TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2015, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Contenido

Presentación IV

Artículos de matemáticas: Triángulos Semejantes 1

Problemas de práctica 9

Soluciones a los problemas de práctica 12

Problemas de Entrenamiento 20
- Problemas de Entrenamiento. Año 2015 No. 3 20
- Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 4 22

Concursos Estatales 32
- Olimpiada Estatal de Oaxaca, 2015 32

Problemas y Soluciones de Concursos Internacionales 36
- Romanian Master of Mathematics 2015 36
- XXVII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico 43

Apéndice 50

Bibliografía 53

Directorio del Comité Organizador de la OMM 55

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2015, Número 3

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su tercer número del 2015. En esta edición de tu revista encontrarás el artículo *Triángulos semejantes*, escrito por Marco Antonio Flores Martínez, estudiante de la licenciatura en matemáticas en la Universidad de Guanajuato. Este es un tema central en la resolución de problemas de geometría olímpica y estamos seguros que su lectura te servirá mucho para explotar su potencial, ya que es muy útil tanto en problemas sencillos como en problemas avanzados.

En la sección *Concursos Estatales* encontrarás el examen de la segunda etapa del concurso estatal de Oaxaca del año 2015. Queremos expresar nuestro agradecimiento a Marcelino Ramírez Ibañez, delegado estatal de Oaxaca, por compartirnos su material y a la vez invitamos al resto de los delegados estatales a que nos envíen sus exámenes

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

selectivos para publicarlos en la revista y de esta manera enriquecer el intercambio de material entre todos.

En la sección internacional hallarás los resultados y los exámenes con soluciones de la competencia *Romanian Master of Mathematics* llevada a cabo el pasado mes de febrero en Rumania, la cual fue la primera vez que México compitió y de la XXVII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de *Problemas de Práctica* y de *Entrenamiento*, mismas que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la olimpiada. Por último, no olvidamos incluir los datos actualizados del Comité Olímpico Nacional.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1996. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2015-2016 y, para el 1° de julio de 2016, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 22 al 27 de noviembre de 2015 en Guadalajara, Jalisco. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2015 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Hong Kong, julio de 2016) y a la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2016).

De entre los concursantes nacidos en 1999 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2016).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO)[2] a celebrarse en el mes de abril de 2016.

[2]La Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas nace en 2012 como una manera de estimular la participación femenil en olimpiadas de matemáticas, siguiendo el ejemplo de China que ya contaba con una olimpiada exclusiva para mujeres. El modelo de competencia de esta olimpiada es el mismo que el de la IMO, con la diferencia de que las delegaciones nacionales son de cuatro participantes en lugar de seis. A pesar de que la olimpiada es europea, es posible la participación de equipos no europeos por invitación.

Triángulos Semejantes

Por Marco Antonio Flores Martínez

Nivel Básico

Los triángulos son probablemente los objetos geométricos más estudiados en un entrenamiento típico de preparación para participar en el concurso nacional de la OMM, y una de las técnicas más fundamentales para resolver problemas de geometría que involucran igualdades de ángulos o proporciones entre segmentos, es la semejanza de triángulos.

Semejanza de triángulos

Decimos que dos triángulos son semejantes, por definición, si existe una correspondencia uno a uno[3] entre los tres ángulos de uno y los tres ángulos del otro de manera que ángulos correspondientes son iguales. La idea intuitiva detrás de la definición de semejanza es que dos triángulos son semejantes si "tienen la misma forma".
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes con $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$, escribimos $ABC \sim A'B'C'$.
Además de la definición de semejanza usada en este artículo, existen otros dos criterios muy útiles para decidir si dos triángulos son semejantes:

1. Criterio LLL (lado lado lado). $ABC \sim A'B'C'$ si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, es decir, las tres parejas de lados correspondientes están en la misma proporción.

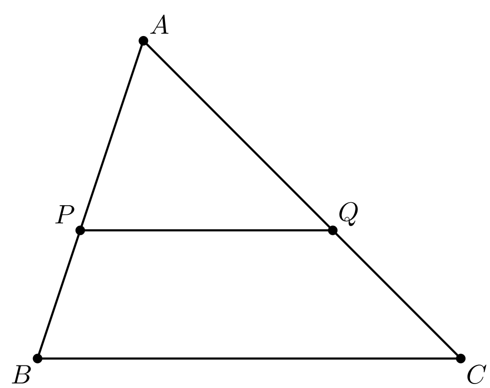
2. Criterio LAL (lado ángulo lado). $ABC \sim A'B'C'$ si $\angle CAB = \angle C'A'B'$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, es decir, existe una pareja de ángulos iguales y los lados que forman ese ángulo están en la misma proporción.

[3] Una *correspondencia uno a uno* es una correspondencia entre dos conjuntos en la que cada elemento del primer conjunto se corresponde con solo un elemento del segundo conjunto, y cada elemento del segundo conjunto se corresponde con solo un elemento del primer conjunto.

Observación 1. *La afirmación "$ABC \sim A'B'C'$ si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $\angle BCA = \angle B'C'A'$", que en este artículo es nuestra definición de semejanza, es también conocida como el Criterio AAA (ángulo ángulo ángulo). Cabe mencionar que, como la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre igual a $180°$, es suficiente que dos pares de ángulos correspondientes sean iguales para que dos triángulos sean semejantes. Por esta razón, a veces a este criterio se le llama AA (ángulo ángulo).*

A continuación enunciamos uno de los teoremas más importantes en la teoría de semejanza de triángulos:

Teorema 1. (**Tales**) *Si ABC es un triángulo y P, Q son puntos sobre las rectas AB y AC respectivamente, entonces la recta PQ es paralela a la recta BC si y sólo si $ABC \sim APQ$.*

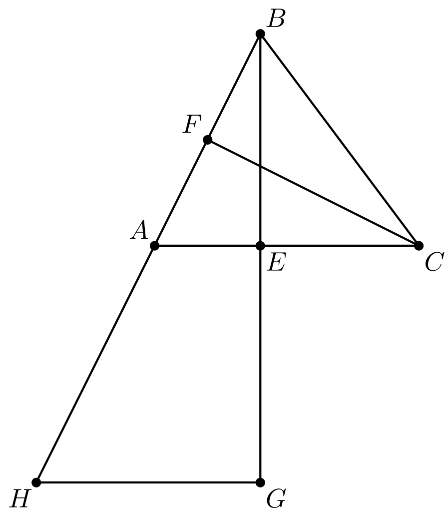


La demostración de este teorema (o de una versión equivalente, en realidad) la puedes encontrar en [BG] (ver referencias). Leerla podría resultarte muy ilustrativo, pues muestra técnicas de demostración en geometría más elementales y universales que no se tratarán en este artículo, como áreas de triángulos y argumentos por contradicción.

Cabe señalar que el teorema establece condiciones tanto necesarias como suficientes (de ahí el término "si y sólo si") para que una recta sea paralela a un lado de un triángulo, y por tanto puede ser aprovechado en ambas direcciones.

Ejercicio 1. *Usa el teorema de Tales para demostrar que si ABC es un triángulo y P, Q son puntos sobre los lados AB y AC respectivamente tales que la recta PQ es paralela al lado BC, entonces $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$.*

Ejemplo 1. *Sean ABC un triángulo y E, F los pies de las alturas desde B y C respectivamente. Un punto G sobre el rayo BE satisface que $EG = CF$, y la recta paralela al lado AC que pasa por G interseca a la recta AB en el punto H. Demuestra que $AH = AC$.*



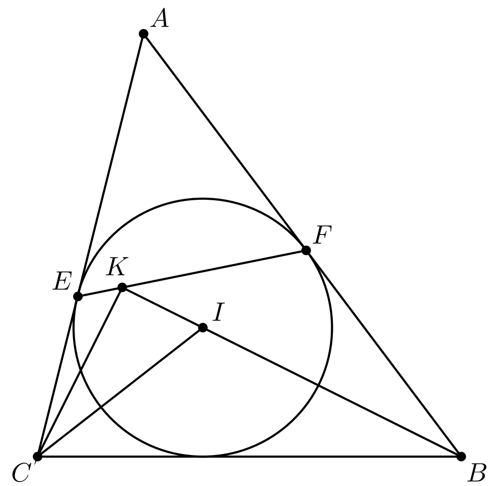
Demostración. Al notar que los segmentos AH y AC forman un triángulo, con mucha seguridad el primer acercamiento de alguien que intenta resolver este problema será intentar probar que los ángulos $\angle ACH$ y $\angle AHC$ son iguales. Pero a menos que el autor de este artículo esté pasando por alto alguna situación obvia, este acercamiento resulta en diversas complicaciones, y conviene aprovechar la teoría de semejanzas de triángulos.

Como ABE y ACF son triángulos rectángulos que comparten el ángulo $\angle BAC$, tenemos por el criterio AAA que $ABE \sim ACF$. Luego, aprovechando el hecho de que $EG = CF$ se tiene:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF} = \frac{BE}{EG}. \tag{1}$$

Ahora bien, como a estas alturas el lector ya llevó a cabo el ejercicio 1, sabemos que el que AC y HG sean paralelas implica que $\frac{BE}{EG} = \frac{AB}{AH}$, así que por (1) tenemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AH}$, de donde $AC = AH$. $\square$

Ejemplo 2. *El incírculo del triángulo ABC toca a los lados AB y AC en F y E, respectivamente. La bisectriz del ángulo ABC corta a EF en K. Demuestra que CK es perpendicular a BK.*



Demostración. Definimos I como el incentro de ABC, $\angle BAC := 2\alpha$ y $\angle ABC := 2\beta$. Como $AE = AF$ (puesto que son tangentes a un círculo desde un punto común), tenemos $\angle AFE = 90^\circ - \alpha$, así que $\angle BFK = 90^\circ + \alpha$. También, como $\angle BCI = 90^\circ - \alpha - \beta$, $\angle BIC = 90^\circ + \alpha$. Entonces, por el criterio AAA tenemos que $BFK \sim BIC$, de donde:

$$\frac{BF}{BI} = \frac{BK}{BC}. \tag{2}$$

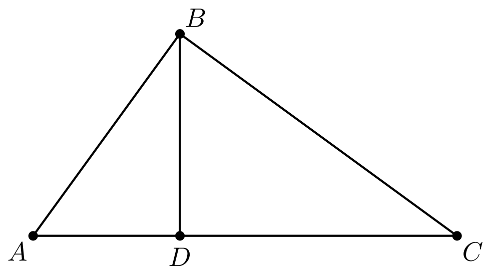
Además, como $\angle FBI = \angle KBC$, tenemos por el criterio LAL que $FBI \sim KBC$. Entonces, como $\angle IFB = 90^\circ$ (puesto que F es punto de tangencia), tenemos que $\angle CKB = 90^\circ$, es decir CK es perpendicular a BK. □

En las olimpiadas de matemáticas hay muchos escenarios que se presentan regularmente en los problemas de geometría, y algunos de ellos involucran semejanzas de triángulos. Por ejemplo, en muchos problemas aparecen dos o incluso las tres alturas de un triángulo, y es importante tener en cuenta que, en automático, han aparecido parejas de triángulos rectángulos semejantes, como los triángulos ABE y ACF del ejemplo anterior.

Otro escenario muy común es el de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

La altura de un triángulo rectángulo

Proposición 1. *Si ABC es un triángulo con $\angle ABC = 90^\circ$ (el ángulo en B es recto) y D es el pie de la altura desde B sobre la hipotenusa AC, entonces $ABC \sim ADB \sim BDC$.*

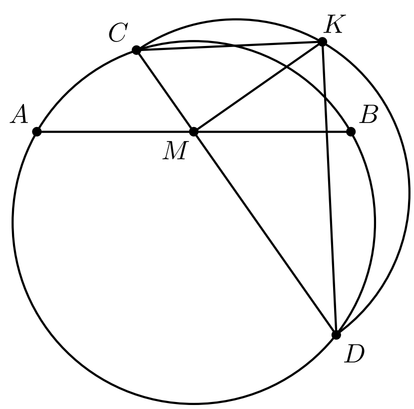


Demostración. Denotamos $\alpha := \angle CAB$. Como la suma de los ángulos internos de los triángulos ABC y de ABD es $180°$ y $\angle ADB = 90°$, tenemos que $\angle ABD = \angle BCA = \angle BCD = 90° - \alpha$. Además $\angle ADB = \angle ABC = \angle BDC = 90°$. Entonces, por el criterio AAA, tenemos que $ABC \sim ADB \sim BDC$. $\square$

Corolario 1. *Si ABC es un triángulo con $\angle ABC = 90°$ y D es el pie de la altura desde B, entonces $BD^2 = AD \cdot CD$, $AB^2 = AD \cdot AC$ y $CB^2 = CD \cdot CA$.*

Demostración. Como $ABC \sim ADB \sim BDC$, tenemos por el criterio LLL que $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$, $\frac{BD}{CD} = \frac{AD}{BD}$ y $\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CB}$, de donde se siguen cada una de las afirmaciones. $\square$

Ejemplo 3. *Sean AB una cuerda en una circunferencia y M su punto medio. Otra cuerda CD en la misma circunferencia pasa por M, y se construye una semicircunferencia con diámetro CD. La recta perpendicular a CD que pasa por M interseca a la semicircunferencia en K. Demuestra que $AM = KM$.*



Demostración. Tenemos que $\angle BAC = \angle CDB$, al ser ángulos inscritos que abarcan el mismo arco en una circunferencia, y también $\angle AMC = \angle DMB$, de manera que $AMC \sim DMB$ (la semejanza de estos dos triángulos es un caso particular de una teoría un poco más general llamada *potencia de un punto*; puedes estudiar este tema en el artículo de la edición número 4, año 1 de esta misma revista). Entonces $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$, de manera que:

$$MC \cdot DM = AM \cdot MB = AM^2 \tag{3}$$

Ahora bien, como CD es el diámetro de la semicircunferencia que pasa por C, D y K, tenemos que el ángulo $\angle CKD$ es recto. Luego por el corolario anterior tenemos que $KM^2 = MC \cdot DM$, así que por (3) tenemos que $AM^2 = KM^2$, de donde $AM = KM$. □

Un caso particular muy importante de la semejanza de triángulos es la congruencia.

Congruencia de triángulos

Decimos que dos triángulos son congruentes, por definición, si son semejantes y además la proporción entre sus lados correspondientes es igual a 1, es decir, las longitudes de sus lados correspondientes son iguales. Nota que la definición es redundante, pues si dos triángulos tienen pares de lados correspondientes iguales entonces satisfacen el criterio LLL de semejanza.
La idea intuitiva detrás de la definición de congruencia es que dos triángulos son congruentes si son "iguales" salvo (posiblemente) su posición en el plano.
Si los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes con $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ escribimos $ABC \cong A'B'C'$.
En el caso de la congruencia de triángulos también existen dos criterios (además de la definición que hemos dado) muy útiles para decidir si dos triángulos son congruentes:

1. Criterio LAL (lado ángulo lado). $ABC \cong A'B'C'$ si y sólo si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $AB = A'B'$ y $AC = A'C'$, es decir, existen dos parejas de lados iguales y el ángulo comprendido entre dichos dos lados en un triángulo es igual al ángulo comprendido entre los dos lados correspondientes del otro triángulo.

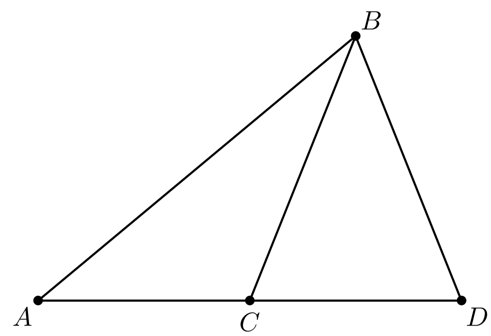
2. Criterio ALA (ángulo lado ángulo). $ABC \cong A'B'C'$ si y sólo si $\angle CAB = \angle C'A'B'$, $\angle ABC = \angle A'B'C'$ y $AB = A'B'$, es decir, existen dos parejas de ángulos iguales (lo cual implica en automático que en la tercera pareja los ángulos también coinciden) y una pareja de lados correspondientes iguales.

Observación 2. *La afirmación "$ABC \cong A'B'C'$ si $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC = B'C'$", que en este artículo es nuestra definición de congruencia, es también conocida como el Criterio LLL (lado lado lado).*

Ejercicio 2.

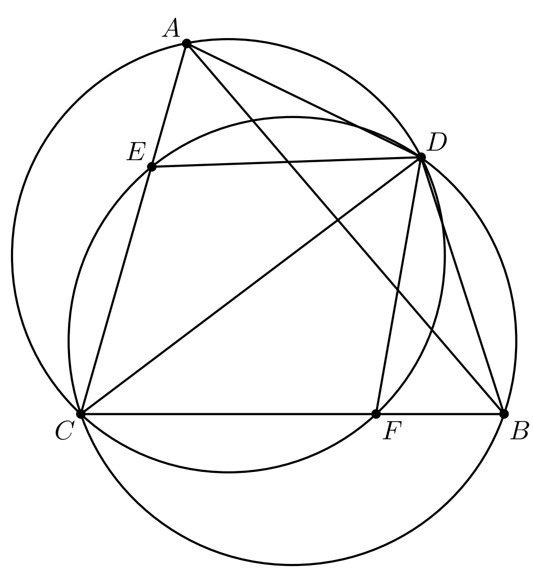
- *Usa el criterio ALA para mostrar que si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $ABC \cong CDA$.*
- *Usa el criterio LLL para mostrar que si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ y M es el punto medio de BC, entonces la línea AM, además de ser una mediana, es una altura y es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.*

La condición ALL (ángulo lado lado), que especifica la igualdad entre dos lados y un ángulo que no es el que está comprendido entre dichos lados, por sí sola no implica la congruencia de triángulos. Considera por ejemplo un triángulo isósceles BCD con $BC = BD$ y un punto A sobre la recta CD, fuera del segmento CD. Entonces los triángulos ABC y ABD comparten el lado AB, tienen $BC = BD$ y comparten el ángulo $\angle BAC = \angle BAD$, pero no son semejantes.



Sin embargo, se sabe que si una pareja de triángulos satisface la condición ALL y el lado opuesto al ángulo en que coinciden es el lado más grande del triángulo, entonces los triángulos son congruentes. Esto implica, por ejemplo, que si el ángulo en que coinciden dos triángulos que satisfacen ALL es obtuso o recto, entonces son congruentes.

Ejemplo 4. *Se toman puntos E y F sobre los lados AC y BC, respectivamente, del triángulo ABC de manera que $AE = BF$. Los circuncírculos de ACF y BCE se intersecan de nuevo en D. Prueba que la línea CD biseca a $\angle ACB$.*



Demostración. Como $BCED$ es cíclico, tenemos que $\angle DBC = \angle DEA$, y como $ACFD$ es cíclico, tenemos que $\angle DAC = \angle DFB$. Entonces, por criterio LAL de congruencia, $DAE \cong DFB$. De aquí, $DE = DB$, así que $\angle DEB = \angle DBE$. Finalmente, como $BCED$ es cíclico, $\angle ACD = \angle DBE = \angle DEB = \angle BCD$. □

Problemas

1. En el paralelogramo $ABCD$, los puntos E y F se escogen en la diagonal AC tales que $AE = CF$. Si BE se extiende para cortar AD en H, y BF se extiende para cortar DC en G, demuestra que HG es paralela a AC.

2. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA, respectivamente. Demuestra que $PQRS$ es un paralelogramo y que el área de $ABCD$ es el doble de la de $PQRS$.

3. Sea l una recta que no interseca a los lados del triángulo ABC. Sean D, E y F los pies de las perpendiculares bajadas desde A, B y C respectivamente a l. Sean P, Q y R los pies de las perpendiculares desde D, E y F a las rectas BC, AC y AB, respectivamente. Demuestra que DP, EQ y FR son concurrentes.

4. Sean AD, BE y CF las alturas del triángulo ABC. Sean K, M y N los respectivos ortocentros de los triángulos AEF, BFD y CDE. Demuestra que los triángulos KMN y DEF son congruentes.

5. Sea $JHIZ$ un rectángulo, y sean A y C puntos en los lados ZI y ZJ respectivamente. La perpendicular desde A sobre CH interseca a la recta HI en el punto X, y la perpendicular desde C sobre AH interseca a la recta HJ en el punto Y. Demuestra que los puntos X, Y y Z son colineales.

6. (OMM, 2012) Sea ω_1 una circunferencia de centro O y P un punto sobre ella. Sea l la recta tangente por a ω_1 por P. Una circunferencia ω_2 que pasa por O y P interseca a l en Q. El segmento QO interseca a ω_1 en S y la recta PS interseca de nuevo a ω_2 en R. Si las longitudes de los radios de ω_1 y ω_2 son r_1 y r_2 respectivamente, demuestra que $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$.

7. (OMM, 2003) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralelo a DC. Se toman puntos P y Q sobre AB y CD respectivamente, tales que $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC}$. Sea M la intersección de AQ con DP y sea N la intersección de PC con QB. Demuestra que la longitud de MN depende solo de las longitudes de AB y DC, y calcula su valor.

Bibliografía

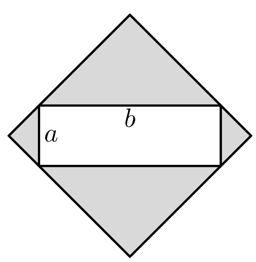
- R. Bulajich, J.A. Gómez Ortega, *Geometría*, Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, IM UNAM y SMM, México, 6ta reimpresión, 2009.

Problemas de práctica

Como ya es costumbre, presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2015. Hay que recordar que el nivel de dificultad de estos problemas va en aumento conforme va transcurriendo el año, comenzando con niveles básicos en el primer número para acabar con problemas del nivel del concurso nacional en el cuarto. Esto, para ayudarte a preparar mejor para este concurso. Procuramos tener problemas de todas las áreas y con las ideas que más aparecen en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Esperamos que los disfrutes.

Por último, te invitamos a contribuir al enriquecimiento de esta sección de la revista enviándonos problemas que te hayan parecido interesantes y retadores, cuya solución desees compartir con la comunidad olímpica mexicana. Para ello ponemos a tu disposición la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos todas tus propuestas.

Problema 1. En la siguiente figura, el cuadrado exterior tiene lados que miden $12\,cm$ y los lados del rectángulo interior cumplen que $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. Determina el valor del área sombreada.



Problema 2. Encuentra un número n de 6 dígitos que sea cuadrado perfecto, que sea cubo perfecto, y tal que $n - 6$ no sea par ni múltiplo de 3.

Problema 3. La suma de los cuadrados de tres números primos distintos es 5070. Determina el producto de los tres números primos.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con ángulo recto en el vértice C y sean D y E puntos sobre BC y AC, respectivamente, tales que $BC = 4BD$ y $AC = 8CE$. Si $AD = 164\, cm$ y $BE = 52\, cm$, ¿cuánto mide el lado AB?

Problema 5. Cierto entero positivo N de seis dígitos distintos entre sí y distintos de 0 cumple que los números N, $2N$, $3N$, $4N$, $5N$ y $6N$ son números de seis dígitos con exactamente esos seis dígitos pero en otro orden. Más aún, cada uno de los dígitos de N aparece exactamente una vez en las unidades, decenas, centenas, millares, decenas de millares y centenas de millares en uno de los números N, $2N$, $3N$, $4N$, $5N$ y $6N$. Encuentra a N.

Problema 6. Sean a y b números reales positivos distintos; $A = \frac{a+b}{2}$ y $G = \sqrt{ab}$. Demuestra que $G < \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} < A$.

Problema 7. Los cuatro vértices de cierto cuadrado están sobre el perímetro de un triángulo acutángulo escaleno con 2 vértices sobre uno de los lados y cada uno de los otros dos sobre los otros. Si queremos maximizar el área del cuadrado, ¿debemos poner los dos vértices del cuadrado sobre el lado mayor, el menor o el de en medio?

Problema 8. Determina todos los enteros positivos n tales que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ divide a n. (Nota: Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.)

Problema 9. Alicia y Bernardo acaban de conocer a Claudia. Alicia le preguntó: ¿cuándo es tu cumpleaños, Claudia?
Claudia lo pensó un segundo y dijo “No les diré, pero les daré unas pistas” y anotó una lista de 10 fechas:

15 de mayo 16 de mayo 19 de mayo

17 de junio 18 de junio

14 de julio 16 de julio

14 de agosto 15 de agosto 17 de agosto

“Una de esas fechas es mi cumpleaños”, dijo.
Después, Claudia le dijo a Alicia al oído el mes -y solo el mes- de su cumpleaños. A Bernardo le dijo al oído el día y solo el día.
“¿Pueden saber ahora?” preguntó a Alicia.
Alicia: No sé cuándo es tu cumpleaños, pero sé que Bernardo tampoco sabe.
Bernardo: originalmente no sabía tu cumpleaños, pero ahora lo sé.
Alicia: ahora yo también lo sé.
¿Cuándo es el cumpleaños de Claudia?

Problema 10. Si $\frac{a-b}{c-d} = 2$ y $\frac{a-c}{b-d} = 3$, determina el valor de $\frac{a-d}{b-c}$.

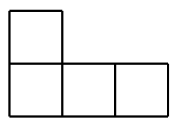
Problema 11. ¿Cuántas representaciones hay de 180 como suma de tres enteros positivos x, y y z tales que estén en proporción equivalente a tres enteros consecutivos?

Problema 12. Sean a y b enteros positivos tales que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es un entero. Prueba que el máximo común divisor de a y b es menor o igual que $\sqrt{a+b}$.

Problema 13. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con todos sus ángulos internos de $120°$. Demuestra que $AB - DE = CD - FA = EF - BC$.

Problema 14. Encuentra todos los rearreglos de 111222333 que no contengan tres dígitos consecutivos iguales.

Problema 15. ¿Para qué enteros m es posible cubrir un tablero de $m \times 10$ con piezas de la forma siguiente?



Problema 16. Sean x, y enteros positivos tales que $2xy$ divide a x^2+y^2-x. Demuestra que x es un cuadrado perfecto.

Problema 17. En cierto hotel hay 5 cuartos, cada cuarto con un decorado distinto. Un día 5 amigos llegan al hotel a pasar la noche. No hay otra gente en el hotel. Los amigos pueden ocupar cualquier combinación de cuartos que deseen, pero con no más de dos amigos por cuarto. ¿De cuántas maneras se les pueden asignar los cuartos a los cinco amigos?

Problema 18. Se tiene un conjunto S de enteros positivos tal que el menor elemento de S es el 1 y el mayor es el 2015. Además, se cumple que cada que se quita un elemento de S, el promedio de los restantes es un número entero. ¿Cuál es la mayor cantidad de elementos que puede tener S?

Problema 19. Determina todas las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$x = (y+z)^3, y = (x+z)^3, z = (x+y)^3.$$

Problema 20. Para cada entero positivo n, denotemos por $p(n)$ al mayor divisor primo de n. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos m tales que

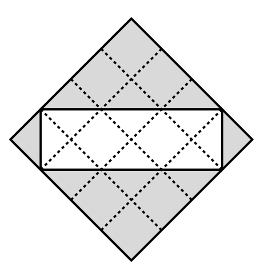
$$p(m-1) < p(m) < p(m+1).$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas, y las matemáticas olímpicas no son una excepción, que cada problema tiene más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compaeros. La lectura de soluciones ayuda mucho a desarrollar la técnica necesaria para escribirlas. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La condición del problema quiere decir que b mide el triple de a y por tanto, los dos triángulos sombreados grandes tienen lados que miden el triple de los dos triángulos sombreados más pequeños.



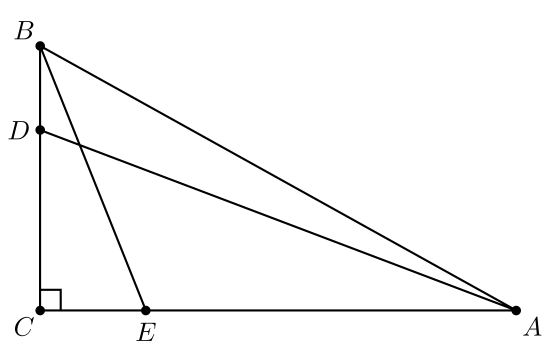
Si procedemos a hacer una división de la figura mediante los trazos mostrados, veremos que el cuadrado completo está formado por 16 cuadrados más pequeños, y como el área del cuadrado es $12^2 = 144\,cm^2$, concluimos que cada uno de los cuadraditos tiene área $\frac{144\,cm^2}{16} = 9\,cm^2$.

Por otra parte, el área sombreada está formada por 6 cuadraditos y 8 triángulos, que equivalen en total a 10 cuadraditos y por tanto el área sombreada es igual a $90\,cm^2$.

Solución del problema 2. Si es cuadrado perfecto y además cubo perfecto, es necesario que sea una sexta potencia. Como $10^6 = 1000000$ tiene 7 dígitos, pero $6^6 = 46656$ tiene 5, concluimos que los posibles números son 7^6, 8^6 o 9^6.
Si $n-6$ es par, entonces n también lo es, por lo que descartamos 8^6. Del mismo modo, si $n-6$ es múltiplo de 3 entonces n también, por lo que descartamos 9^6. Concluimos entonces que $n = 7^6 = 117649$.

Solución del problema 3. Si los tres primos fueran impares, sus cuadrados lo serían también y por tanto la suma de sus cuadrados sería impar. Pero como 5070 es par, concluimos que uno de esos primos debe ser el número 2. Denotando por p y q a los otros dos primos, tenemos entonces $4 + p^2 + q^2 = 5070$ y por tanto $p^2 + q^2 = 5066$.
Si ambos primos son menores que 50, sus cuadrados serán menores que 2500 y por tanto la suma no puede ser 5066. Luego, uno de ellos debe ser mayor que 50. Por otro lado $73^2 = 5329$, de modo que el mayor de esos primos es menor que 73. Suponiendo que $p < q$, los posibles valores para q son: $53, 59, 61, 67, 71$.
Una verificación por casos revela que $5066 = 71^2 + 5^2$ es la única posibilidad, y por tanto el producto de los primos buscados es $71 \cdot 5 \cdot 2 = 710$.

Solución del problema 4. Sean $x = CE$ y $y = BD$. Tenemos que $AC = 8x$ y $BC = 4y$. Por el teorema de Pitágoras en los triángulos CAD y CBE se tiene que $(8x)^2 + (3y)^2 = 164^2$ y $x^2 + (4y)^2 = 52^2$. Vamos a despejar una de las dos variables para resolver este sistema de ecuaciones. Multiplicando $x^2 + 16y^2 = 2704$ por 64 y restándola de $64x^2 + 9y^2 = 26896$ llegamos a $y^2 = 144$, de donde $y = 12$ y $x = 20$. Por lo tanto, $AC = 160\,cm$ y $BC = 48\,cm$; y por el teorema de Pitágoras llegamos a que $AB = 16\sqrt{109}\,cm$.



Solución del problema 5. Sea s la suma de los dígitos de N. Se tiene que

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \leq s \leq 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39.$$

Por otro lado, como s también es la suma de dígitos de $2N$ tenemos que $N \equiv s \equiv 2N \pmod{9}$, por lo que $N \equiv s \equiv 0 \pmod{9}$. Luego, s solo puede valer 27 o 36. Por otro lado, se tiene que

$$N + 2N + 3N + 4N + 5N + 6N = 21N = 111111s,$$

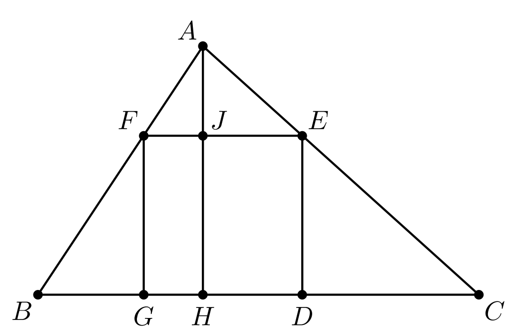
pues en la suma $N+2N+3N+4N+5N+6N$ cada dígito de N aparece una vez en las unidades, una vez en las decenas, etc. Por lo tanto, $N = \frac{111111s}{21} = 5291s$, por lo que $N = 142857$ o $N = 190476$, pero este último tiene un dígito igual a 0. Por lo tanto, $N = 142857$, el cual cumple, pues $2N = 285714$, $3N = 428571$, $4N = 571428$, $5N = 714285$ y $6N = 857142$.

Solución del problema 6. Notamos que $A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$, por lo que $G < A$ y se tiene que $G < \frac{A+G}{2} < A$, pues $\frac{A+G}{2}$ es el promedio de estos dos números. Luego

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2}{8(A-G)} &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{4} \\ &= \frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{A+G}{2}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.

Solución del problema 7. Sean ABC el triángulo y S su área con $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Sean h_a, h_b y h_c las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente.



Supongamos que el cuadrado inscrito es el $DEFG$ como se muestra en la figura con $FE = x$. Sea H el pie de la altura desde A y J la intersección de esta con FE. Como

los triángulos AFE y ABC son semejantes, $\frac{AK}{AH} = \frac{FE}{BC}$ por lo que $\frac{h_a - x}{h_a} = \frac{x}{a}$ y $x = \frac{ah_a}{a+h_a} = \frac{2S}{a+h_a}$.
Para encontrar cuál de los tres sería el cuadrado con mayor área, tenemos que buscar el mínimo entre $a + h_a$, $b + h_b$ y $c + h_c$. En cada una de las tres sumas se tiene que el producto es igual al número $2S$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $a > b > c$. Como

$$(a + h_a)^2 = (a - h_a)^2 + 4ah_a = (a - h_a)^2 + 8S,$$

para encontrar el mínimo entre $a+h_a$, $b+h_b$ y $c+h_c$, tenemos que encontrar el mínimo entre $|a - h_a|$, $|b - h_b|$ y $|c - h_c|$.
Para ello, notemos que $h_a < h_b < h_c$ y como una hipotenusa siempre es mayor que los catetos, se tiene que $b > h_c$ y por lo tanto:

$$a > b > h_c > h_b > h_a,$$

además, $b > c > h_b$. Esto implica que b y h_b están en el intervalo determinado por a y h_a y, de la misma manera, c y h_c están en el intervalo determinado por b y h_b, por lo tanto

$$|a - h_a| > |b - h_b| > |c - h_c|,$$

y concluimos que el cuadrado debe tener dos vértices en el lado c, es decir, en el lado menor.

Solución del problema 8. Si $n = m^2$ para algún entero m, entonces $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n$, ya que $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = m$.
Si n no es un cuadrado, entonces existe un entero m tal que $m^2 < n < (m+1)^2$. Todos los enteros r en este intervalo son tales que $\lfloor \sqrt{r} \rfloor = m$. Luego, debemos hallar todos los enteros positivos n tales que $m \mid n$ donde m satisface $m^2 < n < (m+1)^2$. Hay dos múltiplos de m entre m^2 y $(m+1)^2 = m^2+2m+1$, los cuales son $m(m+1) = m^2+m$ y $m(m+2) = m^2 + 2m$.
Por lo tanto, los enteros positivos n que satisfacen la condición son los de la forma m^2, $m^2 + m$ y $m^2 + 2m$ con m un entero positivo.

Solución del problema 9. Si a Bernardo le hubieran dicho 18 o 19, como esos números no se repiten entre las posibles fechas, Bernardo sabría el cumpleaños, pero Alicia está segura de que Bernardo no lo sabe, por lo que a ella no le pudieron decir mayo o junio.
Al saber esto, Bernardo sabe que el mes tiene que ser julio o agosto y con eso ya sabe el cumpleaños. Esto implica que no le dijeron 14, pues si le hubieran dicho 14 todavía no sabría si el cumpleaños es el 14 de julio o el 14 de agosto.
Por lo tanto, quedan tres posibles fechas: 16 de julio, 15 o 17 de agosto. Pero como Alicia en este punto ya sabe también el cumpleaños, tiene que ser el 16 de julio, pues si a ella le hubieran dicho agosto, no sabría cuál de las dos fechas es. Por lo tanto, el cumpleaños de Claudia es el 16 de julio.
Nota: Este problema apareció en una olimpiada de matemáticas en Singapur y se volvió viral en las redes sociales. Originalmente los nombres eran Albert, Bernard y Cheryl.

Solución del problema 10. Las dos condiciones pueden reescribirse como:

$$a - b = 2(c - d), \qquad a - c = 3(b - d).$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} a - d &= (a - c) + (c - d) = 3(b - d) + (c - d), \\ a - d &= (a - b) + (b - d) = 2(c - d) + (b - d). \end{aligned}$$

Por tanto $3(b - d) + (c - d) = 2(c - d) + (b - d)$ y entonces $2(b - d) = (c - d)$. Sustituyendo en las ecuaciones obtenemos $a - d = 5(b - d)$.
Por otro lado, $b - c = (b - d) + (d - c) = (b - d) - (c - d) = -(b - d)$.
Por lo tanto, la fracción buscada es igual a $\frac{a-d}{b-c} = \frac{5(b-d)}{-(b-d)} = -5$.

Solución del problema 11. Consideremos una representacion (x, y, z), entonces

$$\frac{x}{n-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{n+1}.$$

De lo anterior podemos deducir que $\frac{x}{n-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{n+1} = \frac{x+y+z}{3n} = \frac{180}{3n}$.
Entonces $\frac{y}{n} = \frac{60}{n}$, por lo tanto $y = 60$ de donde se tiene que $x = 60(\frac{n-1}{n})$ y $z = 60(\frac{n+1}{n})$. Como dos enteros consecutivos son primos relativos tenemos que n debe ser divisor de 60. Como 60 tiene 12 divisores, concluimos que hay 12 representaciones.

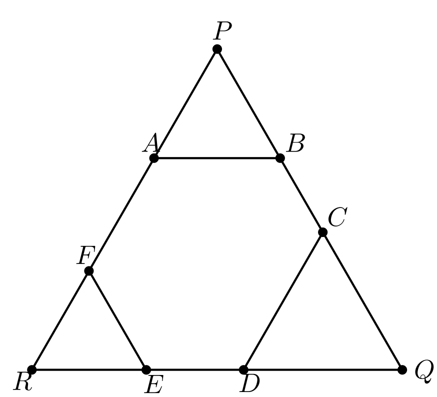
Solución del problema 12. Sea d el máximo común divisor de a y b, entonces $a = dm$ y $b = dn$ con m y n primos relativos. Luego,

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab} = \frac{d^2m^2 + dm + d^2n^2 + dn}{d^2mn} = \frac{dm^2 + m + dn^2 + n}{dmn}.$$

En particular, $d \mid dm^2 + m + dn^2 + n$ y por lo tanto $d \mid m + n$. Entonces,

$$d \leq m + n \Rightarrow \sqrt{d} \leq \sqrt{m+n} \Rightarrow d \leq \sqrt{dm + dn} = \sqrt{a + b}.$$

Solución del problema 13. Sean P, Q y R las intersecciones de FA con BC, BC con DE y DE con FA, respectivamente.



Por ser los ángulos del hexágono todos de $120°$ se cumple que PQR es un triángulo equilátero, así como también lo son los triángulos PAB, QCD y REF. Además las rectas AB, CD y EF son paralelas a los lados del triángulo equilátero PQR, luego se tiene que $AR = BQ$. Pero $FR = FE$ y $CQ = CD$ por los equiláteros QCD y REF. Luego,

$$AF + FE = AF + FR = AR = BQ = BC + CQ = BC + CD,$$

de donde se concluye que $FE - BC = CD - FA$.
Análogamente, se prueba que $AB - DE = CD - FA$.

Solución del problema 14. En total hay $\frac{9!}{3!3!3!}$ rearreglos, por la fórmula de combinaciones con repetición.
A estos hay que restar la cantidad en donde aparecen tres dígitos consecutivos iguales. Si aparece "111" lo consideramos como un bloque. Entonces estamos reordenando 7 objetos donde hay tres repetidos de un tipo (los 2) y tres de otro tipo (los 3). Esto se puede hacer de $\frac{7!}{3!3!}$ formas.
La misma cantidad hay de arreglos que tienen 222, y que contienen 333. Sin embargo, al hacer la resta $\frac{9!}{3!3!3!} - 3(\frac{7!}{3!3!})$ estamos restando de más (ya que por ejemplo, el arreglo 311133222 se resta en el caso de 111 y también en el caso de 222).
Por lo tanto, de acuerdo con el principio de inclusión-exclusión, debemos sumar los conteos donde aparecen dos grupos de tres dígitos iguales.
Si en un arreglo aparece 111 y 222, los consideramos cada uno como un bloque y por tanto hay $\frac{5!}{3!}$ ya que estamos reordenando cinco cosas (el bloque 111, el bloque 222 y los tres dígitos 3), donde hay tres de ellas repetidas. La misma cantidad aplica cuando aparece 111 y 333 o aparece 222 y 333.
Por lo tanto, el conteo hasta ahora es

$$\frac{9!}{3!3!3!} - 3\left(\frac{7!}{3!3!}\right) + 3\left(\frac{5!}{3!}\right)$$

pero una vez más, por el principio de inclusión-exclusión, es necesario restar la cantidad de arreglos donde hay tres grupos de tres dígitos consecutivos, la cual es $3! = 6$.
Por tanto, el número total de arreglos pedidos es:

$$\frac{9!}{3!3!3!} - 3\left(\frac{7!}{3!3!}\right) + 3\left(\frac{5!}{3!}\right) - 6 = 1314.$$

Solución del problema 15. Coloreando las columnas de negro y blanco alternadamente se cumple que cualquier ficha cubre un cuadro blanco y tres negros o tres cuadros blancos y uno negro. Sea A el total de fichas que cubren solo un cuadrado blanco y B el total que cubre tres blancos. Como hay $5m$ blancos y $5m$ negros se debe cumplir que $A + 3B = 5m$ y $3A + B = 5m$, de donde se cuncluye que $A = B$ y por lo tanto $4A = 5m$, entonces $4 \mid m$ y por lo tanto $m = 4k$. Cualquier tablero de $10 \times 4k$ es posible cubrirlo con bloques de 4×2 que es un bloque que se puede formar con nuestras fichas.

Solución del problema 16. Sea d el máximo común divisor de x e y. Entonces $x = da$ y $y = db$ con $(a, b) = 1$. Además,

$$2d^2ab \mid d^2a^2 + d^2b^2 - da.$$

En particular $d^2 \mid d^2a^2 + d^2b^2 - da$ y por lo tanto $d \mid a$, luego $a = dc$. Como $x \mid y^2$ se tiene que $d^2c \mid d^2b^2$, en particular $c \mid b^2$ pero como c es factor de a que es primo relativo con b se debe de cumplir que $c = 1$ y por lo tanto $x = cd^2 = d^2$.

Solución del problema 17. Vamos a contar el número de maneras en que hay más de dos amigos en al menos un cuarto. Hay tres casos:
Caso 1. Tres amigos en un mismo cuarto. Como hay 5 cuartos posibles en los cuales pueden estar tres amigos, como se deben escoger 3 de los cinco amigos y como los otros dos amigos pueden estar cada uno en cualquiera de los otros cuatro cuartos, hay $5 \cdot \binom{5}{3} \cdot 4 \cdot 4 = 800$ posibilidades.
Caso 2. Cuatro amigos en un mismo cuarto. Nuevamente, hay 5 cuartos posibles, tenemos que escoger 4 amigos de los 5, y el otro amigo puede estar en cualquiera de los otros cuatro cuartos, se tienen $5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 4 = 100$ posibilidades.
Caso 3. Cinco amigos en un cuarto. Como hay cinco cuartos, hay 5 posibilidades.
Como hay $5^5 = 3125$ combinaciones posibles de amigos y cuartos, entonces el número de arreglos con las condiciones del problemas son $3125 - 800 - 100 - 5 = 2220$.

Solución del problema 18. Sean $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 2015$ los n elementos de S y sea N la suma de todos. Para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que $\frac{N-a_i}{n-1}$ es entero. En otras palabras, $N \equiv a_i \pmod{n-1}$ para cada $1 \leq i \leq n$.
En particular, $2015 \equiv 1 \pmod{n-1}$, por lo que $n-1$ es un divisor de 2014. Como la factorización en primos de 2014 es $2 \times 19 \times 53$, tenemos que sus divisores son 1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007 y 2014, por lo que los posibles valores de n son 2, 3, 20, 39, 54, 107, 1008 y 2015.
Para cada valor de n, tenemos que $a_1 = 1$, $a_2 = a_1 + d_1(n-1)$, $a_3 = a_2 + d_2(n-1), \ldots, a_n = a_{n-1} + d_{n-1}(n-1)$, donde $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ son enteros positivos. De aquí se tiene que $2015 = a_n = a_1 + (n-1)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}) = 1 + (n-1)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1})$, pero como cada d_i es un entero positivo, se tiene que $d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1} \geq n-1$, por lo que

$$2015 = 1 + (n-1)(d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}) \geq 1 + (n-1)^2,$$

de donde $(n-1)^2 \leq 2014$ o $n \leq 45$. Considerando los posibles valores de n, vemos que el mayor es 39. Es fácil encontrar un ejemplo con 39, simplemente hay que elegir las d_i tales que $d_1 + d_2 + \cdots + d_{38} = \frac{2014}{38} = 53$.

Solución del problema 19. Demostraremos primero el siguiente resultado útil: "Si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces $a^3 < b^3$." En efecto, tenemos que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Como $a < b$, tenemos que $a - b < 0$. Luego, basta demostrar que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$. Pero esto es fácil, pues $a^2 + b^2 \geq 2|ab| \geq |ab| \geq -ab$.
Continuando con la solución del problema. Sea (x, y, z) una solución del sistema dado. Sin pérdida de generalidad supongamos que $x \leq y \leq z$. Entonces, $x+y \leq x+z \leq y+$

z. Luego, por lo demostrado previamente, tenemos que $(x+y)^3 \leq (x+z)^3 \leq (y+z)^3$, esto es, $z \leq y \leq x$. Por lo tanto, $x = y = z$. De aquí,

$$x = (y+z)^3 = (2x)^3 = 8x^3 \Leftrightarrow x(8x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, las soluciones (x, y, z) del sistema son:

$$(0,0,0),\ (\tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{1}{2\sqrt{2}}) \text{ y } (\tfrac{-1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{2\sqrt{2}}, \tfrac{-1}{2\sqrt{2}}).$$

Solución del problema 20. Comencemos demostrando lo siguiente: si q es un primo impar y $a < b$, entonces el máximo común divisor de $q^{2^a} + 1$ y $q^{2^b} + 1$ es 2. Para ver esto, notemos que,

$$q^{2^b} - 1 = (q-1)(q+1)(q^2+1)\cdots(q^{2^{b-1}} + 1),$$

de donde $q^{2^a} + 1$ es un divisor de $q^{2^b} - 1$. Luego, el máximo común divisor debe ser un divisor de $(q^{2^b} + 1) - (q^{2^b} - 1) = 2$, y por lo tanto es 2.
Se sigue que los enteros de la forma $q^{2^n} + 1$ tienen una infinidad de divisores primos distintos. En particular, podemos elegir k como el menor entero positivo tal que $p(q^{2^k} + 1) > q$, y así todos los divisores primos de $q^{2^j} + 1$ son menores que q si $j < k$.
Ahora, consideremos el número $m = q^{2^k}$. Es claro que $p(m) = q$ y $p(m+1) > q$. Pero la factorización y la elección hecha implican que $p(m-1) = p(q^{2^k} - 1) < q$. Como q es un primo impar arbitrario, esto nos da una infinidad de ejemplos.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2015 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que los problemas en esta sección no tienen solución, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Una sucesión está definida de la siguiente forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ y $a_{n+1} = 5(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})$ para todo $n \geq 2$. Demuestra que a_n es un entero para todo $n \geq 1$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo y sea AD una altura. Denotemos por l a la recta que pasa por D y es paralela a AB, y por t a la tangente del circuncírculo del triángulo ABC en el punto A. Si E es la intersección de l y t, demuestra que CE y t son perpendiculares entre sí.

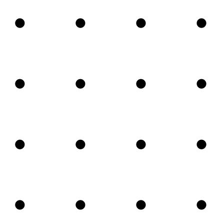
Problema 3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $ab + bc + ca = 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \sqrt{3} + \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a}.$$

Problema 4. Determina todos los enteros positivos n que no sean cuadrados perfectos, tales que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor^3$ sea divisor de n^2. (Nota. Si x es un número real, $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 5. Sean ABC un triángulo y D un punto en su interior. Sean ω_1 y ω_2 dos circunferencias que pasan por B, D y C, D, respectivamente, tales que el segundo punto de intersección de ellas está sobre AD. Las circunferencias ω_1 y ω_2 intersecan al lado BC en los puntos E y F, respectivamente. Sean X la intersección de AB con FD, y Y la intersección de AC con ED. Demuestra que XY y BC son paralelas.

Problema 6. Determina la mayor cantidad de puntos que se pueden escoger de la siguiente puntícula de manera que no haya tres de ellos formando un triángulo isósceles.



Problema 7. En una sucesión finita y estrictamente creciente de enteros positivos, cada término en una posición impar es impar y cada término en una posición par es par. El número de dichas sucesiones tales que ninguno de sus términos supera a 4 es 7 y estas son: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$ y $\{1,2,3,4\}$. ¿Cuántas de estas sucesiones hay tales que ninguno de sus términos supera a 20?

Problema 8. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo. Se sabe que $\angle FAE = \angle BDC$, y que cada uno de los cuadriláteros $ABDF$ y $ACDE$ es cíclico. Demuestra que las rectas BF y CE son paralelas.

Problema 9. Un maestro elige dos enteros m y n con $2 \leq m \leq n$. A Pedro le dice el producto y a Esteban la suma. Pedro dice "no puedo deducir el valor de $m+n$", luego Esteban dice "sabiendo eso, sigo sin poder saber el valor de mn", Pedro vuelve a decir "sabiendo eso, sigo sin poder saber el valor de $m+n$" y finalmente, Esteban dice "ahora puedo deducir el valor de mn". Suponiendo que su lógica no tiene errores, ¿cuáles son los valores de m y de n?

Problema 10. Sean m y n enteros positivos. Denotemos por (m,n) al máximo común divisor de m y n.

1. Demuestra que

$$(m,n) = 2\sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor \frac{kn}{m} \right\rfloor + m + n - mn.$$

2. Demuestra que para todos los enteros positivos $m \geq 2$ y $n \geq 2$, se cumple que

$$\left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2n}{m} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(m-1)n}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(n-1)m}{n} \right\rfloor.$$

Nota. Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2014 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 4, año 2014. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 1, año 2015, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con incentro I, y sean M, N y L los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Si D es el punto de tangencia del incírculo del triángulo ABC con BC, demuestra que NL, AD y MI son concurrentes.

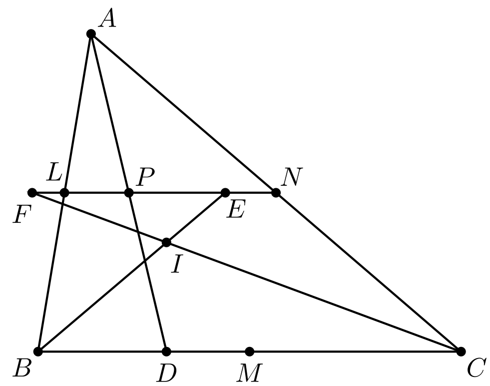
Errata. El enunciado como apareció en Tzaloa 2014, No. 4, decía que M, N y L son los puntos medios de AB, BC y CA, respectivamente.

Solución. Denotemos por a, b y c a las longitudes de los segmentos AB, BC y CA, respectivamente. Sea $s = \frac{a+b+c}{2}$. Sean E y F los puntos de intersección de BI y CI con NL.

Por ser BI bisectriz del ángulo $\angle CBA$ y NL paralela a BC tenemos que

$$\angle LEB = \angle CBE = \angle EBL.$$

Luego, el triángulo LEB es isósceles con $LE = LB = \frac{c}{2}$. De manera simétrica se tiene que FNC es isósceles con $FN = NC = \frac{b}{2}$.



Por otro lado, por ser D el punto de tangencia del incírculo con BC, se tiene que $BD = s - b$ y $DC = s - c$. Sea P el punto de intersección de AD con NL. Por el teorema de Tales tenemos que $LP = \frac{BD}{2} = \frac{s-b}{2}$ y $PN = \frac{s-c}{2}$. Por lo tanto, considerando segmentos dirigidos con dirección positiva de L a N, tenemos que

$$PE = PL + LE = \frac{b-s}{2} + \frac{c}{2} = \frac{s-a}{2},$$

$$FP = FN + NP = \frac{b}{2} + \frac{c-s}{2} = \frac{s-a}{2}.$$

Por lo tanto, $FP = PE$. Así, P es el punto medio de FE. Pero puesto que BIC y EIF son triángulos semejantes, por tener que $NL \parallel BC$, tenemos que I, P el punto medio de FE y M son colineales, de donde AD, NL y MI concurren en P.

Problema 2. Sea p un número primo. Encuentra todos los enteros positivos a y b tales que $a^3(b^2 - p) = a^3 + b^2 - 1$.

Solución. En base a una manipulación algebraica obtenemos la expresión

$$a^3b^2 - a^3 - b^2 + 1 = pa^3$$

que es equivalente a $(a^3 - 1)(b^2 - 1) = pa^3$.
Por lo anterior $a^3 - 1 \mid pa^3$, sin embargo $(a^3 - 1, a^3) = 1$, entonces $a^3 - 1 \mid p$, luego como p es primo tenemos que $a^3 - 1 = 1$ o $a^3 - 1 = p$. En el primer caso no hay solución entera, por lo tanto debe ocurrir la igualdad

$$a^3 - 1 = p$$

que es equivalente

$$(a-1)(a^2 + a + 1) = p$$

pero de nuevo por ser p primo tenemos que $a - 1 = 1$ (pues $a - 1 < a^2 + a + 1$), entonces $a = 2$ y $p = 7$, de donde sustituyendo tenemos que $b^2 - 1 = 8$. Luego, existen a y b si y solo si $p = 7$ y ocurre que $a = 2$ y $b = 3$.

Problema 3. Los vértices de un polígono regular con 2005 lados se colorean de rojo, blanco o azul. Cuando dos vértices consecutivos son de diferente color, es permitido cambiar ambos al tercer color.

1. Demuestra que es posible que después de una cantidad finita de cambios, todos los vértices tengan el mismo color.

2. ¿Este color queda determinado por la coloración inicial?

Solución. Primero veamos que el color final sí queda determinado por la configuración inicial. Para ello, asignamos los números 0, 1 y 2 a los colores rojo, blanco y azul, respectivamente. Veamos qué le pasa a la suma de los 2005 números cuando hacemos un cambio.
Si cambio un 0 y un 1 por dos 2, la suma cambió en $2(2) - (0 + 1) = +3$; si cambio un 0 y un 2 por dos 1, la suma cambió en $2(1) - (0 + 2) = 0$ y si cambio un 1 y un 2 por dos 0, la suma cambió en $2(0) - (1 + 2) = -3$. Luego, podemos concluir que la suma es invariante módulo 3. Si al final logramos tener un solo color, tendremos que, si S es la suma inicial y a el número del color final, $S \equiv 2005a \equiv a \pmod 3$, por lo que el número del color del final es congruente a la suma inicial, por lo que sí queda determinado.
Ahora veamos que siempre es posible esto. Sea a el valor del color final (es decir, el residuo de dividir la suma inicial entre 3). Queremos que todos los colores sean iguales a a. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a = 0$. Si no tenemos números 0 inicialmente, debemos tener de los dos colores, pues si fueran todos de uno de los otros dos colores, la suma no sería congruente a 0. Luego, tendríamos que tener al menos un color 1 y un color 2 y puedo encontrarlos consecutivos y cambiarlos por dos ceros. Luego, siempre puedo encontrar un número 0.
Ahora, iremos poniendo más ceros al recorrer el polígono en el sentido de las manecillas del reloj. Considerando las siguientes dos casillas, solo hay tres casos escencialmente diferentes:

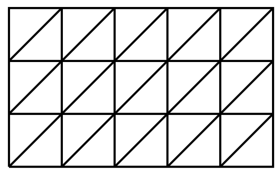
- Si los dos siguientes son iguales y ninguno es 0. Podemos suponer que tenemos 011 (es decir, un 0 seguido de dos unos en el sentido de las manecillas del reloj) y realizamos los siguentes cambios: 221, 200, 110, 122 y 002. Aquí terminamos con un 0 más.

- Si los dos siguientes son diferentes y diferentes de 0. Podemos suponer que tenemos 012. Hacemos el cambio a 000 y terminamos.

- Si los dos siguientes son diferentes y uno de ellos es igual a 0. Podemos suponer que tenemos 010. De aquí cambiamos a 220, 211 y 001 y terminamos.

Con este proceso podemos hacer que todos los vértices sean iguales a 0. Solo hay que aclarar que en el tercer caso el tercer 0 podría ser donde empezamos a crear los ceros. En este caso estaríamos cambiando su valor y no acabaríamos. Pero este caso solo es posible si tenemos 2004 ceros y un 1, pero su suma no sería conguente a 0, por lo que no es posible y efectivamente terminamos.

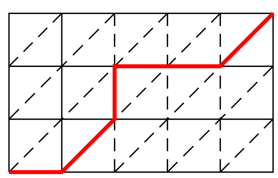
Problema 4. Considera una cuadrícula de $m \times n$ en la cual se han dibujado las diagonales principales de cada casilla. La siguiente figura ilustra el caso con $m = 3$ y $n = 5$.



Demuestra que el número de caminos desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha que solo se mueven hacia arriba, hacia la derecha y por las diagonales es

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}.$$

Solución. Podemos codificar un camino como una palabra con los símbolos **H, V, D** dependiendo de si se hace un paso horizontal, vertical o diagonal, respectivamente. Por ejemplo, el camino de la figura queda codificado como **HDVHHD**.



Para la demostración, haremos el conteo dividiendo en casos dependiendo del número de pasos diagonales que tenga el camino. Supondremos sin pérdida de generalidad que $m \leq n$.

- Cuando no hay pasos diagonales, se reduce al problema conocido de moverse solo en vertical u horizontal. En este caso las palabras tienen longitud $m + n$ y hay que escoger m posiciones iguales a **V** y n posiciones iguales a **H**. Esto se puede hacer de

  $$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m}$$

  maneras.

- Cuando hay un paso diagonal, la longitud de las palabras es $m+n-1$ (porque el paso diagonal cambia una **H** y una **V** por una **D**.) Además, como el movimiento diagonal cuenta como un desplazamiento horizontal y vertical de forma simultánea, solo necesitamos que haya $m-1$ posiciones iguales a **V** y $n-1$ posiciones iguales a **H**.
- Cuando hay dos pasos diagonales, la longitud de las palabras es $m+n-2$, de las cuales hay dos iguales a **D**, $m-2$ iguales a **V** y $n-2$ iguales a **H**.
- En general, cuando hay r pasos diagonales, la longitud de las palabras es $m+n-r$, de las cuales hay r iguales a **D**, $m-r$ iguales a **V** y $n-r$ iguales a **H**.

En ese caso general, podemos contar el número de palabras que codifican caminos escogiendo primero las $n-r$ posiciones que son iguales a **H**. Esto lo podemos hacer de $\binom{m+n-r}{n-r}$ formas diferentes.
Nos quedan por asignar $(m+n-r)-(n-r)=m$ posiciones, de las cuales hay $m-r$ iguales a **V**. Esto lo podemos hacer de $\binom{m}{m-r}$ formas, y las restantes por asignar quedan fijas e iguales a **D**.
Por tanto, el número de caminos con r pasos diagonales es

$$\binom{m+n-r}{n-r}\binom{m}{m-r}.$$

y el número total de caminos es:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m+n-r}{n-r}\binom{m}{m-r}.$$

Por la propiedad de simetría de los coeficientes binomiales, podemos reescribir el primer factor como:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m+n-r}{m}\binom{m}{m-r}.$$

Ahora, estamos suponiendo que $m\le n$, por lo que a lo más puede haber m pasos diagonales, es decir, r sólo puede tomar los valores $0,1,2,\ldots,m$. Pero cuando r toma esos valores entonces $k=m-r$ toma a su vez los valores $m,m-1,m-2,\ldots,2,1,0$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{m}\binom{m}{m-(m-k)}=\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{m}\binom{m}{k},$$

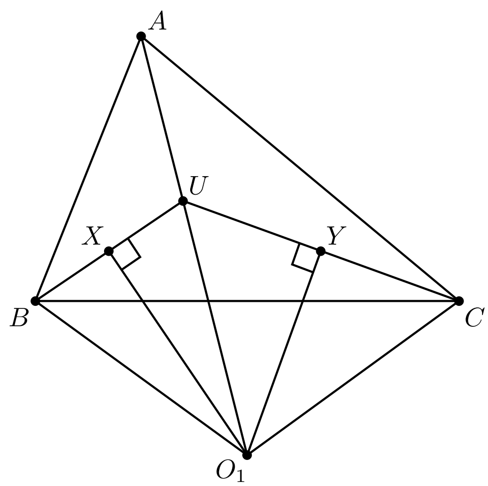
tal como queríamos demostrar.

Nota 1: Es importante señalar que en realidad no es necesario suponer que $m\le n$, pues con la convención de que $\binom{p}{q}=0$ cuando $q>p$, los términos adicionales que saldrían si $n<m$ son iguales a cero y no afectan la identidad.

Nota 2: Los caminos que se obtienen en este problema se denominan *Caminos de Delannoy*. Referencia: Aigner, Martin, *A Course in Enumeration*. Graduate Texts in Mathematics, 238. Springer.

Problema 5. Sea U el incentro del triángulo ABC y sean O_1, O_2 y O_3 los circuncentros de los triángulos BUC, CUA y AUB, respectivamente. Demuestra que los circuncentros de los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ coinciden.

Solución. Consideremos las mediatrices de los segmentos BU y CU. Estas se intersecan en O_1. Sean $2\alpha = \angle BAC$, $2\beta = \angle ABC$ y $2\theta = \angle ACB$. Se tiene que $\alpha + \beta + \theta = 90°$.



Como BU y CU son bisectrices, se tiene que $\angle CBU = \beta$ y $\angle BCU = \theta$. Luego, para que la suma de los ángulos internos en el triángulo BUC sea igual a $180°$, tenemos que $\angle CUB = 90° + \alpha$. Como $\angle O_1XU = \angle O_1YU = 90°$, el cuadrilátero UXO_1Y es cíclico y $\angle XO_1Y = 90° - \alpha$. Por otro lado, como XO_1 y YO_1 son mediatrices de los segmentos BU y CU, tenemos que $\angle BO_1X = \angle XO_1U$ y $\angle UO_1Y = \angle YO_1C$, de donde $\angle BO_1C = 2\angle XO_1Y = 180° - 2\alpha$. Como $\angle BAC + \angle BO_1C = 180°$ tenemos que O_1 está en el circuncírculo del triángulo ABC. Análogamente se tiene que O_2 y O_3 están en el circuncírculo del triángulo ABC. Por lo tanto, los circuncírculos de los triángulos ABC y $O_1O_2O_3$ coinciden, en particular, sus centros coinciden.

Problema 6. Encuentra todas las soluciones enteras de la ecuación $a!b! = a! + b! + c!$.

Solución. Si a o b es igual a 1 o 0 llegamos a una ecuación del estilo $b! = a! + b! + c!$, la cual no tiene soluciones y a, $b \geq 2$. Si alguno entre a o b es igual a 2 (digamos, b), tenemos que $2a! = a! + c! + 2$, de donde $a! = c! + 2$, la cual no tiene soluciones en los enteros. Luego, podemos suponer que $a \geq 3$ y $b \geq 3$ con $a \leq b$. Tenemos que,

$$c! = a!b! - a! - b! = a!(b! - 1) - b! \geq 3!(b! - 1) - b! = 5b! - 6 \geq b!,$$

de donde $c \geq b$.

Demostremos ahora que $a = b$. Para ello, consideremos un primo p y sean p^α y p^β las máximas potencias de este primo que dividen a $a!$ y a $b!$ (puede darse que α o β

sean iguales a 0). Esto se escribe como $p^\alpha \,||\, a!$ y $p^\beta \,||\, b!$ (se lee "divide exactamente"). Como $a \leq b$ siempre se tendrá que $\alpha \leq \beta$. Si para algún primo p se tiene que $\alpha < \beta$, tenemos que p^β divide a $a!b!$ y a $b!$, mientras que $p^\alpha \,||\, a!$, por lo que $p^\alpha \,||\, a!b! - a! - b!$ y $p^\alpha \,||\, c!$, lo cual es una contradicción, pues como $c \geq b$, se tiene que $p^\beta \mid c!$. Luego, $\alpha = \beta$ para cada primo p. Para que esto suceda, es necesario que $a = b$. La ecuación ahora queda:

$$(a!)^2 = 2(a!) + c!.$$

Ahora haremos un análisis similar para acotar el valor de c. Sean $\alpha \geq 1$ y $\theta \geq 1$ tales que $3^\alpha \,||\, a!$ y $3^\theta \,||\, c!$. Como $3^{2\alpha} \,||\, (a!)^2$ y $3^\alpha \,||\, 2(a!)$ tenemos que $3^\alpha \,||\, c!$ (esto no lo podemos hacer para el primo 2, por el factor 2 de $a!$). Luego, no puede haber un primo 3 entre los factores $a+1, a+2, \ldots, c$ y podemos concluir que $c \leq a+2$. Veamos tres casos.

- Si $c = a$ tenemos que $(a!)^2 = 3(a!)$, de donde $a! = 3$ y no hay soluciones.
- Si $c = a+1$ tenemos que $(a!)^2 = 2(a!) + (a+1)!$, de donde $a! = a+3$. Se sigue que $a = 3$ es solución y es la única, pues el lado izquierdo crece más que el derecho cuando a toma un valor mayor.
- Si $c = a+2$ se tiene que $3 \mid a$ para que no haya otro factor 3 entre $a+1$ y $a+2$. Se tiene que $(a!)^2 = 2a! + (a+2)!$, de donde, $a! = 2 + (a+1)(a+2)$. Esta no tiene soluciones, pues 3 divide a $a!$ mientras que

$$2 + (a+1)(a+2) \equiv 2 + 2 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3.$$

Luego, la única solución es $a = b = 3$ y $c = 4$.

Problema 7. Los enteros positivos se pintan con dos colores. Demuestra que para cada entero $k \geq 2$ existen dos enteros a y b coloreados del mismo color de manera que la suma $a + b$ es una potencia k-ésima de un entero.

Solución. Consideremos el polinomio $(2t-1)^k + (2t)^k - (2t+1)^k$. Este polinomio es de grado k y el coeficiente del término principal es $2^k + 2^k - 2^k = 2^k$. Entonces, para algún entero positivo t el polinomio toma un valor positivo. Sean

$$\begin{aligned} x &= \frac{(2t-1)^k + (2t)^k - (2t+1)^k}{2}, \\ y &= \frac{(2t)^k + (2t+1)^k - (2t-1)^k}{2}, \\ z &= \frac{(2t+1)^k + (2t-1)^k - (2t)^k}{2}. \end{aligned}$$

Observemos que x, y, z son enteros positivos (el valor de t se escogió para que x fuera positivo). Ahora, si todos los enteros positivos se pintan con dos colores, dos de x, y, z, son del mismo color y su suma es una potencia k-ésima.

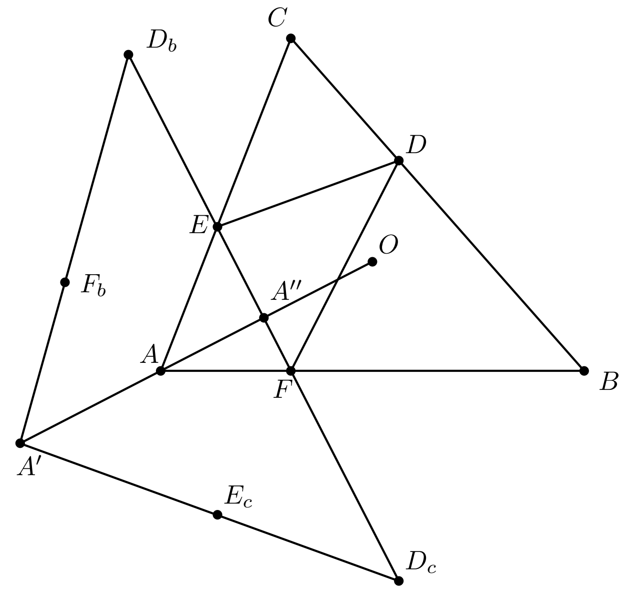
Problema 8. Sea n un entero positivo. Se tiene una cuadrícula de $5 \times n$, donde cada casilla de 1×1 se ha pintado de rojo o azul. Determina el menor entero positivo n tal que, para cualquier coloración de la cuadrícula, es posible escoger tres renglones y tres columnas tales que las 9 casillas en su intersección tienen todas el mismo color.

Solución. Veamos que el menor entero n que cumple con las condiciones del problema es 41. Consideremos una cuadrícula de $5 \times n$ con $n \geq 41$. Como cada columna tiene 5 casillas y hay dos colores, tenemos que en cada columna hay un color que aparece al menos 3 veces. Como $n \geq 41$ tenemos que, por el principio de las casillas hay un color, digamos el azul, tal que hay 21 columnas (al menos) tales que hay 3 casillas de color azul (al menos). Para cada una de esas columnas, tenemos $\binom{5}{3} = 10$ maneras de elegir las tres casillas que serán azules y como hay 21 columnas, por el principio de las casillas tendremos que hay tres columnas en las que se pintaron las mismas tres casillas de color azul, lo que demuestra lo que queríamos.

Si $n \leq 40$, basta considerar una cuadrícula de $5 \times n$ en la cual aparecen a lo más dos veces cada columna con tres casillas de un color y dos del otro. En el párrafo anterior se demostró que justo son 20 estas columnas. Esto concluye la demostración.

Problema 9. Sea ABC un triángulo con todos sus ángulos mayores a $45°$, y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C sobre los lados BC, AC y AB, respectivamente. Sean a , b y c las rectas que contienen a los lados BC, AC y AB respectivamente. Denotemos por X_i el punto de reflexión de X sobre la recta i. Sean A' el punto de intersección de D_bF_b con D_cE_c, B' el punto de intersección de E_aF_a y E_cD_c, y C' el punto de intersección de F_bD_b y F_aE_a. Demuestra que el circuncentro del triángulo ABC es el incentro del triángulo $A'B'C'$.

Solución. Sean O el circuncentro del triángulo ABC y A'' el pie de la altura desde A sobre EF. Por ser cíclicos los cuadriláteros $BFEC$ y $BDEA$ tenemos que $\angle AEF = \angle ABC = \angle CED$, luego D_b está sobre EF y de manera análoga D_c está sobre EF.
De la reflexión, tenemos que $\angle F_cD_cE_c = \angle EDF = \angle E_bD_bF_b$, entonces el triángulo $D_bA'D_c$ es isósceles. Por otro lado, debido a que A es el excentro del triángulo EDF asociado al vértice D, tenemos que $EA'' = \frac{EF+FD-ED}{2}$ y de la reflexión $ED = ED_b$, entonces $A''D_b = A''E + ED_b = A''E + ED = \frac{EF+FD-ED}{2} + ED = \frac{EF+FD+ED}{2}$. De la misma forma $A''D_c = \frac{EF+FD+ED}{2}$, por lo tanto A'' es el punto medio de D_bD_c, luego AA'' es mediatriz de D_bD_c.
Como $D_cA'D_b$ es isósceles, tenemos que AA'' pasa por A' y más aún, se tiene que AA'' es la bisectriz del ángulo $\angle D_cA'D_b$.



Por otro lado es un hecho conocido que AD y AO son isogonales con respecto al ángulo $\angle BAC$, pero AA'' es isogonal a AD con respecto al ángulo $\angle BAC$, entonces O está sobre AA'', por lo tanto O se encuentra en la bisectriz de $D_cA'D_b$. Por simetría se sigue que O está sobre la bisectriz de los ángulos $\angle E_cB'E_A$ y $\angle F_bC'F_a$, entonces usando la condición de que $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ACB > 45°$ se tiene que estas bisectrices son las bisectrices de los ángulos internos en el triángulo $A'B'C'$. Por lo tanto, O es el incentro de dicho triángulo.

Problema 10. Sean a, b y c números reales y sea

$$X = a + b + c + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}.$$

Demuestra que $X \geq \max\{3a, 3b, 3c\}$ y que uno de los números

$$\sqrt{X - 3a}, \quad \sqrt{X - 3b}, \quad \sqrt{X - 3c}$$

es la suma de los otros dos.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $c \geq b \geq a$.
Entonces, $\max\{3a, 3b, 3c\} = 3c$. Como $3c = a + b + c + (c - a) + (c - b)$, basta demostrar que

$$X \geq a + b + c + (c - a) + (c - b),$$

lo que equivale a demostrar que $2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \geq 2c - (a + b)$. Como $2c - (a + b) \geq 0$ (pues $c - a \geq 0$ y $c - b \geq 0$), después de elevar al cuadrado obtenemos la desigualdad equivalente

$$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 4c^2 + a^2 + b^2 - 4ca - 4bc + 2ab,$$

esto es, $3a^2 + 3b^2 - 6ab \geq 0$. Esta última desigualdad es cierta, pues es la desigualdad $3(a-b)^2 \geq 0$. Por lo tanto, la desigualdad inicial es verdadera.
Para la segunda parte, sean $A = \sqrt{X - 3a}$, $B = \sqrt{X - 3b}$ y $C = \sqrt{X - 3c}$. Entonces, $a = \frac{X-A^2}{3}$, $b = \frac{X-B^2}{3}$ y $c = \frac{X-C^2}{3}$. Sustituyendo en la expresión de X y simplificando, obtenemos que

$$A^2 + B^2 + C^2 = 2\sqrt{A^4 + B^4 + C^4 - A^2B^2 - B^2C^2 - A^2C^2}.$$

Elevando al cuadrado y simplificando obtenemos

$$3(A^4 + B^4 + C^4 - 2A^2B^2 - 2B^2C^2 - 2A^2C^2) = 0,$$

es decir,

$$3(A + B + C)(A + B - C)(A - B + C)(A - B - C) = 0.$$

Si $A + B + C = 0$, entonces $X - 3a = X - 3b = X - 3c = 0$ y por lo tanto $A = B = C = 0$.
Si $A + B + C \neq 0$, entonces $A + B - C = 0$ o $A - B + C = 0$ o $A - B - C = 0$, esto es, $C = A + B$ o $B = A + C$ o $A = B + C$.
En cualquier caso, A, B o C es la suma de los otros dos.

Concursos Estatales

Olimpiada Estatal de Oaxaca, 2015

Durante este 2015, el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Oaxaca (OMMO) aplicó examen en todas las regiones del estado: Cañada, Costa, Itsmo, Mixteca, Papaloapan, Sierra Norte, Sierra Sur y Valles Centrales. Este es el segundo año consecutivo que la OMMO se lleva a cabo en todo el estado. Se contó con la participación de 67 planteles, de secundaria y bachillerato, con un total de poco más de 1200 estudiantes en la primera etapa, 154 en la segunda etapa y 42 estudiantes en la tercera etapa. De la tercera etapa se elegirá a la preselección estatal (12 estudiantes).

A continuación presentamos el examen de la Segunda Etapa de la OMMO, 2015.

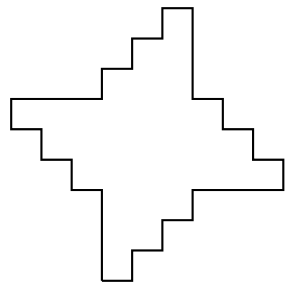
INSTRUCCIONES: Tienes 4 horas para contestar el examen, que consta de 8 preguntas de opción múltiple (parte A) con valor de 2 puntos cada una, y 3 preguntas abiertas (parte B) con valor de 7 puntos cada una. Selecciona una sola de las opciones en la parte A. En la parte B usa todas las hojas que necesites para justificar tu respuesta a cada problema, la redacción debe ser clara. Si tienes dudas en la redacción de un problema o desconoces algún concepto puedes preguntar. No está permitido el uso de calculadoras, apuntes, ni celulares.

Parte A

1. Los dígitos $1, 2, 3, 4$ pueden ser acomodados en 24 formas. Si se acomodan del más pequeño al más grande. ¿En qué posición está el 3142?

   (a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

2. En el diagrama los lados adyacentes forman ángulos rectos. Los cuatro lados más grandes son iguales en longitud, y todos los lados cortos también son iguales en longitud. El área de la figura es 528. ¿Cuál es el perímetro?



(a) 132 (b) 264 (c) 92 (d) 72 (e) 144

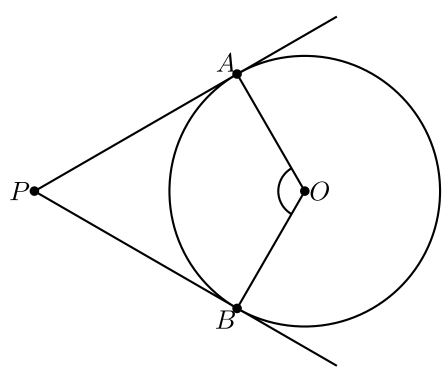
3. Si x y y son enteros positivos tales que $x > y$ y $x + xy = 221$, ¿Cuál es el valor de $x + y$?

   (a) 28 (b) 29 (c) 30 (d) 31 (e) 32

4. Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Lidia. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que, como hoy, se trate de un número de dos cifras, ambas iguales?

   (a) 55 (b) 66 (c) 77 (d) 88 (e) 99

5. Considere la siguiente figura, donde P es un punto exterior a una circunferencia con centro en O, tal que las rectas que pasan por P y A, P y B son tangentes a la circunferencia en A y en B, respectivamente. Si el ángulo AOB es de $120°$ y el radio de la circunferencia es de $15\,cm$, ¿cuánto mide el segmento PA?



   (a) $15\sqrt{3}\,cm$ (b) $3\sqrt{15}\,cm$ (c) $30\,cm$ (d) $15\,cm$ (e) $\frac{\sqrt{15}}{3}\,cm$

6. Dados los siguientes números

$$x = 2013\,(1 + 2 + \cdots + 2014 + 2015),$$
$$y = 2015\,(1 + 2 + \cdots + 2014 + 2013),$$
$$z = 2014\,(1 + 2 + \cdots + 2014 + 2014),$$

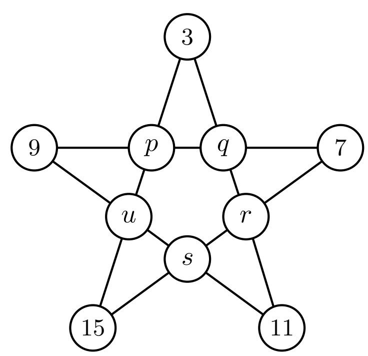
¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

(a) $x > y > z$ (b) $x > z > y$ (c) $y > z > x$ (d) $z > x > y$ (e) $z > y > x$

7. Si dibujas 4 circunferencias en el plano, ¿cuál es el máximo número de puntos de intersección que puedes obtener?

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 14 (e) 16

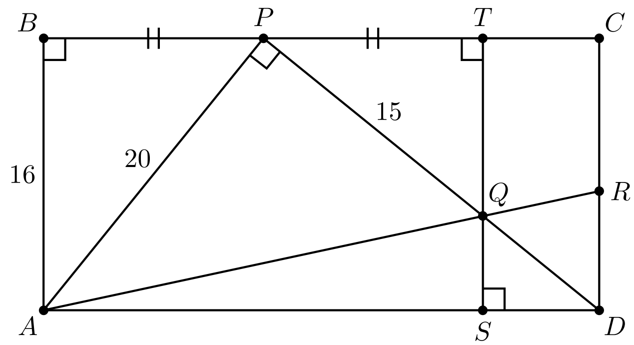
8. En la estrella que se muestra, la suma de los cuatro enteros a lo largo de cada línea es la misma. Se han colocado cinco números. Faltan el 19, 21, 23, 25 y 27. ¿ Cuál es el número que debe colocarse en lugar de q?



(a) 25 (b) 21 (c) 23 (d) 27 (e) 19

Parte B

1. En el rectángulo $ABCD$, P es un punto en BC tal que $\angle APD = 90°$. TS es perpendicular a BC con $BP = PT$, como se muestra en la figura. PD interseca a TS en Q. El punto R está en CD, de manera que RA pasa por Q. Muestre que QR es igual a RD.



2. Encuentre todos los números enteros positivos menores que 100, que son divisibles por el número que resulta de quitarle el dígito de las unidades. Por ejemplo si el número original es 24, el número que resulta de quitarle el dígito de las unidades es 2, y 2 divide a 24.

3. Ana, Belen, Cecilia, Daniel, Emma y Felipe intercambian regalos el 14 de febrero. Cada amigo da un regalo a otro amigo y éste recibe un regalo de un amigo diferente. No está permitido que entre dos amigos se entreguen regalos mutuamente. ¿De cuántas maneras pueden intercambiar regalos?

Problemas y Soluciones de Concursos Internacionales

Romanian Master of Mathematics 2015

Del 25 de febrero al 1 de marzo de 2015 se llevó a cabo la séptima edición de la competencia *Romanian Master of Mathematics* en Bucarest, Rumania. A esta competencia solo son invitados los países con mejores resultados en los últimos años en la Olimpiada Internacional de Matemáticas y esta fue la primera vez que México participó. El equipo mexicano estuvo conformado por Kevin William Beuchot Castellanos (de Nuevo León), Juan Carlos Ortiz Rhoton (de Jalisco) y Luis Xavier Ramos Tormo (de Yucatán). Juan Carlos obtuvo una medalla de bronce, mientras que Kevin William y Luis Xavier obtuvieron una mención honorífica. El profesor que acompañó a la delegación fue Marco Antonio Figueroa Ibarra. México quedó en el lugar 16 de los 17 países participantes.

A continuación presentamos los problemas con soluciones de la Romanian Master of Mathematics 2015. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas para resolverlos.

Problema 1. ¿Existe una sucesión infinita a_1, a_2, a_3, $\ldots$ de enteros positivos tal que a_m y a_n son coprimos si y sólo si $|m-n|=1$?

(Problema sugerido por Perú)

Solución de Kevin William Beuchot Castellanos. Sí existe dicha sucesión. Consideremos una sucesión de primos diferentes $p_1, p_2, \ldots$. Si construimos una sucesión de subconjuntos finitos I_n de los naturales tal que I_m e I_n son disjuntos si y sólo si $|m-n|=1$ podremos construir la sucesión $a_n = \prod_{i\in I_n} p_i$ y por la construcción de los conjuntos I_n, cumplirá la condición requerida.
Una manera de hacerlo es, para todos los enteros positivos n,

$$\begin{aligned} 2n \in I_k &\quad \text{para todo } \; k = n, n+3, n+5, n+7, \ldots, \; \text{ y} \\ 2n-1 \in I_k &\quad \text{para todo } \; k = n, n+2, n+4, n+6, \ldots. \end{aligned}$$

Claramente, cada I_k es finito, pues no contiene elementos mayores que $2k$. Además, $2k$ asegura que I_k tiene un elemento en común con I_{k+2i} para cada $i > 0$ mientras que $2k-1$ asegura que I_k tiene un elemento en común con I_{k+2i+1} para $i > 0$. Finalmente, ningún número aparece en dos conjuntos consecutivos.

Problema 2. Para un entero $n \geq 5$, dos personas juegan el siguiente juego en un n-ágono regular. Inicialmente, se escogen tres vértices consecutivos, y se ubica una ficha en cada uno. Un movimiento consiste en que una persona deslice una ficha a lo largo de cualquier número de lados hasta otro vértice del n-ágono sin saltar sobre otra ficha. Un movimiento es *legal* si el área del triángulo formado por las fichas es estrictamente mayor después del movimiento que antes. Las personas hacen movimientos legales por turnos, y si una persona no puede hacer un movimiento legal, esa persona pierde. ¿Para qué valores de n la persona que hace el primer movimiento tiene una estrategia ganadora?

(Problema sugerido por Reino Unido)

Solución. Demostraremos que el primer jugador tiene estrategia ganadora si y solo si el exponente de 2 en la factorización en primos de $n-3$ es impar.
Como el juego es idéntico para ambos jugadores, tiene una cantidad finita de posiciones y siempre termina, podemos etiquetar cada posición con *ganadora* o *perdedora*, dependiendo si el jugador en turno puede asegurar su victoria o no. Una posición es Ganadora si y solo si hay algún movimiento legal que la lleva a una perdedora y una posición perdedora lo es si y solo si cualquier movimiento legal la lleva a una ganadora (incluyendo el caso donde no hay más movimientos legales).

Lema. Toda configuración tal que el triángulo formado por las tres fichas no es isósceles es necesariamente ganadora.

Demostración del lema. Nombremos a los tres vértices X, Y y Z de manera que el arco $\widehat{YZ}$ es el menor y el arco $\widehat{ZX}$ es el mayor. Movamos la ficha que está en Z alrededor del polígono en el arco $\widehat{YZX}$ hasta que se forme un triángulo isósceles XYZ' tal que $YX = YZ'$ (notamos que el arco $\widehat{XY}$ es menor que la mitad del círculo, por lo que Z no brinca la ficha en X). Si esta configuración es perdedora, ya acabamos. Si esa configuración es ganadora, entonces, las fichas pueden moverse legalmente desde el triángulo XYZ' a una posición perdedora y no pudo haberse usado la ficha en Y. Por simetría, se llegó usando la ficha en Z' hasta una posición Z''. Pero en este caso, la ficha en Z podría haberse movido a Z'' en primer lugar y la posición original era ganadora.

Para cada entero x diferente de 0, denotamos por $v_2(x)$ el exponente de 2 en la factorización en primos de x. Ahora, dada una configuración donde el triángulo formado por las fichas es isósceles con longitud de arcos de tamaño a, a, b, respectivamente (con las unidades apropiadas tal que $2a + b = n$), demostraremos que es ganadora si y solo si $a \neq b$ y $v_2(a-b)$ es impar. Si $a = b$ el triángulo es equilátero y esta posición es perdedora. Supongamos que $a \neq b$.

Tenemos que $b = a \pm |a-b|$ y notamos que el único otro triángulo isósceles al que podemos llegar a partir de esta configuración es el que tiene arcos de tamaño a, $a \pm \frac{|a-b|}{2}$, $a \pm \frac{|a-b|}{2}$. Si $|a-b|$ es impar esto es imposible y esta posición resultaría perdedora, pues todas las posiciones no isósceles son ganadoras, por el lema.
Si, por otro lado, $|a-b|$ es par, entonces todas las posiciones a las que se pueden llegar a partir de la posición (a, a, b) son ganadoras, excepto quizás la que tiene arcos $(a, a \pm \frac{|a-b|}{2}, a \pm \frac{|a-b|}{2})$. Como consecuencia, tenemos que (a, a, b) es gandora si y solo si $(a, a \pm \frac{|a-b|}{2}, a \pm \frac{|a-b|}{2})$ es perdedora. Como los lados del nuevo triángulo difieren en $\frac{|a-b|}{2}$, la conclusión se sigue inductivamente.
Por lo tanto, la posición original en el problema $(1, 1, n-2)$ es ganadora si y solo si $v_2(n-3)$ es impar.

Problema 3. Una lista finita de números racionales está escrita en un pizarrón. En una *operación*, elegimos cualesquiera dos números a, b, los borramos, y escribimos uno de los números

$$a+b,\ a-b,\ b-a,\ a \times b,\ a/b \text{ (si } b \neq 0),\ b/a \text{ (si } a \neq 0).$$

Demuestra que, para todo entero $n > 100$, sólo hay una cantidad finita de enteros $k \geq 0$, tales que, comenzando con la lista

$$k+1,\ k+2,\ \ldots,\ k+n,$$

es posible obtener, después de $n-1$ operaciones, el valor $n!$.

(Problema sugerido por Reino Unido)

Solución. Demostraremos el problema para cualquier entero positivo n.
Existen solamente una cantidad finita de maneras de construir un número a partir de n números diferentes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ usando solamente las operaciones elementales y usando cada x_k una vez. Cada una de estas fórmulas, para $k > 1$, se obtiene mediante una operación elemental entre dos fórmulas similares en dos subconjuntos disjuntos de los x_i.
Con una sencilla inducción en n es posible demostrar que al final obtendremos un número de la forma

$$\frac{\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{0,1\}} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}}{\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{0,1\}} b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}},$$

donde $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ y $b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ están en el conjunto $\{0, \pm 1\}$, no todos iguales a 0, desde luego, y $a_{0,\ldots,0} = b_{1,\ldots,1} = 0$.
Como $|a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}| \leq 1$ y $a_{0,\ldots,0} = 0$, el valor absoluto del numerador no excede el número $(1+|x_1|)\cdots(1+|x_n|) - 1$; en particular, si n es un entero en el intervalo $-n, \ldots, -1$ y $x_k = c + k$ con $k = 1, \ldots, n$, entonces, el valor absoluto del numerador es a lo más $(-c)!(n+c+1)! - 1 \leq n! - 1 < n!$.
Consideremos los polinomios

$$P = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{0,1\}} a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} (X+1)^{\alpha_1} \cdots (X+n)^{\alpha_n}$$

y

$$Q = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \{0,1\}} b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(X+1)^{\alpha_1}\cdots(X+n)^{\alpha_n},$$

donde $a_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ y $b_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ están en el conjunto $\{0, \pm 1\}$, no todos iguales a 0 y $a_{0,\ldots,0} = b_{1,\ldots,1} = 0$. Tenemos que $|P(c)| < n!$ para cada entero c en el rango $-n, \ldots, -1$; y como $b_{0,\ldots,0} = 0$, el grado de P es menor que n.

Como cada polinomio diferente de 0 tiene una cantidad finita de raíces, y el número de ellas no excede su grado, para completar la demostración, basta demostrar que el polinomio $P - n!Q$ no es idénticamente 0, mientras que Q no lo es (lo cual es justo el caso del problema).

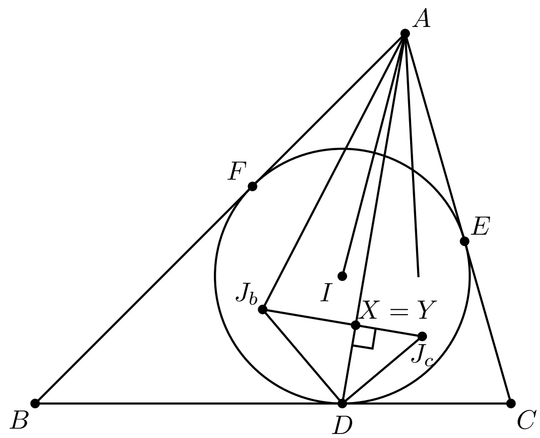
Supongamos que es posible que $P = n!Q$ donde $Q \neq 0$. Como el grado de Q es menor que n, se sigue que el grado de P también lo es y como $P \neq 0$, el número de raíces de P no excede n. Por lo tanto, existe un entero c en el rango $-n, \ldots, -1$ tal que $P(c) \neq 0$. Por lo anterior, $|P(c)|$ es un entero positivo menor a $n!$. Por otro lado, $|P(c)| = n!|Q(c)|$ es un múltiplo de $n!$, lo cual es una contradicción.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, y sea D el punto donde la circunferencia inscrita intersecta al lado BC. Sean J_b y J_c los incentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente. Demuestra que el circuncentro del triángulo AJ_bJ_c está en la bisectriz de $\angle BAC$.

(Problema sugerido por Rusia)

Solución de Luis Xavier Ramos Tormo. Digamos que el incírculo corta a los lados CA y AB en los puntos E y F, respectivamente y digamos que los incírculos de los triángulos ABD y ACD cortan a AD en X y Y, respectivamente. Tenemos que $2DX = DA + DB - AB = DA + DB - BF - AF = DA - AF$; de manera similar, $2DY = DA - AE = 2DX$ por lo que los puntos X y Y coinciden y J_bJ_c es perpendicular a AD.

Sea O el circuncentro del triángulo AJ_bJ_c. Tenemos que $\angle J_bAO = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle AOJ_b}{2} = \frac{\pi}{2} - \angle AJ_cJ_b = \angle XAJ_c = \frac{1}{2}\angle DAC$. Por lo tanto, $\angle BAO = \angle BAJ_b + \angle J_bAO = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle DAC = \frac{1}{2}\angle BAC$ y la conclusión se sigue.



Problema 5. Sea $p \geq 5$ un número primo. Para un entero positivo k, sea $R(k)$ el residuo de k cuando es dividido entre p, con $0 \leq R(k) \leq p-1$. Determina todos los enteros positivos $a < p$ tales que, para todo $m = 1, 2, \ldots, p-1$,

$$m + R(ma) > a.$$

(Problema sugerido por Bulgaria)

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Los enteros requeridos serán $p-1$ junto con los números de la forma $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor$, $q = 2, 3, \ldots, p-1$. En otras palabras, son el número $p-1$ junto con los números $1, 2, \ldots, \lfloor \sqrt{p} \rfloor$ y los números (distintos) $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor$ con $q = 2, 3, \ldots, \lfloor \sqrt{p} - \frac{1}{2} \rfloor$.
Primero demostraremos que estos números satisfacen la condición requerida. El número $p-1$ la satisface pues $m + R(m(p-1)) = m + (p-m) = p > p-1$ para cada $m = 1, 2, \ldots, p-1$.
Ahora, consideramos un número de la forma $a = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$, donde q es un entero mayor que 1 y menor que p; por lo tanto $p = aq + r$ con $0 < r < q$. Sea m un entero en $(0, p)$ y escribimos $m = xq + y$ con x e y enteros con $0 < y \leq q$ (notamos que x es no negativo). Entonces

$$R(ma) = R(ay + xaq) = R(ay + xp - xr) = R(ay - xr).$$

Como $ay - xr \leq ay \leq aq < p$, obtenemos que $R(ay - xr) \geq ay - xr$ y por lo tanto

$$m + R(ma) \geq (xq + y) + (ay - xr) = x(q - r) + y(a + 1) \geq a + 1,$$

pues $q > r$ y $y \geq 1$. Por lo tanto, a satisface la condición.
Demostremos ahora que si un entero $a \in (0, p-1)$ satisface la condición, tiene que ser de la forma $\lfloor \frac{p}{q} \rfloor$ para algún entero $q \in (0, p)$. Esto es claro para $a = 1$, así que podemos asumir que $a \geq 2$.

Escribimos $p = aq + r$ con q y r enteros y $0 < r < a$; como $a \geq 2$ tenemos que $q < \frac{p}{2}$. Elegimos $m = q + 1 < p$; tenemos que $R(ma) = R(aq + a) = R(p + (a - r)) = a - r$, por lo tanto

$$a < m + R(ma) = q + 1 + a - r,$$

lo que implica que $r < q + 1$. Además, si $r = q$, tenemos que $p = q(a + 1)$ lo cual es imposible, pues $1 < a + 1 < p$. Por lo tanto, $r < q$ y tenemos que

$$0 \leq \frac{p}{q} - a = \frac{r}{q} < 1,$$

lo cual demuestra que $a = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$.

Problema 6. Dado un entero positivo n, determina el mayor número real μ que satisface la siguiente condición: para todo conjunto C de $4n$ puntos en el interior del cuadrado unitario U, existe un rectángulo T contenido en U tal que

- los lados de T son paralelos a los lados de U;
- el interior de T contiene exactamente un punto de C;
- el área de T es al menos μ.

(Problema sugerido por Bulgaria)

Solución. El máximo es $\frac{1}{2n+2}$. Para ver que la condición no se satisface con $\mu > \frac{1}{2n+2}$, sea $U = (0, 1) \times (0, 1)$ y se elige un número positivo ϵ, lo suficientemente pequeño y consideremos la configuración C consistente en n cúmulos de 4 puntos $(\frac{i}{n+1} \pm \epsilon) \times (\frac{1}{2} \pm \epsilon)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ donde se eligen las cuatro posibles configuraciones de signos para cada i. Claramente, cada rectángulo abierto en U, cuyos lados sean paralelos a los de U y que contenga exactamente un punto de C, tendrá área a lo más $(\frac{1}{n+1} + \epsilon)(\frac{1}{2} + \epsilon) < \mu$ si ϵ es lo suficientemente pequeño.
Demostraremos ahora que si tenemos una configuración finita C de puntos en U, siempre existe un rectángulo abierto en U cuyos lados son paralelos a los de U, que contiene exactamente un punto de C y que tiene área mayor o igual que $\mu_0 = \frac{1}{|C|+4}$. Para demostrarlo, usaremos dos lemas, cuyas demostraciones se dejan al final de la demostración.

Lema 1. Sea k un entero positivo y sea $\lambda < \frac{1}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}$ un real positivo. Si $t_1, t_2, \ldots, t_k$ son puntos distintos en el intervalo $(0, 1)$, se tiene que hay un t_i aislado de los demás por un subintervalo de $(0, 1)$ con tamaño mayor o igual que λ.

Lema 2. Dado un entero $k \geq 2$ y enteros positivos $m_1, m_2, \ldots, m_k$, se tiene que

$$\left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{k} m_i - k + 2.$$

De regreso al problema, sea $U = (0,1) \times (0,1)$ y proyectamos C ortogonalmente en el eje X para obtener los puntos $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ en el intervalo abierto $(0,1)$. Sea l_i la recta vertical por x_i y sea $m_i = |C \cap l_i|$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.
Poniendo $x_0 = 0$ y $x_{k+1} = 1$, podemos asumir que $x_{i+1} - x_{i-1} > (\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1)\mu_0$ para algún subíndice i y aplicando el Lema 1 podemos isolar uno de los puntos en $C \cap l_i$ de los otros por un intervalo abierto $x_i \times J$ o $x_i \times (0,1)$ cuyo tamaño sea mayor o igual que $\frac{\mu_0}{x_{i+1} - x_{i-1}}$. Por ello, $(x_{i-1}, x_{i+1}) \times J$ es un rectángulo abierto en U que contiene exactamente un punto de C y cuya área es mayor o igual que μ_0.
Luego, descartamos el caso $x_{i+1} - x_{i-1} \leq (\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1)\mu_0$ para todos los índices i. Si este fuera el caso, se tiene que dar que $k > 1$; además, $x_1 - x_0 < x_2 - x_0 \leq (\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1)\mu_0$ y $x_{k+1} - x_k < x_{k+1} - x_{k-1} \leq (\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor + 1)\mu_0$. Por el Lema 2 tenemos que

$$\begin{aligned} 2 = 2(x_{k+1} - x_0) &= (x_1 - x_0) + \sum_{i=1}^{k} (x_{i+1} - x_{i-1}) + (x_{k+1} - x_k) \\ &< \left(\left(\left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \sum_{i=1}^{k} \left(\left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor + 1 \right) \right) \mu_0 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} m_i + 4 \right) \mu_0 = (|C| + 4)\mu_0 = 2, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.
Finalmente, probaremos los dos lemas.

Demostración del Lema 1. Supón que ninguna de las t_i está aislada de las demás por un subintervalo abierto del intervalo $(0,1)$ cuyo tamaño es mayor o igual que λ. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} = 1$. Como el intervalo abierto (t_{i-1}, t_{i+1}) isola a t_i de los demás t_j, su tamaño $t_{i+1} - t_{i-1}$ es menor que λ. Como consecuencia, si k es impar, tenemos que $1 = \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} (t_{2i+2} - t_{2i}) < \lambda(1 + \frac{k-1}{2}) < 1$; si k es par, tenemos que $1 < 1 + t_k - t_{k-1} = \sum_{i=1}^{\frac{k}{2}-1} (t_{2i+2} - t_{2i}) + (t_{k+1} - t_{k-1}) < \lambda(1 + \frac{k}{2}) < 1$, una contradicción en cualquiera de los casos.

Demostración del Lema 2. Sean I_0, respectivamente I_1, los subconjuntos de los índices i en el rango $2, \ldots, k-1$ tales que m_i es par, respectivamente impar. Claramente I_0 e I_1 forman una partición de este intervalo. Como $m_i \geq 2$ si i está en I_0, y $m_i \geq 1$ si i está en I_1 (recordando que todos los m_i son enteros positivos),

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{m_1}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{m_i}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m_k}{2} \right\rfloor &\leq m_1 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{m_i}{2} - \frac{|I_1|}{2} \right) + m_k \\ &\leq m_1 + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k-1} m_i - (k-2) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{k-1} m_i \right) + m_k \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i - k + 2. \end{aligned}$$

XXVII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990 México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que participa México, es bajo la modalidad por correspondencia.

Durante el mes de marzo de 2015 se aplicó el examen de la XXVII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos preseleccionados para las competencias internacionales y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al país organizador, que en esta ocasión es Kazajistán, para su revisión.

En esta competencia México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 1 de oro, 1 de plata y 5 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 169 puntos quedando en el lugar número 12 de toda la competencia.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

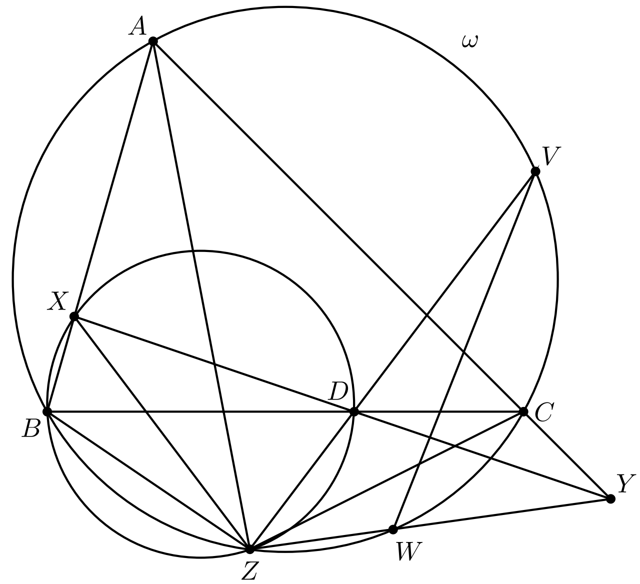
- Juan Carlos Ortiz Rhoton (Jalisco): Medalla de oro.
- Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León): Medalla de plata.
- Olga Medrano Martin del Campo (Jalisco): Medalla de bronce.
- Luis Xavier Ramos Tormo (Yucatán): Medalla de bronce.
- José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo): Medalla de bronce.
- Rodrigo Andrés Cariño Escobar (Morelos): Medalla de bronce.
- Leonardo Ariel García Morán (Jalisco): Medalla de bronce.
- María Cecilia Rojas Cuadra (Puebla): Mención honorífica.
- Luis Carlos García Ramos (Chihuahua): Mención honorífica.
- Antonio López Guzmán (Chihuahua): Mención honorífica.

A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la XXVII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea D un punto sobre el lado BC. Una recta que pasa por D intersecta al lado AB en X y al rayo AC en Y. El circuncírculo del triángulo BXD intersecta al circuncírculo ω de ABC nuevamente en el punto $Z \neq B$. Las rectas ZD y ZY intersectan nuevamente a ω en V y W, respectivamente. Muestra que $AB = VW$.

Solución de Olga Medrano Martin del Campo. Primero mostremos que el cuadrilátero $AXZY$ es cíclico. Por el cuadrilátero cíclico $DXBZ$ se tiene que $\angle DXZ =$

$\angle DBZ$, por otro lado del cíclico $CABZ$ se tiene que $\angle DBZ = \angle CBZ = \angle CAZ$, entonces $\angle DXZ = \angle CAZ$ de donde se concluye que el cuadrilátero $AXZY$ es cíclico.



Ahora utilizando este cuadrilátero se tiene que $\angle ZYX = \angle ZAX$ mientras que del cíclico $CABZ$ se tiene que $\angle ZAX = \angle ZAC = \angle ZCD$, por lo tanto $\angle ZYX = \angle ZCD$ de donde se concluye que $CDZY$ es cíclico. Al ser cíclico $CDZY$ se tiene que $\angle BCA = 180° - \angle YCD = \angle DZY = \angle WZV$, entonces usando la ley de senos para la circunferencia ω con el triángulo ABC obtenemos que,

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}(\angle BCA)} = 2R$$

y con el triángulo VZW obtenemos,

$$\frac{VW}{\operatorname{sen}(\angle WZV)} = 2R,$$

donde R es el radio de ω.
Igualando y cancelando los ángulos iguales concluimos que $AB = VW$.

Problema 2. Sea $S = \{2, 3, 4, \ldots\}$ el conjunto de números enteros mayores o iguales que 2. ¿Existe una función $f : S \to S$ tal que

$$f(a)f(b) = f(a^2b^2) \quad \text{para todos } \ a, b \in S \ \text{ con } \ a \neq b?$$

Solución de Leonardo Ariel García Morán. Supongamos que sí existe una función f que cumple las condiciones, definamos $g(x) = f(2^x)$. Entonces por la hipótesis, para cada a, b enteros positivos distintos se cumple que $g(a)g(b) = g(2(a+b))$. Luego,

$$g(20) = g(3)g(7) = g(2)g(8) = g(2)(g(1)g(3)) = g(1)g(2)g(3)$$

de donde $g(7) = g(1)g(2)$. Por otro lado,

$$g(16) = g(1)g(7) = g(2)g(6) = g(2)(g(1)g(2))$$

de donde se concluye $g(1)g(2) = g(7) = g(2)^2$, entonces $g(1) = g(2)$. Ahora para $n \geq 3$ utilizando la identidad anterior se cumple que

$$g(2(n+2)) = g(2)g(n) = g(1)g(n+1) = g(2)g(n+1)$$

entonces $g(2)g(n) = g(2)g(n+1)$, por lo tanto $g(n) = g(n+1)$, en paticular $g(3) = g(4) = g(14)$

$$g(14)^2 = g(3)g(4) = g(14)$$

entonces $g(14) = 1$ sin embargo $1 \notin S$ por lo tanto no existe tal f.

Problema 3. Una sucesión de números reales $a_0, a_1, \ldots$ se dice que es *buena* si las siguientes tres condiciones se cumplen:

(i) El valor de a_0 es un número entero positivo.

(ii) Para cada entero no negativo i se tiene que $a_{i+1} = 2a_i + 1$ o $a_{i+1} = \dfrac{a_i}{a_i+2}$.

(iii) Existe un número entero positivo k tal que $a_k = 2014$.

Encuentra el menor entero positivo n tal que existe una sucesión buena $a_0, a_1, \ldots$ de números reales con la propiedad de que $a_n = 2014$.

Solución de Juan Carlos Ortiz Rhoton. Notemos que para cualquier $x > 0$ se cumple que $2x+1 > 1$ y $0 < \frac{x}{x+2} < 1$ entonces puesto que a_0 es positivo todos los elementos de una sucesión buena son positivos y además si $a_{i+1} > 1$ necesariamente se debe cumplir que $a_{i+1} = 2a_i + 1$ y si $a_{i+1} < 1$ se cumple que $a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i+2}$. Por lo tanto, despejando a_i se concluye de las observaciones anteriores que

$$a_i = \begin{cases} \frac{a_{i+1}-1}{2} & \text{si} \quad a_{i+1} > 1, \\ \\ \frac{2a_{i+1}}{1-a_{i+1}} & \text{si} \quad a_{i+1} < 1. \end{cases}$$

Definimos $p_0 = 2014$ y $q_0 = 1$, y de manera recursiva

$$p_{m+1} = p_m - q_m \quad \text{y} \quad q_{m+1} = 2q_m \text{ si } p_m > q_m,$$

$$p_{m+1} = 2p_m \quad \text{y} \quad q_{m+1} = q_m - p_m \text{ si } p_m < q_m.$$

Sea n el menor entero tal que existe una sucesión buena con $a_n = 2014$. Probemos por inducción en m que
$$a_{n-m} = \frac{p_m}{q_m}.$$
Para $m = 0$ es cierto el resultado, ahora utilizando la fórmula para obtener a_i en función de a_{i+1} obtenemos que
$$a_{n-(m+1)} = \begin{cases} \frac{a_{n-m}-1}{2} & \text{si } \ a_{n-m} > 1, \\ \\ \frac{2a_{n-m}}{1-a_{n-m}} & \text{si } \ a_{n-m} < 1, \end{cases}$$
lo cual es equivalente por hipótesis de inducción a que
$$a_{n-(m+1)} = \begin{cases} \frac{\frac{p_m}{q_m}-1}{2} = \frac{p_m-q_m}{2q_m} & \text{si } \ a_{n-m} = \frac{p_m}{q_m} > 1, \\ \\ \frac{2\frac{p_m}{q_m}}{1-\frac{p_m}{q_m}} = \frac{2p_m}{q_m-p_m} & \text{si } \ a_{n-m} = \frac{p_m}{q_m} < 1, \end{cases}$$
lo cual es justamente $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ en ambos casos por la definición de p_{m+1} y q_{m+1}. Además como se empieza con $p_0 = 2014$ el cual es un número par y $q_0 = 1$ el cual es un número impar, se cumple que de p_{m+1} y q_{m+1} siempre hay uno de ellos que es par y el otro impar (puesto que $p_m - q_m$ y $q_m - p_m$ son impares y alguno de estos números aparece entre p_{m+1} y q_{m+1}). Por lo tanto, $(p_m - q_m, 2q_m) = (p_m - q_m, q_m) = (p_m, q_m)$ y $(2p_m, q_m - p_m) = (p_m, q_m - p_m) = (p_m, q_m)$. Entonces el máximo común divisor de p_j y q_j es el mismo para cualquier j. Como $(p_0, q_0) = (2014, 1) = 1$ se cumple que p_j y q_j son primos relativos para cualquier j. Por lo tanto, $\frac{p_j}{q_j}$ siempre está escrito en forma reducida.
Por otro lado, notemos que
$$p_{m+1} + q_{m+1} = \begin{cases} p_m - q_m + 2q_m = p_m + q_m & \text{si } \ p_m > q_m, \\ \\ 2p_m + q_m - p_m = p_m + q_m & \text{si } \ q_m < p_m, \end{cases}$$
de donde la suma es constante y es igual a $p_0 + q_0 = 2014 + 1 = 2015$ y por lo tanto
$$a_{n-m} = \frac{p_m}{2015 - p_m}.$$
Entonces si $p_m \leq 1007$ se cumple que $2p_m \leq 2015$ y por lo tanto $p_m \leq 2015 - p_m$ de donde se tendría que $p_{m+1} = 2p_m$, mientras que si $p_m \geq 1008$ se cumple que $2p_m \geq 2015$ y por lo tanto $p_m \geq 2015 - p_m$ de donde se tendría que $p_{m+1} = p_m - (2015 - p_m) = 2p_m - 2015$. Como p_m siempre es un entero entre 1 y 2015, de las identidades anteriores se sigue que $p_{m+1} = R(2p_m)$ donde $R(x)$ denota el residuo positivo de dividir x entre 2015. Por lo tanto, en general $p_{m+l} = R(2^l p_m)$.
De todo esto se concluye que al ser n el mínimo tal que existe una sucesión buena con $a_n = 2014$, entonces $a_0 = \frac{p_n}{q_n}$ es un entero escrito en fracción reducida y por lo tanto $q_n = 1$ de donde $p_n = R(2^n p_0) = 2014$. Entonces n es el mínimo tal que
$$2^n 2014 \equiv 2014 \pmod{2015}$$

lo cual es equivalente al mínimo tal que $2^n \equiv 1 \pmod{2015}$. Puesto que $2015 = 31 \cdot 13 \cdot 5$ se tiene que n cumple $2^n \equiv 1 \pmod{31}$, $2^n \equiv 1 \pmod{13}$ y $2^n \equiv 1 \pmod{5}$. Entonces, el orden de 2 módulo 31, 13 y 5 divide a n. Puesto que los órdenes de 2 con respecto a esos números son 5, 12 y 4 entonces n es múltiplo de 60, el mínimo común múltiplo de 4, 5 y 12. Por ser n mínimo, se tiene que $n = 60$.

Problema 4. Sea n un número entero positivo. Considera $2n$ rectas distintas en el plano, de tal manera que no hay dos de ellas paralelas. De las $2n$ rectas, n de ellas se pintan de azul, las otras n se pintan de rojo. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto de todos los puntos en el plano que están en al menos una recta azul, y sea $\mathcal{R}$ el conjunto de todos los puntos en el plano que están en al menos una recta roja. Muestra que existe un círculo que intersecta a $\mathcal{B}$ en exactamente $2n-1$ puntos, y también intersecta a $\mathcal{R}$ en exactamente $2n-1$ puntos.

Solución de Luis Carlos García Ramos. Veamos que si una circunferencia intersecta a $\boldsymbol{B}$ en $2n-1$ puntos entonces la circunferencia tiene que ser tangente a una recta azul y secante a las demás o tiene que ser secante a todas las rectas y pasar por un punto que esté en exactamente dos rectas azules. Notemos dos posibles configuraciones para las n rectas azules y dos posibles para las n rectas rojas. Si cada vez que se intersecan dos rectas azules una tercera pasa por el punto de intersección entonces por el teorema de Sylvester todas las rectas azules pasan por un mismo punto. El otro caso es que existe un punto en el plano que está en exactamente dos rectas azules. Análogamente tenemos esas dos posibles configuraciones para las rectas rojas. Entonces resolvamos el problema considerando los tres casos siguientes.

Caso 1. Hay un punto que está en exactamente dos rectas azules y hay un punto que está en exactamente dos rectas rojas.

Sea ℓ la recta que pasa por esos puntos. En este caso tracemos una circunferencia ω a través de estos puntos. Puesto que no hay dos rectas paralelas en nuestro conjunto, hay a lo más una recta que no interseca a ℓ. Si todas las rectas intersecan a ℓ basta hacer que el radio de ω crezca, sin dejar de pasar por los dos puntos, para que interseque de manera secante a todas las rectas azules y rojas restantes con lo cual se obtendría que ω interseca a $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{R}$ en exactamente $2n-1$. Si hay una recta paralela a ℓ basta que ω tenga centro en el semiplano donde se encuentra la paralela y de nuevo hacer que el radio crezca hasta intersecar la paralela y ser secante a todas las demás rectas.

Caso 2. Hay un punto que está en exactamente dos rectas azules y las rectas rojas pasan por un mismo punto.

Tomemos ℓ_1 una de las rectas rojas y un punto P sobre ella. Consideremos ω la circunferencia tangente a ℓ_1 en P y que pasa por el punto que está en exactamente dos rectas azules. Alejando lo suficiente al punto P, la circunferencia será secante a todas las líneas azules y pasará exactamente por un punto que es intersección de dos líneas azules.

También se tendrá que ω será tangente a la línea roja ℓ_1 y secante a todas las demás, como se quería.

Caso 3. Las rectas azules pasan por un mismo punto y las rectas rojas pasan por un mismo punto.

En este caso sea ℓ_1 la recta azul y ℓ_2 la recta roja tal que hacen mínimo el ángulo entre ellas medido en el sentido de las manecillas del reloj empezando en la recta azul. Sea Q el punto de intersección de ℓ_1 y ℓ_2. Ahora se traza la circunferencia ω que será tangente a ℓ_1 y a ℓ_2, pero que estará en uno de los sectores que estas determinan con el ángulo complementario al referido. Por la elección de estas rectas, al aumentar el radio de ω se tendrá que será secante a todas las otras rectas rojas y azules, como se buscaba.

Problema 5. Determina todas las sucesiones $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números enteros positivos con $a_0 \geq 2015$ tal que para todos los números enteros $n \geq 1$ se cumple que:

(i) a_{n+2} es divisible entre a_n;

(ii) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, donde $s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \cdots + (-1)^{n+1}a_0$.

Solución. Sea $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos que satisface las condiciones. Podemos reescribir (ii) como $s_{n+1} = (n+1)a_n + h_n$ con $h_n \in \{-1, 1\}$. Sustituyendo n con $n-1$ obtenemos que $s_n = na_{n-1} + h_{n-1}$ con $h_{n-1} \in \{-1, 1\}$. Notemos que $a_{n+1} = s_{n+1} + s_n$, entonces existe $\delta_n \in \{-2, 0, 2\}$ tal que

$$a_{n+1} = (n+1)a_n + na_{n-1} + \delta_n. \tag{4}$$

También se cumple que $|s_2 - 2a_1| = 1$, entonces $a_0 = 3a_1 \pm 1 \leq 3a_1$ y por lo tanto $a_1 \geq \frac{a_0}{3} \geq 671$. Sustituyendo $n = 2$ en (4), obtenemos que $a_3 = 3a_2 + 2a_1 + \delta_2$. Puesto que $a_1 \mid a_3$, tenemos que $a_1 \mid 3a_2 + \delta_2$, y entonces $a_2 \geq 223$. Usando (4), por inducción se obtiene que $a_n \geq 223$ para cada $n \geq 0$.

Lema 1. Para $n \geq 4$ se tiene que $a_{n+2} = (n+1)(n+4)a_n$.
Prueba. Para $n \geq 3$ tenemos que

$$a_n = na_{n-1} + (n-1)a_{n-2} + \delta_{n-1} > na_{n-2} + 3 \tag{5}$$

Aplicando (5) para $n-1$ obtenemos para $n \geq 4$,

$$a_n = na_{n-1} + (n-1)a_{n-2} + \delta_{n-1} < na_{n-1} + (a_{n-1} - 3) + \delta_{n-1} < (n+1)a_{n-1}.$$

Usando (4) para escribir a_{n+2} en términos de a_n y a_{n-1} junto con (5) obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (n+3)(n+1)a_n + (n+2)na_{n-1} + (n+2)\delta_n + \delta_{n+1} \\ &< (n+3)(n+1)a_n + (n+2)na_{n-1} + 3(n+2) \\ &< (n^2 + 5n + 5)a_n. \end{aligned}$$

También para $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (n+3)(n+1)a_n + (n+2)na_{n-1} + (n+2)\delta_n + \delta_{n+1} \\ &> (n+3)(n+1)a_n + na_n \\ &= (n^2 + 5n + 3)a_n. \end{aligned}$$

Puesto que $a_n \mid a_{n+2}$ obtenemos que $a_{n+2} = (n^2 + 5n + 4)a_n = (n + 4)(n + 1)a_n$ como se quería.
Lema 2. Para $n \geq 4$, se tiene que

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n.$$

Prueba. Usando la recurrencia $a_{n+3} = (n+3)a_{n+2}+(n+2)a_{n+1}+\delta_{n+2}$ y escribiendo a a_{n+3}, a_{n+2} en términos de a_{n+1} y a_n de acuerdo con el lema 1 obtenemos

$$(n + 2)(n + 4)a_{n+1} = (n + 3)(n + 1)(n + 4)a_n + \delta_{n+2}.$$

Entonces $n + 4 \mid \delta_{n+2}$. Por lo tanto, $\delta_{n+2} = 0$ y $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$.

Supongamos que existe un $n \geq 1$ tal que $a_{n+1} \neq \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$. Por el lema 2 existe un entero $m \leq 3$ máximo con esta propiedad. Entonces $a_{m+2} = \frac{(m+2)(m+4)}{m+3}a_{m+1}$. Si $\delta_{m+1} = 0$, como $a_{m+2} = (m + 2)a_{m+1} + (m + 1)a_m + \delta_{m+1}$, sustituyendo el valor de a_{m+2} se tendría que $a_{m+1} = \frac{(m+1)(m+3)}{m+2}a_m$ que contradice la elección de m. Por lo tanto, $\delta_{m+1} \neq 0$.
Claramente $m+3 \mid a_{m+1}$. Escribamos $a_{m+1} = (m+3)k$ y $a_{m+2} = (m+2)(m+4)k$. Entonces $(m+1)a_m + \delta_{m+1} = a_{m+2} - (m+2)a_{m+1} = (m+2)k$. Así, a_m divide a $(m+4)k - \delta_{m+1}$. Pero a_m también divide a $a_{m+2} = (m+2)(m+4)k$. Combinando estas dos relaciones de divisibilidad se concluye que $a_m \mid (m + 4)\delta_{m+1}$. Puesto que δ_{m+1} no es cero, tenemos que $a_m \mid 2m + 8 \leq 14$, lo cual contradice el hecho de que $a_n \geq 223$ para cualquier n.
Así se tiene que $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{n+2}a_n$ para cualquier $n \geq 1$. Sustituyendo $n = 1$ obtenemos que $3 \mid a_1$. Sea $a_1 = 3c$. A partir de una inducción obtenemos que $a_n = n!(n + 2)c$ para $n \geq 1$. Puesto que $|s_2 - 2a_1| = 1$, se tiene que $a_0 = c \pm 1$ lo cual da dos familias de soluciones. Notando que $(n + 2)n! = n! + (n + 1)!$, se tiene que $s_{n+1} = c(n+2)! + (-1)^n(c - a_0)$. Entonces, ambas familias de soluciones satisfacen las condiciones dadas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a-b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*

2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*

3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Principio de las casillas). *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos. En particular, si $n + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y sólo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Definición 5 (Puntos y rectas notables de un triángulo)**.**

1. *Mediana. Recta que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.*
2. *Centroide. Punto donde concurren las medianas. También se le llama gravicentro o baricentro.*
3. *Mediatriz. Recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.*
4. *Circuncentro. Punto donde concurren las mediatrices. Es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*
5. *Bisectriz interna. Recta que divide a un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos de la misma medida.*
6. *Incentro. Punto donde concurren las bisectrices internas. Es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.*
7. *Altura. Recta trazada desde un vértice que es perpendicular al lado opuesto de dicho vértice.*
8. *Ortocentro. Punto donde concurren las alturas.*

Definición 6 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 10 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 11 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 12 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 13 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y sólo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio del Comité Organizador de la OMM

José Antonio Gómez Ortega (presidente)
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Universidad de Guanajuato
barradas@quijote.ugto.mx

Irving Daniel Calderón Camacho
Facultad de Ciencias, UNAM
irvingdanelc@ciencias.unam.mx

Fernando Campos García
Facultad de Ciencias, UNAM
fermexico89@hotmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
cobian@ciencias.unam.mx

Luis Cruz Romo
NA-AT Technologies
lcruzromo@gmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

Luis Miguel García Velázquez
Instituto de Matemáticas, UNAM
lmgarcia@im.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Jesús Jerónimo Castro
Facultad de Ingeniería
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

María Luisa Pérez Seguí
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo
psegui19@gmail.com

Miguel Raggi Pérez
Escuela Nacional de Estudios Superiores
UNAM
mraggi@gmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Julio Rodríguez Hernández
SEMS, Universidad de Guadalajara
juliorod@sems.udg.mx

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Rogelio Valdez Delgado
Facultad de Ciencias, UAEM
valdez@uaem.mx

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria. Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán. México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864. Fax: (55) 5622-5410.
Email: omm@ciencias.unam.mx

Página oficial de la OMM: http://ommenlinea.org/

¡Síguenos en facebook y en twitter!

http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas

@ommtw