TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso por: Jaime Torre Marina
jaimetorremarina@hotmail.com
044 55 1630 3549
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2018.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2018, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su décimo año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Eugenio Daniel Flores Alatorre quien ahora se integra al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Pedro David Sánchez Salazar, quien participó en este comité en los años 2016 y 2017.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Productos Notables*, de nuestros amigos Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se muestra la utilidad de los productos notables como herramienta básica en la resolución de problemas de olimpiada.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2018.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1999. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2018-2019 y, para el 1° de julio de 2019, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 4 al 9 de noviembre de 2018 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2018 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Inglaterra, julio de 2019) y a la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (México, septiembre de 2019).

De entre los concursantes nacidos en 2002 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (República Dominicana, junio de 2019).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2019.

2ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2018, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Segunda Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2018.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de 2018.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2018.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 2^a OMMEB se realizará en Mérida, Yucatán, del 9 al 12 de junio de 2018. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2019.

Productos Notables

Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Básico

En muchas multiplicaciones algebraicas es de mucha utilidad conocer los famosos «**productos notables** ». Productos notables es el nombre que reciben multiplicaciones con expresiones algebraicas que cumplen ciertas reglas fijas, cuyo resultado se puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación.
Este escrito desarrolla solo tres productos notables clásicos: binomio al cuadrado, diferencia de cuadrados y binomio al cubo (con sus variantes).

Binomio al Cuadrado

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Ejemplo 1. *Sea n un entero positivo tal que $2n+1$ es un cuadrado. Demostrar que $n+1$ es suma de dos cuadrados.*

Solución. Supongamos que $2n + 1 = k^2$ para algún entero positivo k. Si k es par, entonces k^2 también es par y, por lo tanto, $1 = k^2 - 2n$ es par, lo cual es un absurdo. Luego, k es impar, digamos $k = 2m + 1$ para algún entero m. Usando la identidad del binomio al cuadrado, obtenemos que $2n+1 = (2m+1)^2 = 4m^2+4m+1$, de donde $n = 2m^2+2m$. Finalmente, usando una vez más la identidad del binomio al cuadrado, obtenemos que

$$n + 1 = 2m^2 + 2m + 1 = m^2 + (m^2 + 2m + 1) = m^2 + (m + 1)^2,$$

esto es, $n + 1$ es suma de dos cuadrados.

$\square$

A partir de la identidad del binomio al cuadrado podemos generar dos variantes, llamadas «**identidades de Legendre**».

$$\boxed{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)}$$

$$\boxed{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}$$

Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}$$

Ejemplo 2. *Determinar el mayor número primo de dos dígitos que divide a* $3^{32} - 2^{32}$.

Solución. Aplicando diferencia de cuadrados, tenemos que

$$\begin{aligned} 3^{32} - 2^{32} &= (3^{16}+2^{16})(3^{16}-2^{16}) = (3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^8-2^8) \\ &= (3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^4+2^4)(3^4-2^4) \\ &= (3^{16}+2^{16})(3^8+2^8)(3^4+2^4)(3^2+2^2)(3^2-2^2). \end{aligned}$$

Además, $3^2 - 2^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$ y $3^4 + 2^4 = 81 + 16 = 97$. Como 98 y 99 no son primos pero 97 sí es primo, la respuesta es 97. $\square$

Ejemplo 3. *Si se sabe que* $\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, *calcular el valor de* $(\frac{x}{y})^4 + (\frac{y}{x})^4$.

Solución. Claramente ambos números x, y son diferentes de cero. Tenemos que $6xy = \sqrt{3}(x^2+y^2)$. Dividiendo ambos lados por xy obtenemos la relación $6 = \sqrt{3}(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$. Simplificando obtenemos que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\sqrt{3}$. Hagamos $a = \frac{x}{y}$ y $b = \frac{y}{x}$. Queremos determinar el valor de $a^4 + b^4$.
Tenemos que $(a+b)^4 = (2\sqrt{3})^4 = 2^4(\sqrt{3})^4 = 16 \cdot 9 = 144$. Por otra parte, usando dos veces la identidad del binomio al cuadrado tenemos que

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \end{aligned}$$

Como $ab = 1$, tenemos que $6a^2b^2 = 6(ab)^2 = 6$, de modo que

$$144 = a^4 + b^4 + 4ab(a^2+b^2) + 6 = a^4 + b^4 + 4(a^2+b^2) + 6.$$

Por lo tanto, $a^4 + b^4 = 138 - 4(a^2+b^2)$; así que basta determinar el valor de $a^2 + b^2$. Nuevamente, por la identidad del binomio al cuadrado, tenemos que $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Como $a + b = 2\sqrt{3}$ y $ab = 1$, obtenemos que $a^2 + b^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2(1) = 12 - 2 = 10$. Finalmente, obtenemos que $a^4 + b^4 = 138 - 4(10) = 138 - 40 = 98$. $\square$

Binomio al Cubo

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

Teniendo en cuenta esta identidad, vamos a encontrar dos variantes. En efecto, como

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

entonces $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Luego,

$$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right] = (a+b)(a^2 - ab + b^2),$$

obteniendo la identidad llamada «Suma de Cubos»:

$$\boxed{a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)}$$

Análogamente, tenemos la siguiente identidad llamada «Diferencia de Cubos»:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)}$$

Ejemplo 4. *Determinar todas las parejas de enteros (a, b) tales que $ab \geq 0$ y*

$$a^3 + b^3 + 99ab = 33^3.$$

Solución. Sea $c = a + b$. Usando la fórmula del binomio al cubo, obtenemos que $c^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. Luego,

$$c^3 - 33^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) - (a^3 + b^3 + 99ab) = 3abc - 99ab,$$

esto es, $(c - 33)(c^2 + 33c + 33^2) = 3ab(c - 33)$, de donde

$$(c - 33)(c^2 + 33c + 33^2 - 3ab) = 0.$$

Por lo tanto, $c = 33$ o $(a+b)^2 + 33(a+b) + 33^2 - 3ab = 0$. Las soluciones de $a + b = 33$ que satisfacen $ab \geq 0$ son $(a, b) = (0, 33), (1, 32), (2, 31), \ldots, (33, 0)$.
Por otra parte, la igualdad $(a+b)^2 + 33(a+b) + 33^2 - 3ab = 0$ es equivalente a la igualdad $(a-b)^2 + (a+33)^2 + (b+33)^2 = 0$. De aquí obtenemos que $a - b = 0$, $a + 33 = 0$ y $b + 33 = 0$. Luego, la única solución en este caso es $a = b = -33$.
Por lo tanto, las soluciones (a, b) buscadas son $(-33, -33)$ y las parejas de la forma $(k, 33 - k)$ con $k = 0, 1, \ldots, 33$. $\square$

Ejemplo 5. (*American Regions Mathematics League, 2003*) *Encontrar el mayor divisor de* 1001001001 *que no exceda a* 10000.

Solución. Sea $E = 1001001001$. Notemos que $E = 1001 \cdot 10^6 + 1001 = 1001(10^6 + 1)$. Sabemos que $1001 = 10^3 + 1$. Usando la identidad de suma de cubos, tenemos que

$$10^3 + 1^3 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \cdot 91 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Además, $10^6 + 1 = (10^2)^3 + 1$, luego, usando nuevamente la identidad de suma de cubos, tenemos que

$$10^6 + 1 = (10^2)^3 + 1 = (10^2 + 1)(10^4 - 10^2 + 1) = 101 \cdot 9901.$$

Así, la descomposición de E en factores primos es $E = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 \cdot 9901$. No es difícil verificar que cualquier divisor positivo del número $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101$ es menor que 9901 o es mayor que 10000. Por lo tanto, el mayor divisor de E que no excede a 10000 es 9901. $\square$

Aplicaciones en Competencias de Matemáticas

Problema 1. *Si* $x^3 = 1$*, pero* $x \neq 1$*, calcular el valor de* $x^{2017} + \frac{1}{x^{2017}}$.

Solución. Notemos que $2017 = 3 \cdot 672 + 1$, por lo tanto $x^{2017} = (x^3)^{672} \cdot x = 1^{672} \cdot x = x$. Así, solo necesitamos calcular $x + \frac{1}{x}$. Notemos que $0 = x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$; luego, como $x - 1 \neq 0$, entonces $x^2 + x + 1 = 0$. Dividiendo entre x ambos miembros de la última igualdad, obtenemos que $0 = \frac{x^2+1+x}{x} = x + \frac{1}{x} + 1$, de donde concluimos que $x + \frac{1}{x} = -1$. Por lo tanto, la respuesta es -1. $\square$

Problema 2. (*Conamat 2005*) *Sean* x*,* y*,* z*,* w *números reales tales que* $x+y+z+w > 0$ *y* $\frac{x^2+y^2+z^2+w^2+1}{x+y+z+w} \leq 1$*. Calcular el valor de* $x + y + z + w$.

Solución. Como $x + y + z + w > 0$, entonces multiplicando por $x + y + z + w$ ambos miembros de la segunda desigualdad, obtenemos que

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 1 \leqslant x + y + z + w. \tag{1}$$

Usando la identidad del binomio al cuadrado podemos completar cuadrados, luego, la desigualdad (1) es equivalente a:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0. \tag{2}$$

Como las cuatro variables son números reales, entonces el miembro izquierdo de la desigualdad (2) es no negativo, así, la única posibilidad de que la desigualdad (2) sea verdadera es que $x = y = z = w = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tenemos que $x+y+z+w = 2$. $\square$

Problema 3. *Sean* a*,* b *y* c *números reales, distintos entre sí, tales que* $a = (a - b)^2 + b(a + 1)$*,* $b = (b - c)^2 + c(b + 1)$ *y* $c = (c - a)^2 + a(c + 1)$*. Demostrar que* $E = \frac{(a^6-b^6)^2}{c^6-4a^3b^3} = c^6$.

Solución. Notemos que la igualdad $a = (a - b)^2 + b(a + 1)$ es equivalente a

$$a - b = a^2 - ab + b^2. \tag{3}$$

Si multiplicamos por $a + b$ a ambos miembros de la igualdad (3), obtenemos que $a^2 - b^2 = a^3 + b^3$. Análogamente, podemos obtener que $b^2 - c^2 = b^3 + c^3$ y que $c^2 - a^2 = c^3 + a^3$. Sumando miembro a miembro estas tres últimas igualdades obtenemos que, $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Luego, $c^6 = (-c^3)^2 = (a^3 + b^3)^2 = a^6 + 2a^3b^3 + b^6$, por lo tanto

$$c^6 - 4a^3b^3 = a^6 - 2a^3b^3 + b^6 = (a^3 - b^3)^2. \tag{4}$$

Por otro lado, por la identidad de la diferencia de cuadrados, tenemos que

$$(a^6 - b^6)^2 = (a^3 + b^3)^2(a^3 - b^3)^2. \tag{5}$$

Como $a \neq b$, tenemos que $a^3 \neq b^3$. De (4) y (5) tenemos que

$$E = \frac{(a^3 + b^3)^2(a^3 - b^3)^2}{(a^3 - b^3)^2} = (a^3 + b^3)^2.$$

Luego, como $a^3 + b^3 = -c^3$, entonces $E = (-c^3)^2 = c^6$. $\square$

Problema 4. *Sean a y b números reales tales que $a^3-3a^2+5a=1$ y $b^3-3b^2+5b=5$. Calcular el valor de $a+b$.*

Solución. Notemos que el sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{aligned}(a-1)^3+2(a-1)+2=0,\\(b-1)^3+2(b-1)-2=0.\end{aligned}$$

Por comodidad, hacemos $a-1=x$, $b-1=y$. Luego, el sistema es equivalente a $x^3+2x+2=0$ y $y^3+2y-2=0$. Sumando miembro a miembro y aplicando la identidad de suma de cubos, obtenemos que $(x+y)(x^2-xy+y^2+2)=0$. Por lo tanto, $x+y=0$ o $x^2-xy+y^2+2=0$. Pero si $x^2-xy+y^2+2=0$, entonces

$$0=x^2-xy+y^2+2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2,$$

lo cual es absurdo, pues $(x-\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4}+2>0$. Así, concluimos que $x+y=0$. Por lo tanto, $a+b=x+y+2=2$. □

Problema 5. *Demuestre que el producto de cuatro enteros positivos consecutivos nunca es un cuadrado perfecto.*

Solución. Supongamos que existen cuatro enteros positivos consecutivos tales que su producto es un cuadrado perfecto y sea n el menor de esos cuatro números. Entonces, $n(n+1)(n+2)(n+3)=k^2$ para algún entero positivo k. Además, tenemos que $n(n+3)=n^2+3n$ y $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$. Entonces,

$$\begin{aligned}n(n+1)(n+2)(n+3)+1&=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\&=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\&=(n^2+3n+1)^2,\end{aligned}$$

lo cual implica que $k^2+1=(n^2+3n+1)^2$. De aquí, $(n^2+3n+1)^2-k^2=1$ o de manera equivalente, $(n^2+3n+1+k)(n^2+3n+1-k)=1$. Como ambos factores son enteros, o bien ambos son iguales a 1 o ambos son iguales a -1. En cualquier caso, tenemos que $n^2+3n+1+k=n^2+3n+1-k$, lo cual implica que $2k=0$ y, en consecuencia, $k=0$. Esto es una contradicción, pues si k es el producto de cuatro enteros positivos, entonces k también es positivo. □

Problema 6. *Determine todos los números enteros que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.*

Solución. Sea n un número entero que se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados. Sabemos que n puede ser par o impar, por esta razón analizaremos dos casos:

- Si n es impar, entonces existe un entero k tal que $n=2k+1$. Luego, por la identidad del binomio al cuadrado sabemos que $(k+1)^2=k^2+2k+1$, es decir, $2k+1=(k+1)^2-k^2$. Esto es suficiente para garantizar que si n es impar, entonces sí se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

- Si n es par, entonces como n es la diferencia de dos cuadrados, tenemos que $n = x^2 - y^2$, para algunos enteros x, y. Claramente x, y tienen la misma paridad. Si x, y son pares, entonces $x^2 - y^2$ es múltiplo de 4, en consecuencia, n es múltiplo de 4. Ahora, si x, y son ambos impares, entonces $x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$, así $x^2 - y^2$ es múltiplo de 8 y, en consecuencia, n también es múltiplo de 8. Luego, de cualquier forma, n es múltiplo de 4, así, $n = 4t$ para algún entero t. En síntesis, si un número par se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos, entonces dicho número es múltiplo de 4.

  De pronto surge una interrogante muy natural: ¿todo múltiplo de 4 se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos? La respuesta es sí, y procederemos con la prueba. Sea t un número entero arbitrario. Por la identidad de Legendre, sabemos que $(t + 1)^2 - (t - 1)^2 = 4t$. Esto es suficiente para afirmar que cualquier múltiplo de 4 sí se puede expresar como la diferencia de dos cuadrados perfectos.

Finalmente, concluimos que los únicos enteros que se pueden expresar como la diferencia de dos cuadrados son los impares y los múltiplos de 4. □

Problema 7. *Demuestre que existen* 2017 *cuadrados perfectos, todos distintos, tales que la suma de todos ellos es también un cuadrado perfecto.*

Solución. Consideremos los números $x_k = 2k$, para todo $1 \leqslant k \leqslant 2016$. Así, la suma de sus cuadrados es múltiplo de 4, es decir, existe un entero positivo m tal que

$$2^2 + 4^2 + \cdots + 4032^2 = 4m.$$

Por la identidad de Legendre, tenemos que $4m = (m + 1)^2 - (m - 1)^2$, por lo tanto,

$$2^2 + 4^2 + \cdots + 4032^2 + (m - 1)^2 = (m + 1)^2,$$

donde claramente se observa que la suma de esos 2017 cuadrados perfectos es también un cuadrado perfecto. Además, $m - 1 > \frac{4032}{4} \cdot 4032 > 4032$; por lo tanto esos 2017 cuadrados perfectos son todos distintos. □

Problema 8. (*Brasil, 2012*) *Determine si existen enteros positivos distintos* x_1, x_2, $\ldots, x_{2012}$, n, *tales que*

$$n^2 = x_1^{P_1} + x_2^{P_2} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}},$$

donde P_k *es el* k*-ésimo número primo, para todo entero positivo* k.

Solución. Vamos a demostrar que sí existen tales números. En efecto, para cada $2 \leqslant k \leqslant 2012$ hagamos $x_k = 2k - 1$. Como cada uno de los números $x_2, x_3, \ldots, x_{2012}$ es impar, entonces los siguientes números también son impares:

$$x_2^{P_2},\ x_3^{P_3},\ x_4^{P_4}, \ldots\ ,\ x_{2012}^{P_{2012}}$$

Sabemos que al sumar 2011 números impares obtenemos un número impar, entonces el número

$$x_2^{P_2} + x_3^{P_3} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}}$$

es impar, o sea, existe un entero positivo t tal que

$$x_2^{P_2} + x_3^{P_3} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}} = 2t + 1.$$

Sabemos que $P_1 = 2$, luego, haciendo $x_1 = t$, tenemos que

$$x_1^{P_1} + x_2^{P_2} + \cdots + x_{2012}^{P_{2012}} = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2.$$

Basta con tomar $n = t+1$ y conseguimos lo deseado. Además, es fácil notar que todos los números x_i son distintos dos a dos y que también son diferentes de n. $\square$

Problema 9. *Demostrar que el número* $3^{4^5} + 4^{5^6}$ *se puede expresar como el producto de dos enteros de al menos* 2017 *dígitos.*

Solución. Sean $m = 3^{4^4}$ y $n = 2^{\frac{5^6-1}{2}}$. Notemos que $3^{4^5} + 4^{5^6} = m^4 + 4n^4$ y que

$$m^4 + 4n^4 = (m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4) - (4m^2n^2) = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2.$$

Luego, $m^4 + 4n^4 = (m^2 + 2mn + 2n^2)(m^2 - 2mn + 2n^2)$. Notemos que,

$$m^2 - 2mn + 2n^2 = (m-n)^2 + n^2 \geqslant n^2. \tag{6}$$

Además,

$$n^2 = 2^{5^6-1} = 2^{15624} > 2^{8068} = 16^{2017} > 10^{2017}. \tag{7}$$

De (6) y (7) tenemos que $m^2 - 2mn + 2n^2$ tiene al menos 2017 dígitos. Como

$$m^2 + 2mn + 2n^2 > m^2 - 2mn + 2n^2,$$

entonces $m^2 + 2mn + 2n^2$ también tiene al menos 2017 dígitos. Concluimos que el número $3^{4^5} + 4^{5^6}$ sí se puede expresar como el producto de dos enteros positivos de al menos 2017 dígitos. $\square$

Problema 10. (*Bay Area Mathematical Olympiad, 2016*) *Encontrar un entero positivo* N *y enteros* $a_1, a_2, \ldots, a_N$*, tales que*

$$a_1 \cdot 1^3 + a_2 \cdot 2^3 + \cdots + a_N \cdot N^3 = 20162016,$$

donde $a_i = 1$ *o* $a_i = -1$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, N$.

Solución. Para cada entero positivo m, definamos $u_m = (m+1)^3 - m^3$. Por la identidad del binomio al cubo, tenemos que

$$u_m = (m^3 + 3m^2 + 3m + 1) - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

Análogamente, podemos calcular u_{m+2}, u_{m+4} y u_{m+6}. En efecto,

$$\begin{aligned}
u_{m+2} &= 3(m+2)^2 + 3(m+2) + 1 = 3m^2 + 15m + 19,\\
u_{m+4} &= 3(m+4)^2 + 3(m+4) + 1 = 3m^2 + 27m + 61,\\
u_{m+6} &= 3(m+6)^2 + 3(m+6) + 1 = 3m^2 + 39m + 127.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$u_m + u_{m+6} = 6m^2 + 42m + 128 \quad \text{y} \quad u_{m+2} + u_{m+4} = 6m^2 + 42m + 80.$$

Así, tenemos que $S_m = u_m - u_{m+2} - u_{m+4} + u_{m+6} = 48$. La última igualdad nos indica que el valor de S_m no depende de m, es decir, siempre es 48 para cualquier valor de m. Además, notemos que S_m tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} S_m = {} & -m^3 + (m+1)^3 + (m+2)^3 - (m+3)^3 + \\ & + (m+4)^3 - (m+5)^3 - (m+6)^3 + (m+7)^3. \end{aligned}$$

Sabemos que $2016 = 48 \cdot 42$, así, 20162016 también es divisible por 48, entonces existe un entero positivo k tal que $20162016 = 48k$. Así, podemos aprovechar la siguiente expresión:

$$\underbrace{48 + 48 + \cdots + 48}_{k \text{ sumandos}} = 20162016$$

reemplazando cada 48 por algún S_i de la siguiente forma: el primer sumando 48 lo reemplazamos por S_1, el segundo sumando 48 lo reemplazamos por S_9, el tercer sumando 48 lo reemplazamos por S_{17} y así sucesivamente. Por lo tanto, el último sumando 48 lo reemplazamos por S_{8k-7} quedando de la siguiente manera:

$$S_1 + S_9 + S_{17} + \cdots + S_{8k-7} = 20162016.$$

Como cada S_i está conformado por 8 términos y la expresión de arriba tiene k términos, entonces tomando $N = 8k$ habremos conseguido que el número 20162016 quede expresado de la forma que se pedía. $\square$

Problemas Propuestos

1) Sean x, y, números reales tales que $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3 = a$. Hallar todos los posibles valores de a.

2) Sean a, b, c números reales tales que $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2017$. Si $a \neq b$, calcular $c^2(a + b)$.

3) Determinar si existen enteros positivos a y b tales que $a^2 + a = 4(b^2 + b)$.

4) Hallar todos los números reales x, y, z tales que $x+y = 4\sqrt{z-1}$, $y+z = 4\sqrt{x-1}$ y $z + x = 4\sqrt{y-1}$.

5) Sea x un número real, con $|x| > 1$, tal que $x + \sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}} = 20$. Calcular el valor de $x^2 + \sqrt{x^4-1} + \frac{1}{x^2+\sqrt{x^4-1}}$.

6) Calcular el valor de la suma $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1}\right)}$.

7) Sean x, y números reales tales que $\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1$. Calcular $x + y$.

8) Resolver la ecuación en los números reales

$$\sqrt{x_1 - 1^2} + 2\sqrt{x_2 - 2^2} + \cdots + 20\sqrt{x_{20} - 20^2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{20}).$$

9) Sean a, b, c, d números reales. Demostrar que $\text{mín}(a-b^2, b-c^2, c-d^2, d-a^2) \leqslant \frac{1}{4}$.

10) Sean a y b números reales. Probar que $a^3 + b^3 + (a + b)^3 + 6ab = 16$ si y solo si $a + b = 2$.

11) Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2$. Probar que $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4$.

12) Sean x, y números reales que satisfacen $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$. Calcular, en términos de k, la expresión $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$.

Bibliografía

1) Titu Andreescu, Dorin Andrica. *Number Theory. Structures, Examples and Problems.* Birkhäuser, 2009.

2) Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng. *104 Number Theory Problems. From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser, 2007.

3) Arthur Engel. *Problem-Solving Strategies.* Springer, 1999.

4) Xiong Bin, Lee Peng Yee. *Mathematical Olympiad in China: Problems and Solutions.* World Scientific Publishing Company, 2007.

5) Titu Andreescu, Adithya Ganesh. *108 Algebra Problems from the AwesomeMath Year-Round Program.* XYZ Press, 2014.

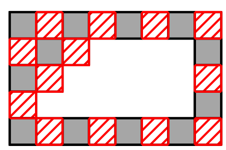
6) Titu Andreescu, Dorin Andrica. *360 Problems for Mathematical Contests.* GIL Publishing House, 2003.

7) Dušan Djukić, Vladimir Janković, Ivan Matić, Nikola Petrović. *The IMO Compendium. A collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2009.* Second Edition, Springer, 2009.

Problemas de práctica

Los problemas del 1 al 12 conformaron la versión A del examen de invitación. Los problemas del 13 al 20 junto con los problemas 1, 3, 10 y 11 de la versión A, conformaron la versión B del examen de invitación. Los problemas 21 y 22 fueron parte de la versión C del examen de invitación junto con otros 10 problemas tomados de las versiones A y B.

Problema 1. Se construyó un piso intercalando dos clases de mosaicos: unos grises y otros rayados, pero se desprendieron algunos mosaicos como se muestra la figura. ¿Cuántos mosaicos grises se desprendieron?

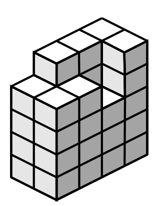


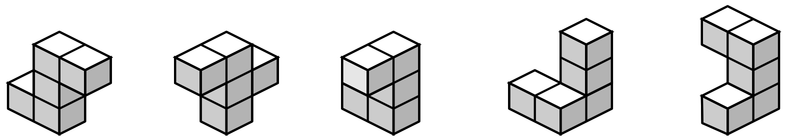
(a) 12 (b) 11 (c) 10 (d) 9 (e) 8

Problema 2. Un granjero tiene cajas para 6 huevos y cajas para 12 huevos. ¿Cuál es el menor número de cajas que necesita para guardar 66 huevos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 6

Problema 3. Con piezas de un rompecabezas tridimensional Raúl quiere construir una torre con techo plano. Ya lleva construido lo que se muestra en la figura. ¿Cuál de las piezas debe colocar encima?



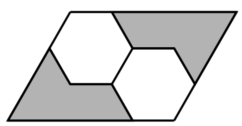


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 4. Se escriben en un renglón todos los números de 4 cifras en los que el producto de sus cifras sea 24. Luego, en un segundo renglón, abajo de cada uno de los números se pone la suma de las cifras del número (por ejemplo, 4611 es uno de los números, porque $4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 = 24$, y abajo de 4611 se escribe 12 pues $4+6+1+1 = 12$). ¿Cuántos números distintos quedan en el segundo renglón?

(a) Todos son iguales (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 12

Problema 5. En la figura, los dos hexágonos son iguales y regulares. ¿Qué fracción del paralelogramo está sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{2}{5}$ (e) $\frac{5}{12}$

Problema 6. Un elevador puede transportar a 12 adultos o 20 niños. ¿Cuántos niños máximo pueden viajar con 9 adultos?

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

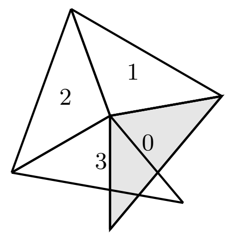
Problema 7. Un anillo de 10 gramos, tiene $60\,\%$ de oro y $40\,\%$ de plata. Un joyero quiere derretirlo y agregar 2 gramos de plata y agregar los gramos de oro necesarios para que el nuevo anillo tenga ahora el $70\,\%$ de oro. ¿Cuántos gramos de oro deberá agregar el joyero?

(a) 4 (b) 6 (c) 8 (d) 10 (e) Más de 10

Problema 8. Hay cinco tarjetas en la mesa. Cada tarjeta tiene un número en un lado y una letra en el otro. Pedro afirma que si una tarjeta tiene una consonante en un lado, entonces el número que aparece en el otro lado de la tarjeta es impar. Si lo que se ve de las tarjetas es: U, M, 4, 7, 8. ¿Cuántas tarjetas debe voltear Alicia para ver si lo que dice Pedro es cierto?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 9. Guillermo tiene muchos triángulos de papel iguales (con ángulos de 100^o, 40^o y 40^o); con ellos construye una espiral como se muestra en la figura. El primer triángulo que pone es el triángulo 0 y después va pegando los triángulos $1, 2, 3, \ldots$ sin importar si se sobreponen. ¿Qué número tendrá el primer triángulo que quede exactamente en la misma posición que el triángulo 0?



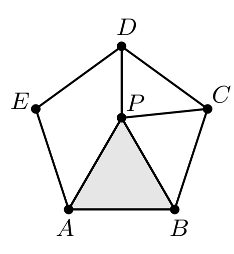
(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

Problema 10. Seis números escogidos entre el 1 y el 5 se escriben en los cuadrados de la figura de tal manera que la suma de los números en ambos renglones es la misma y también la suma de los números en cada una de las tres columnas son iguales. Ya se escribieron algunos de los números. ¿Qué número va en el lugar del cuadrado sombreado?

1		4
	2	

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Problema 11. Sobre el lado AB de un pentágono regular $ABCDE$, se construyó hacia el interior un triángulo equilátero ABP. ¿Cuál es la medida en grados del ángulo $\angle CPD$?

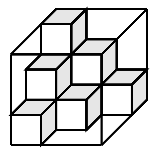


(a) $42°$ (b) $66°$ (c) $72°$ (d) $84°$ (e) $108°$

Problema 12. Para cada entero $n \geq 2$, sean p_n el número primo anterior o igual a n y q_n el número primo siguiente a n. Por ejemplo para $n = 3$, $p_3 = 3$ y $q_3 = 5$. ¿Cuál es el valor de $\dfrac{1}{p_2q_2}+\dfrac{1}{p_3q_3}+\dfrac{1}{p_4q_4}+\dfrac{1}{p_5q_5}+\dfrac{1}{p_6q_6}+\dfrac{1}{p_7q_7}+\dfrac{1}{p_8q_8}+\dfrac{1}{p_9q_9}+\dfrac{1}{p_{10}q_{10}}$?

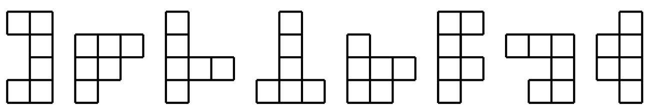
(a) $\frac{28}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11}$ (b) $\frac{1}{77}$ (c) $\frac{9}{22}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{10}{11}$

Problema 13. Carmina tiene varios cubos de plástico que acomodó en una caja. ¿Cuántos cubos más necesita para llenar la caja?



(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) 17 (e) 18

Problema 14. Las siguientes figuras representan piezas de cartón, cada una formada por 6 cuadrados de 1 cm $\times$ 1 cm. ¿Cuántas de ellas pueden completarse a un rectángulo de 3 cm $\times$ 4 cm pegando solo otra pieza de 6 cuadrados de 1 cm $\times$ 1 cm?



(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

Problema 15. Mario tiene 30 pares de calcetines (cada par de un color distinto) mezclados en un cajón. Si va a hacer la maleta para viajar una semana, ¿cuál es la menor cantidad de calcetines que debe sacar del cajón para garantizar que conseguirá al menos 7 pares de calcetines del mismo color?

(a) 14 (b) 21 (c) 31 (d) 37 (e) 41

Problema 16. Juan se prepara para una carrera, para esto deberá entrenar diario. Cada día de la primera semana corre 2 mil metros, cada día de la segunda semana corre 3 mil metros, cada día de la tercera semana corre 4 mil metros. Pero de la cuarta semana y todas las semanas que siguen, cada día corre 500 metros más de los metros que corre en los días de la semana anterior, por ejemplo en cada día de la cuarta semana corre $4,500$ metros. La semana en que corre 15 kilómetros cada día es la número:

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 20 (e) 25

Problema 17. En un grupo de baile hay 25 niños y 19 niñas. Cada semana entran al grupo 2 niños y 3 niñas más. ¿En cuántas semanas habrá el mismo número de niños que de niñas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

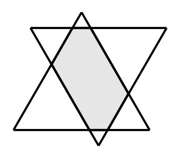
Problema 18. En una lista se escribieron todos los números que pueden formarse revolviendo los dígitos $2, 0, 1, 7$ (sin repetir ninguno). Los números quedaron escritos de mayor a menor. Después se calcularon las diferencias entre cada dos números consecutivos de la lista, siempre restando a cada número el que le sigue en la lista. ¿Cuál es la mayor de estas diferencias?

(a) 4302 (b) 4500 (c) 4995 (d) 6500 (e) 7083

Problema 19. Un triángulo rectángulo con catetos de longitudes a, b y con hipotenusa de longitud c, cumple que el área del triángulo es un cuarto del área del cuadrado de lado c. ¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b}$?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) 1 (d) $\sqrt{2}$ (e) 2

Problema 20. Dos triángulos equiláteros iguales con perímetro de 18 cm se traslapan de manera que sus lados quedan paralelos como indica la figura. ¿Cuál es el perímetro del hexágono que queda formado adentro de la figura?

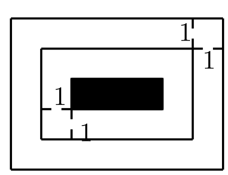


(a) 11 cm (b) 12 cm (c) 13 cm (d) 14 cm (e) 15 cm

Problema 21. En una elección cada uno de los 5 candidatos obtuvo una cantidad distinta de votos. En total hubo 36 votos. El ganador obtuvo 12 votos y el candidato que obtuvo menos votos logró 4. ¿Cuántos votos tuvo el candidato que quedó en segundo lugar?

(a) 8 y 9 son las dos posibilidades (b) 9 y 10 son las dos posibilidades
(c) solo 8 es posible (d) solo 9 es posible (e) solo 10 es posible

Problema 22. Un tapete de forma rectangular tiene en su interior dos figuras rectangulares. Las orillas de los rectángulos están separadas una distancia igual a 1 metro y la altura del rectángulo pequeño es igual a 1 metro. Si las áreas de las figuras negra, blanca y gris son a, b y c, respectivamene y, cumplen que $2b = a + c$, ¿cuál es la longitud de la base del rectángulo negro?



(a) 1 m (b) 1.5 m (c) 2 m (d) 2.5 m (e) 3 m

Soluciones a los problemas de práctica

Solución del problema 1. La respuesta es (e). Es una cuadrícula de 5×8, así que tiene 40 cuadritos. La mitad deben ser grises, pero hay 12 grises. Faltan 8.

Solución del problema 2. La respuesta es (e). Tenemos que $66 = 12 \cdot 5 + 6$, así que puede usar 5 cajas para 12 huevos y una caja para 6 huevos.

Solución del problema 3. La respuesta es (e).

Solución del problema 4. La respuesta es (d). Tenemos que $24 = 2^3 \times 3$, así que las posibilidades para las cifras del número son $(8, 3, 1, 1)$, $(4, 2, 3, 1)$, $(4, 6, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 3)$ y $(2, 2, 6, 1)$. Las respectivas sumas son 13, 10, 12, 9 y 11, de manera que son 5 posibilidades.

Solución del problema 5. La respuesta es (a). Trazando dos paralelas a los lados que están a 60° y que pasan por los centros de los hexágonos, se parte la figura en 8 medios hexágonos de los cuales 4 están sombreados. Entonces el área sombreada es la mitad del área del paralelogramo.

Solución del problema 6. La respuesta es (b). Si el peso que puede soportar el elevador es P, cada adulto debe pesar en promedio $\frac{P}{12}$ y cada niño $\frac{P}{20}$. Luego en promedio, 3 adultos pesan lo mismo que 5 niños. Por lo que si en el elevador hay 9 adultos, entonces el elevador puede soportar 3 adultos más o 5 niños más.

Solución del problema 7. La respuesta es (c). El anillo original tiene 4 gramos de plata y 6 gramos de oro. El nuevo anillo tendrá $4 + 2 = 6$ gramos de plata, que será el $30\,\%$ del total; por lo que 2 gramos de plata es el $10\,\%$. Así, $2 \cdot 7 = 14$ gramos representará el $70\,\%$ del anillo, que son los gramos que deberá tener de oro, por lo que le faltan 8 gramos de oro.

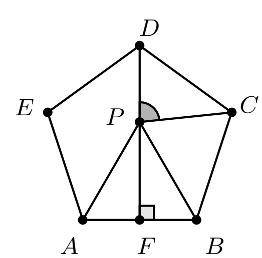
Solución del problema 8. La respuesta es (d). Las tarjetas que debe voltear Alicia son las que tienen número par: 4 y 8 (porque si tuvieran consonante del otro lado, habría dicho mentira), y también la que tiene M (pues es consonante y debe verificar que detrás haya un número impar). Las otras dos tarjetas no se necesitan voltear, atrás de una tarjeta con vocal puede haber un número par o impar sin que eso afecte lo que afirma Pedro.

Solución del problema 9. La respuesta es (e). Para que el triángulo n esté encima del triángulo 0 debe ocurrir que $100 \cdot n$ sea un múltiplo de 360. El múltiplo más pequeño de 100 y 360 es 1800, así que $n = \frac{1800}{100} = 18$.

Solución del problema 10. La respuesta es (b). La suma de todos los cuadros se puede obtener como la de las 3 columnas o la de los 2 renglones; de esta manera tenemos que la suma de las columnas es par y la de los renglones es múltiplo de 3. Entonces, los únicos números que pueden ir encima del 2 son el 1 o el 4. Pero 1 no es posible, ya que la segunda columna sumaría 3 y la tercera 5 o más, luego debe ser 4. Luego, la suma de los números en cualquier columna es 6, así que el número en la casilla sombreada es 2 y la figura queda completa como sigue:

1	4	4
5	2	2

Solución del problema 11. La respuesta es (d). La mediatriz del segmento AB pasa por D, P y el punto medio F de AB.



Ahora, el triángulo PFB es un triángulo rectángulo con $\angle FPB = 30°$ y el triángulo BCP es isósceles. Como los ángulos internos del pentágono regular miden $108°$, se tiene que $\angle CBP = 108° - 60° = 48°$. Por lo que $\angle BPC = \angle PCB = \frac{1}{2}(180° - 48°) = \frac{1}{2}(132°) = 66°$. Luego, $\angle CPD = 180° - \angle FPB - \angle BPC = 180° - 30° - 66° = 84°$.

Solución del problema 12. La respuesta es (c). Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{p_nq_n} &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}\\ &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{11}=\frac{9}{22}.\end{aligned}$$

Una manera más directa de resolver el problema es la siguiente.

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{p_nq_n} &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{7\cdot 11}\\ &= \frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}\\ &= \frac{5\cdot 7\cdot 11+2(2\cdot 7\cdot 11)+2(2\cdot 3\cdot 11)+4(2\cdot 3\cdot 5)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\\ &= \frac{5\cdot 7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11(7+3)+4\cdot 2\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\frac{5(7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11\cdot 2+4\cdot 2\cdot 3)}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}\\ &= \frac{7\cdot 11+2\cdot 2\cdot 11\cdot 2+4\cdot 2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\frac{7\cdot 11+8(11+3)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}\\ &= \frac{7(11+8\cdot 2)}{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}=\frac{27}{2\cdot 3\cdot 11}=\frac{9}{22}.\end{aligned}$$

Solución del problema 13. La respuesta es (d). El número de cubitos que hay hasta el momento es $1+(1+2)+(1+2+3)=10$. Debería haber $3\times 3\times 3=27$, así que faltan 17.

Solución del problema 14. La respuesta es (c). La primera y la octava se pueden juntar para formar el rectángulo; la segunda se puede completar con una igual a ella y lo mismo ocurre con la sexta. La quinta y la séptima también son complementarias. Solo la tercera y la cuarta necesitan de dos piezas cada una para completar un rectángulo de 3×4.

Solución del problema 15. La respuesta es (d). La mayor cantidad de calcetines que Mario puede sacar sin encontrar un solo par son 30 calcetines (uno de cada color). Para garantizar que obtiene todos los pares que desea es suficiente sacar 7 calcetines más. En total Mario tendría que sacar 37 calcetines.

Solución del problema 16. La respuesta es (e). En la tercera semana, cada día corre $4,000$ metros y cada dos semanas aumenta un kilómetro. Como necesita llegar a 15 kms, le faltan 11 kms. y entonces 22 semanas más de entrenamiento. Luego, en la semana 25 estará corriendo cada día 15 kms.

Solución del problema 17. La respuesta es (e). La diferencia inicial entre niños y niñas es de 6. Cada semana la diferencia disminuye en 1, así que se necesitan 6 semanas.

Otra forma. Llamemos s al número de semanas necesarias para que haya el mismo número de niños que de niñas. Después de s semanas habrá $25 + 2s$ niños y $19 + 3s$ niñas, así que la ecuación a resolver es $25 + 2s = 19 + 3s$, de donde $s = 25 - 19 = 6$.

Solución del problema 18. La respuesta es (a). La mayor diferencia se alcanza cuando cambia la cifra de los millares. Las parejas de números consecutivos en los que ocurre esto son $(0721, 1027)$, $(1720, 2017)$ y $(2710, 7012)$. La primera pareja tiene diferencia 306, la segunda 297 y la tercera 4302, así que la mayor diferencia es 4302.

Solución del problema 19. La respuesta es (c). El triángulo cumple, por el Teorema de Pitágoras, que $a^2 + b^2 = c^2$ y como los catetos son perpendiculares, su área es $\frac{ab}{2}$. Como por hipótesis $c^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) = 2ab$, se tiene que $a^2 + b^2 = 2ab$. Luego, $(a - b)^2 = 0$, por lo que $a = b$ y entonces $\frac{a}{b} = 1$.

Solución del problema 20. La respuesta es (b). Observemos que cada pico de la estrella es un triángulo equilátero. Entonces, la suma de tres lados consecutivos del hexágono es igual a lo que mide un lado de los triángulos equiláteros originales, y entonces el perímetro del hexágono es $\frac{2}{3}$ del perímetro de uno de los triángulos, es decir, 12 cm.

Solución del problema 21. La respuesta es (a). Entre el primer lugar y el último tuvieron 16 votos, así que los otros 3 tuvieron un total de 20 votos. Sabemos que el segundo lugar tuvo menos votos que el primero; si hubiera tenido 10 u 11 votos, los otros dos candidatos habrían sumado 9 o 10 votos pero sabemos que uno de esos números debería ser al menos 5, así que no es posible. Como $8+7+5 = 20 = 9+6+5$, entonces es posible que haya tenido cualquiera de 8 o 9 votos.

Solución del problema 22. La respuesta es (c). Si a es la longitud de la base del rectángulo negro, el área del rectángulo negro es también a. Luego las áreas negra, blanca y gris son a, $b = (a + 2)3 - a$, $c = (a + 4)5 - (a + 2)3$, respectivamente. Por lo que, $2((a + 2)3 - a) = a + (a + 4)5 - (a + 2)3$. Así, $4a + 12 = 3a + 14$, de donde $a = 2$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2018 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sasha, Bigui, Canelita y Mansita deben medir las distancias desde un punto interior de un terreno rectangular hasta las esquinas del mismo. Tres de ellas miden las distancias a tres esquinas consecutivas y obtuvieron, en orden, las mediciones 24 m, 6 m y 22 m, respectivamente. Canelita, sin moverse de su sitio, aprovecha el trabajo de sus amigas para obtener el valor de la distancia a la cuarta esquina. ¿Cuál es dicho valor?

Problema 2. La compañía aeroespacial TotoroX va a lanzar 5 cohetes desde sus dos puertos espaciales. Los puede lanzar en el orden que sea, del puerto que sea, simultánea o secuencialmente. Por ejemplo: $D1, A1 - C2, E1, B2$ es una manera de lanzarlos, donde las comas dividen tiempos de lanzamiento y el guión es un lanzamiento simultáneo. ¿De cuántas maneras se puede programar el lanzamiento?

Problema 3. Para cada entero positivo n sea $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^3$. Determina el valor de la suma $\dfrac{1}{a_2 - 1} + \dfrac{1}{a_3 - 1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{100} - 1}$.

Problema 4. Considera la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reales tales que $a_0 = a_1 = 1$ y, para cada entero $n \geq 1$, se cumple que $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{1 + na_{n-1}a_n}$. Determina el valor de $\dfrac{1}{a_{2018}a_{2017}}$.

Problema 5. Encuentra, en caso de existir, todas las soluciones (x, y, z, t) con x, y, z, t enteros positivos, del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + 10y^2 &= z^2, \\ 10x^2 + y^2 &= t^2. \end{aligned}$$

Problema 6. Sea p un número primo de la forma $3k + 2$. Si a y b son enteros tales que $a^2 + ab + b^2$ es divisible por p, demuestra que a y b son ambos divisibles por p.

Problema 7. Las alturas AA_1, BB_1 y CC_1 de un triángulo acutángulo ABC se intersecan en H. Sea A_2 el punto reflejado de A sobre la recta B_1C_1 y sea O el circuncentro del triángulo ABC. Demuestra que OHA_1A_2 es un cuadrilátero cíclico.

Problema 8. Dada una cuadrícula de $m \times n$ y tres colores, se quiere colorear cada uno de los segmentos de la cuadrícula con uno de los tres colores de tal manera que cada cuadrado unitario tenga dos lados de un mismo color y los otros dos lados de un segundo color. ¿Cuántas coloraciones diferentes se pueden hacer?

Problema 9. Sea ABC un triángulo. En los lados AB y CA se construyen exteriormente cuadrados $BACD$ y $ACEF$, respectivamente y cuyos centros son C' y B'. Si M es el punto medio de BC, demuestra que los segmentos MB' y MC' son perpendiculares y de la misma longitud.

Problema 10. Sea n un entero positivo par. Decimos que una lista de números a_1, $a_2, \ldots, a_n$ es n-completa si para cada $1 \leq m \leq n$ alguna de las sumas $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ o $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{n-m+1}$ es un entero. Para cada n encuentra la mínima cantidad de enteros que puede haber en una lista n-completa.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2017 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2017. En esta ocasión felicitamos a Zaida Victorina Cuate Tablas por habernos enviado su solución al problema 4 y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2017, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Demuestra que para ninguna terna de números reales positivos a, b, c, la expresión
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$$
es un número entero.

Solución. Observemos primero que cada uno de los tres números de la suma del problema es menor que 1 (en efecto, $a < a+b$, $b < b+c$ y $c < c+a$), lo que implica que la suma completa es menor que 3. Por tanto, si fuese entera, los valores posibles son 1 o 2. Sin embargo, cuando se aumenta el valor del denominador de una fracción, se obtiene un valor menor que el inicial; por tanto la suma completa es estrictamente mayor que
$$\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{b+c+a}+\frac{c}{c+a+b}=1.$$
Entonces, la única posibilidad es que el valor de la suma sea 2. Sin embargo, de ser así, aplicamos los mismos argumentos a la suma $\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}$, para concluir que debe ser mayor que 1 y menor que 3. Sin embargo, dicha suma es igual a 3 menos la suma original, por lo que debería tener un valor menor a 1 y esto es una contradicción. Concluimos así, que es imposible que la suma original sea un entero.

Problema 2. En el reino de Marinola, los magos Deeds y Drini realizan una competencia mágica. En una puerta está escrito un número y el mago Deeds lanza un hechizo de manera que diariamente el número de la puerta cambia, aumentando en 112 al número que había el día anterior (por ejemplo, si hoy está el número 53, mañana estará el número 165).
El mago Drini tiene un contrahechizo que le permite, cuando le convenga, cambiar una vez al día el orden de los números de la puerta (si la puerta tiene 403, puede hacer que cambie a 340, 043, etc.). Si algún día el número de la puerta llega a ser mayor que 1000, el mago Deeds gana el torneo. Si en la puerta está hoy el número 143, ¿puede el mago Drini evitar que el mago Deeds gane el torneo?

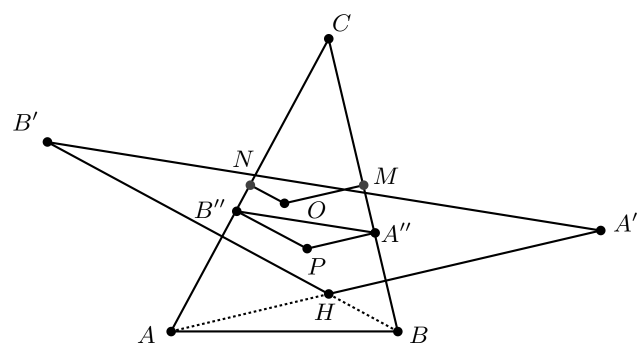
Solución. Sí, siempre puede. Observamos que, con cualquier número que esté en la puerta, si Deeds lanza su hechizo durante 5 días, tendrá que aparecer en algún momento un número que termine en 1 o en 2. En efecto, basta con hacer los casos de acuerdo al dígito de las unidades al inicio; si es par, entonces pasará en algún momento por el 2; mientras que si es impar, entonces pasará en algún momento por el 1. El día que el número tenga en su último dígito 1 o 2, Drini puede lanzar su contrahechizo y permutar los dígitos para que el 1 o el 2 quede en la posición de las centenas. Con el movimiento anterior, Drini puede reducir el número de la puerta a un número menor que 300. Al aplicar esta estrategia, si el número de la puerta es menor a 300, Deeds no puede llegar a 1000 en menos de 5 hechizos. Por tanto, Drini tiene una estrategia que hace que Deeds no pueda ganar el torneo.

Problema 3. En el salón de Luis hay 25 niños (sin contarlo a él). Luis observa que no hay dos niños que tengan la misma cantidad de amigos en el salón. ¿Cuál es la mayor cantidad de amigos que puede tener Luis? (Nota: Si un niño A es amigo de un niño B, entonces B también es amigo de A).

Solución. Notemos que en el salón de Luis hay 26 niños y cada niño tiene una cantidad de amigos que va desde 0 hasta 25. Sin embargo, es imposible que haya un niño que tenga 0 amigos y otro que tenga 25, pues el que tiene 25 es amigo de todos y, por tanto, sería amigo del que no tiene amigos.
Por el principio de las casillas, hay dos niños que deben tener la misma cantidad de amigos. Ahora, si solo consideramos a los 25 niños sin contar a Luis, entre ellos no hay repetición; por tanto, uno debe tener la misma cantidad de amigos que Luis.
Consideremos como primer caso que hay un niño sin amigos. Separemos a los niños (sin contar a Luis) en dos grupos: los que tienen 12 o menos amigos, y los que tienen más de 12. La suma del número total de amigos en el primer grupo es $0 + 1 + 2 + \cdots + 12 = 78$ (contando repeticiones), mientras que en el segundo grupo es $13 + 14 + 15 + \cdots + 24 = 222$. Podría ser que todos los del primer grupo sean amigos con los del segundo, pero entonces habría $222 - 78 = 144$ amistades (contando repetición) entre los mismos niños del segundo grupo. Pero, como son 12 niños, a lo más puede haber $12 \cdot 11 = 132$ amistades (contando repeticiones). En caso de que no todos los del primer grupo sean amigos con los del segundo, esta cantidad aumentaría.
Más aún, como $144 - 132 = 12$, la única posibilidad es que todos los niños del segundo grupo sean los 12 amigos de Luis; en efecto, Luis puede abonar a lo más en 12 amistades a los 222 amigos del segundo grupo (contando repeticiones) y es justo el mínimo número de amistades que hacen faltan. Concluimos que necesariamente todos los del primer grupo son amigos de los del segundo y ninguno de ellos con Luis (para que no falten más amistades en el segundo grupo), y todos los del segundo son amigos de Luis. Por lo tanto, Luis tiene 12 amigos.
El segundo caso es cuando hay un niño que tiene 25 amigos (es amigo de todos). Procedemos a hacer los grupos del mismo modo, solo que ahora en el primer grupo la suma del número de amistades es $1 + 2 + 3 + \cdots + 12 = 78$ mientras que en el segundo grupo es $13 + 14 + 15 + \cdots + 25 = 247$. Dado que internamente, el segundo grupo puede tener a lo más $13 \cdot 12 = 156$ y $247 - 156 = 13$, un razonamiento similar al anterior muestra que todos los del primer grupo son amigos con los del segundo y ninguno con Luis, mientras que todos los del segundo grupo sí son amigos de Luis. Por tanto, en este caso, Luis tiene 13 amigos. En conclusión, la cantidad máxima de amigos que puede tener Luis es 13.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con circuncentro O y ortocentro H. Denotemos por P al punto medio de OH. Sean A', B' y C' las reflexiones de A, B y C sobre BC, CA y AB, respectivamente. Sean A'', B'' y C'' las proyecciones desde P sobre BC, CA y AB, respectivamente. Demuestra que los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son semejantes.

Solución de Zaida Victorina Cuate Tablas. Sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Además sean M, N y L los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente.



Es conocido que $AH = 2OM$; además, $PA'' = \frac{HD+OM}{2}$ por ser $MOHD$ un trapecio isósceles. Juntando estos dos hechos, podemos concluir que

$$PA'' = \frac{1}{2}\left(HD + \frac{AH}{2}\right) = \frac{1}{4}(2HD + AH) = \frac{1}{4}(AD + HD).$$

Análogamente, tenemos que $PB'' = \frac{BE+HE}{4}$. Por otro lado, $\angle A''PB'' = 180^\circ - \angle ACB = \angle DHE = \angle A'HB'$. Además, tenemos que $HA' = AD + HD$ y $HB' = BE + HE$. Entonces, por el criterio de semejanza LAL se tiene que los triángulos $A''PB''$ y $A'HB'$ son semejantes en razón $1 : 4$, de manera que $A'B' = 4A''B''$. De forma simétrica obtenemos que $B'C' = 4B''C''$ y $C'A' = 4C''A''$. Finalmente, por el criterio de semejanza LLL se concluye que los triángulos $A'B'C'$ y $A''B''C''$ son semejantes.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c = 1$. Demuestra que

$$\frac{9}{10} \leq \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < 1.$$

Solución. Para demostrar el lado derecho de la desigualdad, basta con observar que el denominador en cada fracción es mayor que 1. Entonces,

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} < a + b + c = 1.$$

Ahora, para la demostración del lado izquierdo asumiremos, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b \leq c$. Luego, $\frac{1}{1+bc} \leq \frac{1}{1+ca} \leq \frac{1}{1+ab}$. Utilizando la desigualdad del reacomodo (o la desigualdad de Chebyshev), la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica y la desigualdad conocida $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\right) &\geq (a+b+c)\left(\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab}\right) \\ &= \frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca}+\frac{1}{1+ab} \\ &\geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{9}{3+\frac{(a+b+c)^2}{3}} = \frac{27}{10}. \end{aligned}$$

Problema 6. Determina todas las soluciones en enteros x, y de la ecuación

$$x^3 + 10x - 1 = y^3 + 6y^2.$$

Solución. Si x, y son enteros que cumplen la ecuación, entonces $x^3 - y^3 - 1 = -10x + 6y^2$. Por tanto, $x^3 - y^3$ es impar, lo que implica que x, y tienen distinta paridad. Sea $k = x - y$, por lo anterior se sabe que k es impar. Al sustituir los valores en la ecuación original, se obtiene que $(3k-6)y^2 + (3k^2+10)y + k^3 + 10k - 1 = 0$.
El discriminante de la ecuación anterior es $D = -3k^4 + 24k^3 - 60k^2 + 252k + 76$ y debe ser un cuadrado perfecto, en particular, $D > 0$. Dado que $D = -k^2(3k^2 - 24k + 60) + 252k + 76 = -3k^2(k^2 - 8k + 20) + 252k + 76 = -3k^2((k-4)^2 + 4) + 252k + 76$, que $(k-4)^2 + 4$ es decreciente de $-\infty$ a 4 y que $(0-4)^2 + 4 > 0$, entonces $D < 0$ si $k \leq -1$. Por otro lado, $D = 3k^3(8-k) + 2(38-k^2) + 2k(126-29k)$; por tanto, $D < 0$ si $k \geq 8$. Dado que $D = -71 < 0$ si $k = 7$ y k es impar, solo resta comprobar los casos $k = 1, 3$ y 5. Se obtiene que $D = 289 = 17^2$, $D = 697$ y $D = 961 = 31^2$ en cada caso, respectivamente, lo que permite concluir que las soluciones son $x_1 = 6$, $y_1 = 5$ y $x_2 = 2$, $y_2 = -3$.

Problema 7. Un entero positivo n es *perfecto* si la suma de sus divisores positivos es $2n$. Por ejemplo, 6 es perfecto porque $2(6) = 1 + 2 + 3 + 6$.

a) Demuestra que si un entero perfecto mayor que 6 es divisible por 3, entonces también es divisible por 9.

b) Demuestra que si un entero perfecto mayor que 28 es divisible por 7, entonces también es divisible por 49.

Solución. Usaremos la notación $\sigma(n)$ para denotar a la suma de los divisores del entero positivo n. Una propiedad de la función σ es que si m y n son enteros positivos primos relativos, entonces $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.[2]

[2]Ver el artículo "El Teorema Fundamental de la Aritmética". Tzaloa No. 1, año 2013.

a) Sea $n > 6$ un entero perfecto tal que $3 \mid n$, pero que $9 \nmid n$. Entonces, $n = 3a$ para algún entero positivo a primo relativo con 3 y $2n = \sigma(n) = \sigma(3n) = \sigma(3)\sigma(a) = 4\sigma(a)$. Luego, $2 \mid n$ y, por lo tanto, $6 \mid n$ (pues 2 y 3 dividen a n y son primos relativos). Como $n > 6$, los enteros $1, n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}$ y $\frac{n}{6}$ son divisores distintos de n. Así que,

$$2n = \sigma(n) \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + n = 2n + 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $9 \mid n$.

b) Sea $n > 28$ un entero perfecto tal que $7 \mid n$, pero que $49 \nmid n$. Entonces, $n = 7a$ para algún entero positivo a primo relativo con 7 y $2n = \sigma(n) = \sigma(7)\sigma(a) = 8\sigma(a)$. Luego, $4 \mid n$ y, por lo tanto, $28 \mid n$ (pues 7 y 4 dividen a n y son primos relativos). Como $n > 28$, los enteros $1, n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4}, \frac{n}{7}, \frac{n}{14}$ y $\frac{n}{28}$ son divisores distintos de n. Así que,

$$2n = \sigma(n) \geq 1 + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{7} + \frac{n}{14} + \frac{n}{28} + n = 2n + 1,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $49 \mid n$.

Problema 8. Evariste Galois, Pescheux d'Hebinville y Ernest Duchâlet pelearán un duelo a muerte siguiendo las siguientes reglas. Primero decidirán al azar quién dispara primero, quién segundo y quién tercero. Luego tomarán sus lugares en las esquinas de un triángulo equilátero y por turnos, siguiendo el orden previamente elegido, cada uno eligirá un blanco y disprará una vez hasta que solo haya un sobreviviente. Es por todos conocido que Galois siempre atina a su blanco, mientras que d'Hebinville lo hace el $80\,\%$ de las veces y Duchâlet únicamente el $50\,\%$. Durante el duelo, cada uno seguirá la mejor estrategia para sí mismo (pudiendo disparar al aire) y nadie morirá de una bala perdida. ¿Qué probabilidad tiene Galois de sobrevivir el duelo?

Solución. Observemos primero que si se dispara, conviene disparar al de mejor puntería. En efecto, si se dispara al de menor puntería y se acierta, la configuración que resta es con el de mejor puntería y él tiene el turno después del disparo previo, en cuyo caso tiene $1 - p$ probabilidades de sobrevivir ese turno, la cual es menor que si se hubiera acertado el disparo al de mejor puntería. Si se falla, entonces el duelo sigue con los mismos personajes y se tiene que la probabilidad de sobrevivir es igual a la probabilidad de sobrevivir cuando empieza el siguiente en tirar; la cual es menor o igual a uno de los resultados de disparar (o no habría elegido disparar en primer lugar).
Denotemos por A a Galois, por B a d'Hebinville y por C a Duchâlet. Veamos que A siempre dispara. En efecto, si A no dispara, la probabilidad de sobrevivir es la misma que si empieza alguno de los otros dos personajes, en cuyo caso en algún momento alguien dispara y por lo anterior, va a disparar a A, de donde A tiene probabilidad de sobrevivir igual a $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{5}$, según si tiró C o B, respectivamente. Mientras que si dispara, por la premisa anterior dispara a B (si es que sigue vivo), de donde posteriormente C le dispara y tendrá probabilidad $\frac{1}{2}$ de sobrevivir. Luego, si decide disparar, tiene al menos $\frac{1}{2}$ de probabilidades de sobrevivir; mientras que en el otro caso tiene $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{5}$ de probabilidades de sobrevivir.
Ahora, como cada orden de acomodo para disparar tiene la misma probabilidad y hay

seis de ellos, entonces cada uno ocurre con probabilidad de $\frac{1}{6}$. Observemos que C nunca va a disparar hasta que A mate a B o B mate a A; pues de lo contrario, después de disparar, si acierta, la probabilidad de que el otro lo mate es mayor que si no hubiera disparado desde un principio. En efecto, como en caso de atacar, se escoge al que tiene mejor puntería, la probabilidad de C de sobrevivir hasta su próximo turno, si todavía viven A y B, es 1.
En los casos de orden ABC, ACB y CAB, A le dispara a B y lo mata pues tiene probabilidad 1 de acertar. En el siguiente paso C debe tratar a toda costa de matar a A. Como C tiene probabilidad $\frac{1}{2}$ de fallar, la probabilidad de sobrevivir de A es $\frac{1}{2}$, en cuyo caso, A vuelve a disparar y mata a C. Así, la probabilidad de sobrevivir de A es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
En los casos BAC, BCA y CBA, el primer disparo (que no es al aire) sale de la pistola de B y apunta a A. La probabilidad de A de sobrevivir a ese disparo es $\frac{1}{5}$. Ahora, si sobrevive el siguiente disparo (que no sea al aire), saldrá de la pistola de A en dirección de B (C no les disparará hasta que uno de los dos esté muerto) y lo matará. Así, la tercera bala debe ser forzosamente de C hacia A, quien tiene $\frac{1}{2}$ de probabilidad de fallar. Si A sobrevive, el siguiente disparo mata a C y el duelo termina. Entonces, la probabilidad de que esto suceda es $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$.
Por lo tanto, la probabilidad de que sobreviva A es $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$.

Problema 9. Determina todos los valores posibles de la expresión

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2},$$

si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo.

Solución. Denotemos por X al cociente $\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$. Como $(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2 \geq 0$, tenemos que $X \geq 1$, con la igualdad si y solo si $a = b = c$.
Por la ley de los cosenos, tenemos que $2bc > |b^2 + c^2 - a^2|$ ya que $\cos A \neq 1$. De manera análoga, tenemos que $2ab > |a^2 + b^2 - c^2|$ y $2ac > |a^2 + c^2 - b^2|$. Elevando al cuadrado cada desigualdad y sumando las desigualdades resultantes, obtenemos que $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) > a^4 + b^4 + c^4$. Luego, $X < 2$ y, por lo tanto, $X \in [1, 2)$. Resta demostrar que X toma cada valor $k \in [1, 2)$. Con $a = b = 1$ y $c^2 = y$, obtenemos la ecuación cuadrática $p(y) = y^2 - 2ky + (2 - k) = 0$. Como $p(1) \leq 0$ y $p(y)$ es positivo para valores grandes de y, la ecuación cuadrática anterior tiene solución. Por lo tanto, existe c tal que $\frac{1^4+1^4+c^4}{1^2 \cdot 1^2+1^2 \cdot c^2+1^2 \cdot c^2} = k$. Así, la respuesta es el intervalo $[1, 2)$.

Problema 10. Demuestra que cualquier gráfica con 10 vértices y 26 aristas contiene al menos 4 triángulos.

Solución. Sea G una gráfica con 10 vértices y con 26 aristas. Denote con V y E al conjunto de vértices y de aristas de G, respectivamente. Para cada vértice $v \in V$, sea $\Gamma(v)$ el conjunto de vértices de G que son adyacentes a v y sea $d(v) = |\Gamma(v)|$. Entonces, para $x, y \in V$ se cumple que

$$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| = |\Gamma(x)| + |\Gamma(y)| - |\Gamma(x) \cup \Gamma(y)| \geq d(x) + d(y) - |V|.$$

Sea $t(G)$ el número de triángulos en G; así, al sumar la desigualdad anterior para todas las aristas $(x,y) \in E$, se obtiene que

$$3t(G) = \sum_{(x,y)\in E} |\Gamma(x) \cap \Gamma(y)| \geq \sum_{(x,y)\in E} (d(x)+d(y)-|V|) = \left(\sum_{x\in V} d(x)^2\right) - |V| \cdot |E|.$$

Por lo tanto, la desiguald de Cauchy-Schwarz nos permite concluir que

$$3t(G) \geq \frac{1}{|V|}\left(\sum_{x\in V} d(x)\right)^2 - |V| \cdot |E| = \frac{4|E|^2}{|V|} - |V| \cdot |E|.$$

En este caso, se tiene que $|V| = 10$ y $|E| = 26$, entonces $t(G) \geq \frac{52}{15}$ y, por tanto, $t(G) \geq 4$.

Concursos Estatales

XXXI Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Nuevo León

Un alumno requiere al menos 2 años de entrenamiento contando desde el momento que conoce la Olimpiada de Matemáticas, hasta que tiene el nivel necesario para participar en el concurso nacional. Por esta razón en Nuevo León, el comité estatal promueve directamente la organización de una diversidad de competencias matemáticas durante todo el año. Aunque estas competencias no forman parte "oficial" de la OMM, sí son fundamentales en la formación de los participantes y sería absurdo dejar de mencionarlas.

Los alumnos inician típicamente en los últimos años de primaria. Se promueve la participación en las siguientes competencias nacionales: Olimpiada CARMA, Competencia Cotorra, Concurso Primavera, Canguro Matemático, Examen de Invitación a la OMM, ONMAPS, OMMEB y Concurso Pierre Fermat. Adicionalmente el comité estatal apoya en la organización de dos competencias locales: Concurso Binomio de Matemáticas y el Torneo de Matemáticas en Nuevo León. También se motiva a los alumnos a participar en otras competencias matemáticas organizadas por organismos y universidades estatales.

El primer examen selectivo en Nuevo León se aplica cada año el último sábado de mayo. Para este examen, se espera que los participantes hayan tenido varios años de entrenamiento y participación en competencias. Sin embargo, no es un requisito y cualquier interesado puede participar. De este examen se eligen aproximadamente 20 alumnos por cada grado escolar a partir de quinto año de primaria. Estos alumnos reciben un entrenamiento durante los meses de junio a agosto. El último sábado de agosto se aplica el examen SEMIFINAL a estos alumnos. Del examen semifinal se elige un equipo para participar en la Olimpiada Regional y adicionalmente se eligen 16 alumnos que presentan el examen FINAL el primer fin de semana de octubre (sábado y domingo). De este examen final se determinan los 6 alumnos que representan a Nuevo León en el concurso nacional de la OMM en noviembre.
A continuación presentamos los problemas del examen final de la XXXI OMM en Nuevo León. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una.

Problema 1. Los primeros 4 dígitos de derecha a izquierda de cierto entero positivo n son 1137. Prueba que los dígitos de n pueden ser reordenados de tal forma que n sea múltiplo de 7.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $\angle ABC = 90°$. E y F son los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Supongamos que el incentro del triángulo ABC está sobre el circuncírculo del triángulo AEF. Encuentre el valor de $\frac{BC}{AB}$.

Problema 3. Un número real con valor absoluto menor a 1 es escrito dentro de cada casilla de un tablero de 2017×2017, de tal forma que la suma de los números en cualquier cuadrado de 2×2 es 0. Muestra que la suma de todos los números del tablero es menor que 2017.

Problema 4. Dado un tablero de 4×4:

a) Coloca 7 estrellas en las celdas del tablero tal que al borrar cualesquiera dos columnas y dos filas, permanece al menos una de las estrellas.

b) Prueba que si se colocan menos de 7 estrellas, siempre es posible encontrar dos columnas y dos filas tal que al borrarlas, no permanece ninguna estrella en el tablero.

Problema 5. Sean $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ números reales positivos tales que $x_1 + y_2 = x_2 + y_3 = x_3 + y_1 = 1$. Demuestra que

a) $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 < 1$.

b) Existen valores de $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ tales que

$$1 - \frac{1}{2017^{2017}} < x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Problema 6. En un triángulo ABC, sean I y G su incentro y su gravicentro, respectivamente. Sea P el punto de tangencia del excírculo opuesto a A con BC. Sean Q y R los puntos de intersección del segmento AP con el circuncírculo del triángulo ABC de tal manera que Q está entre A y R. Sea N el punto sobre el segmento AP tal que $AQ = NP$. Demuestra que los puntos I, G y N son colineales y que se cumple la razón $IG : GN = 1 : 2$.

Concurso Nacional de la 1^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (Soluciones)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas del concurso nacional de la 1^a OMMEB. Los enunciados de los problemas fueron publicados en el número 4 de Tzaloa 2017.

Soluciones de la prueba individual. Nivel I.

1) La respuesta es 5. Igualando las sumas de los números en los hexágonos, tenemos que $a+b+c+9+2+0 = b+c+1+7+5+4$, de donde $a = 6$ y, como se deben usar todos los dígitos, tenemos que b y c son 3 y 8 en algún orden. Por lo tanto, $b+c-a = 3+8-6 = 5$.

2) La respuesta es 24. Como $e+1 = 7$, entonces $e = 6$. Luego, como $m+3 = 1$, necesitamos que $m = 8$. Esta última operación, nos acarrea 1 para la suma de los dígitos de las centenas, por lo cual $m+b+1$ debe dar como resultado 0. Como m vale 8, entonces b debe valer 1. Finalmente esta última suma acarrea un 1 a los millares, por lo tanto $o+1 = 2$ y $o = 1$. Así, $o+m+m+e+b = 1+8+8+6+1 = 24$.

3) La respuesta es $\frac{171}{256}$. Durante los primeros 4 días, Víctor y Vicky, juntos se comieron

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)+\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right) = 1-\frac{1}{256}.$$

Por lo tanto, en el día 5 Víctor comió $1/256$ de pastel. Así, durante los 5 días, Víctor comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256} = \frac{128+32+8+2+1}{256} = \frac{171}{256}$ del pastel.

4) La respuesta es 31. Contemos las sublistas que no contienen a 2, 3, 5 o 7. Estas se conforman con los restantes 5 dígitos, y por tanto tenemos 2^5 de ellas. El total de sublistas es $2^5 - 1 = 31$, ya que el conjunto vacío no genera ninguna sublista.

5) La respuesta es 13. Sean $x = BC = GH = CD/2$ y $y = HA = AB = DE = EF$. Así, el perímetro total de la figura es $6x + 4y$. Por otro lado, $2x + 3y = 8$ y $8x + 2y = 10$. Por lo tanto, la respuesta es $2x + 3y + \frac{8x+2y}{2} = 8 + 5 = 13$.

6) La respuesta es 15. Como $\frac{268}{187} = 1 + \frac{81}{187} = 1 + \frac{1}{\frac{187}{81}}$, se tiene que $a = 1$ y $b + \frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}} = \frac{187}{81} = 2 + \frac{25}{81}$, por lo que $b = 2$ y $c + \frac{1}{d+\frac{1}{e+1}} = \frac{81}{25} = 3 + \frac{6}{25}$. Luego, $c = 3$ y$d + \frac{1}{e+1} = \frac{25}{6} = 4 + \frac{1}{6}$, por lo que $d = 4$ y $e = 5$. Así, $a + b + c + d + e = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.

7) La respuesta es 426. Sea x el número de cifras eliminadas. Como a cada hoja arrancada le corresponden dos páginas, una terminada en cifra 7 y la otra en cifra 8, se eliminan $x/2$ cifras con las páginas terminadas en 8. Analicemos las páginas con numeración terminada en cifra 8, para encontrar la última hoja arrancada:

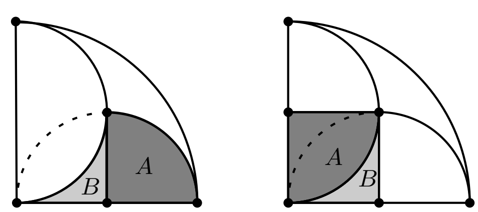
$$8, 18, 28, 38, \ldots, 98; 108, 118, 128, 138, \ldots, 198; 208, 218, \ldots, 998.$$

Vemos que hasta el 98, inclusive, se han eliminado 19 cifras, así que las restantes $\frac{x}{2} - 19$ cifras se eliminarán de 3 en 3, es decir, el número de hojas que faltan por arrancar es la tercera parte de $\frac{x}{2} - 19$, siempre y cuando $\frac{x}{2} - 19 \leq 270 = 30 \times 9$, antes de empezar con la hoja donde está el 1008. Luego, la última hoja que se arranca está numerada con N y $\frac{N-108}{10} + 1 = \frac{\frac{x}{2}-19}{3}$, esto es, $N = \frac{5}{3}(x - 38) + 98$. Así que el máximo número de páginas del libro es $N + 8 = \frac{5}{3}(x - 38) + 106$. Para el caso $x = 230$, $N = 418$ y el máximo número de páginas es $N + 8 = 426$.

8) La respuesta es $27°$. Notemos que $\angle BAG = 90°$ y $\angle BAE = 180° \times \frac{3}{5} = 108°$. Por lo tanto, $\angle EAG = 18°$. Además, $GA = AB = AE$ y, por lo tanto, el triángulo EAG es isósceles. Así, $\angle GEA = \frac{(180° - 18°)}{2} = 81°$ y $\angle GED = 108° - 81° = 27°$.

9) La respuesta es 2017. Notemos que el número es $10^{2\times 2018} + 2 \times 10^{2018} + 1 = (10^{2018} + 1)^2$. Su raíz cuadrada es $10^{2018} + 1$ que tiene 2017 ceros.

10) La respuesta es 8. Observemos las siguientes figuras.



La región B tiene un área igual a $1 - \frac{\pi}{4}$, en tanto que la región A tiene un área igual a $\frac{\pi}{4}$. Así, la región sombreada tiene un área igual a $2(A + B) = 2$. Por lo tanto, el área de toda la figura es $4 \times 2 = 8$.

11) La respuesta es 18. Podemos hacer una tabla para llegar al resultado. Si cada uno hubiera recortado 15 círculos, tendríamos lo siguiente:

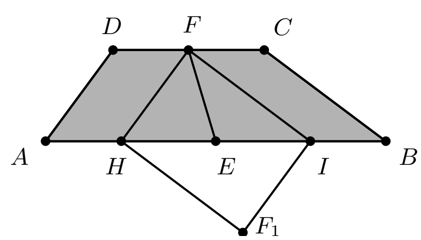
Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90

Si continuamos la tabla podremos llegar al resultado

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90
16	14	128	84
17	13	136	78
18	12	144	72

y podemos ver que María recortó 18 círculos.

12) La respuesta es 5. Sea $ABCD$ el trapecio con $AB = 18$, $CD = 8$, $DA = 6$ y $BC = 8$. Si E y F son los puntos medios de las bases AB y CD respectivamente, hay que calcular la longitud de EF. Trazando FH y FI, paralelas a DA y BC se forman dos paralelogramos. Luego, $AH = DF = 4 = FC = IB$, de donde $HI = 18 - 8 = 10$, $FH = DA = 6$ y $FI = BC = 8$.
Observemos que HFI es un triángulo rectángulo, ya que $FH^2 + FI^2 = HI^2$. Como E es el punto medio de la hipotenusa, entonces $FE = HE = EI = 5$.



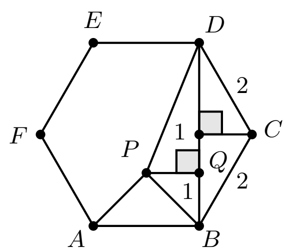
Otra posible solución considera la ley del paralelogramo: si prolongamos la mediana hasta F_1, donde $FE = EF_1$, obtenemos el paralelogramo FHF_1I y, por lo tanto, ${FF_1}^2 + HI^2 = 2FH^2 + 2FI^2$, esto es, ${FF_1}^2 = 2FH^2 + 2FI^2 - HI^2 = 72 + 128 - 100 = 100$, de donde $FE = \frac{FF_1}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$.

13) La respuesta es 2. Sea n un número de dos dígitos tal que $3 \times n = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, para algún dígito $a \neq 0$. Podemos notar que lo anterior es equivalente a tener que $n = 37 \times a$ pero como n es un número de dos dígitos, a solo puede ser 1 o 2 y por ende n puede tener únicamente dos valores. Así, el resultado es 2.

14) La respuesta es 12. Si $abcde$ es un número de cinco dígitos que cumple lo anterior debemos tener que $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$, lo que implica que a, c y e deben tener la misma paridad. Sustituyendo b y d en $c = \frac{b+d}{2}$, obtenemos que $c = \frac{a+2c+e}{4}$ y, por lo tanto, $c = \frac{a+e}{2}$. Ahora notemos que al encontrar a, e distintos con las propiedades anteriores obtendremos un número del tipo buscado pues es

fácil ver que como a, e son distintos, entonces los números a, e, $c = \frac{b+d}{2}$, $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$ son distintos. Si a, e son pares, las únicas parejas que cumplen con las propiedades anteriores son $(2,6)$, $(4,8)$ y sus permutaciones. Si a, e son impares las parejas buscadas son $(1,5)$, $(1,9)$, $(3,7)$, $(5,9)$ y sus permutaciones. Entonces, hay $6 \times 2 = 12$ números que cumplen las condiciones.

15) La respuesta es $2(7-2\sqrt{3})$. Como $DC = BC = 2$ y $\angle DCB = 120°$ tenemos por el teorema de Pitágoras que $DB = 2\sqrt{3}$. Sea Q el pie de la altura de P a DB, entonces BQ es igual a la altura desde P a AB.



Dado que el triángulo APB es rectángulo e isósceles, dicha altura mide 1 y, por lo tanto, $QB = 1$. Esto implica que $DQ = 2\sqrt{3} - 1$ y de nuevo por el teorema de Pitágoras $DP^2 = 1 + (2\sqrt{3}-1)^2 = 2(7-2\sqrt{3})$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte A.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) La respuesta es $36°$. Notemos que $\angle IAB = \frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y $\angle FAB = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Por lo tanto, $\angle FAI = 12°$. Además, $IA = AB = AF$ y así, el triángulo FAI es isósceles. Luego, $\angle IFA = \frac{180° - 12°}{2} = 84°$ y $\angle IFE = 120° - 84° = 36°$.

4) Ver la solución del Problema 13 del Nivel I.

5) La respuesta es $\frac{1}{24}$. Notemos primero que dicho producto debe ser un número primo y solo puede ser 2, 3 o 5. Sea p alguno de estos primos, luego en los otros dos tiros se debió obtener un 1 y lo que varía es en cuál tiro salió el primo p, por lo que para cada primo tenemos 3 opciones: $p \times 1 \times 1$, $1 \times p \times 1$ y $1 \times 1 \times p$. Como hay 3 primos válidos, entonces la cantidad de tiros "favorables" son $3 \times 3 = 9$, de un total de $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ resultados posibles. Luego la respuesta es $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

6) Ver la solución del Problema 15 del Nivel I.

7) La respuesta es $2017 \times 1009 = 2,035,153$. Notemos que para obtener x^{2016} como término en la multiplicación de binomios, debemos elegir a la x en 2016 de los

binomios multiplicados y uno de los números de exactamente un paréntesis. Entonces, cada uno de los números en los paréntesis aparecerá exactamente una vez multiplicando al término x^{2016}, es decir,

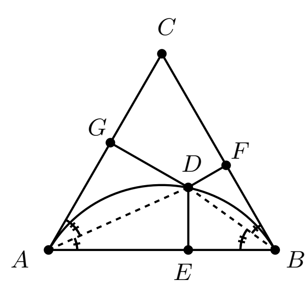
$$1x^{2016} + 2x^{2016} + 3x^{2016} + \cdots + 2017x^{2016} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2017)x^{2016},$$

por lo tanto el coeficiente de x^{2016} es equivalente a la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017$. Usando la fórmula de Gauss, la suma es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2017 \times 2018/2 = 2017 \times 1009$.

8) Ver la solución del Problema 14 del Nivel I.

9) La respuesta es 9. Notemos que desde el 50 hasta el 59 hay 9 números de 2 cifras, que en total aportan 18 cifras. Así desde 50 hasta 99 hay 45 números de 2 cifras y en total se escriben 90 cifras. Además, desde el 100 hasta el 199 hay 81 números de 3 cifras, que en total aportan 243 cifras. Así desde el 100 hasta el 999 hay $8 \times 81 = 648$ números de tres cifras y en total se escriben 1944 cifras. Por tanto del 50 al 999 se escriben $90 + 1944 = 2034$ cifras. Para encontrar la cifra en la posición 2017, hay que regresar del 999 hacia atrás 17 cifras, . . . **9**94995996997998999. Por lo tanto, la cifra 9 ocupa el lugar 2017.

10) La respuesta es 6 cm. Los triángulos rectángulos AED y BFD son semejantes porque el ángulo semi-inscrito $\angle CBD$ es igual al ángulo inscrito $\angle BAD$. Entonces, $\frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DB}$, de donde $DE = DF \times \frac{AD}{DB}$. De manera análoga, los triángulos BED y AGD son semejantes. Luego, $\frac{DE}{DB} = \frac{GD}{AD}$, de donde $DE = GD \times \frac{DB}{AD}$.



Multiplicando estas relaciones vemos que DE es la media geométrica de DF y GD, esto es, $DE^2 = \left(DF \times \frac{AD}{DB}\right)\left(GD \times \frac{DB}{AD}\right) = (DF)(GD) = 4 \times 9 = 36$.

11) La respuesta es 333. Sean $A = 111444444$, $B = 444111111$ y $x = 333$. Podemos notar que $A = 334668x$ y $B = 1333667x$ por lo que el máximo común divisor de A y B es múltiplo de x. Además $d = \text{mcd}(334668, 1333667)$ debe dividir a $4 \times 334668 - 1333667 = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ pero 1333667 no es múltiplo de 5, 7, 11 o 13 por lo que 5005 es primo relativo con 1333667 y así $d = 1$. Por tanto, $\text{mcd}(A, B) = x = 333$.

12) La respuesta es 45. Como $x \geq 1$, entonces $x^3 = 2017x + 360$ implica que $x^3 \geq 2017 + 360 = 2377$. Esto a su vez implica que $x \geq 14$ ya que $13^3 = 2197$. Por otro lado, $x^2 = 2017 + \frac{360}{x}$ de modo que

$$44^2 = 1936 < 2017 \leq x^2 \leq 2017 + \frac{360}{14} < 2017 + 26 = 2043 < 46^2 = 2116.$$

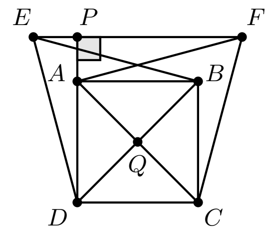
La única opción que le queda es $x = 45$. Luego comprobamos $45^3 - 2017(45) - 360 = 45(45^2 - 2017) - 360 = 45(2025 - 2017) - 360 = 45(8) - 360 = 0$. Por lo tanto, concluimos que $x = 45$ es la única solución entera positiva para esta ecuación.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte B.

1) Como $100 = 2^2 \times 5^2$, la cantidad de primos relativos con 100 es $100-50-20+10 = 40$. Ahora notemos que si $1 \leq n \leq 50$ es primo relativo con 100, entonces $100 - n$ también lo es. Según el argumento anterior podemos agrupar los primos relativos en parejas $(n, 100-n)$ tales que cada pareja suma 100 y, como 50 no es primo relativo con 100, entonces podemos dividir los números de forma exacta en $\frac{40}{2} = 20$ parejas. Por lo tanto, la respuesta es $20 \times 100 = 2000$.

2) Notemos que los números menores a 10^4 tienen a lo más 4 dígitos. Si los dígitos no se repiten, tenemos $9 + 9 \times 9 + 9 \times 9 \times 8 + 9 \times 9 \times 8 \times 7 = 9 + 81 + 648 + 4536 = 5274$ números balanceados. Si un dígito se repite, entonces todos los dígitos se repiten (de otra forma no sería balanceado). En el caso en que cada dígito está dos veces y ninguno es cero, tenemos $\binom{9}{2}$ formas de escoger los dígitos y $\binom{4}{2}$ formas de acomodarlos (si nuestro número es de 4 dígitos). Por otro lado, si consideramos las parejas de dígitos que contienen al cero, estas son 9 y hay solo 3 opciones para acomodar las parejas, dado que el 0 no puede ir al principio del número. Por tanto en este caso hay $\binom{9}{2}\binom{4}{2} + 9 \times 3 = 216 + 17 = 243$. Si nuestro número es de dos dígitos tenemos solamente 9 opciones. Por tanto en este caso tenemos $243+9 = 252$ números. Si los números se repiten 3 o 4 veces tenemos $9 \times 2 = 18$ números, pues para cada uno de los 2 casos se tienen 9 posibilidades. Por tanto, en total contamos $5274 + 252 + 18 = 5544$ números balanceados.

3) Sean P el punto de intersección de AD con EF y Q el centro del cuadrado. Notemos que $[DCFE] = \frac{PD(DC+FE)}{2}$ y $[ABFE] = \frac{PA(AB+FE)}{2} = \frac{PA(DC+FE)}{2}$. Entonces,
$$\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD(DC+FE)}{PA(DC+FE)} = \frac{PD}{PA}.$$
Es fácil ver que C, A y E son colineales al igual que D, B y F. Además, por simetría tenemos que AB es paralela a EF. Por lo tanto $\angle DPF = \angle DAB = 90°$ y $\angle DBA = \angle DFP = 45°$. Así $PD = PF$ y $2PD^2 = PD^2 + PF^2 = DF^2$. Por lo tanto, $PD = \frac{DF}{\sqrt{2}}$. Como el triángulo AFC es equilátero y $AC = 2$, tenemos que $FQ = \sqrt{3}$ y por lo tanto $DF = 1 + \sqrt{3}$, $PD = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$ y $PA = PD - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$.

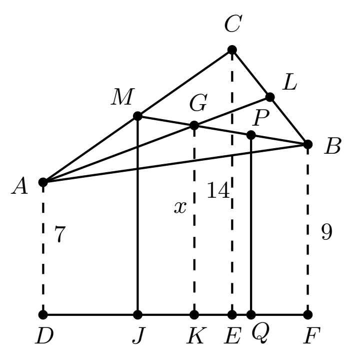


Así, $\dfrac{[DCFE]}{[ABFE]} = \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}.$

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte A.

1) La respuesta es $\frac{1}{9}$. La descomposición en primos de $10!$ es 2^8 es $2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$. Los divisores impares de $10!$ deben ser entonces divisores de $3^4 \times 5^2 \times 7$. Como hay $5 \times 3 \times 2 = 30$ de estos divisores, la probabilidad buscada es $\frac{30}{270} = \frac{1}{9}$.

2) La respuesta es 10. Sean D, F, E, K las proyecciones respectivas de A, B, C, G sobre la recta. Los segmentos DA, EC y FB son paralelos, formando varios trapecios. El baricentro G es el punto de intersección de las medianas AL y BM, así que la distancia que se busca es $GK = x$. Sea P el punto medio de GB y sean J y Q las proyecciones de M y P sobre la recta. Entonces, x será la línea media del trapecio $MJQP$, $x = \frac{MJ+QP}{2}$. Notemos que MJ es la línea media del trapecio $ADEC$, entonces $MJ = \frac{7+14}{2} = \frac{21}{2}$.



Análogamente, QP es la línea media del trapecio $GKFB$ ya que $GB = 2GM$. Entonces $PQ = \frac{9+x}{2}$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación $x = \frac{\frac{21}{2}+\frac{9+x}{2}}{2} = \frac{30+x}{4}$ cuya solución es $x = 10$.

3) Ver la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 11 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 5 del Nivel II.

6) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

7) Ver la solución del Problema 10 del Nivel II.

8) Ver la solución del Problema 12 del Nivel II.

9) La respuesta es $\frac{2017\times 1009}{2}$. Para cada $1 \leq k \leq 2017$, un subconjunto $\mathcal{A}$ que contiene a k se puede expresar de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{k\}$ donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto que no contiene a k. Como hay 2^{2016} subconjuntos $\mathcal{B}$, entonces el número k aparecece 2^{2016} veces como sumando en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Así, la suma de todos los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ es igual a

$$2^{2016}(1+2+3+\cdots+2017) = \frac{2^{2016}\times 2017\times 2018}{2} = 2^{2015}\times 2017\times 2018.$$

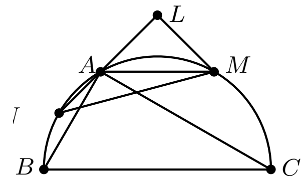
Dado que hay en total 2^{2017} subconjuntos, la probabilidad buscada es $\frac{2^{2015}(2017)(2018)}{2^{2017}}$ $= \frac{2017\times 1009}{2}$.

10) La respuesta es 144, 169, 441, 961, 121, 484, 676, 100, 400, 900. Sean $x^2 = abc$, $y^2 = cba$. Entonces, tenemos que $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 = 99(a-c)$. En consecuencia, si $x \neq y$, 99 divide al producto $(x+y)(x-y)$. Como los cuadrados deben ser números de tres cifras y $31^2 = 961$, entonces tenemos que $10 \leq x, y \leq 31$. Entonces $21 \leq x+y \leq 61$ y $1 \leq x-y \leq 21$. Por tanto tenemos dos casos: *(1)* $x+y = 27, 36, 45, 54$ y $x-y = 11$, *(2)* $x+y = 33, 44, 55$ y $x-y = 9, 18$. El caso *(1)* no arroja soluciones, en tanto que el caso *(2)* nos da $x^2 = 21^2 = 441$ y $x^2 = 31^2 = 961$. Por otro lado, si $x = y$ entonces $a = b$ y tenemos las soluciones $x^2 = 11^2 = 121$, $x^2 = 22^2 = 484$ y $x^2 = 26^2 = 676$. Finalmente, si un número a ponerlo al revés no tiene 3 cifras entonces el número original termina en 0, así que es divisible entre 10 y por tanto entre 100. Aquí las soluciones son $x^2 = 10^2 = 100$, $x^2 = 20^2 = 400$ y $x^2 = 30^2 = 900$.

11) La respuesta es 462^3. Para minimizar el producto de los boletos, basta considerar los 6 números más pequeños que cumplan las condiciones del problema, lo cual implica que dichos números deberán estar formados por parejas de los 4 números primos más pequeños, sin contar al 5 (ya que $\binom{4}{2} = 6$). Así los números se formarán tomando parejas del conjunto $\{2, 3, 7, 11\}$, por lo que el producto de ellos será $2^3 \times 3^3 \times 7^3 \times 11^3 = 462^3$. El siguiente arreglo muestra una posible disposición de los números.

Pasajero	1	2	3	4	5	6
Boleto	$2\times 7 = 14$	$3\times 11 = 33$	$2\times 3 = 6$	$7\times 11 = 77$	$2\times 11 = 22$	$3\times 7 = 21$

12) La respuesta es $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$. Considera L el pie de la altura desde M sobre AN. Como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$, entonces $\angle MNA = 30°$ y $\angle AMN = 15°$. Por lo tanto, el triángulo MNL es rectángulo de $30° - 60° - 90°$ y el triángulo LAM es rectángulo isósceles. Por otro lado, $\angle MCA = 30° = \angle ACB$. Así, $AB = AM = 1$, entonces el triángulo LAM tiene hipotenusa 1, lo cual implica que $LM = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



Luego, $LN = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ y $[ANM] = [LMN] - [LAM] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte B.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

2) Supongamos que los tres números son primos. Si uno de ellos fuera par, digamos $a = 2$, entonces b y c son impares, luego $b + c + bc$ es impar, y no es posible que $a \mid b + c + bc$, por lo que ninguno de los números puede ser par. Como $a \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$, $b \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$, $c \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$ y a, b, c son primos, entonces $abc \mid (a+1)(b+1)(c+1) - 1$. Sin embargo,

$$1 < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{abc} < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c} \leq \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} < 2,$$

por lo que abc no divide a $(a+1)(b+1)(c+1) - 1$, lo cual es una contradicción. Luego, alguno de los números a, b, c no puede ser primo.

3) Supóngase que M tiene más de 3 divisores primos, entonces, tendría cuando menos $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, una contradicción, por lo que M debe tener a lo mucho dos divisores primos, y siendo este el caso es fácil ver que M es de una de las siguientes formas p^5 o p^2q.

Caso (1): $M = p^5$. En este caso la suma de los divisores de M es $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$: Si $p \leq 5$ entonces el lado izquierdo es mayor que el lado derecho, si $p = 2, 3$ tampoco se da la igualdad, por lo que no hay soluciones en este caso.

Caso (2): $M = p^2q$. En este caso los divisores son $1, p, p^2, q, pq, p^2q$ y su suma puede ser escrita como: $(p^2+p+1)(q+1) = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$. Pero p^2+p+1 es siempre impar, luego $q+1$ debe ser par y q es impar. Supóngase que $q+1 = 4k$ entonces tenemos que $k(p^2 + p + 1) = 5^3 \times 7$. Analizando las congruencias módulo 5, notamos que $p^2 + p + 1$ no puede ser múltiplo de 5, luego debe ser 1 o 7, resolviendo estos dos casos, concluimos que el único valor válido para p es $p = 2$, por lo que $k = 125$ y $q = 4 \times 125 - 1 = 499$ que es también primo. Luego el único valor posible para M es $22 \times 499 = 1996$.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel I.

1) Consideremos el pensamiento de Toño. Como Toño puede pagar con 3 monedas y que le regresen cambio, entonces a lo más, la cantidad que tiene que pagar es 30. Ahora, podrían regresarle el cambio con 2 monedas, por lo tanto la diferencia con esas 3 monedas que pagó es al menos 2 pesos. Por lo tanto la cantidad a lo más es 28 pesos. Si paga con 3 monedas ninguna de ellas puede ser de 1 o 2 pesos porque la cantidad que le regresarían es al menos 2 pesos, volviendo innecesaria la moneda de 1 o 2 pesos. Por lo tanto en el primer pensamiento de Toño, pagó sólo con monedas de 10 y 5 pesos. Analizemos primero el caso donde se usan 3 monedas de 10 pesos. El cambio puede darse usando a lo más una moneda de 5 pesos (si se usan dos se vuelve innecesaria una de 10 pesos). Si se utiliza, el cambio será 6 o 7 pesos y la cantidad a pagar sería 24 o 23 pesos. Si no se utiliza, el cambio será 2, 3 o 4 pesos, y la cantidad a pagar sería 28, 27 o 26 pesos. Si se usa al menos una moneda de 5 pesos, en el cambio sólo podrán utilizarse monedas de 1 y 2 pesos, pues de lo contrario la moneda de 5 pesos se volvería innecesaria, en este caso el cambio se dará sólo con monedas de 1 o 2 pesos y deberá ser 2, 3 o 4 pesos. Tres monedas de 5 pesos: La cantidad a pagar sería 13, 12 u 11 pesos. Dos monedas de 5 pesos y una de 10 pesos: La cantidad a pagar sería 18, 17 o 16. Una moneda de 5 pesos y dos de 10 pesos: La cantidad sería 23, 22 o 21 pesos.

2) Como empieza en el 6, después de 2 saltos debería llegar al 16 que es potencia de 2, por lo tanto regresa al 14. Notemos que va saltando de par a impar y viceversa siempre que no caiga en una potencia de 2, pero cada dos saltos es que va de par en par con diferencia de 10. Entonces, la siguiente potencia de 2 en la que caerá es la siguiente cuya cifra de las unidades sea igual a 4, es decir, el 64, al cual llega después de $\frac{64-14}{5} = 10$ saltos. En este punto regresa al vértice 62 y no volverá a caer en una potencia de 2 hasta la siguiente que termine en 2, es decir la 512 a la cual llega después de $\frac{512-62}{5} = 90$ saltos. Aquí regresará al vértice 510 y no caeía en potencia de 2 de nuevo en esta vuelta porque no hay potencias de 2 que terminen en 0. Por lo tanto, la primera vez que supere el 1, es cuando salte desde el 2015, es decir con $\frac{2020-510}{5} = 302$ saltos más. Por lo tanto, la pulga necesitó de $2 + 10 + 90 + 302 = 404$ saltos.

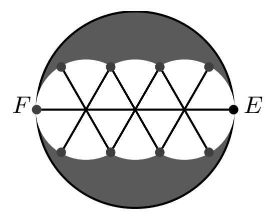
3) La sucesión $3, 5, 7\ldots$ corresponde a la de los números impares a partir del 3, es decir, $\{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3\ldots\}$. Ahora veamos cómo localizamos el número que cierra cada cuadrado, para pasar del primer cuadrado le añadimos 3 cuadrados, del segundo al tercero le añadimos 5 cuadrados, así los términos de la sucesión van quedando agrupados según se van añadiendo de la siguiente manera: $\{3\}, \{5, 7, 9\}\{11, 13, 15, 17, 19\}, \ldots$, donde el término que cierra el k-ésimo cuadrado es $2(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)) + 1 = 2(k^2) + 1$. Entonces, el número que cierra el 18° cuadrado es $2(18^2) + 1 = 2(324) + 1 = 649$.

4) Si Edgar está en el carril 1, entonces como Omar está en un extremo y ya está ocupado el 1, Omar está en el 5. Como Beto no nada al lado de Edgar, entonces debe estar en algún carril de 3 o 4, pero si está en el 3 forzosamente nadaría al lado de Mario (pues los únicos carriles libres serían el 2 y 4), entonces Beto estaría

en el 4, lo cual obliga a que Miguel y Mario naden juntos, pero eso no ocurre. En conclusión si Edgar estuviera en el carril 1 forzaría una configuración que no cumple las cuatro afirmaciones. Por lo anterior Edgar debe estar en el 4, lo cual obliga a que Beto este en el carril 1 o 2. En este caso si Beto está en el carril 1, Omar estaría en el 5 lo cual fuerza que Mario y Miguel naden juntos lo cual no ocurre. Luego Beto debe estar en el carril 2, esto fuerza a que Mario esté en el carril 5, Omar en el 1 y Miguel en el 3, la cual es una configuración forzada que cumple las condiciones, por lo tanto esta es la única configuración posible.

5) Consideremos un punto P en alguna de las intersecciones de las rectas y veamos cuántos triángulos tienen a P como vértice. Como hay a lo más $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones y cada una de las 6 rectas tienen 5 puntos de intersección, nos quedan $15 - 9 = 6$ puntos que pueden ser otro de los vértices del triángulo. Una vez elegido uno de esos 6 puntos, las dos rectas que pasan por él intersecan a las otras dos rectas que teníamos, lo cual nos dice que nos queda un único punto para elegir que sea vértice del triángulo. Por lo tanto, para cada vértice tenemos 6 triángulos que cumplen las propiedades del problema. Como hay 15 vértices posibles y cada triángulo tiene 3 vértices, concluimos que hay $\frac{6\times 15}{3} = 30$ triángulos de los que se querían contar.

6) Dividamos la figura de la siguiente manera:



El área de la circunferencia mayor es 4π. El área de cada círculo blanco original es π. La figura blanca está formada por $\frac{10}{6}$ de círculo blanco y cuatro triángulos equiláteros. Cada triángulo tiene un área de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. El área sombreada es $4\pi - \frac{10\pi}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$.

7) Sean $A = abcd$ y $N = pqrs$ dos enteros que se escriben con las mismas cifras. Según las condiciones del problema tenemos que $A = 3N$, con lo cual tenemos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 3. En consecuencia, N también es un múltiplo de 3, digamos $N = 3T$, y por tanto $A = 9T$. Así, concluímos que $a + b + c + d = p + q + r + s$ es un múltiplo de 9. Como A es un número de 4 cifras, tenemos que $A \leq 9999$. Entonces tenemos que $N \leq 3333$. Como ninguna de las cifras puede ser 2 o 4, podemos concluir que solamente existen dos casos: (1) $p = 3$ y (2) $p = 1$.

Caso (1): Si $p = 3$, entonces $a = 9$ y por tanto la suma de las restantes dos cifras debe dejar residuo 6 al dividirse entre 9. Además q no puede ser mayor a 4 ya que de lo contrario $A = 3N$ tendría 5 cifras. Entonces las únicas posibilidades para las restantes dos cifras son $\{0,6\}$, $\{1,5\}$, $\{3,3\}$. Procedemos a analizar cada una de estas opciones. Para $\{0,6\}$ tenemos $2! = 2$ formas de acomodar las cifras: 3069, 3096. Lo mismo sucede para $\{1,5\}$, con los números 3195 y 3159; y también en el caso $\{3,3\}$ con las opciones 3339 y 3393. Como ninguno de estos números cumple la condición $A = 3N$, observamos que en este caso no hay solución.

Caso(2): Si $p = 1$ entonces $1000 \leq N \leq 1999$ y por tanto $3000 \leq A \leq 5997$. De aquí podemos concluir que hay dos casos: $a = 3$ o $a = 5$. En el primer caso, las dos cifras restantes al sumarse deben dejar residuo 5 al dividirse entre 9; en tanto que en el segundo caso el residuo de la suma deberá ser 3. Entonces surgen las siguientes opciones: para $a = 3$ tenemos $\{0,5\}$, $\{5,9\}$, $\{6,8\}$ y $\{7,7\}$; en tanto que para $a = 5$ tenemos $\{0,3\}$, $\{3,9\}$, $\{5,7\}$ y $\{6,6\}$. Analizando cada una de estas opciones como en el inciso anterior nos lleva a concluir que el único número que satisface las condiciones del problema es $N = 1305$.

8) Sea abc el número de tres dígitos tales que $a > b > c > 0$. Entonces $a + c$ debe ser número impar. Si $a + c < 10$, eso significa que el número de las decenas de la suma es $2b$, que es par, lo cual no es posible, por lo tanto $a + c > 10$. Si $2b + 1 > 10$, entonces el dígito de las decenas de la suma es $a + c + 1$, pero como $a + c$ debe ser impar, entonces $a + c + 1$ es par, por lo cual no es posible. Por lo tanto $2b + 1 \leq 9$, o sea $b \leq 4$. Si $b = 4$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, las únicas soluciones en este caso son 942 y 843. Si $b = 3$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, la única solucíon en este caso es 932. Si $b = 2$, entonces $c = 1$ y no existe un dígito a tal que $a + c$ sea impar mayor que 10. En resumen, las únicas soluciones son 932, 942 y 843.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel II.

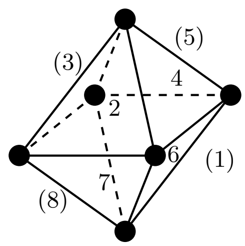
1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) Por ser polígonos regulares resulta que $\angle A_nA_1A_2 = 180°(\frac{n-2}{n})$ y $\angle B_{n+1}A_1A_2 = 180°(\frac{n-1}{n+1})$. Luego, $\angle B_{n+1}A_1A_n = \angle B_{n+1}A_1A_2 - \angle A_nA_1A_2 = \frac{180° \times (n-1)}{n+1} - \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{360°}{n(n+1)}$. Como $A_nA_1 = A_2A_1 = B_{n+1}B_1$, el triángulo $B_{n+1}A_1A_n$ es isósceles, de donde $\angle A_1B_{n+1}A_n = \angle A_1A_nB_{n+1} = \frac{180° - \angle A_nA_1B_{n+1}}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n(n+1)}}{2} = \frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)}$. Si n cumple lo pedido, entonces $\frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \angle A_1B_{n+1}B_n = \frac{2}{3} \times \frac{180° \times (n-1)}{n+1}$, que es equivalente a que $n^2 - 7n + 6 = 0$. Luego, $n = 1$ o $n = 6$, de donde el único valor posible para n es 6.

4) Ver la solución del Problema 8 del Nivel I.

5) El siguiente acomodo funciona (note que los números entre paréntesis representan las caras que están por detrás):



6) Notemos primero que basta probar que $BP = PD$. Como subtienden el mismo arco, tenemos que $\angle ADP = \angle ABP$. Entonces, dado que los triángulos BEP y DAP son obtusángulos, podemos concluir que son congruentes. Luego, $BP = PD$.

7) Para cada n, como ab es fijo, $a+b$ es mínimo cuando $a-b$ lo es, pues $a+b$ mínimo si y solo si $(a+b)^2$ es mínimo, lo cual es cierto si y solo si $(a+b)^2-4ab$ es mínimo (puesto que ab es constante), esto es, si y solo si $a-b$ es mínimo. Ahora bien, para cada número de la forma n^2+n tenemos que los a, b que cumplen el enunciado son $a = n+1$ y $b = n$ pues son coprimos y $a-b = 1$ es mínimo. Entonces, $f(n^2+n) = s(n+1) - s(n)$. Así,

$$\begin{aligned} & f(1^2+1) + f(2^2+2) + \cdots + f(2017^2+2017) \\ &= s(2) - s(1) + s(3) - s(2) + s(4) - s(3) + \cdots + s(2018) - s(2017) \\ &= s(2018) - s(1) = 11 - 1 = 10. \end{aligned}$$

8) Una estrategia puede ser la siguiente. Sea k el número que Juan está pensando. Llamemos a y b a los números tales que Mario puede estar seguro que el número de Juan está entre a y b (inclusive), estos se irán actualizando según la información que vaya recabando Mario. Por ejemplo, inicialmente $a = 1$ y $b = 1000$. Sea m igual a $\frac{(a+b)}{2}$ o su parte entera en caso de que tenga decimal. Posteriormente, Mario puede hacer la pregunta ¿Es el número que estás pensando igual, mayor o menor a m? Si m es igual al número que está pensando Juan, entonces Mario ya ganó. Sino, hay dos opciones: si responde que **menor**, actualizaremos nuestra b para que sea igual a $m-1$, ya que sabíamos que $a \le k \le b$ y por la información de la respuesta sabemos que $k \le m$ (notemos que como inicialmente $a \le k \le m$, siempre se cumplirá que $a \le m \le b$), por lo tanto, ahora sabremos que $a \le k \le m$, por lo cual ahora m será el número que sabemos es mayor o igual a k. Haciendo un razonamiento análogo, si Juan responde **mayor**, entonces podemos asignar a la nueva a para que sea igual a $m+1$.
Ahora bien, Mario estará seguro del número que está pensando Juan cuando $a = b$ (pues entonces $a \le k \le b = a$, y por lo tanto $k = a$). También notemos que después de cada pregunta, la distancia $(b-a)$ entre a y b, irá disminuyendo pues en caso de que la respuesta sea **mayor**, como $\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \le m \le \frac{a+b}{2}$, entonces $b-(m+1) \le b - (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}) \le \frac{b-a}{2} - 1$. Análogamente, si la respuesta es **menor**, se concluye que $(m-1) - a \le \frac{b-a}{2}$. Así pues, la nueva distancia entre a y b será a

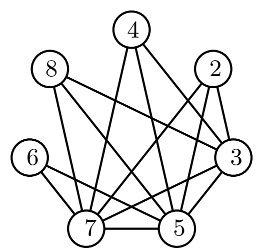
lo más $\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2}$ en el siguiente paso.

Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
999	499	299	124	61	30	14	6	2	0

Por lo tanto, al cabo de 9 preguntas Mario puede saber cuál número estaba pensando Juan con esta estrategia.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel III.

1) El siguiente arreglo funciona:



2) Primero notemos que $x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = x(x+1)(x+2) + 3y + z^2$, sin importar el valor de x. Como x, $x+1$, $x+2$ son tres enteros consecutivos, entonces uno de ellos es múltiplo de 3, por lo que $x(x+1)(x+2)+3y$ es múltiplo de 3, luego si existe una terna de enteros tal que $x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018$, entonces z^2 deja residuo 2 al dividirse entre tres, algo imposible ya que los cuadrados dejan residuo 1 o 0 al dividirse entre tres, de lo anterior se concluye que no existen ternas como las pedidas.

3) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 6 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son los círculos que buscamos de tal manera que O_i es el centro de C_i. Sea C el círculo con centro en P y radio 1. Es claro que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ están al borde de C. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ forman un polígono convexo, es decir, que los centros están etiquetados en orden de manera que $\angle O_1PO_2 + \angle O_2PO_3 + \cdots + \angle O_nPO_1 = 360°$. Notemos que el hecho de que O_i no esté en el interior o en el borde de C_{i+1} y que el triángulo O_iPO_{i+1} sea isósceles implica que $\measuredangle O_iPO_{i+1} > 60°$. Dadas las observaciones anteriores es fácil deducir que el máximo número de circunferencias es 5.

7) Como la única relación entre a y a^* son sus dígitos, aseguraremos que ambos sean divisibles por enteros de los que tenemos criterio de divisibilidad. Es claro que

$99 \mid a$ si y solo si $99 \mid a^*$. De esta manera, $D = 99k > 2017$ con $k > 20$. Como buscamos que se pueda asegurar la divisibilidad con un criterio, comprobemos que $k = 25$. Tras varios intentos se llega a que a puede ser de la forma $52xy75$, con lo que aplicando los criterios de divisibilidad, $9 \mid x + y + 1$ y $11 \mid x - y + 5$. Para $x = 7$, $y = 1$ esto se cumple, ya que $a = 527175$ satisface.

8) Consideremos los números $x = 13^2$ y $w = 13^2 + 13 \times 12$. Si $n < x$, entonces $n!$ contiene a lo más 12 factores 13 y no puede ser bueno. Si $n = x$ entonces $n!$ contiene los primeros doce múltiplos de 13 (que tienen solo un factor 13) y 13^2 que tiene dos. El exponente de 13 en $(13^2)!$ es 14 y no es bueno. si $x < n < w$, entonces $n!$ contiene 14 factores de x y a lo más 11 factores extras pues los múltiplos de 13 entre x y w solo tienen factor 13, por lo tanto $n!$ tiene 14, $15, \ldots$ o 25 factores 13 y no es bueno. Si $n = 13^3 + 13 \times 12$, entonces $n!$ es bueno, pues tiene 26 factores 13. Ningún número de los que buscamos es mayor a $13^2 + 13 \times 12 + 13 = 2 \times 13^2$, pues $n = w$ es bueno. Notemos que si $n = w$, $w + 1, \ldots, w + 12$ entonces $n!$ tiene 26 factores 13 y es bueno, además $n - 13 < w$ y sabíamos que ningún número menor a w era bueno. Por lo tanto, los números son $w, w + 1, \ldots, w + 12$ con $w = 13^2 + 13 \times 122$.

Concurso Nacional 2017 31^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 5 al 10 de noviembre de 2017 se llevó a cabo en Santiago, Nuevo León, el Concurso Nacional de la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados del país.

Los 16 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche).
Bryan Calderón Rivera (Chihuahua).
José Eduardo Payán Sosa (Chihuahua).
Juan Adolfo Franco Nava (Chihuahua).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México).
Oriol Andreu Solé Pi (Ciudad de México).
Bruno Gutiérrez Chávez (Colima).
Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México).
Diego Hinojosa Tellez (Jalisco).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).
Victor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León).
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí).
Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa).
Ricardo de Jesús Balam Ek (Yucatán).

Los 10 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Katia García Orozco (Chihuahua).
Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Isaac Pancardo Botello (Guanajuato).
Darío Hinojosa Delgadillo (Nuevo León).
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León).
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
Mónica Isabel Casillas Rodríguez (Querétaro).
Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa).
Teresa Rojas Rodríguez (Yucatán).
Jorge Hiram Arroyo Almeida (Zacatecas).

Las 8 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche).
Sofía Cañas Urbina (Chiapas).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México).
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México).
Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos).
Zaida Victoria Cuate Tablas (Morelos).
Diana Espinosa Ruiz (San Luis Potosí).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 31^a OMM.

1. Ciudad de México.
2. Chihuahua.
3. Nuevo León.
4. San Luis Potosí.
5. Morelos.
6. Jalisco.
7. Sinaloa.
8. Yucatán.
9. Guanajuato.
10. Chiapas.

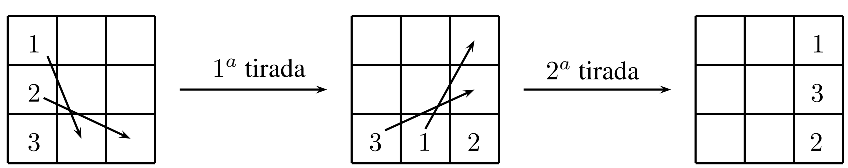
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "**Premio Cerro de la Silla: A la cima no se llega superando a los demás, sino superándote a ti mismo**" y fue ganado por Chiapas. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon la Ciudad de México y Tamaulipas, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional 2017 de la OMM. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

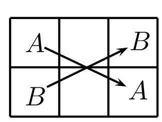
Problema 1. En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultánea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.
Nota. Un caballo se mueve de una casilla X a otra Y, solamente si X y Y son las esquinas opuestas de un rectángulo de 3×2 o de 2×3.

(Problema sugerido por Cuahutémoc Gómez Navarro)

Solución de Cristina Irene Sotomayor Vivas. Si la esquina superior izquierda del tablero es una casilla negra, entonces hay una cantidad impar de caballos en casillas negras y una cantidad par en casillas blancas. Al hacer una tirada, de mover simultáneamente 2 caballos, veremos que si están los 2 en casillas negras, en 2 casillas blancas o en 2 casillas de diferente color, tendremos después de la tirada, 2 caballos más en casillas negras, 2 caballos menos en casillas negras o la misma cantidad de caballos en las casillas negras. Luego, siempre hay un número impar de caballos en casillas negras.
Si k es par, en la columna k hay un número par de casillas negras (1008), luego no podrán quedar en algún momento los 1009 caballos que originalmente estaban en casillas negras.
Para ver que a las columnas impares se pueden mover todos los caballos, veamos que se pueden mover de una columna a 2 columnas hacia adelante. Nos fijamos en los primeros 3:



Las dos tiradas anteriores los llevan a la tercera columna. Los restantes 2014 caballos, los movemos por pares con la siguiente tirada:



Con las $1007+2 = 1009$ tiradas movemos los caballos de una columna a dos columnas más adelante y entonces a cualquier columna impar.

Problema 2. Un conjunto de n números enteros positivos distintos es *equilibrado*, si el promedio de cualesquiera k números del conjunto es un número entero, para toda $1 \leq k \leq n$. Encuentra la mayor suma que pueden tener los elementos de un conjunto equilibrado, con todos sus elementos menores o iguales que 2017.

(Problema sugerido por César Ernesto Rodríguez Angón)

Solución de Gonzalo Hisaki Moreno Hirata.[3] Se demostrará que si un conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ con n elementos es equilibrado, entonces $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_n \pmod k$, para todo entero $2 \leq k \leq n-1$. En efecto, sea $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ y sea $i \in \{2, \ldots, n\}$. Se harán dos casos, si $i \in \{2, \ldots, k\}$ o si no lo está. Sea $i \in \{2, \ldots, k\}$. Por la hipótesis del problema $\frac{x_2+x_3+\cdots+x_k+x_{k+1}}{k}$ y $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_{k+1}}{k}$ son ambos enteros, entonces $x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_{k+1} \pmod k$. Así, $x_1 \equiv x_i \pmod k$. Ahora, sea $i \in \{k+1, \ldots, n\}$. Por hipótesis, $\frac{x_2+x_3+\cdots+x_k+x_i}{k}$ y $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$ son ambos enteros, entonces $x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_k \pmod k$. Así, $x_1 \equiv x_i \pmod k$. Por lo tanto, $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_n \pmod k$, para todo entero $2 \leq k \leq n-1$.

Sea X un conjunto equilibrado de n elementos con todos sus elementos menores o iguales a 2017. Por el teorema chino del residuo se sabe que $x_1 \equiv x_2 \equiv \cdots \equiv x_n \pmod m$, donde m es el mínimo común múltiplo de $2, 3, \ldots, n$. Así, si $n > 9$, entonces $m > 840$, dado que 840 es el mínimo común múltiplo de $2, 3, \ldots, 8$. Como todos los elementos de X son menores que 2017, entonces el noveno elemento más pequeño es menor o igual a $2017 - 8 \cdot m \leq 2017 - 8 \cdot 840 = -4703 < 0$, una contradicción. Por lo tanto, $n \leq 8$.

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u 8, $m = 1, 1, 2, 6, 12, 60, 60$ o 420, respectivamente. Así, los máximos valores posibles de X son $\{2017\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 1\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 2, 2017 - 2 \cdot 2\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 6, 2017 - 2 \cdot 6, 2017 - 3 \cdot 6\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 12, 2017 - 2 \cdot 12, 2017 - 3 \cdot 12, 2017 - 4 \cdot 12\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 60, 2017 - 2 \cdot 60, 2017 - 3 \cdot 60, 2017 - 4 \cdot 60, 2017 - 5 \cdot 60\}$, $\{2017, 2017 - 1 \cdot 60, 2017 - 2 \cdot 60, 2017 - 3 \cdot 60, 2017 - 4 \cdot 60, 2017 - 5 \cdot 60, 2017 - 6 \cdot 60\}$ y $\{2017, 2017 - 1 \cdot 420, 2017 - 2 \cdot 420, 2017 - 3 \cdot 420, 2017 - 4 \cdot 420, 2017 - 5 \cdot 420, 2017 - 6 \cdot 420, 2017 - 7 \cdot 420\}$. Entonces, la mayor suma posible de los elementos de X es $2017 \cdot n - \frac{(n-1)(n)m}{2}$, para $n \leq 8$. Por tanto, para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ u 8, la mayor suma posible de los elementos de X es 2017, $2017 \cdot 2 - \frac{(1)(2)1}{2} = 4032$, $2017 \cdot 3 - \frac{(2)(3)2}{2} = 6045$, $2017 \cdot 4 - \frac{(3)(4)6}{2} = 8032$, $2017 \cdot 5 - \frac{(4)(5)12}{2} = 9965$, $2017 \cdot 6 - \frac{(5)(6)60}{2} = 11202$, $2017 \cdot 7 - \frac{(6)(7)60}{2} = 12859$ y $2017 \cdot 8 - \frac{(7)(8)420}{2} = 4376$. Por tanto, 12859 es la mayor suma posible de los elementos de un conjunto equilibrado con todos sus elementos menores o iguales que 2017 y el conjunto que lo cumple es $\{2017, 2017 - 1 \cdot 60, 2017 - 2 \cdot 60, 2017 - 3 \cdot 60, 2017 - 4 \cdot 60, 2017 - 5 \cdot 60, 2017 - 6 \cdot 60 = 1657\}$.

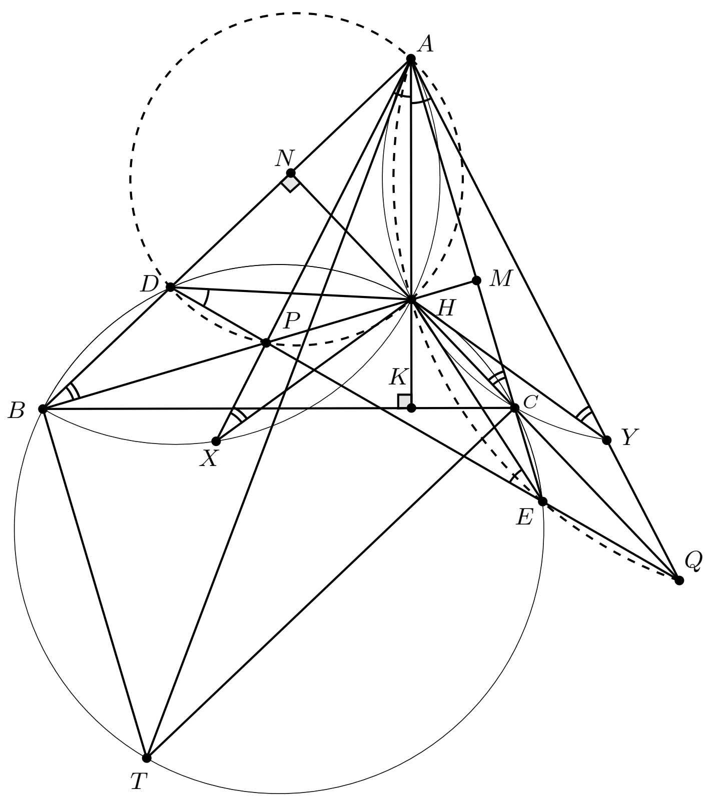
Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo cuyo ortocentro es el punto H. La circunferencia que pasa por los puntos B, H y C vuelve a intersectar a las rectas AB y AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean P y Q los puntos de intersección de HB y HC con el segmento DE, respectivamente. Se consideran los puntos X e Y

[3] Alumno participante por el Estado de Sonora.

(distintos de A) que están sobre las recta AP y AQ, respectivamente, de manera que los puntos X, A, H y B están sobre un círculo y los puntos Y, A, H y C están sobre un círculo. Muestra que las rectas XY y BC son paralelas.

(Problema sugerido por Leonardo Ariel García Morán)

Solución de Ricardo de Jesús Balam Ek. Primero notemos que si trazamos la paralela a AC por B y la paralela a AB por C, el punto de intersección T, está en el circuncírculo del triángulo HBC. Para mostrar esta afirmación veamos que $AB \parallel TC$ y $AC \parallel BT$, implican que $BH \perp BT$ y $HC \perp TC$. Luego, $\angle TBH + \angle HCT = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, lo que significa que el cuadrilátero $BHCT$ es cíclico. Como $ABTC$ es un paralelogramo por construcción, tenemos que $\angle TAC = \angle ATB$ y $\angle CTA = \angle BAT$. Por lo tanto, $\angle TAC + \angle CTA = \angle BAT + \angle ATB$. Entonces, por ángulo externo al triángulo ATC, notamos que $\angle TCE = \angle BAT + \angle ATB$. Por otro lado, tenemos que $\angle TBA = 180^\circ - (\angle BAT + \angle ATB)$ y, como el cuadrilátero $BTCD$ es cíclico, resulta que $\angle TBA + \angle DCT = 180^\circ$. Combinando estas ecuaciones obtenemos que $\angle DCT = \angle ECT \Longrightarrow \widehat{TE} = \widehat{DT}$.



Como H y T son diametralmente opuestos, al ser T el punto medio del arco $\widehat{DE}$, se tiene que H es el punto medio del arco $\widehat{ED}$, de donde se obtiene que $HE = HD$ y en particular

$$\angle EDH = \angle HED \tag{8}$$

Denotemos por K, M y N a los pies de las alturas desde A, B, y C, respectivamente, en el triángulo ABC. Por los ángulos rectos, es claro que $HNBK$ es cíclico. Entonces, $\angle KHC = \angle KBN$ y por el cíclico $CDBE$, se tiene que $\angle CBD = \angle CED$. Como $\angle KBN = \angle CBD$, se cumple que $\angle KHC = \angle CBD$, lo cual implica que los ángulos suplementarios a estos también son iguales. Luego, $\angle QHA = \angle QEA$, de donde $AHEQ$ es cíclico. De manera análoga se muestra que $ADPH$ es cíclico. Al ser cíclicos $AHEQ$ y $ADPH$ se tiene que $\angle HAQ = \angle HED$ y $\angle PAH = \angle EDH$. Luego, por (8), se tiene que

$$\angle XAH = \angle PAH = \angle HAQ = \angle HAY. \tag{9}$$

Por último, al ser cíclicos los cuadriláteros $AHCY$, $ABXH$ y $BCMN$, se tienen las igualdades $\angle HXA = \angle HBA$, $\angle MBN = \angle MCN$ y $\angle ACH = \angle AYH$. Lo anterior implica la igualdad

$$\angle HXA = \angle AYH. \tag{10}$$

Por (9) y (10), los ángulos en los triángulos AHX y AHY coinciden, además comparten el lado AH. Entonces, estos triángulos son congruentes y, en particular, X es la reflexión de Y sobre AH. Así, $AH \perp XY$. Al ser H ortocentro del triángulo, tenemos que $AH \perp BC$, de donde $XY \parallel BC$ como se quería.

Problema 4. Un subconjunto B de $\{1, 2, \ldots, 2017\}$, tiene la propiedad *T* si:
Cada tres números de B son las longitudes de los lados de un triángulo (de área positiva).
Determina la mayor cantidad de números que puede tener un conjunto B que tenga la propiedad *T*.

(Problema sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Solución de Carlos Emmanuel Ramírez Vázquez.[4] Sea B un subconjunto con la propiedad T y sean a y c los elementos más pequeño y más grande, respectivamente, de B. Sea $b \in B$ tal que $a < b < c$. Como a, b, c son los lados de un triángulo no degenerado, necesariamente $a + b > c$ (por la desigualdad del triángulo). Luego, $2b > a + b$ y así $b > \frac{c}{2}$. Si r es tal que $a = \frac{c}{2} - r$, entonces $b > \frac{c}{2} + r$, pues de otra forma $a + b \leq c$. Entonces, o B es subconjunto de $B' = \{\lceil \frac{c}{2} \rceil, \lceil \frac{c}{2} \rceil + 1, \ldots, c\}$, el cual contiene $c - \lceil \frac{c}{2} \rceil + 1$ elementos, o B es subconjunto de $\{\frac{c}{2} - r, \frac{c}{2} + r + 1, \frac{c}{2} + r + 2, \ldots, c\}$, el que a lo más puede contener $c - \lceil \frac{c}{2} \rceil + 1 = \lfloor \frac{c}{2} \rfloor + 1$ elementos.
Es sencillo verificar las desigualdades triangulares estrictas en las ternas del conjunto

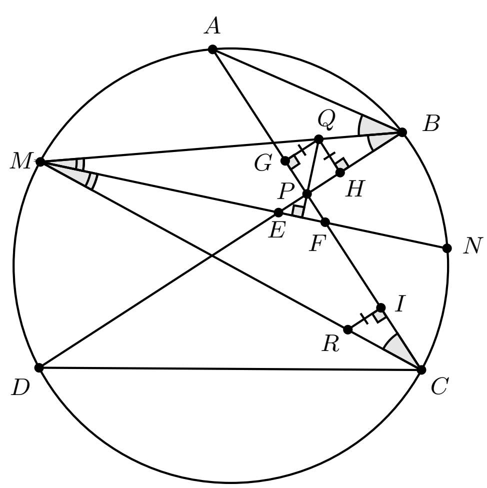
[4] Alumno participante por el Estado de Oaxaca. La solución fue tomada del artículo de divulgación "Algunos pensamientos sobre la labor de coordinador de problema en la OMM, así como algunas soluciones al problema 4". Abstraction & Application, Vol. 18, 2017, 35-43.

B' por lo que este conjunto cumple la propiedad T. Así que la cantidad máxima de elementos que puede contener un subconjunto B con la propiedad T es $\lfloor \frac{2017}{2} \rfloor + 1 = 1008 + 1 = 1009$.

Problema 5. Sobre una circunferencia Γ se encuentran los puntos A, B, N, C, D y M colocados en el sentido de las manecillas del reloj de manera que M y N son los puntos medios de los arcos $\widehat{DA}$ y $\widehat{BC}$ (recorridos en el sentido de las manecillas del reloj). Sea P la intersección de los segmentos AC y BD; y sea Q un punto sobre MB de manera que las rectas PQ y MN son perpendiculares. Sobre el segmento MC se considera un punto R de manera que $QB = RC$. Muestra que AC pasa por el punto medio del segmento QR.

(Problema sugerido por Germán Puga Castillo)

Solución de Fabián Domínguez López.[5] Denotemos por $\angle ABM = \alpha$; como M es punto medio del arco $\widehat{DA}$, se tiene que $\angle MBD = \alpha$. Si denotamos por $\angle NMB = \theta$, por ser N punto medio del arco $\widehat{CB}$, se tiene que $\angle CMN = \theta$. Sean E y F las intersecciones de MN con BD y AC, respectivamente. Por ángulos externos en los triángulos BME y CFM, se tiene que $\angle FEP = \angle MBE + \angle EMB = \alpha + \theta = \angle FCM + \angle CMF = \angle PFE$. Entonces, el triángulo EPF es isósceles con $PE = PF$. Luego PQ es bisectriz del ángulo $\angle EPF$, pues por construcción es la altura de este triángulo que es isósceles por lo anterior. Como Q está en las bisectrices de $\angle BPA$ y $\angle ABP$ (por ser opuesto por el vértice a $\angle EPF$), se tiene que Q es incentro del triángulo ABP. Sean G y H los pies de las perpendiculares de Q a AP y PB, respectivamente y sea I el pie de la perpendicular de R a PC.



[5] Alumno concursante por el Estado de Chiapas.

En el triángulo BQH, tenemos que $\angle HQB = 180° - (\angle BHQ + \angle QBH) = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$. Como el cuadrilátero $ABCM$ es cíclico, tenemos que $\angle ACM = \angle ABM = \alpha$. Luego, en el triángulo RIC, tenemos que $\angle CRI = 180° - (\angle RIC + \angle ICR) = 180° - (90° + \alpha) = 90° - \alpha$. Lo anterior implica que $\angle CRI = 90° - \alpha = \angle HQB$ y $\angle ICR = \alpha = \angle QBH$. Como $BQ = CR$, por el criterio ALA, se tiene que los triángulos BQH y CRI son congruentes, en particular tenemos que $QH = RI$. Al ser Q incentro del triángulo ABP se tiene que $QH = QG$. Así, $QG = RI$. Ahora, sea J la intersección de AC con QR. Por ser RI y QG segmentos perpendiculares a AC, estos son paralelos y, como son de la misma longitud, esto significa que $QIRG$ es un paralelogramo. Para finalizar, justamente J es la intersección de las diagonales de este paralelogramo, por lo tanto J biseca las diagonales y en particular J es punto medio de QR, como se quería demostrar.

Problema 6. Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de esa. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algún turno de B. Determina para cada n el mínimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

(Problema sugerido por Leonardo Ariel García Morán)

Solución de Eric Iván Hernández Palacios. Sea en algún momento el número de votos por urna representado por una secuencia de longitud m: $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Denotamos a la *puntuación* de este acomodo por

$$\text{punt}(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \sum_{k=1}^{m} f(a_k),$$

donde $f(x) = 2^{x-1}$ si $x > 0$ y $f(0) = 0$. Demostraremos que B puede forzar a que esta puntuación nunca sobrepase $m - 1$ después de su turno, por lo que si A puede lograr meter n votos en una urna después de un movimiento de B, entonces $2^{n-1} \leq m - 1$. Demostraremos también que con $m = 2^{n-1} + 1$, A puede jugar para obtener n votos de una urna después de un movimiento de B, dando entonces el mínimo m en términos de n, a saber $2^{n-1} + 1$.

Primero probaremos que si B siempre vacía alguna de las urnas con más votos, la puntuación total de todas las urnas nunca sobrepasará $m - 1$. Hacemos esto por inducción en el número de turnos que B ha jugado. Claramente, esto es cierto en el primer turno, donde la puntuación es exactamente 1. Tenemos ahora varios casos para turno subsecuente.

- Si A pone votos en dos urnas vacías, subiendo la puntuación por 2, o B quitará dos o más votos de una urna, bajando la puntuación por lo menos 2, o todas las urnas tendrán uno o ningún voto, por lo que B dejará al menos una urna vacía y una puntuación máxima de $m - 1$.

- Si A pone votos en una urna vacía y otra con k votos, B quitará votos de una urna con al menos $k+1$ votos, haciendo al cambio neto de la puntuación al menos $1+2^{k-1}-2^k \leq 0$.

- Si A pone votos en dos urnas con $k_1 \leq k_2$ votos, B quitará votos de una urna con al menos k_2+1 votos, haciendo al cambio neto de la puntuación al menos $2^{k_1-1}+2^{k_2-1}-2^{k_2} \leq 0$.

En cualquier caso, el número de votos se mantiene menor o igual que $m-1$, completando la inducción.
Ahora, demostraremos también por inducción, que si $m = 2^{n-1}+1$, A puede conseguir 2^{n-k} urnas con k votos después de un turno de B para todo $k \leq n$. Para el caso base, vemos que si A toma dos urnas vacías por turno y les pone un voto a ambas, como B solo puede vaciar a lo más una urna, eventualmente debe llegar a tener $m-1 = 2^{n-1}$ urnas con un voto. (No puede tener m porque B vacía una de ellas). Ahora, para todo $k < n$, si A puede llegar a tener 2^{n-k} urnas con k votos después de que B haya vaciado una urna, puede llegar a tener 2^{n-k-1} con $k+1$ votos siguiendo el siguiente procedimiento. Cada uno de los siguientes 2^{n-k-1} turnos suyos, A toma dos de estas urnas y les pone un voto. Como B solo podrá vaciar 2^{n-k-1} de estas urnas mientras tanto, al final, quedarán al menos 2^{n-k-1} urnas con $k+1$ votos. Esto completa la inducción y prueba que A puede obtener $2^{n-n} = 1$ urna con n votos siguiente a un turno de B, demostrando lo que se quería.

Solución de Victor Antonio Domínguez Silva. La respuesta es $2^{n-1}+1$. Primero veamos que B puede garantizar que A no logre su objetivo cuando $m < 2^n$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_m$ las cantidades de votos en cada una de las cajas en algún momento del juego, después de un turno de B. Definimos $f(a_i) = 2^{a_i}$ si $a_i > 0$ y $f(a_i) = 0$ si $a_i = 0$. Además, sea $S = \sum_{i=1}^{m} f(a_i)$. Notemos que si en algún momento se llega a conseguir que una urna tenga al menos n votos, S será al menos 2^n. Demostraremos inductivamente que B puede mantener en cada turno suyo $S < 2^n$. Así, nunca habrá una caja con n o más votos después de algún turno de B y A no podrá ganar. Es claro que en el primer turno, $S = 0$, así que en este caso sí se cumple nuestra afirmación. Procedemos a demostrar el paso inductivo. Sin pérdida de generalidad, reacomodando las urnas, A coloca votos en las primeras dos cajas, con $a_1 \geq a_2$. Así, en este turno todos los valores de a_i se mantienen constantes excepto a_1 y a_2, que aumentan en 1.

- Caso 1. $a_1 > 0$ y $a_2 > 0$. En este caso, notemos que S aumenta en $2^{a_1}+2^{a_2}$. Luego, en su turno, B vacía la primera caja. Así, S disminuye en 2^{a_1+1}. Después de ambos turnos, S cambia en $2^{a_1}+2^{a_2}-2^{a_1+1} \leq 2^{a_1}+2^{a_1}-2^{a_1+1} = 0$. Como habíamos supuesto que $S < 2^n$ después del turno anterior de B, esto se mantiene en este turno.

- Caso 2. $a_1 > a_2 = 0$. En este caso, S aumenta en $2^{a_1}+2$ después del turno de A. Entonces, B vacía la primera caja, por lo que ahora S disminuye en 2^{a_1+1}. El cambio total de S después de ambos turnos es $2^{a_1}+2-2^{a_1+1} \leq 2^{a_1}+2^{a_1}-2^{a_1+1} = 0$. De nuevo, como habíamos supuesto que $S < 2^n$ después del turno anterior de B, esta condición se mantiene en este turno.

- Caso 3. $a_1 = a_2 = 0$. Entonces, S aumentó en 4 después del turno de A. Si hay una caja con 2 o más votos, B la vacía y ahora S disminuye en al menos 4 y se concluye como en los demás casos. En otro caso, después del turno de A, cada caja contiene a lo más un voto. Luego, B vacía cualquier caja con exactamente un voto y, como ahora hay a lo más $2^{n-1}-1$ cajas con un voto, $S \leq 2(2^{n-1}-1) = 2^n - 2 < 2^n$.

Esto concluye la inducción. Ahora veamos que si $m = 2^{n-1}+1$, A puede garantizar la victoria. En este caso A inductivamente logra conseguir 2^{n-k} cajas con k votos después de algún turno de B, para $1 \leq k \leq n$. Esto se logra poniendo votos en urnas con al menos $k-1$ votos en 2^{n-k-1} turnos consecutivos de A. Esto se puede ya que en cada turno suyo B vacía a lo más una caja. Se sigue que para $k = n$, A eventualmente consigue al menos una caja con n votos, lo que concluye el problema.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod n).*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad media aritmética - media armónica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots$, x_n, $y_1, \ldots, y_n$, se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right).$$

La igualdad se verifica si y solo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 12 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 13 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 14 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 15 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 16 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

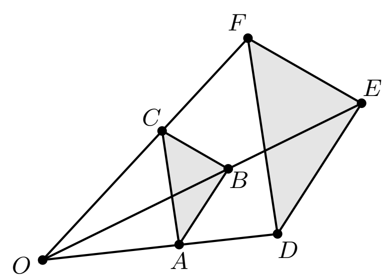
Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Triángulos homotéticos)**.** *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ y $CA \parallel FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de 1, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Teorema 21 (Circunferencia de los 9 puntos)**.** *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 22 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Definición 8 (Figuras en perspectiva)**.** *Dos figuras están en perspectiva si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto por el cual pasan estas rectas se llama centro de perspectiva.*

Teorema 23 (Desargues)**.** *Dos triángulos están en perspectiva si y solo si los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales.*

Teorema 24 (Recta de Euler)**.** *En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.