaremos que $DP \perp CQ$ si y solo si $\triangle DAP \simeq \triangle QBC$.



Para esto notemos que ya que $\angle APC = 90°$, se cumple que $DP \perp CQ$ si y sólo si el ángulo entre AP y DP es igual al ángulo entre PC y QC. Ya que $AQPB$ es cíclico tenemos que $\angle DAP = \angle QBC$, y por lo tanto la igualdad de ángulos anterior pasa si y sólo si ADP y BQC son semejantes (pues estos tendrían dos ángulos iguales). De este modo,

$$DP \perp CQ \Leftrightarrow \triangle DAP \simeq \triangle QBC \Leftrightarrow \frac{AD}{AP} = \frac{BQ}{BC} \Leftrightarrow AD \cdot BC = AP \cdot BQ.$$

Ahora, ya que $AD \parallel BF$ y $AE \parallel BC$, los triángulos ADE y BFC son semejantes, se sigue que $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AE \cdot BF$. Juntando esto con lo antes obtenido llegamos a que

$$DP \perp CQ \Leftrightarrow AE \cdot BF = AP \cdot BQ \Leftrightarrow \frac{AE}{AP} = \frac{BQ}{BF}$$

y ya que $\angle EAP = \angle QBF = 90°$ por ser AP perpendicular a ℓ_1 y BQ perpendicular a ℓ_2 se sigue que $DP \perp CQ$ si y solo si los triángulos AEP y BQF son semejantes.
Ahora supongamos que $\triangle AEP \simeq \triangle BQF$ y sea S la intersección de EP y QF. Mostremos que Γ_1 y Γ_2 son tangentes en S. Por la semejanza tenemos que $\angle AEP = \angle BQF$ y ya que $AE \parallel CP$ se sigue que $\angle BQF = \angle AEP = \angle CPE$, entonces tenemos que $\angle BPS = \angle CPE = \angle BQF = \angle BQS$ y B, P, Q, S son concíclicos. Como A, Q, P, B son concíclicos se sigue que A, Q, P, B y S son todos concíclicos. Ya que AB es diámetro de este cíclico (pues $AQ \perp QB$) se sigue que $\angle ASB = 90°$. Además $\angle ASE = \angle AQP = \angle ABC = 180° - \angle ADE = 180° - \alpha$ y entonces S está en Γ_1. Análogamente S está en Γ_2. Ahora, como AB es tangente a Γ_1 y Γ_2 tenemos que $\angle SAB = \angle SDA$ y $\angle SBA = \angle SCB$ y como $\angle ASB = 90°$ tenemos que $\angle SAB + \angle SBA = 180° - \angle ASB = 90° = \angle ASB$, entonces $\angle ASB = \angle ADS + \angle BCS$, de esto se sigue que Γ_1 y Γ_2 son tangentes en S, pues si Z es la intersección de la tangente a Γ_1 en S con AB, entonces $\angle SBC = \angle ASB - \angle ASD = \angle ASB - \angle ASZ = \angle BSZ$ y SZ es tangente a Γ_2.
Ahora supongamos que Γ_1 y Γ_2 son tangentes en un punto S. Demostraremos que $\triangle AEP \simeq \triangle BQF$. Sean O_1 y O_2 los centros de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Entonces $O_1A \perp AB$ y $O_2B \perp AB$, por ser AB tangente a Γ_1 y Γ_2, entonces $\angle AO_1S + \angle BO_2S = 180°$ y por lo tanto

$$\angle ASO_1 + \angle BSO_2 = \frac{180° - \angle AO_1S}{2} + \frac{180° - \angle BO_2S}{2} = \frac{360° - 180°}{2} = 90°.$$

(Aquí usamos que O_1, S y O_2 son colineales pues Γ_1 y Γ_2 son tangentes en S). Luego A, Q, P, B y S son todos concíclicos en el círculo de diámetro AB, entonces $\angle SQB = \angle SAB = \angle SEA$ (AB tagente a Γ_1), además $\angle BSQ = \angle BAQ = \angle BCD = \angle BCF = \angle 180° - \angle BSF$ por los cíclicos $BSAQ$, $ABCD$ y $BCFS$, por lo tanto F, S, Q son colineales. Análogamente E, S y P son colineales. Ya que $\angle SQB = \angle SEA$ esto implica que $\angle FQB = \angle PEA$, y ya que $\angle FQB = \angle PAE = 90°$ esto implica que $\triangle BQF \simeq \triangle AEP$ pues estos tienen dos ángulos iguales.

Apéndice

Definición 3 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 4 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (\text{mod } m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$ y $c \equiv d \ (\text{mod } m)$, entonces $a \equiv d \ (\text{mod } m)$.*
2. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$ y $b \equiv d \ (\text{mod } m)$, entonces $ab \equiv cd \ (\text{mod } m)$.*
3. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (\text{mod } m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \ (\text{mod } m)$, entonces $a \equiv c \ (\text{mod } \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$.*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1 \ (\text{mod } n)$.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad media geométrica - media armónica)**.** *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad de Nesbitt)**.** *Para cualesquiera números reales positivos a, b y c, se tiene que*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2},$$

con la igualdad si y solo si $a = b = c$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 5 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 6 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 12 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 13 (Bisectriz). *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 14 (Ley de senos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.

Teorema 15 (Ley de cosenos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

donde α es el ángulo opuesto al lado a.

Teorema 16 (Fórmula de Herón). *El área de un triángulo de lados a, b y c y semiperímetro $s = \frac{a+b+c}{2}$ es igual a*

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Teorema 17 (Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 18 (Menelao). *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 7 (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 19 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 21 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 8 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 22 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Teorema 23 (Ptolomeo)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si*

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Rogelio Valdez Delgado (PRESIDENTE)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
valdez@uaem.mx

Víctor Manuel Barrero Calderón
Passport Health
barrero.victor@gmail.com

Julio César Díaz Calderón
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc94@hotmail.com

Héctor Raymundo Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Ignacio Barradas Bibriesca
Centro de Investigación en Matemáticas
barradas@cimat.mx

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
josealfredocobian@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Enrique Treviño López
Lake Forest College
enriquetrevi_o@hotmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
Ciudad de México.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

http://ommenlinea.org/

¡Síguenos en facebook y en twitter!

http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas

@ommtw