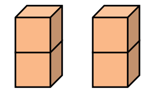
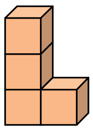
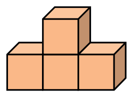
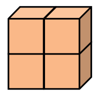
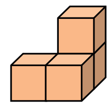
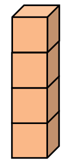
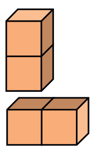
Soluciones al Segundo Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2018 (versión A)

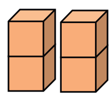
1. ¿Qué construcción no puede hacerse usando las dos piezas que se muestran a la derecha?

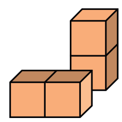


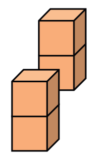
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución 1. (b) Las demás figuras se pueden construir como se muestra:


(a)


(c)


(d)

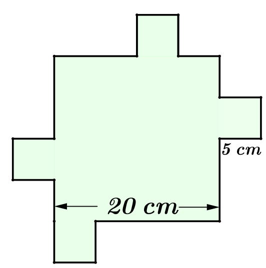

(e)

2. Jacobo quiere insertar el dígito 3 en el número 2018 de manera que el número de 5 dígitos que forme sea lo más pequeño posible, ¿dónde debe colocarlo?

(a) antes del 2 (b) entre el 2 y el 0 (c) entre el 0 y el 1 (d) entre el 1 y el 8 (e) después del 8

Solución 2. (d) Los números más pequeños deben ir a la izquierda que los grandes; así, 0, 1 y 2 deben estar a la izquierda que 3, y 3 debe estar a la izquierda que 8.

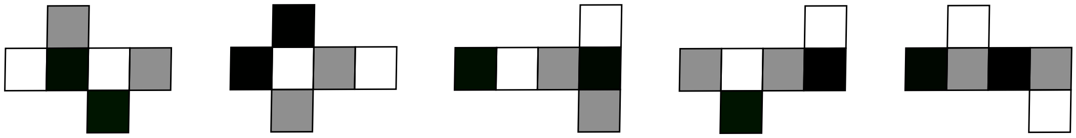
3. Sobre cada lado de un cuadrado de lado 20 cm, se coloca en su *exterior* un cuadrado de lado 5 cm. ¿Cuál es el perímetro de la figura que se formó?



(a) 80 cm (b) 100 cm (c) 110 cm (d) 120 cm (e) 140 cm

Solución 3. (d) Cada vez que se coloca un cuadrado chico, sobre un lado del grande, se restan 5 cm del perímetro del cuadrado original y éste contribuye con 15 cm al perímetro de la nueva figura. Luego el perímetro de la nueva figura es $80 - (4)(5) + (4)(15) = 120\ cm$.

4. Las caras de un cubo están pintadas con tres colores de manera que caras opuestas son del mismo color. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al desarrollo del cubo?

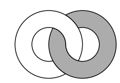


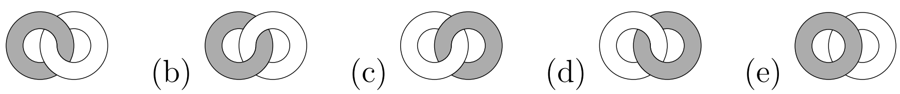
(a) (b) (c) (d) (e)

Solución 4. (e) En el cubo, cuadrados del mismo color no pueden compartir un vértice, así que esto mismo debe ocurrir al desarrollar el cubo; entonces las únicas posibilidades son (d) o (e); sin embargo, al formar el cubo a partir de (d), las caras más oscuras quedan compartiendo un vértice. En la opción (e) quedan bien.

Otra manera. Las tapas superior e inferior deben ser del mismo color, la (e) es la única que lo cumple y también sus caras laterales opuestas son del mismo color.

5. En la figura se muestran entrelazados un anillo gris y uno blanco. Pedro, que está enfrente de los anillos, los ve como se muestra en la figura. Pablo está detrás de los anillos. ¿Cómo los ve Pablo?

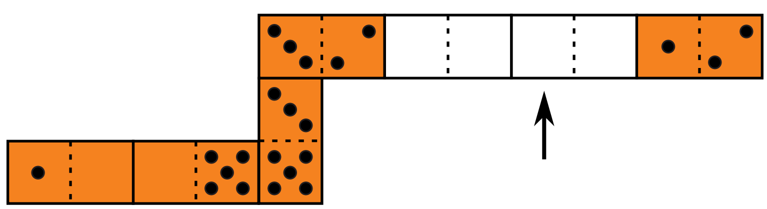




(a) (b) (c) (d) (e)

Solución 5. (a) El anillo gris debe estar a la izquierda, ya que de frente está a la derecha, y debe pasar por arriba del anillo blanco en su parte izquierda.

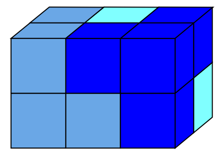
6. Pancho hizo una hilera con 7 fichas de dominó de manera que los lados con el mismo número de puntos quedaran uno al lado del otro. Originalmente la hilera tenía un total de 33 puntos, pero el hermanito de Pancho se llevó dos de las fichas. ¿Qué cantidad de puntos había en el lugar que señala la flecha en la figura?

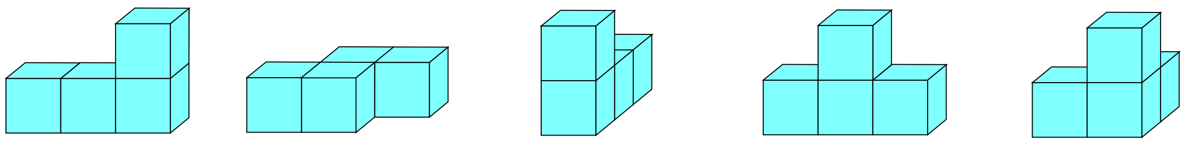


(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Solución 6. (c) La suma que se ve es 22 por lo que faltan 11 puntos, Junto al 2 va otro 2 y junto al 1 va otro 1, de donde los números que faltan en la posición marcada con la flecha y el de al lado a la izquierda (que son iguales) deben sumar $33 - 25 = 8$.

7. Flora construyó el paralelepípedo que se muestra en la figura usando 3 piezas de distintos colores, de 4 cubitos cada una. En el dibujo se ven los cuatro cubitos de dos de las piezas; de la tercera pieza se ven sólo 2 de los 4 cubitos. ¿Qué forma tiene la tercera pieza?





(a) (b) (c) (d) (e)

Solución 7. (d) Los cubitos de la tercera pieza deben cubrir de la parte de atrás, los tres cubitos de abajo y de la parte de arriba el cubito central.

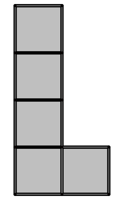
8. Pablo y Emilio tomaron agua de una jarra que estaba llena. Emilio tomó primero cierta cantidad, Pablo tomó después una cuarta parte de lo que quedaba. Si los dos tomaron la mitad del agua de la jarra, ¿qué fracción de la jarra tomó Pablo?

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Solución 8. (b) Denotemos por j, e, p las cantidades de agua que hay en la jarra, que toma Emilio y que bebe Pablo, respectivamente. Tenemos por los datos que, $\frac{1}{2}j = e + p$ y $4p = (j - e)$, luego al despejar e se tiene que $\frac{1}{2}j - p = e = j - 4p$, por lo que $\frac{1}{2}j = 3p$, de donde $p = \frac{1}{6}j$.

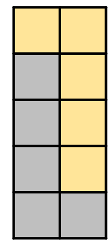
Otra solución. Pablo y Emilio toman media jarra. La otra media jarra equivale a tres veces lo que bebió Pablo, ya que el tomó la cuarta parte de lo que Emilio dejó. Luego, si media jarra es tres veces lo que Pablo tomó, entonces Pablo bebió una sexta parte de la jarra.

9. ¿Cuál es el menor número de piezas en forma de L, como la de la figura, que se necesitan para formar un tablero cuadrado? (Las piezas pueden girarse, pero no se pueden recortar).



(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 25

Solución 9. (d) Cada pieza tiene 5 cuadritos, necesitamos el menor entero positivo n tal que $5n$ sea un cuadrado. Tal cuadrado debe ser divisible entre 5, por lo que n es múltiplo de 5, su otro factor debe ser un cuadrado diferente de 1, y como queremos el menor, la respuesta es $n = 5 \cdot 2^2 = 20$.



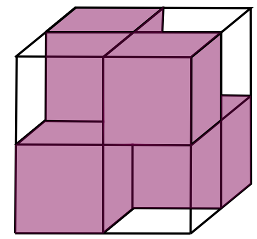
Para formar el cuadrado con las 20 piezas, tomamos primero dos de las piezas y las unimos como en la figura para formar un rectángulo de 5×2, con diez de estos rectángulos colocando 5 en una fila y 5 más sobre tal fila se obtiene el cuadrado de 10×10.

10. Ana, Bebe y Cici se deben de sentar en alguna de 7 sillas que están en fila, de manera que entre cada dos de ellas quede al menos una silla vacía. ¿De cuántas maneras se puede hacer este acomodo?

a) 6 (b) 7 (c) 36 (d) 42 (e) 60

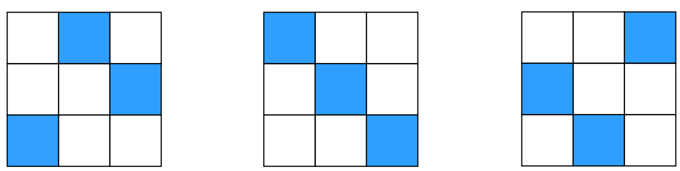
Solución 10. (e) Sentadas las 3 hay 4 espacios entre ellas donde pueden estar las sillas: __A__B__C__ pero entre A y B debe haber una silla, y entre B y C debe haber otra silla. Luego las otras 2 sillas, deben de acomodarse en los 4 espacios, esto se puede hacer de 6 maneras, si solamente acomodamos una silla en el espacio correspondiente. Pero también podemos acomodar las dos sillas en uno de los 4 espacios, por lo que hay 10 maneras de acomodar las sillas. Y como las personas se pueden acomodar de $3! = 6$ maneras. Resulta que hay $10 \cdot 6 = 60$ maneras de acomodarse.

11. Un cubo que mide $2\times2\times2$ está formado por cuatro cubos transparentes de $1\times1\times1$ y cuatro cubos opacos (no transparentes) de $1\times1\times1$ como se muestra en la figura. Están colocados de tal manera que el cubo grande completo no es transparente (es decir, no es posible ver de adelante hacia atrás, ni de arriba hacia abajo, ni de lado a lado). Al menos ¿cuántos cubos opacos de dimensiones $1\times1\times1$ deben ponerse en un cubo de $3\times3\times3$ para asegurar que el cubo completo no es transparente?



(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12 (e) 18

Solución 11. (b) Hay 9 filas de cubos en cada una de las tres direcciones, así que es necesario tapar 27 direcciones. Como cada cubito tapa 3 direcciones, al menos se necesitan 9. Veamos que un acomodo con 9 es posible. En el siguiente esquema ponemos tres cuadrículas de 3×3, cada una de ellas representando un "piso" del cubo de $3\times3\times3$, y sombreamos el lugar donde puede ponerse un cubo de manera que se tapen todas las direcciones en el cubo grande. Como el esquema contiene 9 cuadritos sombreados, entonces 9 es precisamente el mínimo.



12. Sean a, b, c números reales diferentes de cero, que satisfacen:

$$a+\frac{1}{b}=2,\ b+\frac{1}{c}=3,\ c+\frac{1}{a}=5.$$

¿Cuál es el valor de $abc+\dfrac{1}{abc}$?

(a) 1 (b) 5 (c) 10 (d) 15 (e) 20

Solución 12. (e)

$2\cdot3\cdot5=\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{abc}+\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)=abc+\frac{1}{abc}+2+3+5$. Luego $abc+\frac{1}{abc}=20$.