TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2017, No. 3

Comité Editorial:

Julio César Díaz Calderón

Luis Eduardo García Hernández

Carlos Jacob Rubio Barrios

Pedro David Sánchez Salazar

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Impreso por: Jaime Torre Marina
jaimetorremarina@hotmail.com
044 55 1630 3549
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

©Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total por cualquier sistema o método, mecánico o electrónico, sin autorización previa del autor.
Impreso y hecho en México.
Agosto de 2017.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2017, Número 3

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su tercer número del año 2017. En este número encontrarás el artículo *Puntos en el incírculo de un triángulo* de nuestro amigo Julio César Díaz Calderón. En él, se introduce al lector al estudio de técnicas de resolución de problemas en geometría que incluyan al incírculo de un triángulo y a sus puntos notables. Estas herramientas van desde la semejanza de triángulos y los ángulos en una circunferencia, hasta técnicas más avanzadas como la inversión. Estamos seguros que esta aportación de Julio César será de gran utilidad tanto para lectores principiantes como para lectores avanzados.

En la sección "Concursos Estatales" encontrarás el examen estatal de Yucatán de este año. Queremos aprovechar para invitar a todos los delegados estatales a que nos envíen

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

sus exámenes selectivos para publicarlos en la revista y de esta manera enriquecer el intercambio de materiales.

En la sección de "Olimpiadas Internacionales" hallarás los resultados y los exámenes con soluciones de la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe y de la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de "Problemas de práctica" y de "Entrenamiento", mismas que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimiento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1998. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2017-2018 y, para el 1° de julio de 2018, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 10 de noviembre de 2017 en Monterrey, Nuevo León. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2017 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rumania, julio de 2018) y a la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Portugal y España, septiembre de 2018).

De entre los concursantes nacidos en 2001 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Cuba, junio de 2018).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2018.

Puntos en el incírculo de un triángulo

Por Julio César Díaz Calderón

Nivel Avanzado

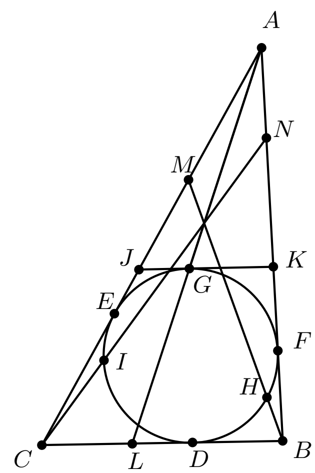
Introducción

El incírculo es una de las circunferencias más famosas en el triángulo; no obstante, su tratamiento se separa un poco del estudio de otras circunferencias famosas como el circuncírculo o la circunferencia de los nueve puntos. El objetivo de esta nota es introducir técnicas de resolución de problemas en geometría que incluyan al incírculo y a sus puntos notables. Estas herramientas van desde la semejanza y los ángulos en una circunferencia, hasta técnicas más avanzadas como la inversión. La primera parte surge de un problema propuesto por el autor para el Octavo Concurso de Problemas para las Olimpiadas de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana.[2] En cambio, la segunda mitad desarrolla un teorema de Lev Emelyanov y de Tatiana Emelyanova que relaciona los pies de las bisectrices y el punto de Feuerbach, el punto de tangencia del incírculo y la circunferencia de los nueve puntos.
El carácter didáctico de los artículos en la revista Tzaloa se intenta proyectar en dos secciones de problemas. La primera, titulada *hechos conocidos*, juega con la idea de que son lemas y teoremas que no se necesitarían demostrar en un examen de olimpiada. No obstante, su dificultad va más allá de los problemas tradicionales de esta revista y se acerca a los problemas difíciles de olimpiadas internacionales. En una segunda sección, llamada *problemas olímpicos*, se retoma el formato tradicional de los artículos de esta revista. Dicha sección intenta dar ejemplos concretos de cómo aplicar las ideas que se desarrollaron en el artículo en problemas de distintos concursos de matemáticas.

[2] Este es un concurso anual organizado por el Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas y cuya convocatoria se puede consultar en el apartado de actividades bajo el rubro de convocatorias de la página oficial de la OMM: `http://www.ommenlinea.org/`.

Puntos diametralmente opuestos a los puntos de tangencia del incírculo

Sea ABC un triángulo y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Llamemos G, H e I a los puntos diametralmente opuestos a D, E y F, respectivamente, con respecto al incírculo del triángulo ABC.



Lema. AG, BH y CI concurren.[3]

Demostración: Denotemos con L, M y N a los puntos de intersección de las rectas AG y BC, las rectas BH y CA y las rectas CI y AB, respectivamente. Sea KJ la tangente al incírculo del triángulo ABC por G, donde K está sobre el lado AB y J está sobre el lado CA. Como G es el punto diametralmente opuesto a D, entonces KJ y BC son paralelas; lo que significa que los triángulos AKJ y ABC son semejantes. Pero G es el punto de tangencia del lado KJ del triángulo AKJ con su excírculo opuesto a A, entonces, L es el punto de tangencia del lado BC del triángulo ABC con su excírculo opuesto a A (por la semejanza de los triángulos AKJ y ABC).

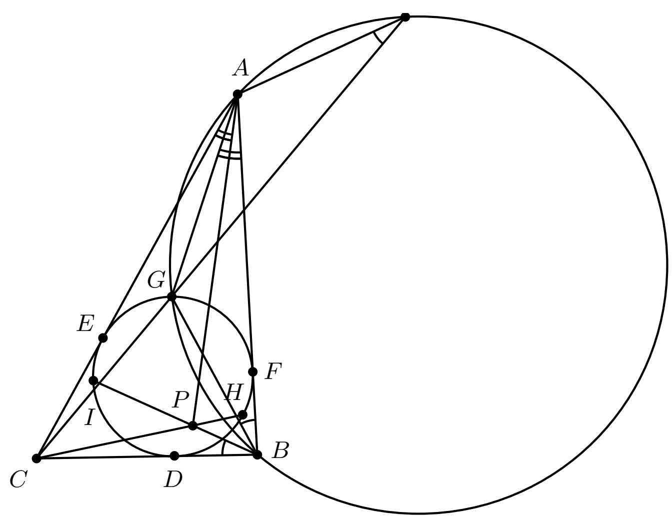
Observemos que, por ser tangentes a una circunferencia (el excírculo del triángulo AKJ) desde un mismo punto, $EA = AF$, $KG = KF$ y $GJ = EJ$. Esto implica que $AK+KJ+JA = EA+AK$, entonces $GJ = EJ = EA-JA = \frac{AK+KJ+JA}{2} - AJ$. La última observación implica que $LC = s-b$ y $BL = s-c$, donde a, b y c son las longitudes de los lados BC, CA y AB, respectivamente, y $s = \frac{a+b+c}{2}$. Análogamente, $CM = s-a$, $MA = s-c$, $AN = s-b$ y $NB = s-a$. Por lo tanto, $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{s-b}{s-a} \cdot \frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} = 1$, por el teorema de Ceva concluimos que AG, BH y CI concurren.

[3] Este lema aparece constantemente en la teoría de geometría moderna.

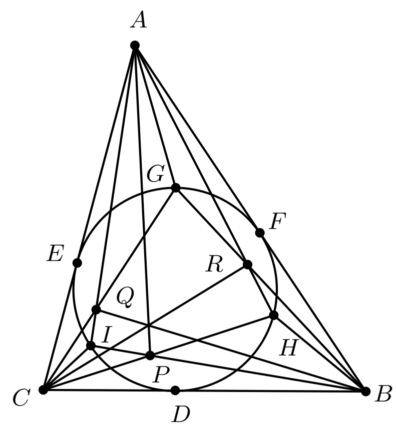
El problema propuesto

Problema. Denotemos por P, Q y R a los puntos de intersección de las rectas BI y CH, las rectas AI y CG y las rectas AH y BG, respectivamente. Demuestra que las rectas AP, BQ y CR son concurrentes.

Solución: Sabemos que $GD = HE$, por ser diámetros, y que $DC = CE$, por ser tangentes a una circunferencia desde un mismo punto. Además, $\angle GDC = \angle HEC = 90°$, entonces los triángulos GDC y HEC son congruentes, por lo tanto, $\angle DCG = \angle ECH$, es decir, $\angle DCH = \angle ECG = \alpha$. Análogamente, $\angle FBG = \angle DBI = \beta$.
Sea S la intersección de la recta CG y el circuncírculo del triángulo ABG.



Como $ASBG$ es cíclico, entonces $\angle ASG = \angle ABG = \beta$. Por lo tanto, $\angle ASC = \angle PBC = \beta$ y $\angle ACS = \angle PCB = \alpha$, esto junto con el criterio AA, implican que los triángulos ACS y PCB son semejantes. Esta última semejanza establece que existe una rotación seguida de una homotecia desde el vértice C que lleva al triángulo ACS al triángulo PCB, entonces $\angle CAP = \angle CSB = \theta$. Pero, por el cíclico $ASBG$, $\angle GAB = \angle GSB = \theta$. Por lo tanto, $\angle CAP = \angle GAB = \theta$.
Si aplicamos este mismo procedimiento a todos los pares de ángulos siguientes, llegamos a que $\angle PAB = \angle CAG$, $\angle ABQ = \angle HBC$, $\angle QBC = \angle ABH$, $\angle BCR = \angle ICA$ y $\angle RCA = \angle BCI$.



El lema y el teorema de Ceva trigonométrico garantizan que

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle CAG)}{\operatorname{sen}(\angle GAB)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle ABH)}{\operatorname{sen}(\angle HBC)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle BCI)}{\operatorname{sen}(\angle ICA)}=1,$$

pero

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle CAG)}{\operatorname{sen}(\angle GAB)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle ABH)}{\operatorname{sen}(\angle HBC)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle BCI)}{\operatorname{sen}(\angle ICA)}=\frac{\operatorname{sen}(\angle PAB)}{\operatorname{sen}(\angle CAP)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle QBC)}{\operatorname{sen}(\angle ABQ)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle RCA)}{\operatorname{sen}(\angle BCR)},$$

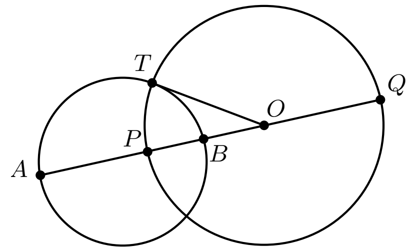
entonces

$$\frac{\operatorname{sen}(\angle CAP)}{\operatorname{sen}(\angle PAB)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle ABQ)}{\operatorname{sen}(\angle QBC)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(\angle BCR)}{\operatorname{sen}(\angle RCA)}=1.$$

La última igualdad y el teorema de Ceva trigonométrico nos permiten concluir que AP, BQ y CR son concurrentes.

Recordatorio de inversión

Este capítulo pretende dar un breve recorrido por la teoría básica de inversión. Esta y la siguiente sección se basan en el libro *Circles: A Mathematical View* de Dan Pedoe. Para una revisión más detallada de inversión y problemas introductorios, se puede consultar el libro de *Geometría* de Radmila Bulajich Manfrino y de José Antonio Gómez Ortega. Antes de introducir ¿qué es la inversión?, se repasará la noción de conjuntos armónicos. El ángulo entre dos circunferencias que se intersectan se define como el ángulo entre las dos tangentes a cada circunferencia en el punto de intersección. Dos circunferencias son ortogonales si el ángulo entre ellas es recto. Construir circunferencias ortogales a una circunferencia dada ω es sencillo. En efecto, desde cualquier punto T (fuera de la circunferencia) se puede trazar la tangente a ω y escoger un punto O sobre la tangente. Con centro en O y radio OT se puede construir una circunferencia que será ortogonal a ω, ¿por qué?

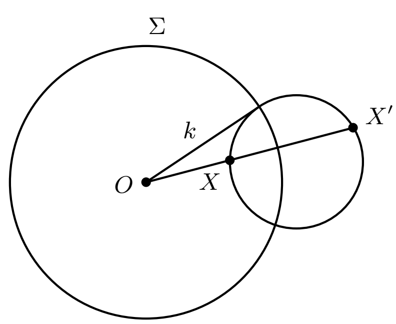


Ahora, sea QP un diámetro de la circunferencia con centro en O. La recta QP interseca a ω en los puntos A y B. Así, la potencia de O con respecto de ω es $OB \cdot OA$, que debe ser igual a OT^2. Dado que OT es el radio de la segunda circunferencia, se sabe que $OB \cdot OA = OP^2 = OQ^2$. En general, un conjunto de puntos colineales $\{A, B, P, Q\}$ se dirá que es un conjunto armónico si satisface que $OB \cdot OA = OP^2 = OQ^2$, donde O es el punto medio del segmento PQ. A y B se dice que son conjugados armónicos con respecto a P y Q. Se puede mostrar que P y Q son conjugados armónicos con respecto a A y B.

Ejercicio Demuestra que el punto P divide al segmento AB de manera interna en la misma razón que Q divide al segmento AB de manera externa, esto es, que $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$. De la misma forma, demuestra que $\frac{PA}{AQ} = -\frac{PB}{BQ}$.

Ejercicio Demuestra que si cuatro puntos colineales A, B, P, Q satisfacen que el punto P divide al segmento AB de manera interna en la misma razón que Q divide al segmento AB de manera externa, entonces $\{A, B, P, Q\}$ es un conjunto armónico.

La inversión es una transformación uno a uno de los puntos en el plano con respecto a una circunferencia de radio k y de centro O, que uno puede denominar Σ. Para obtener el punto transformado o correspondiente, X', de un punto dado X, se trazará la recta OX y X' será el punto correspondiende en dicha recta tal que $OX \cdot OX' = k^2$. El punto X' se denominará el inverso de X en la circunferencia Σ. Por definición, el punto O queda excluido de los posibles puntos en el plano que se pueden transformar en Σ.



Ejercicio Demuestra que:

- X es el inverso de X'.
- Los puntos de Σ se transforman en sí mismos.
- Si A y A' son los extremos del diámetro de Σ que pasa por X, entonces los puntos X y X' son conjugados armónicos con respecto a A, A'.

Lema Todas las circunferencias que pasan por X y por X' son ortogonales a Σ.

Demostración Basta con recordar que la potencia de O a cualquier circunferencia que pase por X y por X' es $OX \cdot OX' = k^2$. Así, el punto de intersección de alguna de estas circunferencias Σ' con Σ es el punto de tangencia desde O a Σ'.

Corolario Si $\mathscr{C}$ es una circunferencia ortogonal a Σ, entonces todos los puntos en $\mathscr{C}$ se invierten con respecto a Σ en puntos en $\mathscr{C}$.

Uno de los problemas centrales en la inversión es encontrar el conjunto de puntos inversos de los puntos de una curva dada $\mathscr{C}$. Ese conjunto se conoce como el inverso de la curva $\mathscr{C}$ con respecto a Σ. Los siguientes dos teoremas son clásicos y sus demostraciones se dejan como ejercicio al lector.

Teorema El inverso de una circunferencia es una recta o una circunferencia.

Corolario El inverso de una línea recta es una circunferencia que pasa por el centro de inversión.

Teorema El ángulo de intersección de dos circunferencias no se altera bajo la inversión.

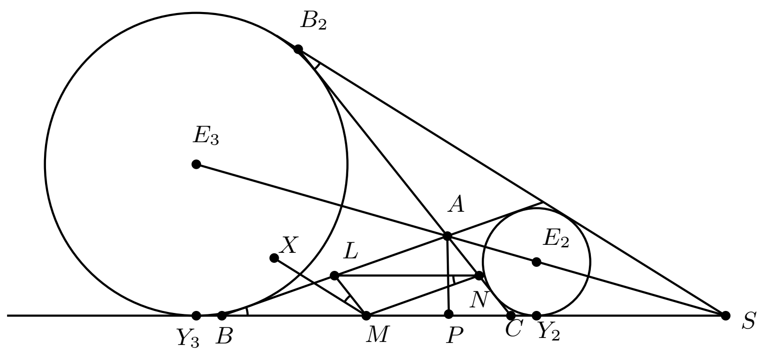
Punto de Feuerbach

Teorema de Feuerbach La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente al incírculo y a los excírculos del triángulo. El punto de tangencia de la circunferencia de los nueve puntos y el incírculo se conoce como el punto de Feuerbach del triángulo ABC. El triángulo que se forma de las intersecciones de la circunferencia de los nueve puntos con los excírculos se conoce como el triángulo de Feuerbach.

Demostración Sea ABC un triángulo. Si se consideran a los excírculos opuestos a B y a C, sean E_2 y E_3 sus centros, respectivamente, y sean Y_2 y Y_3 los puntos de intersección de los excírculos con la recta BC, respectivamente. Sea S el punto de intersección de las tangentes externas de los excírculos con centros E_2 y E_3.

Ejercicio Demuestra que E_3, A, E_2 y S son puntos colineales.

Ejercicio Demuestra que $\{E_3, E_2, A, S\}$ es un conjunto armónico. Más aún, demuestra que los puntos A y S dividen a E_3E_2 interna y externamente en una proporción igual a la razón entre los radios de los excírculos.



Sea P el pie de la altura del triángulo ABC desde A. Por el ejercicio anterior se sabe que P y S dividen a Y_3Y_2 interna y externamente en una proporción igual a la razón entre los radios de los excírculos. Entonces, $\{Y_3, Y_2, P, S\}$ es un conjunto armónico.
Sean L, M y N los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Se sabe que $BY_2 = \frac{1}{2}(BC + CA + AB) = CY_3$, de tal forma que L es también el punto medio del segmento Y_3Y_2. Como $\{Y_3, Y_2, P, S\}$ es un conjunto armónico, entonces

$$LP \cdot LS = LY_2^2 = LY_3^3.$$

Ahora, sea LX la tangente en L a la circunferencia del triángulo LMN, donde X es un punto en el mismo lado de N con respecto de BC. Entonces,

$$\angle XLN = \angle NML = \angle ABC.$$

Sea B_2 el punto de intersección entre la recta AC y la tangente de S al excírculo con centro E_3 distinta de SY_3. Por simetría, $\angle ABS = \angle AB_2S$. Entonces, $\angle AB_2S = \angle ABC = \angle XLN$. Así, XL es paralela a B_2S.
Para concluir la prueba del teorema será necesario utilizar inversión. La relación $LP \cdot LS = LY_2^2 = LY_3^3$ sugiere aplicar inversión con respecto a la circunferencia con centro en L y radio LY_2, que se denotará por $\mathscr{C}$. Así, el inverso de P con respeto a $\mathscr{C}$ es S. La recta XL se invierte en sí misma con respecto de $\mathscr{C}$ y la circunferencia de los nueve puntos se invierte en una recta con respecto de $\mathscr{C}$, pues ambos pasan por el centro de $\mathscr{C}$. Como P está en la circunferencia de los nueve puntos, entonces la circunferencia de los nueve puntos se invierte en una recta que pasa por S. Dado que la inversión respeta ángulos, la recta inversa de la circunferencia de los nueve puntos y la recta XL deben ser paralelas. Por tanto, B_2S es el inverso de la circunferencia de los nueve puntos con respecto a $\mathscr{C}$.
Dado que $\mathscr{C}$ corta a ambos excírculos de manera ortogonal, entonces los excírculos se invierten en sí mismos con respecto a $\mathscr{C}$. Dado que la recta B_2S interseca en exactamente un punto a los excírculos, entonces la circunferencia de los nueve puntos interseca a los excírculos en exactamente un punto. Por lo tanto, la circunferencia de los

nueve puntos es tangente a los excírculos del triángulo con centros en E_2 y E_3. De manera análoga se demuestra que la circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente al incírculo y a los excírculos del triángulo.

Teorema principal

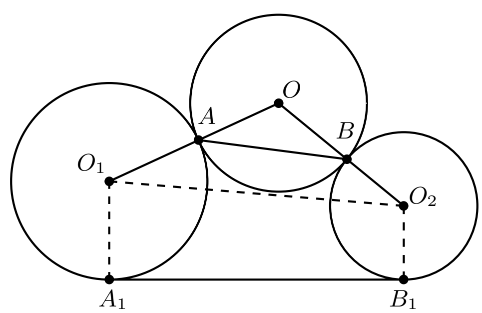
A continuación se darán dos demostraciones de un teorema que se demostró en 2001 por Lev Emelyanov y Tatiana Emelyanova en el artículo *A Note on the Feuerbach Points*. La primera coincide con la demostración original, mientras que la segunda es una demostración de Nguyen Minh Ha y Nguyen Pham Dat. Sin embargo, la segunda demostración supondrá que el lector ya demostró los ejercicios de la segunda parte de la siguiente sección (o que está dispuesto a asumir que son ciertos).

Teorema La circunferencia que pasa por los pies de las bisectrices de un triángulo contiene al punto de Feuerbach del triángulo.

Demostración (Emelyanov y Emelyanova, 2001) Esta demostración se basa en dos observaciones sobre la relación entre el triángulo de los pies de las bisectrices de un triángulo y el triángulo de Feuerbach correspondiente: a) son semejantes y b) están en perspectiva. No obstante, será necesario demostrar primero dos lemas.

Lema 1 Sea $\mathscr{C}$ una circunferencia con centro O y radio R. $\mathscr{C}$ es tangente externamente a las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ en A y en B, respectivamente. Sean O_1 y O_2 los centros de $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, respectivamente y sean r_1 y r_2 sus respectivos radios. Si A_1B_1 es un segmento de una tangente común a las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$, de tal forma que $A_1 \in \mathscr{C}_1$ y $B_1 \in \mathscr{C}_2$, entonces

$$AB = \frac{R}{\sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}} \cdot A_1B_1.$$



Al aplicar la ley de cosenos a los triángulos AOB y O_1OO_2 se obtiene que

$$\cos(\angle AOB) = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{AB^2}{2R^2}$$

y

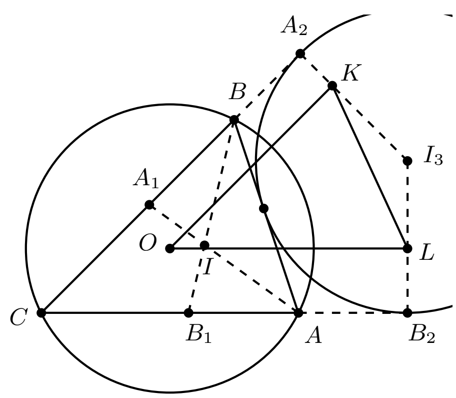
$$\begin{aligned} O_1O_2^2 &= (R+r_1)^2 + (R+r_2)^2 - 2(R+r_1)(R+r_2)(cos(\angle O_1OO_2)) \\ &= (R+r_1)^2 + (R+r_2)^2 - 2(R+r_1)(R+r_2)\left(1 - \frac{AB^2}{2R^2}\right) \\ &= (r_1-r_2)^2 + (R+r_1)(R+r_2)\left(\frac{AB}{R}\right)^2. \end{aligned}$$

Dado que A_1O_1 y O_2B_1 son perpendiculares a A_1B_1, entonces $A_1O_1O_2B_1$ es un trapecio; así $O_1O_2^2 = (r_1-r_2)^2 + A_1B_1^2$. Al igualar las dos expresiones de $O_1O_2^2$ se obtiene el resultado deseado. □

Lema 2 Sea ABC un triángulo con circuncentro O y circunradio R. Sea I_3 el excentro opuesto a C y sea r_3 su exradio asociado. Además, sean A_1 y B_1 los pies de las bisectrices desde A y desde B, respectivamente. Si se denotan las longitudes de los lados como $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$, entonces

$$A_1B_1 = \frac{abc\sqrt{R(R+2r_3)}}{(c+a)(b+c)R}.$$

Demostración



Sean K y L puntos en I_3A_2 y I_3B_2 tales que OK es paralela a CB y OL es paralela a CA. Así, $\angle A_1CB_1 = \angle KOL$. Dado que $CA_2 = CB_2 = \frac{a+b+c}{2}$, entonces

$$OL = \frac{a+b+c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a+c}{2} \quad \text{y} \quad OK = \frac{a+b+c}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b+c}{2}.$$

Además, por el teorema de la bisectriz

$$CB_1 = \frac{ab}{c+a} \quad \text{y} \quad CA_1 = \frac{ab}{b+c}.$$

Así,

$$\frac{CB_1}{CA_1} = \frac{b+c}{c+a} = \frac{OK}{OL}.$$

Por lo tanto, los triángulos A_1CB_1 y KOL son semejantes y

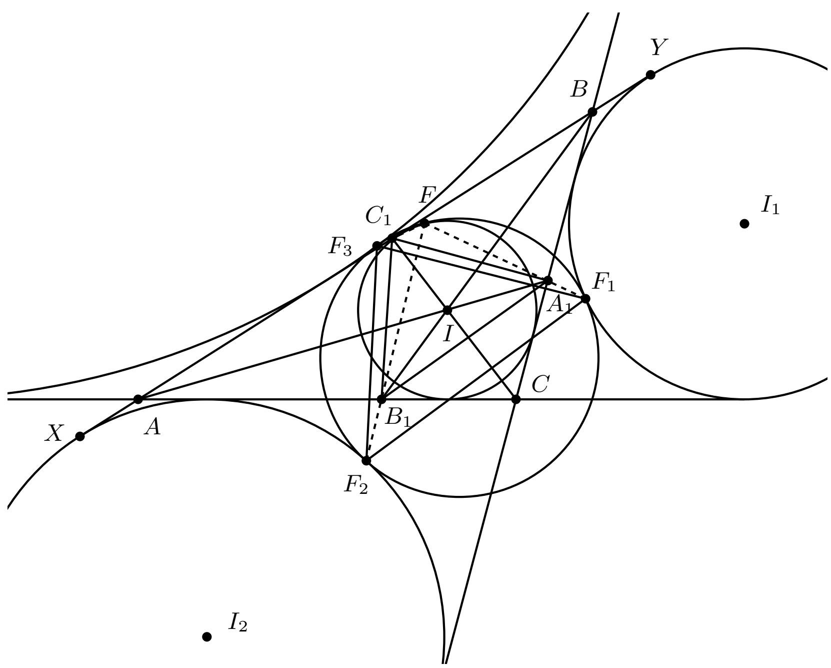
$$\frac{A_1B_1}{LK} = \frac{CB_1}{OK} = \frac{2ab}{(c+a)(b+c)}.$$

Dado que OI_3 es diámetro de la circunferencia por O, L y K, la ley de senos garantiza que

$$LK = OI_3 \cdot \operatorname{sen}(\angle LOK) = OI_3 \cdot \operatorname{sen}(\angle ACB) = OI_3 \cdot \frac{c}{2R}.$$

Si se combinan las dos últimas expresiones de LK con la fórmula de Euler $OI_3^2 = R(R+2r_3)$, se obtiene la identidad deseada. $\square$

Ahora se demostrará el teorema principal en dos pasos, como se demarcó al inicio de la demostración.



(a) Se denotará con O al circuncentro, con I al incentro, con I_1, I_2 e I_3 a los excentros, con N al centro de la circunferencia de los nueve puntos y con F, F_1, F_2 y F_3 a los puntos de Feuerbach; es decir, a los puntos de intersección de la circunferencia de los nueve puntos con el incírculo y con los excírculos, respectivamente. Además, R, r, r_1, r_2 y r_3 serán el circunradio, el inradio y los exradios, respectivamente. Por último, sean A_1, B_1 y C_1 los pies de las bisectrices desde A, desde B y desde C, respectivamente. La longitud de la tangente común a los excírculos opuestos a los vértices A y B es

$$XY = AY + BX - AB = \frac{a+b+c}{2} + \frac{a+b+c}{2} - c = a+b,$$

donde X y Y son los puntos de tangencia con los excírculos. Dado que la circunferencia de los nueve puntos tiene radio $\frac{R}{2}$, el lema 1 garantiza que

$$F_1F_2 = \frac{(a+b)\cdot\dfrac{R}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{R}{2}+r_1\right)\left(\dfrac{R}{2}+r_2\right)}} = \frac{(a+b)\cdot R}{\sqrt{(R+2r_1)\,(R+2r_2)}}.$$

Por el lema 2 se tiene que,

$$\frac{A_1B_1}{F_1F_2} = \frac{abc\sqrt{R\,(R+2r_1)\,(R+2r_2)\,(R+2r_3)}}{(a+b)(b+c)(c+a)R^2}.$$

Por simetría en a, b y c, así como en los exradios y en el circunradio, se tiene que

$$\frac{A_1B_1}{F_1F_2} = \frac{B_1C_1}{F_2F_3} = \frac{C_1A_1}{F_3F_1}.$$

Se sigue que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $F_1F_2F_3$ son semejantes.

(b) Se demostrará que los puntos F, B_1 y F_2 son colineales. Por el teorema de Feuerbach, F es el centro de homotecia del incírculo y la circunferencia de los nueve puntos, al tiempo que F_2 es el centro de homotecia interno de la circunferencia de los nueve puntos y el excírculo opuesto al vértice B. Ahora, se sabe que B_1 es el centro de homotecia interno del incírculo y el excírculo opuesto al vértice B. Esos tres centros de homotecia se pueden utilizar para calcular la razones en la que dividen a los lados del triángulo I_2NI:

$$\frac{NF}{FI} = -\frac{R}{2r}, \frac{IB_1}{B_1I_2} = \frac{r}{r_2} \quad \text{y} \quad \frac{I_2F_2}{F_2N} = \frac{2r_2}{R}.$$

Por tanto,

$$\frac{NF}{FI}\cdot\frac{IB_1}{B_1I_2}\cdot\frac{I_2F_2}{F_2N} = -1.$$

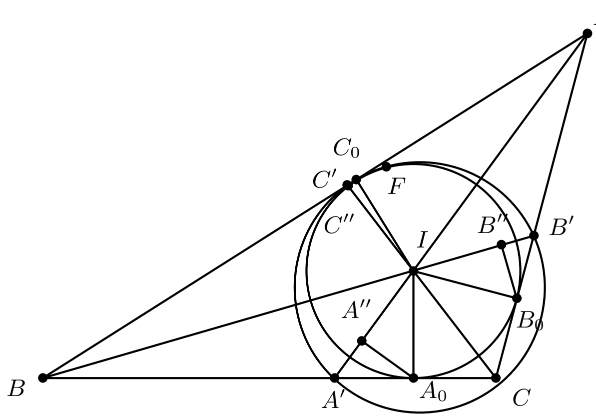
Así, por el teorema de Menelao, se sabe que F, B_1 y F_2 son colineales. De manera análoga se sabe que F, C_1 y F_3 son colineales, al igual que lo son F, A_1 y F_1. Lo anterior demuestra que los triángulos $A_1B_1C_1$ y $F_1F_2F_3$ están en perspectiva desde F.

De (a) y de (b) se tiene que

$$\angle C_1FA_1 + \angle C_1B_1A_1 = \angle F_3FF_1 + \angle F_3F_2F_1 = 180^\circ,$$

lo cual implica que el circuncírculo del triángulo $A_1B_1C_1$ contiene al punto de Feuerbach F. Con lo que se termina la demostración del teorema.

Demostración (Minh Ha y Pham Dat, 2012) Dado un triángulo ABC, sean I, r y F su incentro, su inradio y su punto de Feuerbach. Por otro lado, sean A_0, B_0 y C_0 los puntos en que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Además, sean A', B' y C' los puntos de intersección de AI, BI y CI con BC, CA y AB, respectivamente. Por último, sean A'', B'' y C'' los pies de las perpendiculares desde A_0, B_0 y C_0 hacia AI, BI y CI, respectivamente.



El inciso (b) del problema 10 y el problema 12 garantizan que F se encuentra en el circuncírculo del triángulo $A''B''C''$. Por otro lado, bajo la inversión en el incírculo del triángulo ABC se tiene que F, A'', B'' y C'' se transforman en F, A', B' y C', respectivamente. Pero, si una circunferencia se transforma bajo una inversión en una circunferencia, entonces F está en el circuncírculo del triángulo $A'B'C'$, como se deseaba.

Hechos clásicos

Esta sección pretende profundizar en la noción de los puntos de Feuerbach y en las relaciones entre la teoría desarrollada con otros temas de geometría moderna como el punto de anti-Steiner. Se plantea como una sección de ejercicios difíciles para los lectores motivados.

Hacia más puntos de Feuerbach

Los siguientes cuatro ejercicios se tomaron del artículo *Some Circles Associated with the Feuerbach Points* de Nguyen Thanh Dung. En estos problemas, dado un triángulo ABC, se denotará con O al circuncentro, con I al incentro, con I_a, I_b e I_c a los excentros, con N al centro de la circunferencia de los nueve puntos y con F_e, F_a, F_b y F_c a los puntos de Feuerbach; es decir, a los puntos de intersección de la circunferencia de los nueve puntos con el incírculo y con los excírculos, respectivamente. Además, R, r, r_a, r_b y r_c serán el circunradio, el inradio y los exradios, respectivamente. Por último, sean N_i, N_a, N_b y N_c, los puntos de intersección, diferentes de O, de las rectas OI, OI_a, OI_b y OI_c, respectivamente, con las circunferencias de los triángulos ONF_e, ONF_a, ONF_b y ONF_c, respectivamente.

Problema 1. *Demuestra que:*

- $OI^2 = R(R-2r)$.
- $OI_a^2 = R(R+2r_a)$.

- $II_a^2 = 4R(r_a - r)$.
- *El triángulo $I_aI_bI_c$ tiene su circuncentro en la reflexión de I con respecto a O y que dicho triángulo tiene su circunradio de longitud $2R$.*

Problema 2. *Demuestra que la recta OI interseca por segunda vez a la circunferencia del triángulo ONF_e en el centro de la circunfrencia de los nueve puntos del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo ABC.*

Problema 3. *Demuestra que los puntos O, N, F_a y N_a son concíclicos. De la misma forma, demuestra que O, N, F_b y N_b son concíclicos y que, también, O, N, F_c y N_c lo son.*

Problema 4. *Demuestra que las cuatro rectas F_eN_i, F_aN_a, F_bN_b y F_cN_c son concurrentes en un punto sobre la circunferencia de los nueve puntos.*

El punto de Feuerbach es un punto de anti-Steiner

Esta parte complementa la demostración con inversión del teorema principal de la sección anterior. Parte de una teoría desarrollada a partir del punto de anti-Steiner. Toda esta teoría se desarrolló en el artículo *Synthetic Proofs of Two Theorems Related to the Feuerbach Point* de Nguyen Minh Ha y Nguyen Pham Dat. En estos problemas, se parte de un triángulo ABC con circuncentro O y con incentro I.
Además, D, E y F serán los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente.

Problema 5. *Demuestra que si S es un punto en el circuncírculo del triángulo ABC, entonces las imágenes de S al reflejar con respecto a los ejes BC, CA y AB se encuentran en una misma recta que pasa por el ortocentro del triángulo ABC. Esta recta se conoce como la recta de Steiner de S con respecto al triángulo ABC.*

Problema 6. *Demuestra que si una recta $\mathscr{L}$ pasa por el ortocentro del triángulo ABC, entonces las imágenes de $\mathscr{L}$ al reflejar con respecto a los ejes BC, CA y AB son concurrentes en un punto sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Este punto de concurrencia se conoce como el punto de anti-Steiner de $\mathscr{L}$ con respecto al triángulo ABC.*

Problema 7. *Sea $\mathscr{L}$ una recta arbitraria. Las paralelas de $\mathscr{L}$ que pasan por A, B y C intersecan al circuncírculo del triángulo ABC en D, E y F, respectivamente. Las rectas $\mathscr{L}_a$, $\mathscr{L}_b$ y $\mathscr{L}_c$ son las perpendiculares a BC, CA y AB por D, E y F, respectivamente. Demuestra que:*

(a) *Las líneas $\mathscr{L}_a$, $\mathscr{L}_b$ y $\mathscr{L}_c$ concurren en un punto S sobre el circuncírculo del triángulo ABC.*

(b) *La recta de Steiner de S con respecto al triángulo ABC es paralela a $\mathscr{L}$.*

Problema 8. *Sea $\mathscr{L}$ una recta arbitraria y sean A', B' y C' los pies de las perpendiculares desde A, B y C hacia $\mathscr{L}$, repectivamente. Las rectas $\mathscr{L}_a$, $\mathscr{L}_b$ y $\mathscr{L}_c$ pasan por A', B' y C' y son perpendiculares a BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que las rectas $\mathscr{L}_a$, $\mathscr{L}_b$ y $\mathscr{L}_c$ son concurrentes en un punto conocido como el ortopolo de la recta $\mathscr{L}$ con respecto al triángulo ABC.*

Problema 9. *Sea P un punto arbitrario distinto de O. Demuestra que el ortopolo de la recta OP con respecto al triángulo ABC se encuentra en el circuncírculo del triángulo pedal de P con respecto al triángulo ABC. Recordar que el triángulo pedal de P con respecto al triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$ que tiene por vértices a los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo ABC.*

Problema 10. *Sean A_1, B_1 y C_1 las imágenes de A, B y C, respectivamente, con respecto al centro de simetría O. Además, sean A_2, B_2 y C_2 las imágenes de O por medio de las reflexiones con los ejes BC, CA y AB, respectivamente. Por último, sean A_3, B_3 y C_3 los pies de las perpendiculares desde A, B y C hacia las rectas OA_2, OB_2 y OC_2, respectivamente. Demuestra que*

(a) *Los circuncírculos de los triángulos OA_1A_2, OB_1B_2 y OC_1C_2 pasan por el punto de anti-Steiner de la recta de Euler del triángulo ABC con respecto del triángulo ABC.*

(b) *La circunferencia del triángulo $A_3B_3C_3$ también pasa por el mismo punto de anti-Steiner.*

Problema 11. *Considera un conjunto de puntos $\{A, B, C, D\}$ en posición general; es decir, que cualesquiera tres no son colineales. Demuestra que todas las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC pasan por un mismo punto.*

Problema 12. *Sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que el punto de Feuerbach del triángulo ABC es el punto de anti-Steiner de la recta de Euler del triángulo DEF con respecto al triángulo DEF.*

Problemas olímpicos

1. Sea ABC un triángulo con incentro I y circuncentro O. Prueba que la línea IO pasa por el centroide del triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del incírculo con los lados del triángulo ABC.

2. (NIMO, 2014) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea Q un punto tal que AB y AC son perpendiculares a QB y a QC, respectivamente. Si la recta QI interseca a EF en el punto P, prueba que DP es perpendicular a EF.

3. (Lista corta de la IMO, 1997) Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo no isósceles con incentro I. Sea C_i, con $i = 1, 2, 3$, el menor círculo por I que es tangente a A_iA_{i+1}

y a A_iA_{i+2} (donde los índices se toman módulo 3). Sea B_i, con $i = 1, 2, 3$, el segundo punto de intersección de C_{i+1} y de C_{i+2}. Demuestra que los circuncentros de los triángulos A_1B_1I, A_2B_2I y A_3B_3I son colineales.

4. (Punto de Poncelet) Dado un conjunto de cuatro puntos en posición general, $\{W, X, Y, Z\}$, demuestra que las circunferencias de los nueve puntos de los triángulos formados por tres puntos del conjunto concurren en un punto que se denomina el punto de Poncelet. Observa que el punto de Feuerbach es el punto de Poncelet del conjunto $\{A, B, C, I\}$.

5. (Incírculo polar) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Las rectas EF y BC se intersecan en K. Demuestra que IK es perpendicular a AD.

6. (Lista corta de la IMO, 2005) Sea ABC un triángulo y sea M el punto medio del lado BC. Sea ω el incírculo del triángulo ABC. La mediana AM del triángulo ABC interseca a ω en los puntos K y L. Las líneas que pasan por K y L que son paralelas a BC intersecan nuevamente a ω en los puntos X y Y. Las rectas AX y AY intersectan a BC en los puntos P y Q. Demuestra que $BP = CQ$.

7. (Examen de Selección del Equipo de Estados Unidos de América para la IMO, 2015) Sea ABC un triángulo escaleno con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Se denota con M al punto medio de BC y con P al punto en el interior del triángulo ABC tal que $MD = MP$ y $\angle PAB = \angle PAC$. Sea Q un punto en el incírculo tal que $\angle AQD = 90°$. Demuestra que $\angle PQE = 90°$ o $\angle PQF = 90°$.

8. (Concurso Nacional de Estados Unidos de América, 2007) Sea ABC un triángulo acutángulo donde ω, S y R representan su incírculo, su circuncírculo y el radio de su circuncírculo, respectivamente. La circunferencia ω_A es tangente internamente a S en A y es tangente externamente a ω. La circunferencia Ω_A es tangente internamente a S en A y es tangente internamente a ω.

   Sean P_A y Q_A los centros de ω_A y de Ω_A, respectivamente. Se definen los puntos P_B, Q_B, P_C y Q_C de manera análoga. Demuestra que

   $$8P_AQ_A \cdot P_BQ_B \cdot P_CQ_C \leq R^3,$$

   con la igualdad si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

9. (Examen de Selección del Equipo de Irán para la IMO, 2009) Sea ABC un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea M el pie de la perpendicular desde D hacia EF y sea P el punto medio de DM. Si H es el ortocentro del triángulo BIC, demuestra que PH bisecta al segmento EF.

10. (Examen de Selección del Equipo de Taiwán para la IMO, 2014) En un triángulo escaleno ABC con incentro I, el incírculo es tangente a los lados CA y AB en los puntos E y F, respectivamente. Las tangentes al circuncírculo del triángulo AEF desde E y desde F se intersecan en S. Las rectas EF y BC se intersecan en T. Demuestra que la circunferencia con diámetro ST es ortogonal a la circunferencia de los nueve puntos del triángulo BIC.

Bibliografía

1) Bulajich Manfrino, Radmila, Gómez Ortega, J. A. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

2) Chen, Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Washington, The Mathematical Association of America, MAA Problem Book Series, 2016.

3) Djukic, Dusan. *Inversion*, The IMO Compendium Group, Olympiad Training Materials, 2007, disponible en: `http://www.imomath.com/`.

4) Emelyanov, Lev y Tatiana Emelyanova. *A Note on the Feuerbach Points*, Forum Geometricorum, Vol. 1, 2001, 121-124.

5) Minh Ha, Nguyen y Nguyen Pham Dat. *Synthetic Proofs of Two Theorems Related to the Feuerbach Point*, Forum Geometricorum, Vol. 12, 2012, 39-46.

6) Pedoe, Dan. *Circles: A Mathematical View*, Washington, The Mathematical Association of America, Spectrum Series, 1995.

7) Thanh Dung, Nguyen. *Some Circles Associated with Feuerbach Points*, Forum Geometricorum, Vol. 14, 2014, 403-408.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2017.
Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Sean a y b enteros positivos impares tales que $\frac{a(a+1)}{2} \equiv \frac{b(b+1)}{2} \pmod{4}$. Demuestra que 8 divide a $a - b$.

Problema 2. ¿De cuántas formas se puede llenar un tablero de 8×8 con 1 o -1 en cada casilla, de forma que la suma de los elementos en cualquier subtablero de 2×2 es igual a cero?

Problema 3. Sean ABC un triángulo, P el punto medio de BC y Q un punto en el segmento CA tal que $CQ = 2QA$. Si S es el punto de intersección de BQ con AP, demuestra que $AS = SP$.

Problema 4. Hay 11 personas sentadas en una mesa circular, igualmente espaciadas. Se reparten 11 tarjetas numeradas del 1 al 11 de forma consecutiva en sentido contrario a las manecillas del reloj. Cada minuto, una de las personas en la mesa (digamos, la que tiene la tarjeta m) puede dar una tarjeta a uno de sus vecinos siempre y cuando antes y después del intercambio, las personas que tengan las tarjetas $m-1, m, m+1$ no estén en sillas que formen un triángulo acutángulo (considerando una numeración cíclica: la tarjeta 12 en realidad es la tarjeta 1, y la tarjeta 0 es la tarjeta 11). Demuestra que en ningún momento habrá una persona que tenga todas las tarjetas.

Problema 5. Sean ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 y ℓ_4 cuatro rectas en el plano tales que ningún par son paralelas. Denotamos por C_{ijk} al circuncírculo del triángulo formado por ℓ_i, ℓ_j y ℓ_k. Demuestra que las circunferencias C_{123}, C_{124}, C_{134} y C_{234} pasan por un mismo punto.

Problema 6. Hay 10001 estudiantes en una universidad. Los estudiantes pertenecen a varios clubes (un estudiante puede pertenecer a distintos clubes). Adicionalmente los clubes están clasificados por categorías (un club puede pertenecer a varias categorías). Hay un total de k categorías. Supongamos que se satisface lo siguiente:

- Cada par de estudiantes está en exactamente un club.
- Para cada estudiante y cada categoría, el estudiante está en exactamente un club de la categoría.
- Cada club tiene una cantidad impar de estudiantes mayor que 3 de forma que si un club tiene $2m+1$ estudiantes, entonces el club está en exactamente m categorías.

Encuentra los valores posibles de k.

Problema 7. Determina todos los pares de enteros (x, y) que satisfacen la ecuación $x(x+2) = y^2(y^2+1)$.

Problema 8. Ayer y hoy jugaron en el parque un grupo de niñas y de niños. Ayer la relación de niñas a niños era de $2 : 3$. Hoy, el número de niños es el cuadrado del número de niñas y, además, hay 6 niños y 7 niñas menos que ayer. Contando a los niños y a las niñas, ¿cuántos jugaron ayer?

Problema 9. Dentro de un $2n$-ágono regular se tienen n diagonales que se intersecan en un punto S que no es vértice del polígono. Demuestra que el punto S es el centro del $2n-$ágono.

Problema 10. Determina todos los cuadrados perfectos mayores a 9 que tienen todos sus dígitos iguales.

Problema 11. Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules que le depositan, entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas, entrega 13 fichas azules. Determina si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 su número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas. De ser posible, indica cómo hacerlo. Si no se puede, explica por qué.

Problema 12. Determina el menor valor que puede tomar la expresión

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}$$

para números reales positivos a, b, c cuya suma no exceda 3.

Problema 13. Cinco enteros positivos a, b, c, d, e satisfacen que

$$a < b < c < d < e < a^2 < b^2 < c^2 < d^2 < e^2 < a^3 < b^3 < c^3 < d^3 < e^3.$$

Determina el valor mínimo de la suma $a + b + c + d + e$.

Problema 14. Para cada entero positivo a, denotamos con $d(a)$ al número de divisores positivos de a. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos que no se pueden escribir en la forma $a^{d(a)} + b^{d(b)}$ para algún par de enteros positivos a y b.

Problema 15. Sea $n > 1$ un número entero. Encuentra el número de permutaciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de los números $1, 2, \ldots, n$ con la siguiente propiedad: existe un único índice $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $a_i > a_{i+1}$.

Problema 16. Los puntos A_1, B_1 y C_1 son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, respectivamente, de tal forma que las rectas AA_1, BB_1 y CC_1 concurren en un punto M. Demuestra que si el punto M es el gravicentro del triángulo $A_1B_1C_1$, entonces M es el gravicentro del triángulo ABC.

Problema 17. Sea $A = \{1, 2, \ldots, m+n\}$, donde m y n son enteros positivos y sea $f : A \to A$ una función definida por las ecuaciones:

- $f(i) = i + 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, m+n-1$,
- $f(m) = 1$ y $f(m+n) = m+1$.

Demuestra que si m y n son enteros impares, entonces existe una función $g : A \to A$ tal que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Problema 18. Encuentra todos los números naturales a, b y c tales que las raíces de las ecuaciones cuadráticas $x^2 - 2ax + b = 0$, $x^2 - 2bx + c = 0$ y $x^2 - 2cx + a = 0$, son números naturales.

Problema 19. Considera el siguiente polinomio

$$P_n(x) = \binom{n}{2} + \binom{n}{5}x + \binom{n}{8}x^2 + \cdots + \binom{n}{3k+2}x^k,$$

donde $n \geq 2$ es un número natural y $k = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$.
Demuestra que $P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x+1)P_n(x)$.

Problema 20. Sean a, b, c y d números reales tales que $a+b+c+d = 19$ y $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 91$. Encuentra el valor máximo de la suma

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

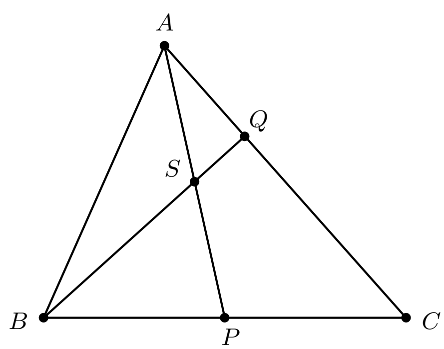
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Multiplicando por 2 la congruencia dada, obtenemos que $a(a+1) \equiv b(b+1) \pmod{8}$, esto es, $a^2+a-b^2-b \equiv 0 \pmod{8}$. Factorizando el lado izquierdo, resulta que $(a-b)(a+b+1) \equiv 0 \pmod{8}$. Como a y b son enteros impares, $a+b+1$ es impar; por lo tanto, $a+b+1$ es primo relativo con 8. Luego, 8 divide a $a-b$.

Solución del problema 2. Pintemos el tablero como tablero de ajedrez y llenemos la primera columna de forma arbitraria. Si los números quedaron con los signos alternados (por ejemplo, casillas blancas 1 y casillas negras -1), entonces hay dos posiblidades únicamente para la segunda columna, que sea exactamente igual o que sea alternada pero con signos contrarios. Esto sucede porque la elección del número de la primera casilla en la segunda columna determina todos los demás. Además, al ser esta segunda columna alternada, aplicamos el mismo razonamiento y veremos que todas las columnas tienen que quedar alternadas. De esta forma, cada una de las 8 columnas tiene 2 opciones (pues hay dos formas de hacer una columna alternada); por lo tanto hay 2^8 formas en este caso.

Por otro lado, si la primera columna tiene dos casillas consecutivas con el mismo número, entonces las dos correspondientes en la segunda fila serán necesariamente iguales y de signo contrario, lo cual determina completamente todos los demás signos de la segunda columna (pues la segunda columna será el resultado de invertir todos los signos de la primera). Lo mismo sucede para todas las demás columnas. En otras palabras, si la primera columna no es alternada, el resto del tablero está determinado. Como hay $2^8 - 2$ formas de llenar la primera columna sin que haya signos alternados, en este caso hay $2^8 - 2$ maneras de llenar el tablero. Concluimos que hay $2^8 + 2^8 - 2 = 2046$ formas de hacer lo que se pide.

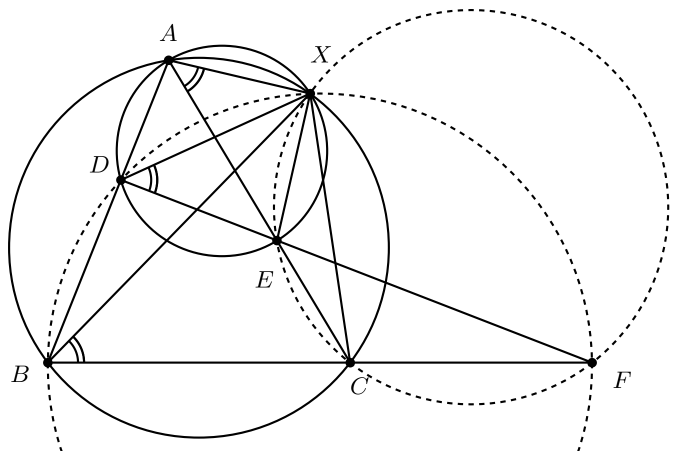
Solución del problema 3. Aplicando el teorema de Menelao en el triángulo PCA con la recta que contiene a los puntos B, S, Q, tenemos que $\frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SP} = -1$.



Por otra parte, tenemos que $\frac{PB}{BC} = \frac{-1}{2}$ y $\frac{CQ}{QA} = \frac{2}{1}$, de donde $\frac{AS}{SP} = 1$, esto es, $AS = SP$.

Solución del problema 4. Las sillas dividen el perímetro de la mesa en 11 arcos iguales. Diremos que la silla A está a distancia d de la silla B, si la mínima cantidad de arcos que separan las dos sillas es d (en otras palabras, la mayor distancia entre dos sillas es a lo más 5).
Consideremos, en un momento dado, la suma de las distancias entre las sillas de las personas que tienen tarjetas con números consecutivos (cíclicamente). Observemos que en cada cambio, dicha suma puede permanecer igual, aumentar en 2 o disminuir en 2: si la persona que intercambia le da la tarjeta m a su vecina, quiere decir que las distancias a las sillas $m-1$ y $m+1$ pueden aumentar o disminuir en 1 por lo que el cambio total puede ser 0 o ± 2. Esto quiere decir que la paridad de la suma es invariante; como al inicio del proceso es igual a 11, es imposible que llegue a ser cero (lo cual sucedería si una persona tuviese todas las tarjetas).

Solución del problema 5. Supongamos que las rectas ℓ_1 y ℓ_2 intersecan a ℓ_3 y ℓ_4 en los pares de puntos (D, B) y (E, C), respectivamente. Además, sean A y F los puntos en común de ℓ_1 con ℓ_2 y ℓ_3 con ℓ_4, respectivamente. Consideremos X el segundo punto de intersección del los circuncírculos de los triángulos ABC y ADE.



Como $ABCX$ y $ADEX$ son cíclicos se tiene que

$$\angle EDX = \angle EAX = \angle CAX = \angle CBX.$$

Con esto se concluye que $XDBF$ es cíclico. De manera análoga se muestra que $XECF$ es cíclico, de donde se tiene que las cuatro circunferencias pasan por el punto X.

Solución del problema 6. Consideremos una persona específica A y sean $C_1, \ldots, C_n$ los clubes a los que pertenece. Entonces, los pares en los que aparece en total A es igual a $\sum_{i=1}^{n}(|C_i| - 1)$, de donde esta suma debe ser igual a 10000. Además, cada club C_i pertenece a $\frac{|C_i|-1}{2}$ categorías. Por lo tanto, A pertenece a 5000 categorías y como A está en todas las categorías posibles, se tiene que $k = 5000$.

Solución del problema 7. Sumando 1 en ambos lados de la ecuación y factorizando obtenemos la ecuación $(x + 1)^2 = (y^2 - y + 1)(y^2 + y + 1)$.
Notemos que el máximo común divisor de $y^2 - y + 1$ y $y^2 + y + 1$ debe dividir a $2y$. Sin embargo, cada número es primo relativo con y (puesto que y divide a $y^2 - y$ y a $y^2 + y$) y también es primo relativo con 2 (ya que $y^2 \pm y$ siempre es par). Luego, $y^2 - y + 1$ y $y^2 + y + 1$ son primos relativos con producto igual a un cuadrado, por lo tanto ambos son cuadrados.
Si $y \geq 0$ tenemos que $y^2 < y^2 + y + 1 \leq y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$. Como $y^2 + y + 1$ es un cuadrado entre dos cuadrados consecutivos se debe cumplir que $y^2 + y + 1 = y^2 + 2y + 1$, lo cual implica que $y = 0$. De forma similar si $y \leq 0$, entonces $y = 0$. Por lo tanto, $y = 0$ y los valores posibles de x son los números 0 y -2. Entonces, las únicas soluciones son $(0, 0)$ y $(-2, 0)$.

Solución del problema 8. Ayer en el parque estuvieron $3t$ niños y $2t$ niñas. Hoy, hay $3t - 6$ niños y $2t - 7$ niñas. Como $3t - 6 = (2t - 7)^2 = 4t^2 - 28t + 49$, tenemos que $4t^2 - 31t + 55 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son 5 y $\frac{11}{4}$. Como t es un número entero, la única posibilidad es $t = 5$. Por lo tanto, la cantidad de niños y niñas que ayer había en el parque es igual a $3t + 2t = 5t = 25$.

Solución del problema 9. Consideremos una de las diagonales del $2n$-ágono. Como las otras $n-1$ diagonales la intersecan y los extremos de cada diagonal son distintos (pues el punto de intersección S no es ningún vértice del polígono), se debe cumplir que hay $n-1$ puntos de un lado de esta diagonal y $n-1$ puntos del otro lado. Pero esto implica que la diagonal es un diámetro del polígono. De forma análoga se deduce que todas las diagonales son diámetros y, por lo tanto, todas pasan por el centro el cual debe ser el punto S.

Solución del problema 10. Un cuadrado perfecto solo puede terminar en $0, 1, 4, 5, 6$ o 9, de manera que cualquier número de la forma $22\ldots 2$, $33\ldots 3$, $77\ldots 7$ o $88\ldots 8$ no puede ser un cuadrado. Un número de la forma $44\ldots 4$ o de la forma $99\ldots 9$ es un cuadrado si y solo si el número correspondiente de la forma $11\ldots 1$ con la misma cantidad de dígitos también lo es. Sin embargo, es imposible que un número de la forma $11\ldots 1$ sea un cuadrado porque termina en 11 y, por tanto, es congruente a 3 módulo 4. Pero un cuadrado perfecto es congruente con 0 o 1 módulo 4.
Finalmente, un número de la forma $55\ldots 5$ termina en 55 y, por tanto, es congruente con 3 módulo 4. Por otro lado, un número de la forma $66\ldots 6$ termina en 66 y es congruente con 2 módulo 4. Concluimos que no hay cuadrados perfectos con la condición pedida.

Solución del problema 11. Supongamos que Pedro pudo hacerlo. Entonces, el número total de fichas pasó de $111 + 88 = 199$ a $199 + 33 = 232$. Además, si A es el número de fichas blancas y B es el número de fichas azules, entonces $A = \frac{5}{3}B$, de donde $232 = A + B = \frac{5}{3}B + B = \frac{8}{3}B$. Luego, $B = \frac{3\cdot 232}{8} = 87$ y $A = 232 - 87 = 145$. Si m denota la cantidad de veces que Pedro cambia 14 fichas azules por 11 fichas blancas y n denota la cantidad de veces que cambia 7 fichas blancas por 13 fichas azules, entonces

$$\begin{aligned} 111 - 14m + 13n &= 145, \\ 88 + 11m - 7n &= 87. \end{aligned}$$

Luego, $13n - 14m = 34$ y $7n - 11m = 1$, de donde $n = 8$ y $m = 5$. Por lo tanto, Pedro debe cambiar 5 veces 14 fichas azules por 11 fichas blancas y 8 veces 7 fichas blancas por 13 fichas azules.

Solución del problema 12. Separando las fracciones parciales, obtenemos

$$\frac{a+1}{a(a+2)} = \frac{1/2}{a+2} + \frac{1/2}{a} = \frac{1}{2(a+2)} + \frac{1}{2a}.$$

Por lo tanto, la suma inicial se puede reescribir como

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}\right).$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica[4], tenemos que $\frac{1}{a} +$

[4] Ver en el apéndice el teorema 8.

$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ y $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\geq\frac{9}{a+b+c+6}$. Luego,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\frac{9}{a+b+c}+\frac{9}{a+b+c+6}\right).$$

Pero como $a+b+c\leq 3$, la última expresión es mayor o igual a $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{3}+\frac{9}{9}\right)=2$, valor que se alcanza cuando $a=b=c=1$. Por lo tanto, el valor mínimo buscado es 2.

Solución del problema 13. De las desigualdades dadas tenemos que se debe cumplir que $a+4\leq e$ y $e^2+1\leq a^3$. Por lo tanto, tenemos que

$$(a+4)^2\leq e^2\leq a^3-1,$$

de donde se sigue que $(a+4)^2\leq a^3-1$, esto es, $(a-4)(a^2+3a+4)\geq 1>0$. Esto significa que $a>4$. En consecuencia, tenemos que

$$a+b+c+d+e\geq 5+6+7+8+9=35.$$

Finalmente, es fácil ver que la elección $(a,b,c,d,e)=(5,6,7,8,9)$ satisface las condiciones del problema, de donde se sigue que el valor mínimo de la suma $a+b+c+d+e$ es 35.

Solución del problema 14. Demostraremos primero que $a^{d(a)}$ es un cuadrado para cada entero positivo a. Si a es un cuadrado, entonces cualquier potencia positiva de a es un cuadrado.
Si a no es un cuadrado, entonces el número de divisores positivos de a es par. En efecto, si d es un divisor positivo de a, entonces $\frac{a}{d}$ también es un divisor positivo de a. Como a no es un cuadrado, $d\neq\frac{a}{d}$. Luego, podemos agrupar a los divisores positivos de a en parejas de la forma $(d,\frac{a}{d})$, lo que significa que el número de divisores positivos de a es par. Esto implica que $a^{d(a)}$ es un cuadrado.
Por lo tanto, la expresión del problema es una suma de dos cuadrados. Como todo entero positivo de la forma $4k+3$ no puede ser escrito como suma de dos cuadrados (porque 0 y 1 son los únicos posibles residuos que deja un cuadrado al dividirse por 4), todos los enteros positivos de la forma $4k+3$ no pueden escribirse en la forma $a^{d(a)}+b^{d(b)}$ con a y b enteros positivos.

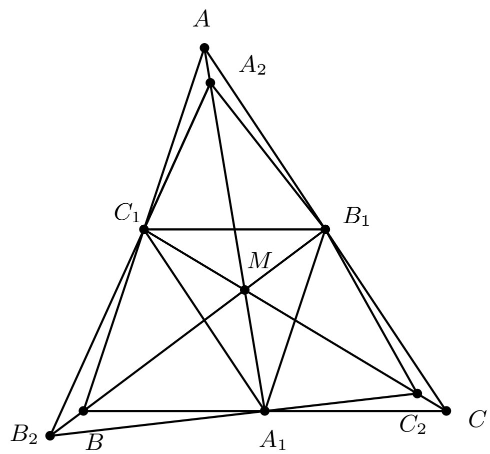
Solución del problema 15. Denotemos con p_n al número de permutaciones con la propiedad deseada. Así, $p_1=0$ y $p_2=1$. Sea $n\geq 2$. El número de permutaciones con $a_n=n$ es igual a p_{n-1}. Consideremos todas las permutaciones $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ con $a_i=n$, donde $1\leq i\leq n-1$ está fija. Dado que antes de $a_i=n$, los números deben estar de menor a mayor; además, a partir de ese número se debe cumplir lo mismo, entonces basta con escoger a los primeros $i-1$ números. Por lo tanto, el número de permutaciones $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ con $a_i=n$ que cumplen con las condiciones del problema es igual a $\binom{n-1}{i-1}$. De esta manera

$$p_n=p_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}=p_{n-1}+(1+1)^{n-1}-\binom{n-1}{0}=p_{n-1}+2^{n-1}-1.$$

Por un argumento recursivo obtenemos que

$$p_n = (2^{n-1} - 1) + (2^{n-2} - 1) + \cdots + (2 - 1) = 2^n - n - 1.$$

Solución del problema 16. Supongamos que M es el gravicentro del triángulo $A_1B_1C_1$. Sea A_2 un punto en la recta MA de tal forma que $B_1A_1C_1A_2$ sea un paralelogramo, en ese orden. De manera análoga se definen B_2 y C_2.



Dado que A_2C_1 y C_1B_2 son paralelas a A_1B_1, los puntos A_2, C_1 y B_2 son colineales y C_1 es el punto medio del segmento A_2B_2. Lo mismo ocurre con los puntos A_2, B_1 y C_2, al igual que con los puntos C_2, A_1 y B_2. Supongamos que $A_2 \neq A$ y que A está entre A_2 y M. Como A_2, B_1 y C_2 son colineales y C_2 está en la recta CM, tenemos que C_2 está entre C y M. Así, B está entre B_2 y M. Entonces, A_2 está entre A y M, lo que es una contradicción. De manera análoga se llega a una contradicción si A_2 está entre A y M. Por lo tanto, $A_2 = A$. Argumentos similares demuestran que $B_2 = B$ y $C_2 = C$. Pero, el triángulo de los puntos medios de cualquier triángulo ABC cumple que tiene el mismo gravicentro que el triángulo ABC. Así, M es el gravicentro del triángulo ABC.

Solución del problema 17. Sean $m = 2p+1$ y $n = 2q+1$. Definamos $g : A \to A$ tal que $g(i) = p+i+1$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, $g(i) = q+i+1$ para $i = m+1, m+2, \ldots, m+q$, $g(2p+1) = p+1$, $g(p+1) = 1$, $g(m+2q+1) = m+q+1$ y $g(m+q+1) = m+1$. Una verificación directa por casos demuestra que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Solución del problema 18. Sean $\{x_1, x_2\}$, $\{x_3, x_4\}$ y $\{x_5, x_6\}$ las raíces de las tres ecuaciones, en ese orden, y se asumirá que son números naturales. Por la fórmula de Vieta se sabe que $2a = x_1 + x_2$, $b = x_1x_2$, $2b = x_3 + x_4$, $c = x_3x_4$, $2c = x_5 + x_6$ y $a = x_5x_6$.

Si $x_i \geq 2$, para todo $i = 1, 2, \ldots, 6$, entonces $2a = x_1 + x_2 \leq x_1x_2 = b$, $2b =$

$x_3 + x_4 \leq x_3x_4 = c$, $2c = x_5 + x_6 \leq x_5x_6 = a$. Así, $2(a + b + c) \leq a + b + c$; es decir, $a + b + c \leq 0$, lo cual es imposible porque a, b y c son números naturales.
Por lo tanto, al menos uno de los números x_i es igual a 1. Sin pérdida de generalidad, se asumirá que $x_1 = 1$. Así, $1 - 2a + b = 0$; es decir, $b = 2a - 1$.
Si $x_i \geq 2$, para todo $i = 3, 4, 5, 6$, entonces $2(b + c) = (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6) \leq x_3x_4 + x_5x_6 = c + a$. Por lo tanto, $2(2a - 1 + c) \leq c + a$; es decir, $c \leq 2 - 3a$. Esto último no es posible cuando a y c son naturales.
Por lo tanto, al menos uno de entre x_3, x_4, x_5 y x_6 es igual a 1. Supongamos que $x_3 = 1$, entonces $1 - 2b + c = 0$. Ahora, asumamos que $x_5 \geq 2$ y $x_6 \geq 2$, entonces $2c = x_5 + x_6 \leq x_5x_6 = a$; es decir, $2(2b - 1) \leq \frac{b+1}{2}$. Por lo tanto, $7b \leq 5$, lo que es imposible si b es un número natural.
Así, al menos uno de los números x_5 y x_6 es 1, de lo que se sigue que $1 - 2c + a = 0$. Entonces, $0 = (1 - 2a + b) + (1 - 2b + c) + (1 - 2c + a) = 3 - (a + b + c)$. Como a, b y c son naturales, entonces $a = b = c = 1$. Los demás casos son análogos. Una verificación directa demuestra que $a = b = c = 1$ satisface con las condiciones deseadas.

Solución del problema 19. Sea m un entero entre 0 y $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$. Si se compara el coeficiente de x^m en ambos lados de la expresión $P_{n+3}(x) = 3P_{n+2}(x) - 3P_{n+1}(x) + (x + 1)P_n(x)$, se obtiene que el problema es equivalente a demostrar que

$$\binom{n+3}{3m+2} = 3\binom{n+2}{3m+2} - 3\binom{n+1}{3m+2} + \binom{n}{3m+2} + \binom{n}{3m-1}.$$

Para demostrar la igualdad anterior se demostrará primero que $\binom{a+1}{b} = \binom{a}{b} + \binom{a}{b-1}$. Un argumento combinatorio para la igualdad anterior es que $\binom{a+1}{b}$ es el número de formas de escoger b personas de un conjunto de $a + 1$ personas. Esto también se puede hacer al fijar una persona de las $a+1$; así, para tomar $b+1$ personas se puede o escoger $b + 1$ de las a personas restantes, que se puede hacer de $\binom{a}{b}$ formas, o escoger $b - 1$ personas de entre las a personas restantes y agregar a la persona fija, que se puede hacer de $\binom{a}{b-1}$ formas. Así,

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{n+3}{3m+2} - \binom{n+2}{3m+2}\right) - 2\left(\binom{n+2}{3m+2} - \binom{n+1}{3m+2}\right) + \\
&+ \left(\binom{n+1}{3m+2} - \binom{n}{3m+2}\right) - \binom{n}{3m-1} \\
&= \binom{n+2}{3m+1} - 2\binom{n+1}{3m+1} + \binom{n}{3m+1} - \binom{n}{3m-1} \\
&= \left(\binom{n+2}{3m+1} - \binom{n+1}{3m+1}\right) - \left(\binom{n+1}{3m+1} - \binom{n}{3m+1}\right) - \binom{n}{3m-1} \\
&= \binom{n+1}{3m} - \binom{n}{3m} - \binom{n}{3m-1} = 0.
\end{aligned}$$

Solución del problema 20. Claramente, la cuarteta $(4,5,5,5)$ satisface que $4+5+5+5=19$ y $4^2+5^2+5^2+5^2=91$, de modo que $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{17}{20}$. Demostraremos que $\frac{17}{20}$ es el valor máximo buscado.

Supongamos que a,b,c y d son números reales cuya suma es 19 y cuya suma de cuadrados es 91. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz[5] tenemos que $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$, esto es, $(19-d)^2 \leq 3(91-d^2)$. Simplificando esta desigualdad, obtenemos que $4d^2-38d+88 \leq 0$, esto es, $(d-\frac{11}{2})(d-4) \leq 0$. De aquí que $4 \leq d \leq \frac{11}{2}$. De manera análoga, obtenemos que cada uno de a, b y c es mayor o igual que 4 y menor o igual que $\frac{11}{2}$. Denotemos por $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=c$ y $x_4=d$. Como $4 \leq x_i \leq \frac{11}{2}$ para $i=1,2,3,4$, tenemos que $\frac{(x_i-4)(x_i-5)^2}{x_i} \geq 0$ para $i=1,2,3,4$ y, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{(x_i-4)(x_i-5)^2}{x_i} \geq 0.$$

Desarrollando, obtenemos que $\sum_{i=1}^{4}(x_i^2-14x_i+65-\frac{100}{x_i}) \geq 0$, de donde se sigue que

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i} \leq \frac{1}{100}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2-14\sum_{i=1}^{4}x_i+\sum_{i=1}^{4}65\right)=\frac{1}{100}(91-14\cdot 19+65\cdot 4)=\frac{17}{20}.$$

Por lo tanto, $\frac{17}{20}$ es el valor máximo buscado.

[5] Ver en el apéndice el teorema 9.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2017 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Encuentra todos los números m de tres dígitos tales que si formamos el número de seis dígitos obtenido al escribir de forma consecutiva m y $m+1$, el resultado es un cuadrado perfecto.

Problema 2. Hay n islas conectadas vía aérea por m aerolíneas (todas las rutas son de ida y vuelta). Sea d_i el número de aerolíneas que tienen vuelos que salen de la isla i. Si $1 \leq d_i \leq 2010$ para toda i, demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4022m - 2010n.$$

Problema 3. Tres puntos A, B y C están sobre la circunferencia Ω. Sea X un punto variable sobre el arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A y considera I_1 y I_2 los incentros de los triángulos ABX y CAX, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos I_1XI_2 intersecan a Ω en un punto fijo.

Problema 4. Cada vértice de un $n-$ágono regular se colorea de un color entre verde, rojo y azul de manera que hay una cantidad impar de vértices coloreados de cada color. Si n es impar, demuestra que existe un triángulo iśosceles tal que ningún par de vértices son del mismo color.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos tales que $b \mid a^2 + 1$. Si $b > a$, demuestra que $b - a \geq \sqrt{a}$.

Problema 6. Sea G una gráfica conexa con k aristas. Demuestra que se pueden etiquetar las aristas con los números $1, 2, \ldots, k$, de manera que para cualquier vértice de grado mayor que 1, el máximo común divisor de todas las aristas que llegan a él es 1.

Problema 7. Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2 + b}{b^2 - a} \quad \text{y} \quad \frac{b^2 + a}{a^2 - b}$$

sean ambos enteros positivos.

Problema 8. Sean $n \geq 2$ un entero y $0 \leq x_i \leq 1$ números reales para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestra que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

y determina cuándo se da la igualdad.

Problema 9. Sea ABC un triángulo con semiperímetro s. Los puntos E y F están en la recta AB de tal forma que $CE = CF = s$. Demuestra que el excírculo ω_1 del triángulo ABC opuesto a C interseca al circuncírculo ω del triángulo EFC.

Problema 10. Sea $A = \{1, 2, \ldots, m + n\}$, donde m y n son enteros positivos y sea $f : A \to A$ una función definida por las ecuaciones:

- $f(i) = i + 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m - 1, m + 1, \ldots, m + n - 1$,
- $f(m) = 1$ y $f(m + n) = m + 1$.

Demuestra que si m es par, entonces $m = n$ si y solo si existe una función $g : A \to A$ tal que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2016 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2016. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2017, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Considera 64 números $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{64}$, cada uno igual a 1 o -1, escritos en una pizarra. A continuación se reemplazan esos números por

$$x_1x_2,\ x_2x_3,\ x_3x_4, \ldots,\ x_{63}x_{64},\ x_{64}x_1.$$

Demuestra que no importa cómo se asignen los valores 1 y -1, si se repite la operación varias veces, es posible lograr que todos los números escritos en la pizarra sean positivos.

Solución. Consideremos el resultado de aplicar la operación varias veces:

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \ldots, x_{64} &\to (x_1x_2), (x_2x_3), \ldots, (x_{64}x_1) \\ &\to (x_1x_2^2x_3), (x_2, x_3^2x_4), \ldots, (x_{64}x_1^2x_2), \end{aligned}$$

pero como $x_j^2 = 1$, los números que resultan son $x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \ldots, x_{64}x_2$. Repetimos el proceso otras dos veces:

$$\begin{aligned} x_1x_3, x_2x_4, x_3x_5, \ldots, x_{64}x_2 &\to (x_1x_2x_3x_4), (x_2x_4x_3x_5), \ldots, (x_{64}x_2x_1x_3) \\ &\to (x_1x_x^2x_3^2x_4^2x_5), (x_2x_3^2x_4^2x_5^2x_6), \ldots, (x_{64}x_1^2x_2^2x_3^2x_4) \\ &\to (x_1x_5), (x_2x_6), (x_3x_7), \ldots, (x_{64}x_4). \end{aligned}$$

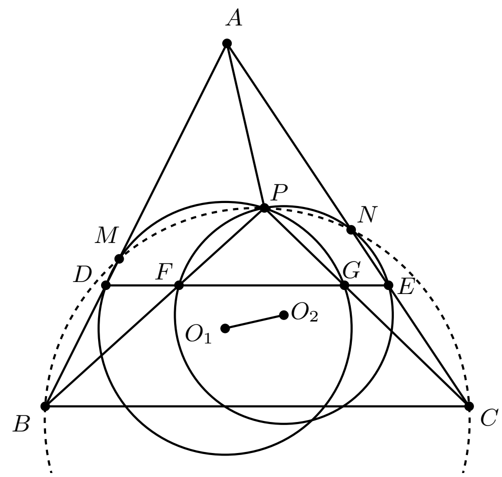
Es posible probar por inducción que después de $2m$ pasos, los números en la pizarra serán

$$(x_1x_{1+2^m}), (x_2x_{2+2^m}), (x_3x_{3+2^m}), \ldots, (x_{64}x_{64+2^m}),$$

en donde los índices mayores que 64 se reducen módulo 64. En particular, si $m = 6$, al cabo de 12 pasos tendremos en la pizarra a los números x_1^2, x_2^2, $x_3^2, \ldots, x_{64}^2$, porque los índices se desplazan exactamente 64 lugares módulo 64 y todos ellos son positivos.

Problema 2. En el triángulo ABC considera un punto D en AB y un punto E en AC tales que DE sea paralela a BC. Sea P un punto arbitrario en el interior del triángulo ADE y sean F y G las intersecciones de BP y CP con DE, respectivamente. Si O_1 y O_2 son los circuncentros de los triángulos DPG y EPF, respectivamente, demuestra que AP y O_1O_2 son perpendiculares.

Solución. Denotemos por M a la intersección del circuncírculo del triángulo DPG con AB y por N a la intersección del circuncírculo del triángulo PFE con AC. Sea $\alpha = \angle DMP$.



Por el cuadrilátero cíclico $DMPG$, tenemos que $\angle DGP = 180^\circ - \alpha$ y, por el paralelismo de BC y DE, tenemos que $\angle PCB = \angle DGP$. Esto es suficiente para asegurar que $MPCB$ es un cuadrilátero cíclico. Un argumento similar prueba que $NPBC$ también es cíclico.
Pero al estar M y N en los circuncírculos, el cuadrilátero $BMNC$ tambén es cíclico y por el paralelismo de DE y BC, el cuadrilátero $DMNE$ también lo será.
Así, $AE \cdot AN = AD \cdot AM$ y por tanto A está en el eje radical de los círculos DPG y PFE, por lo que AP y O_1O_2 son perpendiculares.

Problema 3. Demuestra que no existe un conjunto de 7 enteros positivos distintos y menores o iguales que 24 tales que las sumas de los elementos de todos sus subconjuntos son distintas.

Solución. La menor suma posible de un subconjunto es 1, mientras que la máxima suma es igual a $24+23+22+21+20+19+18 = 147$. Entonces, hay $147-28+1 = 120$ posibles sumas. Como hay $2^7 - 1 = 127$ subconjuntos no vacíos, no podemos aplicar directamente el principio de las casillas, puesto que hay más sumas que subconjuntos.
Si hay 4 números consecutivos o en progresión aritmética, $a, a+d, a+2d, a+3d$, tendremos dos subconjuntos que tienen la misma suma: $\{a, a+3d\}$ y $\{a, a+2d\}$. Esto quiere decir que la máxima suma posible sería $24 + 23 + 22 + 20 + 19 + 17 + 16 = 141$ (evitando 4 términos en progresión aritmética con diferencia 1 y 2) en cuyo caso la menor suma posible sería 16 y por tanto hay 126 sumas posibles. Como hay 127 subconjuntos, por el principio de las casillas hay dos subconjuntos con la misma suma.
En general, si c es el menor de los 7 números, la máxima suma no puede ser mayor que $c + 17 + 19 + 20 + 22 + 23 + 24 = 125 + c$ (y no siempre puede alcanzar ese valor, por ejemplo, cuando $c = 1$, que aparezca el 24 impide que aparezca 23 pues $\{1, 23\}$ tiene la misma suma que $\{24\}$).
Pero si la máxima suma no excede $125 + c$ la mínima es c, no puede haber más de $(125 + c) - (c - 1) = 126$ sumas posibles (puede haber menos, cuando no se alcanza

la cota), y como hay 127 subconjuntos no vacíos, el principio de las casillas garantiza la existencia de dos subconjuntos con la misma suma.

Problema 4. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ números reales positivos tales que $x_1 x_2 \cdots x_k \geq y_1 y_2 \cdots y_k$ para cualquier $1 \leq k \leq n$. Demuestra que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Solución. Por la desigualdad MA-MG y la hipótesis del problema se tiene que

$$\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \cdots + \frac{x_k}{y_k} \geq k \sqrt[k]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_k}{y_1 y_2 \cdots y_k}} \geq k \tag{1}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n =& y_1 \frac{x_1}{y_1} + x_2 \frac{x_2}{y_2} + \cdots + y_n \frac{x_n}{y_n} \\ =& \frac{x_1}{y_1}(y_1 - y_2) + \left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}\right)(y_2 - y_3) + \cdots \\ &+ \left(\frac{x_1}{y_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)(y_{n-1} - y_n) + \left(\frac{x_1}{y_1} + \cdots + \frac{x_n}{y_n}\right) y_n. \end{aligned}$$

Aplicando (1) a la desigualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &\geq 1(y_1 - y_2) + 2(y_2 - y_3) + \cdots + (n-1)(y_{n-1} - y_n) + n y_n \\ &= y_1 + y_2 + \cdots + y_n, \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

Problema 5. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función tal que $f(1) = 1$, $f(2n) = f(n)$ y $f(2n + 1) = 1 + f(2n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Encuentra el valor máximo $f(n)$ que toma esta función cuando $1 \leq n \leq 2016$.

Solución. Demostraremos por inducción que

$f(n)$ es igual a la cantidad de unos que aparecen en la representación en base 2 de n.

Veamos que para $n = 1$ es cierto y para $n = 2 = 10_2$ se tiene que $f(2) = f(1) = 1$, por lo tanto la base de inducción es cierta. Supongamos que para todo $k \leq n$ es cierto. Consideremos los siguientes casos.
Caso 1. $n + 1 = 2m$. Entonces $f(n + 1) = f(m)$ y por hipótesis de inducción esta es la cantidad de unos que aparecen en la representación en base 2 de m que es la misma para $2m$ pues solo recorre los dígitos hacia la izquierda y agrega un cero en base 2.
Caso 2. $n+1 = 2m+1$. Entonces $f(n+1) = 1+f(2m)$ y por hipótesis de inducción esto es la cantidad de unos que aparecen en la representación base dos de $2m$ mas uno que es justamente la cantidad de unos que aparecen en la representación en base 2 de $2m + 1$, pues en base 2 este número es $2m$ con un uno en el dígito de las unidades.

Con esto se termina la inducción y por lo tanto basta encontrar el número menor a 2016 que tenga la mayor cantidad de unos en base 2. Como $11111111111_2 = 2047$ es mayor que 2016, la función no alcanza el valor de 10 cuando $1 \leq n \leq 2016$, entonces el máximo es 9 que se alcanza en $1111111111_2 = 1023$.

Problema 6. Sea ABC un triángulo. Los puntos D y E son los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. Se toma un punto X sobre la altura desde A y se construye el punto Y como la intersección de la recta que se obtiene de reflejar XD por BD y la recta que se obtiene de reflejar XE por CE. Si el cuadrilátero $DYEX$ es cíclico, demuestra que la recta tangente por Y al circuncírculo del cuadrilátero $DYEX$, la recta BC y la recta DE concurren.

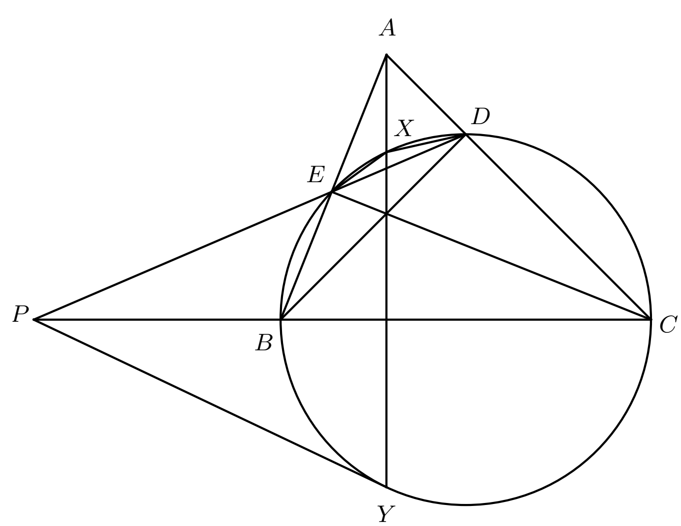
Solución. Denotemos por $\alpha = \angle XDB$ y $\beta = \angle CEX$. Como el cuadrilátero $DYEX$ es cíclico, tenemos que

$$180^\circ = \angle XDY + \angle YEX = 2\alpha + 2\beta,$$

donde la segunda igualdad se sigue por las reflexiones de rectas. Entonces, $\alpha+\beta = 90^\circ$. Con esto podemos notar que

$$\angle BEX + \angle XDB = 90^\circ + \angle CEX + \alpha = 90^\circ + \beta + \alpha = 180^\circ,$$

por lo que el cuadrilátero $EBDX$ también es cíclico. Puesto que este cuadrilátero comparte tres vértices con el cuadriláetro $DYEX$, se tiene que el circuncírculo de ambos cuadriláteros es el mismo. Como el circuncírculo del cuadrilátero $EBDX$ es la circunferencia con diámetro BC, con lo anterior se concluye que X e Y están sobre esta circunferencia. Como BD y CE son bisectrices de los ángulos $\angle XDY$ y $\angle YEX$ se tiene que $BX = BY$ y $CX = CY$. Entonces, BC es la mediatriz del segmento XY y por lo tanto Y es el reflejado de X por BC.



Sea P el punto de intersección de BC con DE. Puesto que el cuadrilátero $BCDE$ es cíclico, es conocido que A está en la polar de P con respecto al circuncírculo del triángulo $BCDE$ que es la circunferencia de diámetro BC. Además, como AX es perpendicular a BC, que es la recta que pasa por P y por el centro de esta circunferencia, se tiene que AX es la polar de P con respecto a la circunferencia. Por último como la polar de un punto con respecto a la circunferencia, corta a la circunferencia en X e Y se debe tener que PX y PY son tangentes a esta circunferencia, que es en particular el circuncírculo del triángulo DYE, como se quería.

Problema 7. Sean $a \geq 2$ y $n \geq 1$ enteros. Demuestra que la congruencia

$$x^n \equiv a \pmod{p}$$

tiene solución para una infinidad de primos p.

Solución. Observemos primero que la congruencia $x^n \equiv a \pmod{p}$ tiene solución $x = 0$ para todo primo p divisor de a. Supongamos que la congruencia tiene solución para solo una cantidad finita t de primos y sean $p_1, p_2, \ldots, p_t$ estos primos, de manera que los primeros s (con $1 \leq s \leq t$) son los divisores primos de a. Sea r un número natural tal que el número

$$b := [(p_1 \cdots p_s + 1)(p_{s+1} \cdots p_t)]^{nr} - a$$

es mayor que 1. Tomemos un número primo q divisor de b, entonces la congruencia $x^n \equiv a \pmod{q}$ tiene solución $x = [(p_1 \cdots p_s + 1)(p_{s+1} \cdots p_t)]^r$. Veamos ahora que q no puede ser igual a p_i para $i = 1, \ldots, t$. Si $q = p_i$ para alguna $1 \leq i \leq s$, como $q \mid b$ y $q \mid a$, entonces $q \mid (p_1 \cdots p_s + 1)$ o $q \mid p_{s+1} \cdots p_t$, ambas condiciones son imposibles. El otro caso que debemos considerar es $q = p_i$ para alguna $i > s$, en este caso, como $q \mid p_{s+1} \cdots p_t$ y $q \mid b$, tenemos que $q \mid a$, lo cual es también una contradicción. Por lo tanto, q es un nuevo primo para el cual la congruencia $x^n \equiv a \pmod{p}$ tiene solución, esto es una contradicción, de manera que el conjunto de primos para los cuales la congruencia tiene solución es infinito.

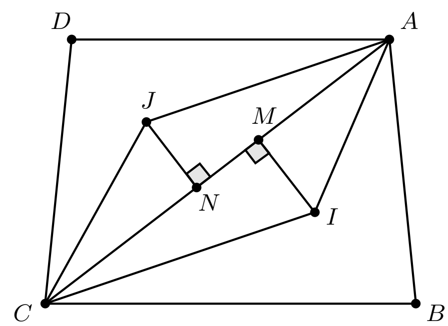
Problema 8. Sea $ABCD$ un trapecio con la propiedad de que los triángulos ABC, ACD, ABD y BCD tienen el mismo inradio. Demuestra que los puntos A, B, C y D son los vértices de un rectángulo.

Solución. Sean $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$ y $d = DA$ los lados del trapecio y sean $h = AC$ y $k = BD$ sus diagonales. Sea r el inradio común de los triángulos ABC, ACD, ABD y BCD y supongamos que BC y AD son paralelas.
Dado un triángulo XYZ, denotemos su área por (XYZ). Observemos que $(ABC) + (CDA) = (ABD) + (BCD)$, esto es,

$$r\left(\frac{a+b+h}{2}\right) + r\left(\frac{c+d+h}{2}\right) = r\left(\frac{a+d+k}{2}\right) + r\left(\frac{b+c+k}{2}\right),$$

y, por tanto, $h = k$. Ahora, como $BC \parallel AD$, tenemos que $(ABC) = (BCD)$; luego $r\left(\frac{a+b+h}{2}\right) = r\left(\frac{b+c+h}{2}\right)$, de donde $a = c$ y los triángulos ABC y DCB son congruentes, por lo que el trapecio es isósceles.

Consideremos ahora los incentros I y J de los triángulos ABC y CDA, respectivamente. Sean M el pie de la perpendicular de I a AC, y N el pie de la perpendicular a AC por J.



Por el paralelismo de BC y AD, tenemos que $\angle BCA = \angle DAC$ y, como CI y AJ son bisectrices, entonces, $\angle ICM = \angle JAN$, por lo que, los triángulos rectángulos ANJ y CMI son congruentes, de donde $AJ = CI$. Como AJ y CI son paralelas y $AJ = CI$, tenemos que $AICJ$ es un paralelogramo. De aquí que $\angle IAJ = \angle JCI$, por tanto, $\angle BAD = 2\angle IAJ = 2\angle JCI = \angle DCB$. Pero, $\angle BAD + \angle DCB = 180°$, entonces $\angle BAD = \angle DCB = 90°$, de donde $ABCD$ es un rectángulo.

Problema 9. Dados 2016 números reales tales que su suma es igual a 1, demuestra que se pueden distribuir alrededor de una circunferencia de manera que la suma de los 2016 productos obtenidos al multiplicar cualesquiera dos números vecinos sea menor que $\frac{1}{2016}$.

Solución. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{2016}$ los 2016 números. Si fijamos uno de ellos, hay 2015! maneras de ubicar los restantes y, por lo tanto, hay 2015! posibles sumas de los productos de números vecinos. La suma de estas 2015! sumas está formada por términos de la forma $x_i \cdot x_j$.
Hay $\frac{2016\cdot 2015}{2}$ pares (x_i, x_j) y cada producto $x_i \cdot x_j$ figura en igual número de sumas, luego la suma de todas las posibles sumas es igual a

$$2(2014)! \sum_{1\leq i<j\leq 2016} x_i \cdot x_j = 2014! \left(\left(\sum_{i=1}^{2016} x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{2016} x_i^2 \right) = 2014! \left(1 - \sum_{i=1}^{2016} x_i^2 \right).$$

Si todas las 2015! sumas de los 2016 productos de números vecinos fueran todas mayores que $\frac{1}{2016}$, entonces

$$2014! \left(1 - \sum_{i=1}^{2016} x_i^2 \right) > \frac{2015!}{2016},$$

esto es

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i^2 < \frac{1}{2016}.$$

Por otro lado, si $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ son números no negativos, entonces verifican la desigualdad $\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_{2016}^2}{2016}} \geq \frac{a_1+\cdots+a_{2016}}{2016}$. En el caso del problema, como los números pueden ser también negativos,

$$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_{2016}^2}{2016}} \geq \frac{\mid x_1 \mid + \cdots + \mid x_{2016} \mid}{2016} \geq \frac{x_1+\cdots+x_{2016}}{2016} = \frac{1}{2016}.$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{2016} x_i^2 \geq \frac{1}{2016},$$

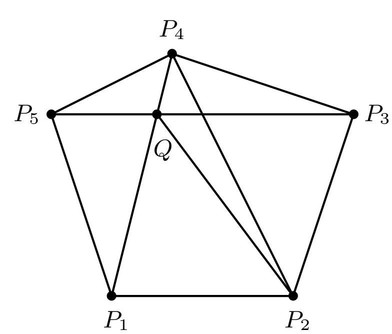
lo cual es una contradicción. Por lo tanto, al menos una de las $2015!$ sumas es menor que $\frac{1}{2016}$.

Problema 10. Demuestra que en todo pentágono convexo $P_1P_2P_3P_4P_5$ de área 1, hay dos triángulos $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ y $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ (donde $P_6 = P_1$ y $P_7 = P_2$) formados por tres vértices consecutivos del pentágono, tales que

$$(P_iP_{i+1}P_{i+2}) \leq \frac{5-\sqrt{5}}{10} \leq (P_jP_{j+1}P_{j+2}),$$

donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

Solución. Demostraremos que hay un triángulo $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ cuya área es mayor o igual que $\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$. Supongamos lo contrario, que las áreas de todos los triángulos $P_jP_{j+1}P_{j+2}$ son todas menores que α. Sea Q el punto de intersección de P_1P_4 y P_3P_5.



Notemos que

$$(P_1P_2Q) \leq \text{máx}((P_1P_2P_5), (P_1P_2P_3)) < \alpha$$

y, por lo tanto, $(P_1P_2P_4) = 1 - (P_1P_4P_5) - (P_2P_3P_4) > 1 - 2\alpha$. Luego,

$$\frac{P_1Q}{P_1P_4} = \frac{(P_1P_2Q)}{(P_1P_2P_4)} < \frac{\alpha}{1-2\alpha}.$$

Además, tenemos que $\frac{P_1Q}{P_4Q} = \frac{(P_1P_3P_5)}{(P_3P_4P_5)}$. Como $(P_3P_4P_5) < \alpha$ (análogamente con $P_1P_2P_4$) y $(P_1P_3P_5) > 1-2\alpha$, tenemos que

$$\frac{P_1Q}{P_4Q} > \frac{1-2\alpha}{\alpha} \Longleftrightarrow \frac{P_1Q}{P_1P_4} > \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1-2\alpha}{1-\alpha} < \frac{P_1Q}{P_1P_4} < \frac{\alpha}{1-2\alpha} \Longrightarrow 5\alpha^2 - 5\alpha + 1 < 0 \Longleftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{10} < \alpha < \frac{5+\sqrt{5}}{10},$$

lo cual es un absurdo.
La otra desigualdad se puede demostrar de manera análoga, invirtiendo las desigualdades.

Concursos Estatales

31$^{\text{a}}$ Olimpiada de Matemáticas en Yucatán

El concurso estatal de la Olimpiada de Matemáticas en Yucatán se lleva a cabo en el mes de abril y participan alumnos de primaria, secundaria y bachillerato y, es la cumbre de un proceso selectivo que dura más de 6 meses y que inicia desde septiembre del año anterior.

En Yucatán, la Olimpiada de Matemáticas tiene una de las coberturas más extensas del país: anualmente, alrededor de 150,000 estudiantes presentan algún examen selectivo de la Olimpiada de Matemáticas en sus diferentes modalidades. Los procesos selectivos de secundaria y primaria constan de cuatro fases cada uno, de donde surgen las selecciones que participan en diferentes competencias.

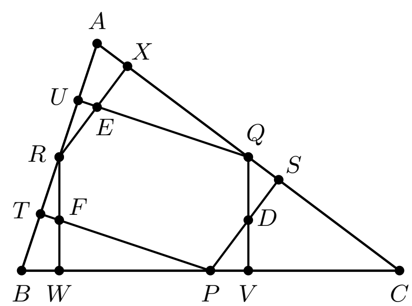
Como parte de dicho proceso, los 100 mejores estudiantes de secundaria y primaria participan en el Concurso Estatal junto con los estudiantes de bachillerato, siendo en total alrededor de 400 o 500 participantes por año en los tres niveles. Del concurso estatal se obtiene una preselección de entre 15 y 20 alumnos, los cuales entrenan otros 6 meses y de donde surge finalmente la selección que asiste al Concurso Nacional.

A continuación presentamos los problemas del concurso estatal de la 31^a Olimpiada de Matemáticas en Yucatán. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Lina escoge un número de 3 dígitos distintos y que ninguno sea cero. Amanda escribe los 5 números que se pueden formar revolviendo los dígitos del número que escogió Lina. Por ejemplo, si Lina escoge 123, Amanda escribe 312, 213, 132, 231, 321. Si la suma de los números que escribió Amanda es 3231, ¿qué número escogió Lina? Encuentra todas las posibles respuestas.

Problema 2. En el reino de Marinola, los magos Deeds y Drini realizan un duelo mágico. En una pared está escrito un número y cada día el mago Deeds lanza un hechizo que cambia el número, aumentando en 113 al número que había el día anterior (por ejemplo, si hoy está el número 53, mañana estará 166). El mago Drini conoce un contrahechizo que le permite cambiar el orden de los dígitos del número en la pared (si la pared tiene 403, puede hacer que cambie a 340, 043, etc.), pero solo lo puede usar después de que Deeds lance el suyo (aunque no es obligatorio que Drini use el suyo todos los días). Si algún día el número de la pared llega a ser mayor que 1000, el mago Deeds gana el duelo. Hoy el número en la pared es 777. ¿Puede el mago Drini evitar que el mago Deeds gane el duelo? Si lo puede hacer, explica detalladamente el modo en que lo puede evitar. Si no lo puede hacer, explica detalladamente el por qué siempre llegará un día en el que la pared tenga un número mayor a 1000.

Problema 3. Considera un triángulo acutángulo ABC en el que P, Q, R son los puntos medios de los lados BC, CA y AB, respectivamente. Traza las perpendiculares PS, PT, QU, QV, RW, RX hacia los lados, como muestra la figura.

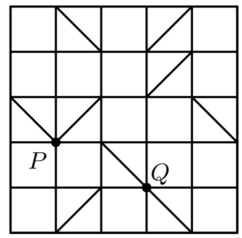


Sean D la intersección de PS con QV, E la intersección de QU con RX, y F la intersección de RW con PT. Demuestra que el área del hexágono $PDQERF$ es la mitad del área del triángulo ABC.

Problema 4. El granjero Darío tiene varios cochinos. Si los dos más pequeños pesan juntos la cuarta parte de lo que pesarían todos juntos, pero los tres más pesados pesan juntos $\frac{3}{5}$ de lo que pesarían todos juntos, ¿cuántos cochinos tiene el granjero Darío? Encuentra todas las posibles respuestas.

Problema 5. Sea ABC un triángulo isósceles ($AB = AC$) y X algún punto en el lado BC. Toma puntos P y Q en los lados AB y AC, respectivamente, de manera que $APXQ$ sea un paralelogramo. Sea Y el punto que obtienes al reflejar X con respecto a la recta PQ. Demuestra que $\angle ABY = \angle ACY$.

Problema 6. Mauricio dibuja una cuadrícula de 5×5. A continuación, dibuja diagonales en algunos de los 25 cuadritos, de manera que no haya dos diagonales que se toquen. Por ejemplo, en la siguiente figura hay diagonales que sí se tocan (en el punto P y también en el punto Q).



¿Cuál es la mayor cantidad de diagonales que puede dibujar Mauricio sin que haya diagonales que se toquen?

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Primer lugar por países, así como dos medallas de oro y una de plata, trajeron consigo los tres dedicados jóvenes mexicanos que representaron a nuestro país en la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, que se llevó a cabo en San Ignacio, Chalatenango, El Salvador, del 14 al 21 de junio de 2017.

Eric Iván Hernández Palacios y Pablo Alhui Valeriano Quiroz (ambos de Nuevo León) obtuvieron medalla de oro, mientras que Jesús Omar Sistos Barrón (de Guanajuato) obtuvo medalla de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Ignacio Barradas Bribiesca (jefe de la delegación) y Oscar Samuel Henney Arthur (tutor).

Sus logros colocaron a México en el primer lugar general por países en el evento, quedando por encima de Colombia, Venezuela, Puerto Rico, El Salvador y Cuba, entre otros.

Esta competencia regional, en la que participaron 14 países y un total de 35 estudiantes, está abierta a jóvenes menores de 16 años que no hayan participado en olimpiadas más avanzadas, ni en más de una ocasión en esta misma competencia. La finalidad es que los países participantes motiven y preparen a sus estudiantes más jóvenes para concursos más exigentes.

A continuación presentamos los problemas de la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. En la figura se muestra una malla hexagonal formada por triangulitos equiláteros. Gabriel y Arnoldo toman turnos para jugar de la siguiente manera. En su turno, cada jugador colorea un segmento de recta, incluidos sus extremos, de acuerdo a las reglas:

(I) Los extremos del segmento deben coincidir con los vértices de algunos de los triangulitos.
(II) El segmento debe estar formado por uno o varios lados de algunos de los triangulitos.
(III) El segmento no puede tener nignún punto en común con ninguno de los segmentos coloreados anteriormente (incluidos los extremos).

Pierde el jugador que en su turno no pueda colorear ningún segmento. Si Gabriel juega primero, determine qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbala.

Problema 2. Una pareja (a, b) de enteros positivos con $a < 391$ es *pupusa* si

$$\text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391).$$

Determine el valor mínimo que toma b entre las posibles parejas pupusa (a, b).
Nota. $\text{mcm}(a, b)$ denota al mínimo común múltiplo de a y b.

Problema 3. Dado un triángulo ABC, sean D el pie de la altura desde A y ℓ la recta que pasa por los puntos medios de AC y BC. Sea E la reflexión del punto D respecto a ℓ. Demuestre que el circuncentro del triángulo ABC está sobre la recta AE.

Problema 4. Sea ABC un triángulo rectángulo en B. Sean B' la reflexión de B con respecto a la recta AC y M el punto medio de AC. Se prolonga BM más allá de M hasta un punto D de modo que $BD = AC$. Demuestre que $B'C$ es la bisectriz del ángulo $\angle MB'D$.

Problema 5. Susana y Brenda juegan a escribir polinomios, tomando turnos iniciando por Susana.

- En el turno de preparación (turno 0), Susana elige un entero positivo n_0 y escribe el polinomio $P_0(x) = n_0$.
- Luego, en el turno 1, Brenda elige un entero positivo n_1 distinto de n_0 y escribe uno de los dos polinomios $P_1(x) = n_1 x - P_0(x)$ o bien $P_1(x) = n_1 x + P_0(x)$.
- En general, en el turno k la jugadora correspondiente elige un entero positivo n_k distinto de $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ y escribe uno de los dos polinomios:

$$P_k(x) = n_k x^k - P_{k-1}(x) \quad \text{o bien} \quad P_k(x) = n_k x^k + P_{k-1}(x).$$

Gana quien escriba un polinomio que tenga por lo menos una raíz entera. Determine quién jugadora tiene una estrategia ganadora y describa dicha estrategia.

Problema 6. Sea k un entero mayor que 1. Inicialmente la rana Tita se encuentra situada sobre el punto k de la recta numérica. En un movimiento, si Tita se encuentra sobre el punto n, entonces salta al punto $f(n) + g(n)$, donde $f(n)$ y $g(n)$ son el mayor y el menor número primo (ambos positivos) que dividen a n, respectivamente. Determine todos los valores de k para los cuales Tita puede visitar una cantidad infinita de puntos diferentes de la recta numérica.

58^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Una vez más, México se mantiene como un país que sabe identificar y entrenar a sus jóvenes talento en matemáticas, una disciplina considerada por muchos como la columna vertebral de las ciencias.

Muestra de ello son los resultados obtenidos por la delegación que representó a México en la 58^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas llevada a cabo del 13 al 23 de julio de 2017, en la ciudad de Río de Janeiro, Brasil.

Alfredo Alef Pineda Reyes (del Estado de México) obtuvo medalla de plata; Leonardo Ariel García Morán (de Jalisco) y Maximiliano Sánchez Garza (de Nuevo León) obtuvieron medalla de bronce; Oriol Andreu Solé Pi (de la Ciudad de México), Isaac Jair Jiménez Uribe (de Sinaloa) y Víctor Antonio Domínguez Silva (de Nuevo León) obtuvieron cada uno una mención honorífica. México quedó en el lugar número 43 de 112 países participantes.
Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Rogelio Valdez Delgado (líder), Jorge Garza Vargas (colíder) y Marco Antonio Figueroa Ibarra (observador).

A continuación, presentamos los problemas de la 58^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cada entero $a_0 > 1$, se define la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ tal que para cada $n \geq 0$:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } \sqrt{a_n} \text{ es entero,} \\ a_n + 3 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determinar todos los valores de a_0 para los que existe un número A tal que $a_n = A$ para infinitos valores de n.

(Problema sugerido por Sudáfrica).

Problema 2. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que, para cualesquiera números x e y,

$$f(f(x)f(y)) + f(x+y) = f(xy).$$

(Problema sugerido por Albania).

Problema 3. Un conejo invisible y un cazador juegan como sigue en el plano euclídeo. El punto de partida A_0 del conejo y el punto de partida B_0 del cazador son el mismo. Después de $n-1$ rondas del juego, el conejo se encuentra en el punto A_{n-1} y el cazador se encuentra en el punto B_{n-1}. En la n-ésima ronda del juego, ocurren tres hechos en el siguiente orden:

(i) El conejo se mueve de forma invisible a un punto A_n tal que la distancia entre A_{n-1} y A_n es exactamente 1.
(ii) Un dispositivo de rastreo reporta un punto P_n al cazador. La única información segura que da el dispositivo al cazador es que la distancia entre P_n y A_n es menor o igual que 1.
(iii) El cazador se mueve de forma visible a un punto B_n tal que la distancia entre B_{n-1} y B_n es exactamente 1.

¿Es siempre posible que, cualquiera que sea la manera en que se mueva el conejo y cualesquiera que sean los puntos que reporte el dispositivo de rastreo, el cazador pueda escoger sus movimientos de modo que después de 10^9 rondas el cazador pueda garantizar que la distancia entre él mismo y el conejo sea menor o igual que 100?

(Problema sugerido por Austria).

Problema 4. Sean R y S puntos distintos sobre la circunferencia Ω tales que RS no es un diámetro de Ω. Sea ℓ la recta tangente a Ω en R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento RT. El punto J se elige en el menor arco RS de Ω de manera que Γ, la circunferencia circunscrita al triángulo JST, interseca a ℓ en dos puntos distintos. Sea A el punto común de Γ y ℓ más cercano a R. La recta AJ corta por segunda vez a Γ en K. Demostrar que la recta KT es tangente a Γ.

(Problema sugerido por Luxemburgo).

Problema 5. Sea $N \geq 2$ un entero dado. Los $N(N+1)$ jugadores de un grupo de futbolistas, todos de distinta estatura, se colocan en fila. El técnico desea quitar $N(N-1)$ jugadores de esta fila, de modo que la fila resultante formada por los $2N$ jugadores restantes satisfaga las N condiciones siguientes:

(1) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores más altos.
(2) Que no quede nadie ubicado entre el tercer jugador más alto y el cuarto jugador más alto.
$\vdots$
(N) Que no quede nadie ubicado entre los dos jugadores de menor estatura.

Demostrar que esto siempre es posible.

(Problema sugerido por Rusia).

Problema 6. Un par ordenado (x, y) de enteros es *un punto primitivo* si el máximo común divisor de x e y es 1. Dado un conjunto finito S de puntos primitivos, demostrar que existen un entero positivo n y enteros $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que, para cada (x, y) de S, se cumple:

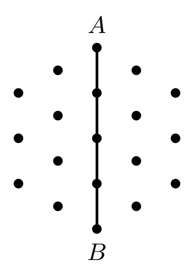
$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

(Problema sugerido por Estados Unidos).

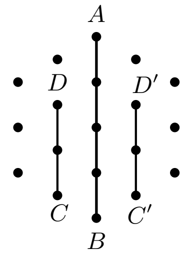
Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe

Solución del problema 1. (Solución de Jesús Omar Sistos Barrón). Demostraremos que Gabriel tiene estrategia ganadora y es la siguiente. En su primer turno, colorea el segmento AB indicado en la figura.



Con esto, la malla queda dividida en dos partes. Notemos que Arnoldo no puede colorear ningún segmento con un extremo en una parte y el otro extremo en la otra, pues de lo contrario, su segmento se intersecaría en algún punto. Luego, todo lo que Arnoldo (y Gabriel) hagan a partir de ahora, tendrá sus dos extremos en la misma parte. Así pues, la estrategia de Gabriel será simplemente reflejar lo que Arnoldo haya hecho en el turno anterior, a partir de su segundo turno, sobre la recta AB. Esto es posible ya que las dos partes de la malla son simétricas respecto de AB. Por ejemplo, si Arnoldo colorea el segmento CD en su primer turno, Gabriel colorea el segmento $C'D'$ en el siguiente.



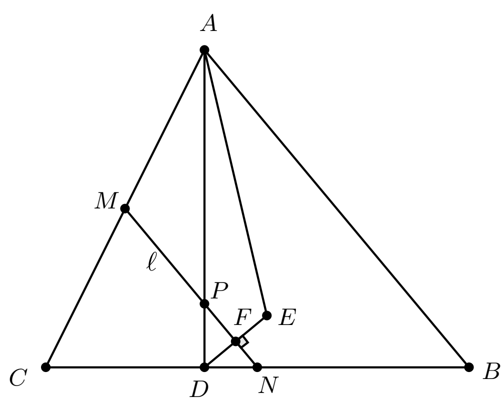
Queda claro que, siguiendo esta estrategia, si Arnoldo puede jugar, Gabriel también, por lo que el primero en no poder jugar será Arnoldo y, por lo tanto, Gabriel gana.

Solución del problema 2. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios). Demostraremos que en toda pareja pupusa (a, b), el entero b es mayor que 17 y dado que $(23, 18)$ es una pareja pupusa, esto establecerá a 18 como el mínimo valor de b.
Para esto, sea $k = \text{mcd}(a, 391)$. Como $391 = 17 \cdot 23$ y $a < 391$, tenemos que $k \leq 23$. Por otra parte, como $xy = \text{mcd}(x, y) \cdot \text{mcm}(x, y)$ para cualesquiera enteros positivos x, y, tenemos que

$$ab \geq \text{mcm}(a, b) > \text{mcm}(a, 391) = \frac{391a}{k},$$

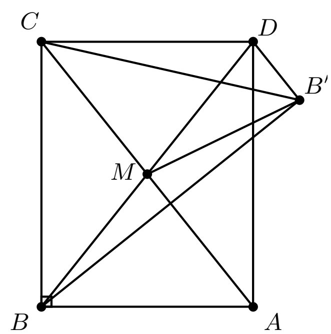
de donde $b > \frac{391}{k} \geq \frac{391}{23} = 17$, como queríamos probar.

Solución del problema 3. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Sabemos que si H es el ortocentro, entonces $\angle OAC = \angle HAB$. Luego, basta demostrar que $\angle EAC = \angle OAC = \angle DAB$. Para esto, sean M el punto medio de AC, N el punto medio de BC y P la intersección de AD con ℓ.



Por el teorema de Tales, tenemos que MN y AB son paralelas, por lo que $\angle DAB = \angle DPN$. Notemos que $\angle PDE = 90° - \angle DPN$, por lo que $\angle CDE = 90° + (90° - \angle DPN) = 180° - \angle DPN$. Como E es la reflexión de D con respecto a ℓ, tenemos que ℓ es mediatriz de DE y como M está sobre ℓ, tenemos que $MD = ME$. Ahora, como el triángulo ADC es rectángulo con $\angle ADC = 90°$ y M es el punto medio de AC, tenemos que M es el circuncentro del triángulo ADC, por lo que $MA = MC = MD = ME$. Por lo tanto, los puntos A, C, D y E están sobre la circunferencia de centro M y radio MD, por lo que $\angle EAC = 180° - \angle CDE = \angle DPN = \angle DAB$, como queríamos probar.

Solución del problema 4. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Haremos la prueba en el caso en que $BC > AB$. El caso $AB > BC$ es análogo.
Como $\angle ABC = 90°$, tenemos que M es el punto medio de AC, $AC = BD$ y M está sobre la mediatriz de BB'. Como B' es la reflexión de B con respecto a AC, tenemos que AC es mediatriz de BB'. Luego, $MB' = MB = MC = MA = MD$. De aquí que los puntos A, B, C, D y B' son concíclicos.



Sea H la intersección de BB' con AC. Tenemos que $\angle CB'D = \angle CBD$ por el cíclico $BB'CD$. Como $MC = MB'$ y $ABCB'$ es cíclico, tenemos que $\angle MB'C = \angle MCB' = \angle ABB'$. Ahora, observemos que $B'C$ es bisectriz del ángulo $\angle MB'D$ si y solo si $\angle DB'C = \angle MB'C$, lo cual sucede si y solo si $\angle CBD = \angle ABB' = \angle ABH$. Como $MB = MC$, tenemos que $\angle CBD = \angle CBM = \angle BCM = 90° - \angle CAB = \angle ABH$ y, por lo tanto, $B'C$ es bisectriz del ángulo $\angle MB'D$.

Solución del problema 5. (Solución de Jesús Omar Sistos Barrón). Mostraremos que Susana tiene estrategia ganadora. La estrategia a seguir será la siguiente.
En su primer turno, Susana elige $P_0(x) = 1$. En el siguiente turno, Brenda no puede ganar, pues escribirá $P_1(x) = ax \pm 1$, con a un entero positivo distinto de 1 y la raíz de $P_1(x)$ será $\frac{\mp 1}{a}$ que no es un entero ya que $a > 1$.
De aquí tenemos dos casos, dependiendo de qué haga Brenda en su turno.

I) $P_1(x) = ax + 1$.

1) $a \neq 2$. En el siguiente turno, $a - 1 \neq 1$ y $a - 1 \neq a$, por lo que Susana puede escoger $P_2(x) = (a-1)x^2 + P_1(x) = (a-1)x^2 + ax + 1$, el cual tiene como raíz a $x = -1$ y con esto Susana gana.

2) $a = 2$. Tenemos que $P_1(x) = 2x + 1$, por lo que Susana escribe $P_2(x) = 3x^2 - P_1(x) = 3x^2 - 2x - 1$ el cual tiene como raíz a $x = 1$ y de nuevo gana Susana.

II) $P_1(x) = ax - 1$.

1) $a \neq 2$. Como $a - 1 \neq 1$ y $a - 1 \neq a$, Susana puede escribir $P_2(x) = (a-1)x^2 - P_1(x) = (a-1)x^2 - ax + 1$ el cual tiene como raíz a $x = 1$, con lo que Susana gana.

2) $a = 2$. Como $P_1(x) = 2x - 1$, en su siguiente turno Susana escribe $P_2(x) = 3x^2 + P_1(x) = 3x^2 + 2x - 1$ el cual tiene como raíz a $x = -1$ y Susana vuelve a ganar.

Lo anterior muestra que Susana en todos sus turnos puede ganar, de donde concluimos que tiene estrategia ganadora y su victoria se alcanza siguiendo la estrategia descrita antes.

Solución del problema 6. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios). Demostraremos que no importa cuál sea la posición inicial de Tita, ella solo podrá saltar a una cantidad finita de enteros distintos. Para esto, demostraremos primero el siguiente resultado.

Lema. Para todo número compuesto n, $g(n) \leq \frac{n}{f(n)}$.

Prueba. Si n no es una potencia, entonces $f(n)$ y $g(n)$ son primos distintos que dividen a n, de donde $f(n)g(n) \leq n$. Por otra parte, si $n = p^k$ para algún primo p y algún entero $k \geq 2$, entonces $f(n)g(n) = p^2 \leq p^k = n$. En cualquier caso se tiene el resultado. $\square$

Continuando con la prueba del problema, procederemos por inducción fuerte. Demostraremos que para todo entero $k \geq 2$, si Tita empieza en k, solo pasará por una cantidad finita de números. Nuestras bases de inducción serán los números enteros del 2 al 6, para los cuales se ve que Tita entra en un ciclo. Para hacer gráfico el ciclo, usaremos a partir de ahora la notación $a \to b$ para indicar que $f(a) + g(a) = b$.

$$2 \to 4 \to 2 \to \cdots$$

$$3 \to 6 \to 5 \to 10 \to 7 \to 14 \to 9 \to 6 \to \cdots$$

Ahora, sea $n \geq 7$ un entero tal que cuando Tita empieza en alguno de los números del 2 al $n - 1$, solo puede visitar una cantidad finita de enteros. Probaremos que lo mismo sucede para n, viendo que en tres casos Tita llega a un número menor a n después de una cantidad finita de movimientos.

1. Si n es compuesto, entonces $f(n) + g(n) \leq 2 + \frac{n}{2} < n$ por el lema anterior y porque $n > 4$.

2. Si n es primo pero $n + 2$ no, tenemos que $n \to 2n \to n + 2$. Como $n + 2$ tiene que ser impar (al igual que n), aplicamos el lema anterior y obtenemos que $f(n + 2) + g(n + 2) \leq 3 + \frac{n+2}{3} < n$.

3. Si n y $n+2$ son primos, entonces $n+4$ es múltiplo de 3 y no podrá ser primo, por lo que podemos aplicar un argumento muy similar al del caso anterior, de modo que $n \to 2n \to n+2 \to 2n+4 \to n+4$ y $f(n+4)+g(n+4) \leq 3+\frac{n+4}{3} < n$.

En cualquier caso, Tita siempre termina brincando a un número menor y podemos aplicar nuestra hipótesis de inducción. Esto concluye la inducción y concluimos que Tita nunca podrá pasar por una cantidad infinita de enteros.

58ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Isaac Jair Jiménez Uribe). Demostraremos que la solución son todos los múltiplos de 3. Como el valor de a_{n+1} solo depende del valor de a_n, si $a_n = a_m$ para dos índices diferentes n y m, entonces la sucesión será periódica. Luego, tenemos que encontrar los valores de a_0 para los cuales la sucesión es eventualmente periódica.
Lema 1. Si $a_n \equiv -1 \pmod 3$ para cierto entero n entonces, para todo $m > n$ tenemos que a_m no es un cuadrado perfecto y la sucesión será eventualmente creciente y, por lo tanto, no será periódica.
Demostración. Un cuadrado no puede ser congruente a $-1 \pmod 3$; por lo tanto, $a_n \equiv -1 \pmod 3$ implica que $a_{n+1} = a_n + 3$ y nuevamente tenemos que $a_{n+1} \equiv -1 \pmod 3$, por lo que a_{n+1} no es un cuadrado perfecto. Repitiendo este argumento se demuestra que, a partir de a_n, ningún término de la sucesión es un cuadrado perfecto y que todos los términos son mayores a sus predecesores, lo cual completa la demostración.
Lema 2. Si $a_n \not\equiv -1 \pmod 3$ y $a_n > 9$, entonces existe un índice $m > n$ tal que $a_m < a_n$.
Demostración. Sea t^2 el cuadrado más grande que es menor que a_n. Como $a_n > 9$, t es al menos 3. El primer cuadrado en la sucesión $a_n, a_n + 3, a_n + 6, \ldots$ será $(t + 1)^2$, $(t+2)^2$ o $(t+3)^2$. Por lo tanto, existe un índice $m > n$ tal que $a_m \leq t+3 < t^2 < a_n$, como se quería demostrar.
Lema 3. Si $a_n \equiv 0 \pmod 3$, entonces existe un índice $m > n$ tal que $a_m = 3$.
Demostración. Primero notamos que, por la definición de la sucesión, un múltiplo de 3 siempre viene después de un múltiplo de 3. Si $a_n \in \{3, 6, 9\}$, la sucesión eventualmente seguirá el patrón periódico 3, 6, 9, 3, 6, 9, ... Si $a_n > 9$, sea j el índice tal que a_j es el valor del mínimo elemento de $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$. Necesariamente se debe tener que $a_j \leq 9$, pues de otra manera, podríamos aplicar el lema 2 a a_j y obtener una contradicción. Se sigue que $a_j \in \{3, 6, 9\}$ y la demostración está completa.
Lema 4. Si $a_n \equiv 1 \pmod 3$, existe un índice $m > n$ tal que $a_m \equiv -1 \pmod 3$.
Demostración. En la sucesión, el número 4 es seguido por el 2 y $2 \equiv -1 \pmod 3$, por lo que el lema es cierto para $a_n = 4$. Si $a_n = 7$, los siguientes términos son 10, 13, 16, 4 y 2 y nuevamente es verdadero. Si $a_n \geq 10$, elegimos un índice $j > n$ tal que a_j es igual al mínimo valor en el conjunto $\{a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$, el cual, por definición, consiste en puros no múltiplos de 3. Si $a_j \equiv 1 \pmod 3$, tendríamos $a_j \leq 9$ por el lema 2 y la minimalidad de a_j. Se sigue que $a_j \in \{4, 7\}$, entonces $a_m = 2 < a_j$

para algún $m > j$, lo que contradice la minimalidad de a_j. Luego, debemos tener que $a_j \equiv -1 \pmod 3$.
Por los cuatro lemas, se sigue que si a_0 es un múltiplo de 3, la sucesión eventualmente llegará al patrón $3, 6, 9, 3, 6, 9, \ldots$; si $a_0 \equiv -1 \pmod 3$, la sucesión será estrictamente creciente; y si $a_0 \equiv 1 \pmod 3$ la sucesión será eventualmente estrictamente creciente. Por lo tanto, la sucesión será eventualmente periódica si y solo si a_0 es un múltiplo de 3.

Solución del problema 2. Demostraremos que las soluciones son tres: $f(x) = 0$, $f(x) = x - 1$ y $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que estas tres cumplen la condición requerida.
Primero, observemos que si $f(x)$ es una solución, entonces $-f(x)$ es una solución. Por lo tanto, supondremos que $f(0) \leq 0$ y demostraremos que $f(x) = 0$ o $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Observamos que para $x \neq 1$, podemos encontrar un $y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = xy$ (dicho valor es $y = \frac{x}{x-1}$). Sustituyendo estos valores en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f\left(f(x) \cdot f\left(\frac{x}{x-1}\right)\right) = 0. \tag{2}$$

En particular, con $x = 0$ obtenemos que

$$f((f(0))^2) = 0, \tag{3}$$

por lo que $f(0)^2$ es una raíz de f. Como $f(0) \leq 0$, podemos analizar dos casos.

1. $f(0) = 0$. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación original, tenemos que

$$f(f(x)f(0)) + f(x) = f(0),$$

de donde $f(x) = 0$ para todo x.

2. $f(0) < 0$. Primero, demostremos el siguiente lema.

Lema 1.

$$f(1) = 0, \quad f(a) = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ y } f(0) = -1. \tag{4}$$

Demostración. Tenemos que demostrar que 1 es la única raíz de f. Primero, observamos que f tiene al menos una raíz $a = f(0)^2$. Si $a \neq 1$, sustituyendo $x = a$ en (2) obtenemos que $f(0) = 0$, lo cual es una contradicción. Entonces, de (3) obtenemos que $(f(0))^2 = 1$. Como estamos suponiendo que $f(0) < 0$, concluimos que $f(0) = -1$.

Sustituyendo $y = 1$ en la ecuación original, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(x)f(1)) + f(x+1) = f(x) &\Leftrightarrow f(0) + f(x+1) = f(x) \\ &\Leftrightarrow f(x+1) = f(x) + 1, (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Con una sencilla inducción obtenemos que

$$f(x+n) = f(x) + n \;\; (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Ahora, demostraremos el siguiente lema.

Lema 2. f es inyectiva.

Demostración. Supongamos que $f(a) = f(b)$ para ciertos $a \neq b$. Por (5), para todo $N \in \mathbb{Z}$,

$$f(a + N + 1) = f(b + N) + 1.$$

Si elegimos un entero $N < -b$, entonces existen números reales x_0, y_0 tales que $x_0 + y_0 = a + N + 1$ y $x_0 y_0 = b + N$. Como $a \neq b$, tenemos que $x_0 \neq 1 \neq y_0$. Sustituyendo x_0, y_0 en la ecuación original, tenemos que

$$\begin{aligned} f(f(x_0)f(y_0)) + f(a + N + 1) = f(b + N) &\Leftrightarrow f(f(x_0)f(y_0)) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(f(x_0)f(y_0) + 1) = 0, \text{ por (5)} \\ &\Leftrightarrow f(x_0)f(y_0) = 0, \text{ por (4).} \end{aligned}$$

Por otro lado, como $x_0 \neq 1 \neq y_0$, tenemos que $f(x_0) \neq 0 \neq f(y_0)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, f es inyectiva.

Con esto ya casi terminamos el problema. Para cada número real t, ponemos $(t, -t)$ en la ecuación original y obtenemos

$$\begin{aligned} f(f(t)f(-t)) + f(0) = f(-t^2)) &\Leftrightarrow f(f(t)f(-t)) = f(-t^2) + 1, \text{ por (4)} \\ &\Leftrightarrow f(f(t)f(-t)) = f(-t^2 + 1), \text{ por (5)} \\ &\Leftrightarrow f(t)f(-t) = -t^2 + 1, \text{ por la inyectividad.} \end{aligned}$$

De manera similar, sustituyendo $(t, 1 - t)$ en la ecuación original, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(f(t)f(1-t)) + f(1) = f(t(1-t)) &\Leftrightarrow f(f(t)f(1-t)) = f(t(1-t)), \text{ por (4)} \\ &\Leftrightarrow f(t)f(1-t) = t(1-t), \text{ por la inyectividad.} \end{aligned}$$

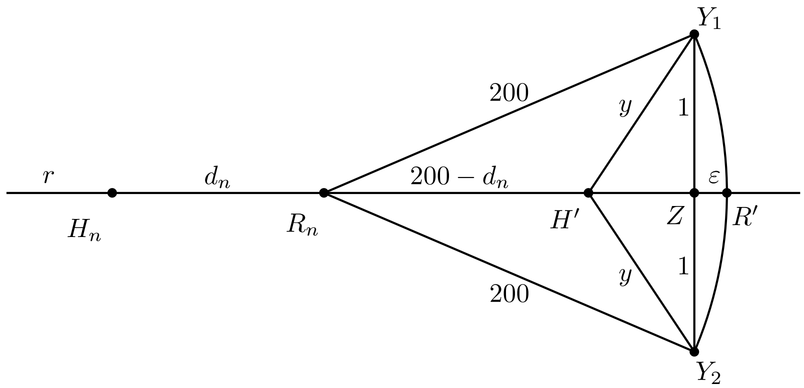
Pero como $f(1 - t) = 1 + f(-t)$, por (5), obtenemos que

$$\begin{aligned} f(t)f(1-t) = t(1-t) &\Leftrightarrow f(t)(1 + f(-t)) = t(1-t) \\ &\Leftrightarrow f(t) + (-t^2 + 1) = t(1-t) \\ &\Leftrightarrow f(t) = t - 1, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

Solución del problema 3. No hay dicha estrategia para el cazador.
Si la respuesta fuera afirmativa, el cazador tendría una estrategia que funcionaría sin importar dónde aparece el dispositivo de rastreo. Demostraremos lo contrario: con mala suerte para el cazador con respecto a las posiciones del dispositivo de rastreo, no hay una estrategia que le garantice estar a una distancia menor a 100 en 10^9 rondas.
Sea d_n la distancia entre el cazador y el conejo después de n rondas. Desde luego, si $d_n \geq 100$ para cierto $n < 10^9$, el conejo ganará, pues solo tendría que moverse sobre la línea entre él y el cazador y la distancia no podrá disminuir.

Demostraremos que mientras $d_n < 100$ y sin importar la estrategia que el cazador siga, el conejo tendrá una manera de incrementar d_n^2 con al menos $\frac{1}{2}$ cada 200 rondas (siempre que las posiciones del dispositivo de rastreo favorezcan al conejo). De esta manera, d_n^2 alcanzará 10^4 en menos de $2 \cdot 10^4 \cdot 200 = 4 \cdot 10^6 < 10^9$ rondas y el conejo ganará.
Supongamos que el cazador está en H_n y el conejo en R_n. Además, supongamos que el conejo revela su posición al cazador en este momento (esto nos permite ignorar toda la información de las posiciones previas del dispositivo de rastreo). Sea r la recta H_nR_n y sean Y_1, Y_2 puntos que están a una unidad lejos de r y a 200 unidades de R_n, como se muestra en la figura.



El plan del conejo es simplemente elegir uno de los puntos Y_1 o Y_2 y utilizar 200 rondas para llegar a él. Como por todos los puntos que pasa están a una distancia menor a 1 de r, es posible que todas las ubicaciones del dispositivo de rastreo estén en r. En particular, en este caso, el cazador no tiene manera de saber si el conejo elige Y_1 o Y_2. Viendo las posiciones del dispositivo de rastreo, ¿qué hará el cazador? Si la estrategia del cazador le indica moverse 200 rondas hacia la derecha, terminará en el punto H' de la figura. Podemos notar que el cazador no tiene mejor alternativa. De hecho, si después de las 200 rondas termina a la izquierda de H', terminará más lejos de Y_2, si termina arriba de r, también termina más lejos de Y_2 y si termina abajo de r, terminará más lejos de Y_1. En otras palabras, sin importar la estrategia que use el cazador, no puede estar seguro de que su distancia al conejo sea menor que $y = H'Y_1 = H'Y_2$ después de esas 200 rondas.
Para calcular y^2, consideramos Z el punto medio de Y_1Y_2 y R' el punto 200 unidades a la derecha de R_n y definimos $\varepsilon = ZR'$ (notamos que $H'R' = d_n$). Entonces

$$y^2 = 1 + (H'Z)^2 = 1 + (d_n - \varepsilon)^2$$

donde

$$\varepsilon = 200 - R_nZ = 200 - \sqrt{200^2 - 1} = \frac{1}{200 + \sqrt{200^2 - 1}} > \frac{1}{400}.$$

En particular, $\varepsilon^2 + 1 = 400\varepsilon$, por lo que

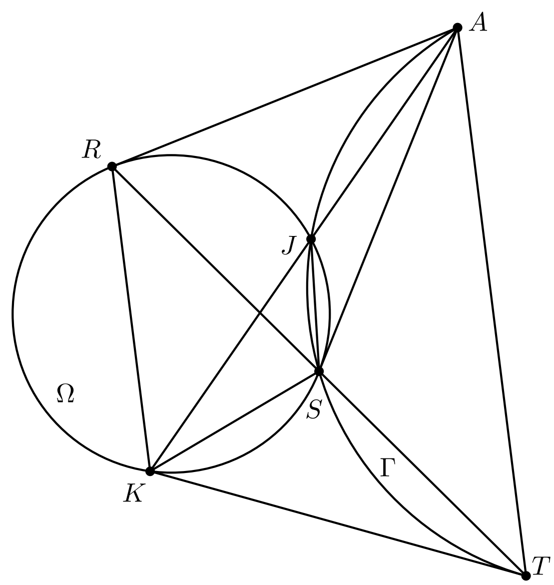
$$y^2 = d_n^2 - 2\varepsilon d_n + \varepsilon^2 + 1 = d_n^2 + \varepsilon(400 - 2d_n).$$

Como $\varepsilon > \frac{1}{400}$ y $d_n < 100$, esto demuestra que $y^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$. Entonces, como dijimos, con esta lista de posiciones del dispositivo de rastreo, sin importar qué haga el cazador, el conejo logrará que $d_{n+200}^2 > d_n^2 + \frac{1}{2}$, lo cual concluye la demostración.

Solución del problema 4. (Solución de Maximiliano Sánchez Garza). Por ángulos en los círculos Ω y Γ, tenemos que $\angle KRS = \angle KJS = \angle ATS$. Por otro lado, como RA es tangente a Ω, obtenemos que $\angle SKR = \angle SRA$. Por lo tanto, los triángulos ART y SKR son semejantes y

$$\frac{TR}{RK} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST},$$

donde la segunda igualdad es por ser S el punto medio del segmento RT.
Esta última relación, junto con $\angle ATS = \angle KRT$ implican que los triángulos AST y TKR son semejantes; por lo tanto, $\angle SAT = \angle RTK$. Se sigue que KT es tangente a Γ.



Solución del problema 5. Dividiremos la fila en N bloques con $N+1$ personas cada uno. Demostraremos que es posible remover $N-1$ personas de cada bloque para poder satisfacer la condición del técnico.
Primero, construyamos una matriz de $(N+1)\times N$ donde $x_{i,j}$ será la altura del i-ésimo jugador (donde el primer jugador es el más alto y el $(N+1)$-ésimo es el más bajo) del j-ésimo bloque. En otras palabras, cada columna contiene la lista de las alturas de un mismo bloque, acomodadas en orden decreciente de arriba hacia abajo.
Vamos a reacomodar esta matriz mediante cambios de columnas completas. Primero, con algunos cambios de columnas, nos aseguraremos de que $x_{2,1} = \max\{x_{2,i}, i =$

$1,2,\ldots,N\}$ (la primera columna contiene la mayor altura de la segunda fila). Con esa primera columna fija, permutaremos las otras de manera que $x_{3,2} = \max\{x_{3,i}, i = 2,3,\ldots,N\}$ (la segunda columna contiene a la mayor persona de la tercera fila, sin considerar la primera columna). En resumen, en el paso k ($k = 1,2\ldots,N-1$), permutamos las columnas desde la k hasta la N de manera que $x_{k+1,k} = \max\{x_{k+1,i}, i = k,k+1,\ldots,N\}$ y terminamos con un arreglo como el siguiente.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_{1,1} & & x_{1,2} & & x_{1,3} & \cdots & x_{1,N-1} & & x_{1,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{2,1} & > & x_{2,2} & & x_{2,3} & \cdots & x_{2,N-1} & & x_{2,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{3,1} & & x_{3,2} & > & x_{3,3} & \cdots & x_{3,N-1} & & x_{3,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N,1} & & x_{N,2} & & x_{N,3} & \cdots & x_{N,N-1} & > & x_{N,N} \\
\vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee \\
x_{N+1,1} & & x_{N+1,2} & & x_{N+1,3} & \cdots & x_{N+1,N-1} & & x_{N+1,N}
\end{array}$$

Ahora, hacemos una sencilla elección: de la fila original, quitamos todos excepto los que tienen alturas

$$x_{1,1} > x_{2,1} > x_{2,2} > x_{3,2} > \cdots > x_{N,N-1} > x_{N,N} > x_{N+1,N}.$$

Claro, la manera en la que los jugadores están acomodados puede diferir en la manera en la que están en esta lista. Ahora tenemos que convencernos de que cada pareja $(x_{k,k}, x_{k+1,k})$ permanecen consecutivos en esta nueva fila. Pero como $x_{k,k}$ y $x_{k+1,k}$ pertenecen al mismo bloque/columna de $N+1$ jugadores consecutivos, las únicas personas que podrían ir entre ellos estaban también en el mismo bloque, y ya las quitamos a todas. Por lo tanto, este algoritmo funciona.

Solución del problema 6. El polinomio que buscamos es un polinomio homogéneo de grado n en las variables x, y sobre los enteros. Notamos primero que si encontramos un polinomio homogéneo tal que $f(x,y) = \pm 1$ para cada (x,y) de S terminamos, pues bastaría considerar el polinomio $f(x,y)^2$ y este también es homogéneo.
Llamemos a los puntos (x_1,y_1) hasta (x_n,y_n). Si algunos de estos puntos (x_i,y_i) y (x_j,y_j) cumplen que la línea que determinan pasa por el origen, entonces $(x_j,y_j) = (-x_i,-y_i)$, pues ambos puntos son irreducibles. De aquí, obtenemos que $f(x_j,y_j) = \pm f(x_i,y_i)$ para cualquier f homogénea, así que podemos suponer que ninguna pareja de puntos en S cumple esto.
Consideremos los polinomios $l_i(x,y) = y_i x - x_i y$ y definimos

$$g_i(x,y) = \prod_{j\neq i} l_j(x,y).$$

De esta manera $l_i(x_j,y_j) = 0$ si y solo si $j = i$, pues hay a lo más un punto en S en cada línea que pasa por el origen. Entonces, $g_i(x_j,y_j) = 0$ para todo $j \neq i$. Definimos $a_i = g_i(x_i,y_i)$ y notamos que $a_i \neq 0$.

Notamos también que cada $g_i(x,y)$ tiene grado $n-1$ con las siguientes dos propiedades:

1. $g_i(x_j,y_j)=0$ si $j\neq i$.
2. $g_i(x_i,y_i)=a_i$.

Para cada $N\geq n-1$, también existe un polinomio de grado N con las mismas dos propiedades. Más en específico, sea $I_i(x,y)$ un polinomio de grado 1 homogéneo tal que $I_i(x_i,y_i)=1$, el cual existe por el lema de Bezout pues (x_i,y_i) es irreducible. Entonces, el polinomio $I_i(x,y)^{N-(n-1)}g_i(x,y)$ satisface ambas propiedades y tiene grado N.
Ahora podemos reducir el problema a lo siguiente:
Afirmación. Para cada entero positivo a, existe un polinomio homogéneo $f_a(x,y)$, con coeficientes enteros, de grado a lo más 1, tal que $f_a(x,y)\equiv 1 \pmod a$ para todos los (x,y) primos relativos.
Para ver que esta afirmación resuelve el problema, tomamos a como el mínimo común múltiplo de los números a_i $(1\leq i\leq n)$. Tomamos el f_a dado por la afirmación, elegimos alguna potencia $f_a(x,y)^k$ que tenga grado al menos $n-1$ y le restamos múltiplos apropiados de los g_i para obtener el polinomio deseado.
Ahora probaremos la afirmación. Consideremos la factorización de a. Si a es una potencia de un primo ($a=p^k$), entonces podemos elegir alguno de estos dos:

- $f_a(x,y)=(x^{p-1}+y^{p-1})^{\varphi(a)}$ si p es impar;
- $f_a(x,y)=(x^2+xy+y^2)^{\varphi(a)}$ si $p=2$.

Ahora supongamos que a es cualquier entero positivo y sea $a=q_1q_2\cdots q_k$, donde cada q_i es una potencia de un primo y los q_i son coprimos por parejas. Sean f_{q_i} los polinomios que acabamos de definir y sean F_{q_i} potencias de estos de manera que todos tengan el mismo grado. Notamos que

$$\frac{a}{q_i}F_{q_i}\equiv\frac{a}{q_i}\pmod a$$

para cualesquiera (x,y) primos relativos. Por el lema de Bezout, existe una combinación lineal de los $\frac{a}{q_i}$ que da 1. Entonces, hay una combinación lineal de los F_{q_i} tal que $F_a(x,y)\equiv 1 \pmod a$ para cada x, y, primos relativos y este polinomio es homogéneo porque todos los F_{q_i} tienen el mismo grado.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod n).*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad media aritmética - media armónica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$, se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y solo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es* $180°$.

Teorema 11 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 12 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 13 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 14 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 15 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 16 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

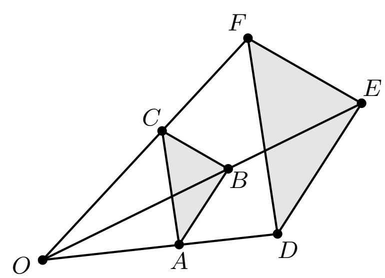
Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Triángulos homotéticos)**.** *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ y $CA \parallel FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de 1, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Teorema 21 (Circunferencia de los 9 puntos)**.** *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 22 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Definición 8 (Figuras en perspectiva)**.** *Dos figuras están en perspectiva si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto por el cual pasan estas rectas se llama centro de perspectiva.*

Teorema 23 (Desargues)**.** *Dos triángulos están en perspectiva si y solo si los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales.*

Teorema 24 (Recta de Euler)**.** *En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.