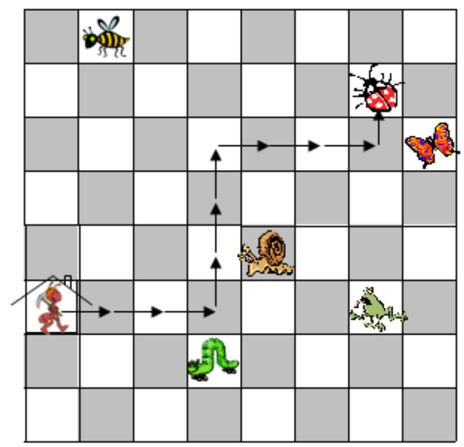
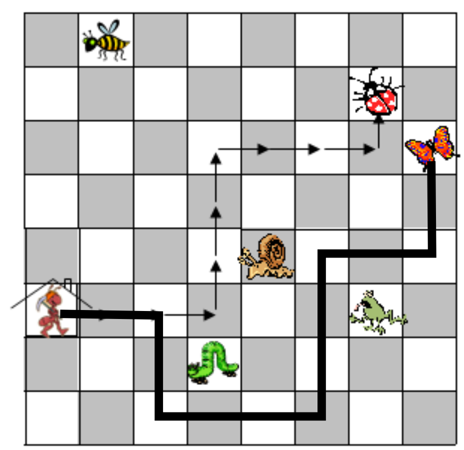
Soluciones al Segundo Examen de Invitación a la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2018 (versión B)

1. Cuando la hormiga  va desde la casa  siguiendo las flechas $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 1$, llega a la catarina . ¿A qué animal llega si sale de la casa y sigue las flechas: $\rightarrow 2$, $\downarrow 2$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 2$, $\uparrow 2$?



(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución 1. (a) En la figura se muestra con línea gruesa el camino que sigue.

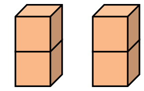


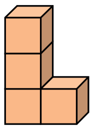
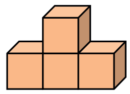
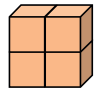
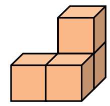
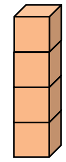
2. Jacobo quiere insertar el dígito 3 en el número 2018 de manera que el número de 5 dígitos que forme sea lo más pequeño posible, ¿dónde debe colocarlo?

(a) antes del 2 (b) entre el 2 y el 0 (c) entre el 0 y el 1 (d) entre el 1 y el 8 (e) después del 8

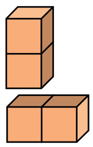
Solución 2. (d) Los números más pequeños deben ir a la izquierda que los grandes; así, 0, 1 y 2 deben estar a la izquierda que 3, y 3 debe estar a la izquierda que 8.

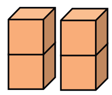
3. ¿Qué construcción no puede hacerse usando las dos piezas que se muestran a la derecha?

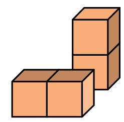


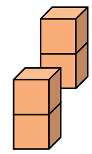
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución 3. (b) Las demás figuras se pueden construir como se muestra:

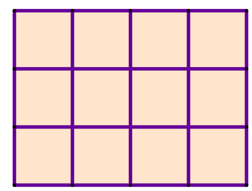

(a)


(c)


(d)


(e)

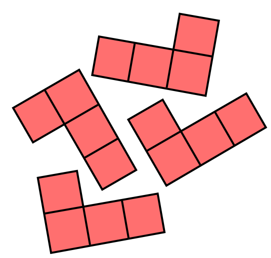
4. ¿Cuántos rectángulos que contengan un número impar de cuadritos de 1×1 se pueden encontrar dentro del tablero de 3×4?

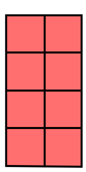
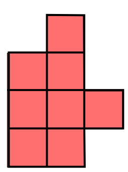
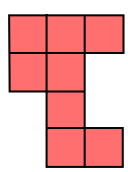
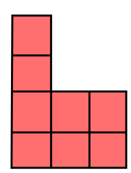


(a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 24 (e) 32

Solución 4. (d) Los rectángulos con un número impar de cuadritos, son solamente de los siguientes tamaños: 1×1, 1×3, 3×1 y 3×3 de los que hay $12, 6, 4, 2$ de cada tipo. Luego la respuesta es 24.

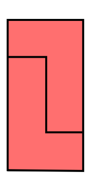
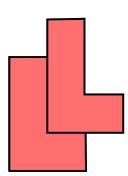
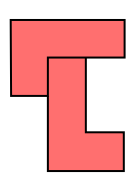
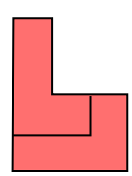
5. Rocío tiene los 4 mosaicos en forma de L que se muestran a la derecha. Quiere tomar dos de ellos para formar figuras como las que se muestran abajo. ¿Cuántas de ésas 4 puede formar?



(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1 (e) 0

Solución 5. (a) Todas las formas son posibles:

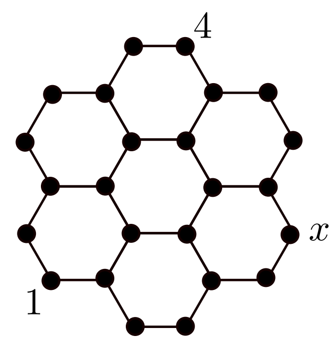
   

6. Ana, Blanca, Ceci y Diana practican cada una deportes distintos: karate, fútbol, volibol y yudo. A Ana no le gustan los deportes de pelota. Blanca practica yudo. Sólo una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera, ¿cuál es?

(a) Ana es volibolista (b) Blanca es futbolista (c) Ceci es volibolista
(d) Diana practica karate (e) Ana practica yudo

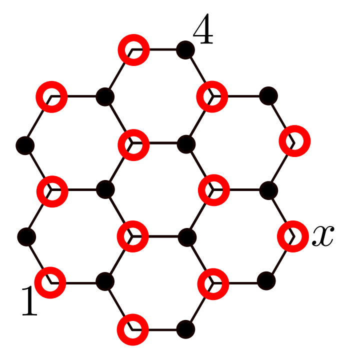
Solución 6. (c) Como a Ana no le gustan los deportes de pelota sabemos que debe practicar yudo o karate, pero Blanca practica yudo, así que Ana es la que practica karate.

7. En cada uno de los puntos • de la figura debes poner un número, de manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma. Dos de los números ya se escribieron. ¿Qué número va en lugar de x?

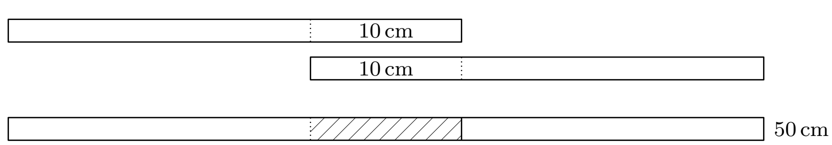


(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) falta información

Solución 7. (a) Cuando dos segmentos tienen un punto en común, los otros extremos deben tener el mismo valor; así podemos observar que todos los puntos marcados con una circunferencia deben llevar el número 1.



8. Azucena tiene 4 tiras de madera de la misma longitud. Pega dos de ellas con un traslape de 10 cm y así obtiene una tira de 50 cm de longitud. Con las otras dos quiere hacer una tira de 56 cm de longitud. ¿Cuánto debe medir el traslape?

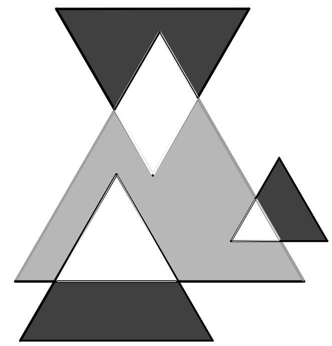


(a) 4 cm (b) 6 cm (c) 8 cm (d) 10 cm (e) 12 cm

Solución 8. (a) Las dos tiras juntas miden 50 cm y el traslape es de 10 cm, así que cada regla mide 30 cm. Para lograr 56 cm el traslape debe de ser de 4 cm pues $56 = 30 + 30 - 4$.

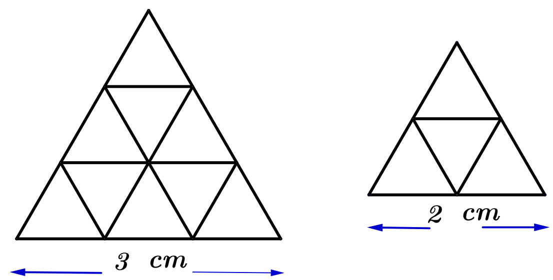
9. La figura se formó con un triángulo equilátero gris de lado 3 cm, dos triángulos equiláteros negros de lado 2 cm y otro triángulo equilátero negro de lado 1 cm, la parte común de dos triángulos se colorea de blanco. ¿Cuál es el valor de la diferencia del valor del área gris menos el valor del área negra?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2



Solución 9. (c) El área gris menos el área negra es igual al área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros, ya que las partes comúnes se suman y restan.

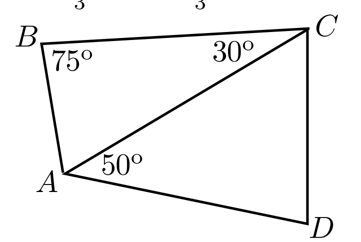
Ahora notemos que el triángulo gris de lado 3, se puede dividir en 9 triángulos de lado 1 y el triángulo de lado 2, se puede dividir en 4 triángulos de lado 1 y como $9 = 4+4+1$, se tiene que la diferencia del área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros es 0.



Otra manera de terminar. El área de un triángulo equilátero es igual $\frac{\sqrt{4}}{3}\ l^2$, donde l es la longitud del lado, por lo que la diferencia de las áreas es, $\frac{\sqrt{4}}{3}\ 3^2 - 2\ \frac{\sqrt{4}}{3}\ 2^2 - \frac{\sqrt{4}}{3}\ 1^2 = 0$.

10. En la figura se muestra un cuadrilátero $ABCD$. Si $BC = AD$, ¿cuánto mide el ángulo ADC?

(a) 30º (b) 50º (c) 55º (d) 65º (e) 70º



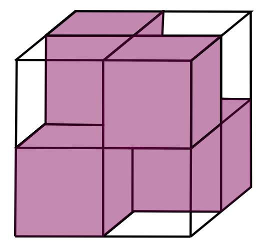
Solución 10. (d) Tenemos que $\angle BAC = 180^o - 75^o - 30^o = 75^o$, así que $AC = BC = AD$; es decir, el triángulo ACD es isósceles y entonces $\angle ACD = \angle ADC$. Por lo anterior, $\angle ADC = (180^o - 50^o)/2 = 65^o$.

11. En un torneo de fútbol participan 5 equipos. Cada equipo juega exactamente una vez con cada uno de los otros equipos. En un juego, el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor 0 puntos, pero si empatan, cada equipo obtiene 1 punto. Si al final del torneo se suman los puntos de todos los equipos ¿cuántos valores distintos puede tener esta suma?

(a) 5 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 15

Solución 11. (d) El número de partidos del torneo es 10. En un partido se dan 3 puntos entre los dos equipos si hay un ganador y se dan 2 puntos si hay empate. El máximo de puntos es 30, sucede cuando no hay empates y la menor suma es 20 y ocurre cuando hay empate en cada uno de los 10 partidos, luego hay 11 posibles sumas que son $30 - x \cdot 1$, donde x es el número de empates en el torneo que puede ser cualquiera de los valores $0, 1, 2, ..., 10$.

12. Un cubo que mide $2 \times 2 \times 2$ está formado por cuatro cubos transparentes de $1 \times 1 \times 1$ y cuatro cubos opacos (no transparentes) de $1 \times 1 \times 1$ como se muestra en la figura. Están colocados de tal manera que el cubo grande completo no es transparente (es decir, no es posible ver de adelante hacia atrás, ni de arriba hacia abajo, ni de lado a lado). Al menos ¿cuántos cubos opacos deben ponerse en un cubo de $3 \times 3 \times 3$ para asegurar que el cubo completo no es transparente?



(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12 (e) 18

Solución 12. (b) Hay 9 filas de cubos en cada una de las tres direcciones, así que es necesario tapar 27 direcciones. Como cada cubito tapa 3 direcciones, al menos se necesitan 9. Veamos que un acomodo con 9 es posible. En el siguiente esquema ponemos tres cuadrículas de 3×3, cada una de ellas representando un "piso" del cubo de $3 \times 3 \times 3$, y sombreamos el lugar donde puede ponerse un cubo de manera que se tapen todas las direcciones en el cubo grande. Como el esquema contiene 9 cuadritos sombreados, entonces 9 es precisamente el mínimo.