Soluciones del examen de invitación a la OMM, 2017 (versión B)

1. **(b)** $66 = 12 \times 5 + 6$, así que puede usar 5 cajas para 12 huevos y una caja de las que guardan 6 huevos.

2. **(d)** El número de cubitos que hay hasta el momento es $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) = 10$. Debería haber $3 \times 3 \times 3 = 27$, así que faltan 17.

3. **(c)** La primera y la octava se pueden juntar para formar el rectángulo; la segunda se puede completar con una igual a ella y lo mismo ocurre con la sexta. La quinta y la séptima también son complementarias. Sólo la tercera y la cuarta necesitan de dos piezas cada una para completar un rectángulo de 3×4.

4. **(d)** La mayor cantidad de calcetines que Mario puede sacar sin encontrar un solo par son 30 calcetines (uno de cada color). Para garantizar que obtiene todos los pares que desea es suficiente sacar 7 calcetines más; en total Mario tendría que sacar 37 calcetines

5. **(e)** En la tercera semana, cada día corre $4,000$ metros, y cada dos semanas aumenta un kilómetro. Como necesita llegar a 15 kms. le faltan 11 kms. y entonces 22 semanas más de entrenamiento. Luego en la semana 25 estará corriendo cada día 15 kms.

6. **(e)**.

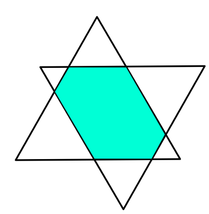
7. **(e)** *Forma intuitiva.* La diferencia inicial entre niños y niñas es de 6. Cada semana la diferencia disminuye en 1, así que se necesitan 6 semanas.

Forma algebraica. Llamemos s al número de semanas necesarias para que haya el mismo número de niños que de niñas. Después de s semanas habrá $25 + 2s$ niños y $19 + 3s$ niñas, así que la ecuación a resolver es $25 + 2s = 19 + 3s$, de donde $s = 25 - 19 = 6$.

8. **(a)** La mayor diferencia se alcanza cuando cambia la cifra de los millares. Las parejas de números consecutivos en los que ocurre esto son $(0721, 1027)$, $(1720, 2017)$ y $(2710, 7012)$. La primera pareja tiene diferencia 306, la segunda 297 y la tercera 4302, así que la mayor diferencia es 4302.

9. **(c)** El triángulo cumple, por el Teorema de Pitágoras, que $a^2 + b^2 = c^2$ y como los catetos son perpendiculares, su área es $\frac{ab}{2}$. Como por hipótesis $c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) = 2ab$, se tiene que $a^2 + b^2 = 2ab$. Luego $(a - b)^2 = 0$, por lo que $a = b$ y entonces $\frac{a}{b} = 1$.

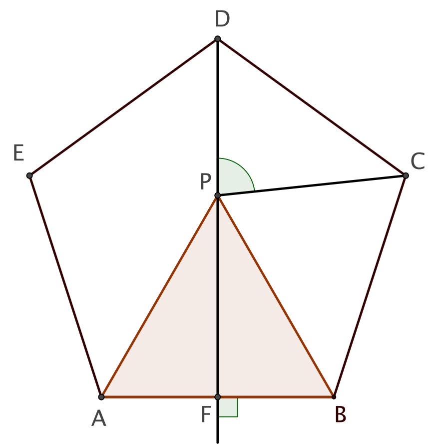
10. **(b)** Observemos que cada pico de la estrella es un triángulo equilátero. Entonces la suma de tres lados consecutivos del hexágono es igual a lo que mide un lado de los triángulos equiláteros originales, y entonces el perímetro del hexágono es $2/3$ el perímetro de uno de los triángulos, es decir, 12 cm.



11. **(b)** La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 3 columnas o la de los 2 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es par y la de los renglones es múltiplo de 3. Entonces los únicos números que puede ir encima del 2 son el 1 o el 4. Pero 1 no es posible, ya que la segunda columna sumaría 3 y la tercera 5 o más, luego debe ser 4. Luego la suma de los números en cualquier columna es 6, así que el número en la casilla sombreada es 2 y la figura queda completa como sigue:

1	4	4
5	2	2

12. **(d)** La mediatriz del segmento AB pasa por D, P y el punto medio F de AB.



Ahora el triángulo PFB es un triángulo rectángulo con $\angle FPB = 30^o$, y el triángulo BCP es isósceles. Como los ángulos internos del pentágono regular miden 108^o, se tiene que $\angle CBP = 108^o - 60^o = 48^o$. Por lo que $\angle BPC = \angle PCB = \frac{1}{2}(180^o - 48^o) = \frac{1}{2}(132^o) = 66^o$. Luego $\angle CPD = 180^o - \angle FPB - \angle BPC = 180^o - 30^o - 66^o = 84^o$.