TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso por: Jaime Torre Marina
jaimetorremarina@hotmail.com
044 55 1630 3549
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2018.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2018, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. De esta forma, en cada uno de los números buscamos proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. En particular, el artículo de matemáticas, que se incluye al inicio de cada número de la revista, suele ser elaborado por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una vasta experiencia. En este sentido, el artículo de este número titulado *Áreas con tapetes*, escrito por Marcos Torres Vivanco, no es la excepción. A través de sus páginas, el lector conocerá un procedimiento muy útil conocido como Teorema de tapetes, que sirve para comparar y calcular áreas. Estamos seguros que será un buen aporte para incrementar tus competencias.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2018 incluimos los exámenes con soluciones, de la XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la 7^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Ambos certámenes donde México participó en el primer cuatrimestre de este año 2018.

A partir de este número, tenemos la nueva sección: "Olimpiada Mexicana de Matemaáticas de Educación Básica" (OMMEB) en la cual aparecerá material de entrenamiento para los más pequeños. En esta ocasión hemos publicado los problemas y soluciones de la cuarta etapa del nivel 2 de la 2^a OMMEB de la Ciudad de México. Aprovechamos para invitar a todos los delegados estatales a que nos manden sus exámenes de sus concursos estatales para publicarlos en futuros números de la revista.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.

- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1999. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2018-2019 y, para el 1° de julio de 2019, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 4 al 9 de noviembre de 2018 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2018 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Inglaterra, julio de 2019) y a la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (México, septiembre de 2019).

De entre los concursantes nacidos en 2002 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (República Dominicana, junio de 2019).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2019.

2ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2018, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Segunda Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2018.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de

2018.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2018.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 2^a OMMEB se realizará en Mérida, Yucatán, del 9 al 12 de junio de 2018. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2019.

Áreas con tapetes

Por Marcos Torres Vivanco

Nivel Básico

Desde mi primer día como participante en la olimpiada de matemáticas, me ha sorprendido el ingenio necesario para resolver algunos de los problemas. En contraste con el procedimiento que aprendí en la escuela, enfocado en ver un tema y resolver ejercicios que usan solamente el tema visto, en la olimpiada nos daban los problemas y nos dejaban usar cualquier cosa que quisiéramos y seguir cualquier camino que se nos ocurriera para resolverlos. En especial me gustan aquellos problemas que no solo tienen soluciones que son o muy teóricas o muy complicadas sino que también tienen una solución sencilla la cual no necesita muchas palabras para comprenderse. Estas soluciones son muy importantes, sobre todo en concursos de primaria y secundaria y en las primeras etapas de concursos estatales, los cuales suelen ser de opción múltiple y las soluciones más rápidas y precisas son de mayor utilidad que aquellas que usan muchas cuentas.

En este artículo abordaré algunos problemas básicos en los que piden comparar o calcular áreas y que se pueden resolver con un procedimiento conocido como teorema de los tapetes, el cual puede ayudarnos a reducir las cuentas o a encontrar soluciones más rápidas. Además, con la ayuda de este teorema veremos un lema sobre áreas en trapecios que es muy útil para resolver varios problemas.

Antes de que veamos el enunciado del teorema de los tapetes, recordemos el siguiente lema.

Lema 1. *Sean ABC y DEF dos triángulos con la misma altura h, desde A y D respectivamente, entonces*

$$\frac{BC}{EF} = \frac{[ABC]}{[DEF]},$$

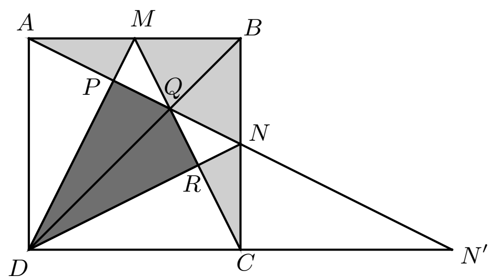
donde $[ABC]$ denota al área del triángulo ABC.

Demostración. La prueba se sigue de la igualdad $\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{\frac{h \cdot BC}{2}}{\frac{h \cdot EF}{2}} = \frac{BC}{EF}$. $\square$

Para ver de qué trata el teorema de los tapetes y cómo se usa, veamos como ejemplo el siguiente problema.

Problema 1. *Sean M y N los puntos medios de los lados AB y BC del cuadrado $ABCD$. Sean P, Q y R los puntos de intersección de AN con DM, AN con CM y CM con DN, respectivamente. Pruebe que:*

$$[AMP] + [BMQN] + [CNR] = [DPQR].$$



Demostración. Primero veamos una solución directa de este problema. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el cuadrado $ABCD$ tiene área igual a 1. Dado que la figura es simétrica con respecto de la diagonal BD, basta probar que:

$$[AMP] + [BMQ] = [PQD].$$

Por ser paralelas AD y BC tenemos que $\angle QDA = \angle QBN$. Además, $\angle AQD = \angle NQB$ por ser ángulos opuestos por el vértice. Por lo tanto, los triángulos AQD y NQB son semejantes; entonces $\frac{AQ}{QN} = \frac{AD}{BN} = 2$. Por lo que $3QN = AN$, de donde tenemos que $[AQB] = \frac{2}{3}[ABN] = \frac{1}{6}$. Por ser M punto medio de AB tenemos que $\frac{1}{2}[AQB] = [BMQ] = \frac{1}{12}$. Ahora, sea N' el punto de intersección de AN y CD. Por un procedimiento análogo, los triángulos AMP y $N'DP$ son semejantes y $\frac{PM}{PD} = \frac{AM}{DN'} = \frac{1}{4}$. Esto último se debe a que $DN' = 2DC = 2AB = 4AM$, pues los triángulos $AN'D$ y $NN'C$ son semejantes, por el teorema de Tales y, dado que N es punto medio de BC, $\frac{AD}{NC} = \frac{DN'}{N'C} = 2$. Por lo tanto, $5PM = DM$, de donde tenemos que $[AMP] = \frac{1}{5}[AMD] = \frac{1}{20}$. Por la semejanza de los triángulos $AN'D$ y $NN'C$ tenemos que $N'A = 2NA$ y, por la semejanza de los triángulos AMP y $N'DP$, tenemos que $4PA = N'P$, al sustituir estas igualdades tenemos

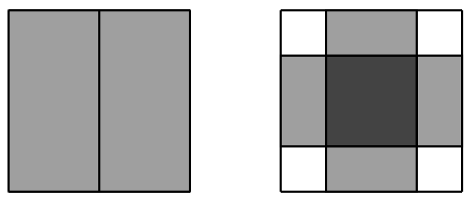
$$\begin{aligned} N'A &= 2NA, \\ N'P + PA &= 2NA, \\ 4PA + PA &= 2NA, \\ PA &= \frac{2}{5}NA. \end{aligned}$$

Como $QN = \frac{1}{3}AN$, resulta que $PQ = AN - \frac{2}{5}AN - \frac{1}{3}AN = \frac{4}{15}AN$, de donde obtenemos que $[PQD] = \frac{4}{15}[AND] = \frac{2}{15}$, pues el triángulo AND tiene base y altura igual a 1. Por último, $[AMP] + [BMQ] = [PQD]$, esto es, $\frac{1}{20} + \frac{1}{12} = \frac{2}{15}$.

□

Esta solución depende de que M y N sean puntos medios de los lados AB y BC, además de que se necesitan muchas cuentas y trazos nuevos, por ejemplo encontrar el punto N'. Existe una solución más sencilla, en la que no se realizan cuentas y funciona para puntos arbitrarios M y N en AB y BC.

Para poder formular el teorema de los tapetes, consideremos lo siguiente. Supongamos que tenemos un piso con cualquier forma y lo cubrimos con dos tapetes, las cuales cubren por completo el cuarto y no se empalman. Si movemos estos tapetes y los volvemos a colocar de nuevo en el piso del cuarto, entonces estos tapetes se empalman en algunos pedazos y en otras partes no cubren el piso, pero como en un inicio los tapetes sí cubrían todo el piso, entonces la suma de las áreas del piso que ya no son cubiertas por los tapetes es igual a la suma de las áreas donde los tapetes se empalman.



En este caso consideramos solo dos tapetes que cubrían a la región, pero en general pueden ser más de dos tapetes, por lo tanto podemos formular una primera versión del teorema como sigue.

Teorema 1 (Primera versión del teorema de los tapetes)**.** *Si R es una región y A y B son dos conjuntos de tapetes dentro de R tales que $[A] + [B] = [R]$, entonces el área que no está cubierta por los tapetes es igual al área donde se empalman los tapetes de A con los de B.*

Regresemos a la versión generalizada de nuestro problema original, es decir, en donde M y N son dos puntos arbitrarios de los lados AB y BC, respectivamente. Dado que los triángulos AND y DMC tienen como base y altura los lados del cuadrado, el área de cada uno de ellos es la mitad del área del cuadrado. Luego, $[AND]+[DMC] = [ABCD]$ y, por el teorema de los tapetes, tenemos que $[PQRD] = [AMP]+[BMQN]+[CNR]$.

También se tiene una segunda versión del teorema de los tapetes que se puede enunciar como sigue.

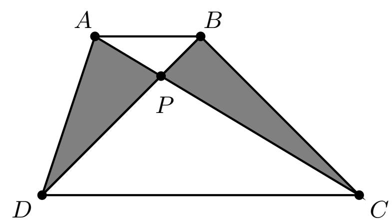
Teorema 2 (Segunda versión del teorema de los tapetes)**.** *Sean A y B dos tapetes con la misma área. Si quitamos la región en donde se enciman, las regiones sobrantes tienen la misma área.*

Lo anterior se sigue del hecho de que si C es el área de la intersección de los dos tapetes y, A y B son las áreas de las regiones que sobran en cada tapete, entonces $A + C = B + C$ si y solo si $A = B$.

Como ejemplo de esta versión del teorema de los tapetes veamos una prueba elemental del siguiente lema.

Lema 2 (Áreas en trapecios)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sea P el punto de intersección de sus diagonales. Entonces, $ABCD$ es un trapecio con lados paralelos AB y CD si y solo si los triángulos APD y BPC tienen la misma área.*

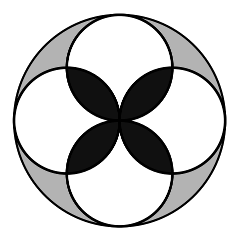
Demostración. Probaremos primero la ida. Por ser paralelas AB y CD, los triángulos ADC y BCD tienen la misma altura y la misma base, por lo tanto tienen la misma área. Luego, por la segunda versión del teorema de los tapetes tenemos que $[APD] = [BPC]$.



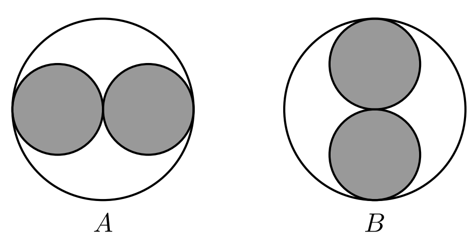
Para probar el regreso notemos que los triángulos ACD y BCD tienen la misma área, y tienen la misma base CD por lo tanto la altura desde A y desde B al lado CD mide lo mismo, por lo tanto AB es paralela a CD. □

Con estos teoremas y el lema de áreas en trapecios, tenemos todo lo necesario para empezar a resolver unos cuantos problemas.
El siguiente es un ejemplo de un problema parecido a los que aparecen en las primeras etapas de selectivos estatales, en los que piden calcular o comparar áreas sombreadas de regiones.

Problema 2. *En la siguiente figura ¿Cuál región tiene mayor área, las almendras del centro o las sombrillas grises de alrededor?*



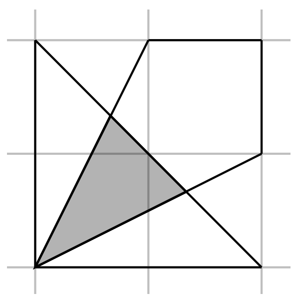
Solución. Consideremos dos conjuntos de tapetes, el conjunto A formado por los círculos horizontales y el conjunto B formado por los círculos verticales.



Si cada uno de los círculos pequeños tiene radio r, entonces el conjunto A tiene área igual a $[A] = 2\pi r^2$. Análogamente, $[B] = 2\pi r^2$. Como el radio del círculo grade es $2r$, su área es $\pi(2r)^2 = 4\pi r^2$ y, como $[A] + [B] = 4\pi r^2$, por el teorema de los tapetes tenemos que el área de las almendras negras es la misma que el área de las sombrillas grises. $\square$

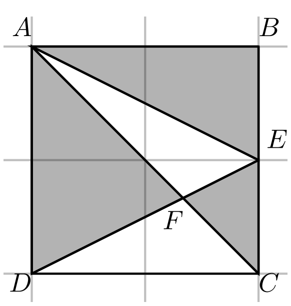
En el problema anterior pudimos haber calculado las áreas de cada una de las regiones para después compararlas, pero siguiendo el teorema de los tapetes obtuvimos una solución más corta. También notemos que los tapetes no necesariamente son polígonos, como triángulos o rectángulos, también pueden ser figuras curveadas.
Algo que muchos podrían pensar es que el teorema de los tapetes solo nos sirve para problemas en los que nos piden probar que dos áreas son iguales, pero también se puede usar en problemas de calcular áreas, pues con tal teorema podemos comparar regiones en las que no es tan sencillo calcular el área, con otras en las que sí.

Problema 3. *En la siguiente figura, si cada cuadrado de la retícula tiene lado* 1*, ¿cuál es el área de la región sombreada?*



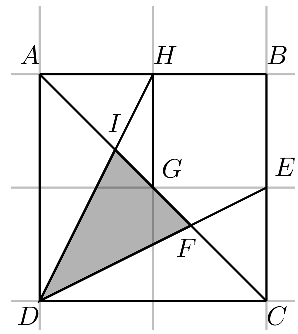
Solución. Considerando la siguiente figura tenemos que

$$[ABC] = [ADE] = \frac{1}{2}[ABCD].$$



Luego, por la primera versión del teorema de los tapetes, tenemos que $[ABE] + [EFC] = [AFD]$. Como AD y EC son paralelas y $\angle AFD = \angle CFE$, los triángulos AFD y CFE son semejantes y, como $\frac{AD}{EC} = 2$, se sigue que $[AFD] = 4[EFC]$. Además, $[ABE] = 1$, por lo que $[EFC] = \frac{1}{3}$ y $[AFD] = \frac{4}{3}$.

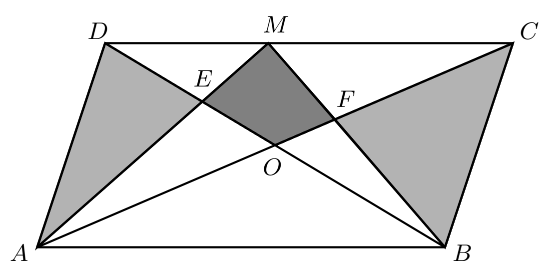
Como la figura es simétrica con respecto a la diagonal DB, tenemos que $[AHI] = [CFE] = \frac{1}{3}$. Además, DG es mediana del triángulo DFI, por lo que basta determinar el área del triángulo DGI. Aplicando el lema de áreas en trapecios al trapecio $AHGD$, obtenemos que $[DGI] = [AHI] = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, $[DFI] = \frac{2}{3}$.



$\square$

El siguiente problema apareció en el Examen Canguro Matemático Mexicano 2017, nivel cadete.

Problema 4. *En la siguiente figura se muestra un paralelogramo $ABCD$ con área 1. El punto de intersección de las diagonales del paralelogramo es O. El punto M está sobre DC. El punto de intersección de AM y BD es E, y el punto de intersección de BM y AC es F. La suma de las áreas de los triángulos AED y BFC es $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $EOFM$?*



(a) $\frac{1}{12}$ *(b)* $\frac{1}{8}$ *(c)* $\frac{1}{10}$ *(d)* $\frac{1}{6}$ *(e)* $\frac{1}{14}$

Demostración. Dado que AB es paralela a CD, tenemos que AB es paralela a CM; luego, por el lema de áreas en trapecios en $ABCM$, tenemos que $[AFM] = [BFC]$. Además, como $[ADE] + [BFC] = \frac{1}{3}$, se sigue que el área del polígono cóncavo $AFMED$ es

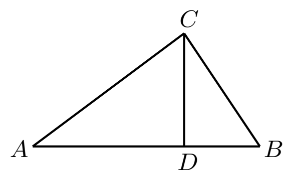
$$[AFMED] = [ADE] + [AFM] = [ADE] + [BFC] = \frac{1}{3}.$$

Como las diagonales de un paralelogramo lo dividen en cuatro triángulos con la misma área, resulta que $[AOD] = \frac{1}{4}$. Luego, $[EOFM] = [AFMED] - [AOD] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, por lo que la respuesta es (a). $\square$

Podemos usar el teorema de los tapetes como una herramienta para resolver problemas más complicados, como veremos en el siguiente ejemplo. Antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 3. *El área de cualquier triángulo ABC está dada por* $\frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}$.

Demostración. Sea D el pie de la altura desde A sobre el lado BC.



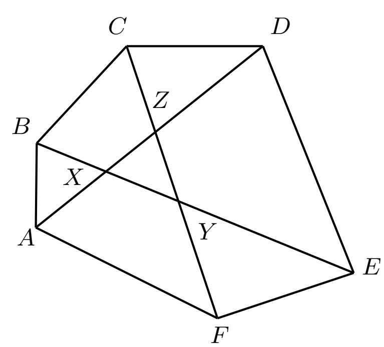
Tenemos que $\operatorname{sen}(\angle BAC) = \frac{CD}{AC}$, esto es, $AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC) = CD$. Usando la fórmula usual para el área de un triángulo, tenemos que

$$[ABC] = \frac{AB \cdot CD}{2} = \frac{AB \cdot AC \cdot \operatorname{sen}(\angle BAC)}{2}.$$

$\square$

Problema 5. *Cada una de las tres diagonales de un hexágono convexo que une vértices opuestos, divide al hexágono en dos cuadriláteros con la misma área. Pruebe que estas tres diagonales concurren en un mismo punto.*

Demostración. Supongamos que las tres diagonales no concurren en un punto, formando un triángulo XYZ como se ve en la figura.



Consideremos al par de diagonales AD y BE. Por hipótesis, cada una de estas diagonales divide al hexágono en dos cuadriláteros con la misma área, por lo que $[ABEF] = [ABCD] = \frac{[ABCDEF]}{2}$. Luego, por el teorema de los tapetes tenemos que $[ABX] = [XDE]$. Por ser ángulos opuestos por el vértice, tenemos que $\angle BXA = \angle EXD$, de donde $[ABX] = [XDE]$. Luego, por el Lema 3, tenemos que $\frac{BX \cdot AX \cdot \operatorname{sen}(\angle BXA)}{2} = \frac{DX \cdot EX \cdot \operatorname{sen}(\angle EXD)}{2}$, lo cual implica que $BX \cdot AX = DX \cdot EX$. De manera análoga, considerando las parejas de diagonales AD, CF y BE, CF, tenemos que $FY \cdot EY =$

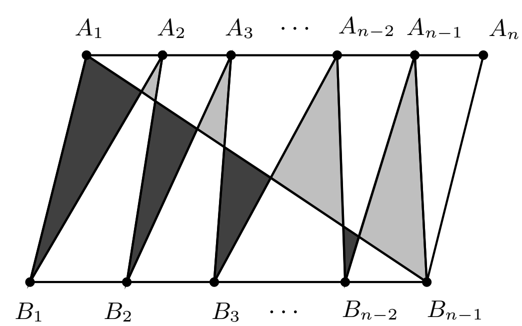
$BY \cdot CY$ y $CZ \cdot DZ = AZ \cdot FZ$. Multiplicando las tres igualdades anteriores obtenemos que $AX \cdot BX \cdot CZ \cdot DZ \cdot EY \cdot FY = AZ \cdot BY \cdot CY \cdot DX \cdot EX \cdot FZ$, lo cual es una contradicción, pues cada término de la izquierda es menor a un término de la derecha ($AX < AZ, BX < BY, \ldots, FY < FZ$). Por lo tanto, las tres diagonales AD, BE y CF concurren en un punto. $\square$

Algunos de los problemas que se enumeran a continuación se pueden resolver sin hacer uso del teorema de los tapetes, en sus dos versiones, pero el uso de estos teoremas hace que sea más fácil llegar al resultado o a la prueba. Los invito a encontrar diferentes caminos para resolver el mismo problema y, especialmente, que alguno de estos caminos use algunos de los resultados vistos en este artículo.

Problemas

1) Sea $ABCD$ un paralelogramo. Los puntos M, N y P están sobre los segmentos BD, BC y CD, respectivamente, tales que $CNMP$ es un paralelogramo. Sean E y F las intersecciones de AN con BD y AP con BD, respectivamente. Prueba que $[AEF] = [DFP] + [BEN]$.

2) Sea $n \geq 3$ un número entero, los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son colineales al igual que los puntos $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Además, el cuadrilátero $A_1B_1B_{n-1}A_n$ es un paralelogramo. Las líneas que unen los dos conjuntos de puntos y la diagonal A_1B_{n-1} forman triángulos por arriba y abajo de la diagonal, como se ve en la siguiente figura.

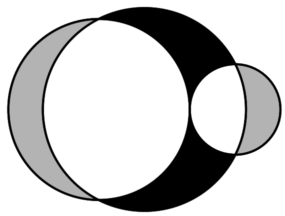


Prueba que el área total de los triángulos por arriba de la diagonal es igual al área de los triángulos por debajo de la diagonal.

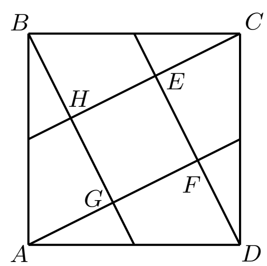
3) (IWYMIC, 2016) Sean D un punto en el lado AB y E un punto en el lado AC del triángulo ABC. Sea P el punto de intersección de BE y CD. El área del triángulo ABC es 12 cm^2. Los triángulos BPD, CPE y el cuadrilátero $ADPE$ tienen la misma área. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ADPE$?

4) (AMC 10, 2009) En un cuadrilátero convexo $ABCD$ se tiene que $AB = 9$ cm y $CD = 12$ cm. Las diagonales AC y BD se intersecan en E; $AC = 14$ cm y los triángulos AED y BEC tienen la misma área. ¿Cuál es el valor de AE?

5) Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3, tres circunferencias tales que sus centros son colineales. Γ_2 y Γ_3 son tangentes exteriormente en un punto; Γ_1 interseca a cada una de las otras dos circunferencias en dos puntos los cuales son los extremos de un diámetro de la circunferencia correspondiente. Demuestra que el área de las lunas grises es igual al área de los paraguas negros.



6) (AMC 10, 2015) En la figura, los cuadriláteros $ABCD$ y $EFGH$ son cuadrados. Si $AB = 10$ cm y $CE = 2\sqrt{5}$ cm, ¿cuánto mide el área del cuadrado $EFGH$?



7) (IWYMIC, 2015) $ABCD$ es un paralelogramo. E es un punto sobre el segmento AB tal que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{4}$. F es un punto sobre el segmento DC, AF y DE se intersecan en G y CE y BF se intersecan en H. Si el área de $ABCD$ es 1 cm^2 y el área del triángulo BHC es $\frac{1}{8}$ cm^2, encuentra el área del triángulo ADG.

8) Sea $ABCD$ un rectángulo, si $EFGH$ e $IFJH$ son rectángulos tales que J y G están en DC; I y E están en AB; F está en BC y H está en DA, demuestra que $[EFGH] + [IFJH] = [ABCD]$.

Bibliografía

1) T. Andreescu, B. Enescu. *Mathematical Olympiad Treasures.* Birkhäuser, 2004.

2) A. Bogomolny. *Carpets Theorem from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles.* https://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/CarpetsInSquare.shtml, Accessed 10 March 2018.

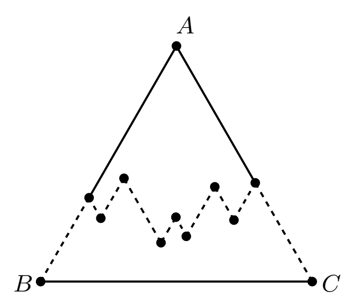
3) J. Konhauser, D. Velleman, S. Wagon. *Which Way Did the Bicicle Go?, MAA, 1996.*

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2018. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Cuando van en carretera, Choco y Chiqui juegan a sumar los números en las placas de los coches. En su país, las placas van desde el 001 hasta el 999. Choco obtiene 1 punto cada vez que el número de la placa suma 6 y Chiqui obtiene 1 punto cada vez que el número suma 21. En un viaje muy largo, vieron todos los coches del país. ¿Quién obtuvo más puntos?

Problema 2. El triángulo ABC de la figura es equilátero. El camino punteado es tal que sus picos forman ángulos de $60°$ y los extremos del camino coinciden con los lados del triángulo. Si la longitud del camino es 2018 cm, ¿cuál es el perímetro del triángulo ABC?



Problema 3. Sea $\ell(n)$ el último dígito de la suma de los dígitos de n. Por ejemplo, $\ell(39) = 2$, porque 2 es el último dígito de $3 + 9 = 12$. Calcula el valor de la suma $\ell(1) + \ell(2) + \ell(3) + \cdots + \ell(99) + \ell(100)$.

Problema 4. En un triángulo ABC con $AB = AC$ se marca el punto medio M de AC. Un punto N en el segmento BC, es tal que MN es perpendicular a BC. Determina el valor de la razón $\frac{CN}{NB}$.

Problema 5. Eduardo tiene diez primos que viven en el mismo país que él, pero no en la misma ciudad. Además, sus dos hermanos también se encuentran en otras ciudades. Eduardo tiene ahorrado para viajar por el país y visitar a cinco personas, pero quiere visitar al menos a uno de sus hermanos. ¿De cuántas formas distintas puede hacer Eduardo este viaje?

Problema 6. Sea $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio de grado 4 para el que existen números reales positivos u y v con $u \neq v$, tales que $p(-u) = p(u) - u$ y $p(-v) = p(v) - v$. Demuestra que $p(-x) = p(x) - x$ para todo número real x.

Problema 7. Determina todos los enteros positivos n con la siguiente propiedad: para cualesquiera enteros positivos a y b, si $11 \mid (a^n + b^n)$, entonces $11 \mid a$ y $11 \mid b$.

Problema 8. Se dice que una permutación $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tiene a i $(1 \leq i \leq n)$ como punto fijo si $a_i = i$. Sea $p(n, k)$ el número de permutaciones que tienen exactamente k puntos fijos. Demuestra que

$$\sum_{k=0}^{n} kp(n, k) = n!.$$

Problema 9. En una reunión hay representantes de n países, $(n \geq 2)$, sentados en una mesa redonda. Se sabe que si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha son de países diferentes. Encuentra el mayor número de representantes que puede haber.

Problema 10. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = CA$. Si B' y C' son puntos sobre BC tales que $BC = B'C'$ (con C y C' del mismo lado con respecto a B') y P y Q son las intersecciones del circuncírculo de ABC con AB' y AC', respectivamente, demuestra que PQ pasa por el punto medio de $B'C$.

Problema 11. Sean x, y, z números reales positivos que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} &= 20.3, \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} &= 15.1, \\ \{y\} + \{z\} &= 0.9. \end{aligned}$$

Determina el valor de $x + y + z$. (El símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual que x y el símbolo $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x, esto es, $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$).

Problema 12. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ sea un número primo.

Problema 13. Sea A el conjunto de los enteros del 1 al 2018. Determina el número de enteros n de A con la siguiente propiedad: el residuo que se obtiene cuando n es dividido por 20 es menor que el residuo que se obtiene cuando n es dividido por 18.

Problema 14. Sean a, b, c y d números reales tales que $(a+b)(c+d) = 2$, $(a+c)(b+d) = 3$ y $(a+d)(b+c) = 4$. Determina el valor mínimo de la suma $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Problema 15. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión de enteros positivos tal que a_{i+1} es el número de divisores (positivos) de a_i para todo $i \geq 1$. Si $a_2 \neq 2$, demuestra que existe un entero positivo m tal que a_m es un cuadrado.

Problema 16. Sean $ABCD$ y $AEFG$ dos cuadriláteros cíclicos semejantes (tienen los mismos ángulos y los lados respectivos están a una razón dada), cuyos vértices se nombran en el sentido de las manecillas del reloj. Sea P el punto común de las circunferencias de los cuadriláteros aparte de A. Demuestra que P está en la recta que contiene a B y a E.

Problema 17. Se dice que un número natural n es *olímpico* si existen dos números naturales $a > 1$ y $b > 1$ tales que $n = a^b + b$. ¿Es posible encontrar 2018 números naturales consecutivos con la propiedad de que exactamente 2016 de ellos son olímpicos?

Problema 18. Demuestra que no existen cuatro enteros consecutivos cuyo producto es de la forma $y^2 - 2018$, para algún entero y.

Problema 19. Sean x, y y z números reales positivos tales que $xy + yz + zx = 3xyz$. Demuestra que $x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3$ y determina cuando se da la igualdad.

Problema 20. Dos participantes juegan el siguiente juego: Alternadamente escriben enteros mayores que 1 y en cada turno los jugadores tienen prohibido escribir un número que sea combinación lineal, con coeficientes enteros, de algunos números que ya se escribieron previamente. El jugador que no puede realizar un movimiento pierde el juego. ¿Algún jugador tiene una estrategia ganadora?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

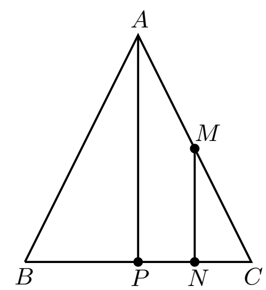
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Imaginemos dos parejas de tres cajas: las primeras tres cajas, A, B, C están vacías, las segundas tres cajas, X, Y, Z tienen 9 pelotas cada una, para un total de 27. Vamos a sacar en total 6 pelotas y colocarlas en las cajas vacías: si sacamos una pelota de la caja X, la colocamos en la caja A; si sacamos una pelota de la caja Y, la colocamos en la caja B; y si sacamos una pelota de la caja Z, la colocamos en la caja C. Si interpretamos cada tercia de cajas como una placa de tres dígitos, podemos darnos cuenta que para cada placa que sume 6, existe una que suma 21. Concluimos que Choco y Chiqui obtuvieron la misma cantidad de puntos.

Solución del problema 2. Tracemos líneas paralelas a los cortes que lleguen a los lados del triángulo. Como el camino está formado por cortes de $60°$ y el triángulo es equilátero, las figuras que se forman son paralelogramos. Como los paralelogramos tienen su lados opuestos iguales, podemos ver que todos los caminos que "suben" suman lo mismo que un lado del triángulo, y todos los caminos que "bajan" suman lo mismo que otro lado del triángulo. Si la longuitud del camino es 2018 cm, entonces la longitud de cada lado es $\frac{2018}{2} = 1009$ cm y el perímetro del triángulo es $1009 \cdot 3 = 3027$ cm.

Solución del problema 3. Veamos que desde $\ell(10k)$ hasta $\ell(10k+9)$, la sucesión aumenta de 1 en 1. Luego, estamos sumando los números del 0 al 9, del 1 al 0, del 2 al 1, del 3 al 2, del 4 al 3, del 5 al 4, del 6 al 5, del 7 al 6, del 8 al 7 y del 9 al 8, más el 1 de $\ell(100)$. Es decir, cada número aparece exactamente 10 veces excepto el 1 que aparece 11. Como $1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, la respuesta es 451.

Solución del problema 4. Sea P el punto medio del lado BC. Como el triángulo ABC es isósceles, tenemos que AP es perpendicular a BC y, por lo tanto, AP es paralela a NM. Como M es punto medio de AC, resulta que N es punto medio de PC. Luego, $NB = 3CN$ de donde $\frac{CN}{NB} = \frac{1}{3}$.



Solución del problema 5. En total son 12 personas. Sin ninguna restricción, Eduardo puede visitar a 5 personas de $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$ maneras. De esos posibles viajes, en exactamente $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ no visita a ninguno de sus hermanos. Luego, son $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 10 \cdot 9 \cdot 8(12 \cdot 11 - 7 \cdot 6) = 720(132 - 42) = 64800$ viajes distintos en que Eduardo puede visitar al menos a uno de sus hermanos.

Solución del problema 6. Observemos que

$$p(-u) = p(u) - u \Rightarrow 2au^3 + 2cu - u = 0,$$
$$p(-v) = p(v) - v \Rightarrow 2av^3 + 2cv - v = 0.$$

Como u y v no son cero, se tiene $2au^2 + 2c = 1$ y $2av^2 + 2c = 1$, por lo tanto $a(u^2 - v^2) = 0$, pero $u, v > 0$ y $u \neq v$, luego $a = 0$ y de $2au^2 + 2c = 1$ se tiene $c = \frac{1}{2}$ por lo que $p(x) = x^4 + bx^2 + \frac{1}{2}x + d$. Es claro que tal $p(x)$ cumple que $p(-x) = p(x) - x$ para todo número real x.

Solución del problema 7. Observemos primero que $11 \mid 10^1 + 1^1$ y $10^{2k+1} + 1 = 9 \cdot 11 \cdot 10^{2k-1} + 10^{2k-1} + 1$ para cualquier entero positivo k. Luego, por un argumento inductivo, se sigue que $11 \mid 10^n + 1^n$ para todo entero positivo impar n. Como $11 \nmid 1$ (también $11 \nmid 10$), la implicación requerida es falsa para números naturales impares. Mostraremos que la implicación es verdadera para cada número natural par. Si $n = 2m$, entonces $a^n = (a^m)^2$ y $b^n = (b^m)^2$ son cuadrados de números naturales. Por lo tanto, $a^m = 11e + f$ y $b^m = 11g + h$ para algunos enteros e, f, g y h, con f y h elementos del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Luego, por un cálculo estándar, tenemos que $a^n = 11A + C$ y $b^n = 11B + D$ para algunos enteros A, B, C y D, con C y D

elementos del conjunto $\{0,1,3,4,5,9\}$. Ahora, es fácil ver que $11 \mid C+D$ si y solo si $C=D=0$.
Como $11 \mid (a^n+b^n)$, tenemos que $11 \mid (11A+C+11B+D)$, de donde se sigue que $11 \mid (C+D)$. Luego, por lo demostrado antes, resulta que $C=D=0$. Así, $a^n=11A$ y $b^n=11B$, lo cual implica que 11 divide a a^n y a b^n. Como 11 es primo, concluimos que $11 \mid a$ y $11 \mid b$.

Solución del problema 8. Vamos a contar cuántos puntos fijos (con multiplicidades) hay entre todas las permutaciones. Como cada permutación con exactamente k puntos fijos aporta k de ellos, la cantidad de puntos fijos es la suma de $kp(k,n)$ al variar k, es decir

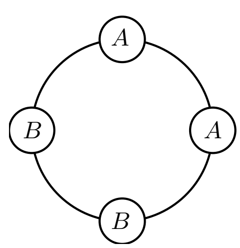
$$\sum_{k=0}^{n} kp(n,k). \tag{1}$$

Por otro lado, si tomamos un número $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ fijo, hay $(n-1)!$ permutaciónes que lo dejan fijo (justamente son las permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j\}$). Como j tiene n posibilidades, el total de puntos fijos es

$$n \cdot (n-1)! = n!. \tag{2}$$

Por el principio de doble conteo, se deduce que las cantidades en (1) y (2) son iguales.

Solución del problema 9. Las parejas de representantes consecutivos pueden ser de n^2 tipos diferentes (n posibilidades del país de un representante y otras n posibilidades del representante a su derecha). Si hay n^2+1 o más personas, entonces hay al menos n^2+1 parejas de representantes, pero como solo hay n^2 tipos diferentes, se tiene por el principio de las casillas que hay dos parejas del mismo tipo, lo cual es contrario a la hipótesis del problema. Ahora, veamos por inducción, que para cada $n \geq 2$ hay un acomodo de n^2 representantes (de hecho n representantes de cada uno de los n países) en la mesa, como señala el problema.
Para $n=2$ se muestra en la siguiente figura.



Ahora haremos el paso inductivo a partir de una mesa con n^2 representantes, con n de cada país. Para el país i, los n vecinos de la derecha de sus n representantes son de países diferentes. En particular, para el país i hay un representante que tiene por vecino de su derecha a una persona del mismo país i. Entre estos dos representantes del mismo país i, colocamos a un representante del país $n+1$ y una persona más, al

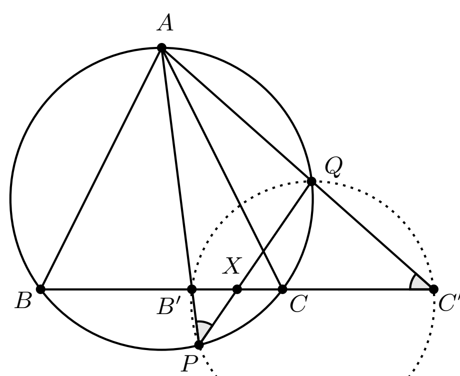
$(n+1)$-ésimo representante del país i. Al hacer esto, para cada país i, con $i = 1, \ldots, n$, la cantidad de representantes aumenta en $2n$ personas. Cada país de los primeros n tiene ya acomodados a sus $n+1$ representantes y del país $n+1$ ya se acomodaron n de sus representantes. En este nuevo acomodo los $n+1$ vecinos de la derecha de las personas de un mismo país $i = 1, \ldots, n$ son de países diferentes y los vecinos de la derecha de las n personas del país $n+1$ son de los países $i = 1, \ldots, n$. Falta agregar una persona más del país $n+1$. Esto se puede hacer a la derecha de un representante de su mismo país. Tenemos ahora acomodados a $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ en la mesa y son $n+1$ de cada uno de los $n+1$ países, que cumplen las condiciones del problema.

Solución del problema 10. Sea X la intersección de PQ con BC. Veamos la siguiente igualdad de ángulos

$$\angle QPA = \frac{\widehat{CA} - \widehat{CQ}}{2} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CQ}}{2} = \angle QC'C, \tag{3}$$

donde la igualdad central se da por ser isósceles el triángulo y las igualdades de los extremos por cálculo de ángulos con arcos en el circuncírculo del triángulo ABC.
La igualdad en (3) implica que el cuadrilátero $B'PC'Q$ es cíclico. Por potencia de un punto se concluye que

$$BX \cdot XC = PX \cdot XQ = B'X \cdot XC'. \tag{4}$$



Si $a = BB'$, como $B'C' = BC$ se tiene que $CC' = a$. Sean $x = B'X$, $y = XC$. Entonces la ecuación (4) se puede reescribir como $(a+x)y = x(y+a)$. Lo anterior implica que $ax = ay$, esto es, $x = y$ como se quería probar.

Solución del problema 11. Notemos que $0 \leq \{x\} < 1$ para cualquier número real x. De la primera ecuación del sistema tenemos que $19 < 20.3 + \{y\} - \{z\} < 22$. Luego, el valor de $3\lfloor x \rfloor$, que es un entero múltiplo de 3, debe ser necesariamente 21, de donde $\lfloor x \rfloor = 7$. Considerando ahora la segunda ecuación, tenemos que $15 < 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor = 15.1 + \{x\} < 17$, de donde $15.1 + \{x\} = 16$ (pues $3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor$ es un entero). Por lo tanto, $\{x\} = 0.9$. La igualdad $3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor = 16$ implica que $\lfloor z \rfloor = \frac{16}{5} - \frac{3}{5}\lfloor y \rfloor \leq \frac{16}{5} < 4$ pues $\lfloor y \rfloor \geq 0$ al ser $y > 0$. Luego, los valores posibles de $\lfloor z \rfloor$ son 0, 1, 2 y 3. Es fácil ver que si $\lfloor z \rfloor = 0, 1$ o 3, los valores de $3\lfloor y \rfloor = 16 - 5\lfloor z \rfloor$ no son múltiplos de 3. Luego, necesariamente $\lfloor z \rfloor = 2$, en cuyo caso $\lfloor y \rfloor = \frac{1}{3}(16 - 5\lfloor z \rfloor) = 2$. Finalmente, usando la tercera ecuación, obtenemos que $x + y + z = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor z \rfloor + \{x\} + \{y\} + \{z\} = 7 + 2 + 2 + 0.9 + 0.9 = 12.8$.

Solución del problema 12. Sea $p = n^8 + n^6 + n^4 + 4$ un número primo para algún entero positivo n. Tenemos que $p \mid n^2 p$, esto es, $p \mid n^{10} + n^8 + n^6 + 4n^2$. Como $n^8 + n^6 \equiv -n^4 - 4 \pmod p$, tenemos que

$$0 \equiv n^{10} + n^8 + n^6 + 4n^2 \equiv n^{10} - n^4 - 4 + 4n^2 = n^{10} - (n^2 - 2)^2 \pmod p.$$

Por lo tanto, $p \mid (n^5 - n^2 + 2)(n^5 + n^2 - 2)$. Como p es primo, se sigue que $p \mid n^5 - n^2 + 2$ o $p \mid n^5 + n^2 - 2$. Como $p > n^5 - n^2 + 2$ y $p > n^5 + n^2 - 2$ para todo entero positivo n, la única posibilidad es que $n^5 - n^2 + 2 = 0$ o $n^5 + n^2 - 2 = 0$. Claramente, $n^5 - n^2 + 2 > 0$ para todo entero positivo n y $n^5 + n^2 - 2 > 0$ para todo entero $n \geq 2$. Luego, la única posibilidad es $n = 1$, en cuyo caso, $n^5 + n^2 - 2 = 0$ y $p = 7$. Así, el único entero positivo $n \geq 1$ tal que $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ es primo, es $n = 1$.
Solución alternativa. Observemos que:

$$\begin{aligned} n^8 + n^6 + n^4 + 4 &= (n^4 + n^2 + 2)^2 - (n^6 + 4n^4 + 4n^2) \\ &= (n^4 + n^2 + 2)^2 - (n^3 + 2n)^2 \\ &= (n^4 + n^2 + 2 + n^3 + 2n)(n^4 + n^2 + 2 - n^3 - 2n). \end{aligned}$$

Si $n^8 + n^6 + n^4 + 4$ es primo, alguno de los factores debe ser 1. Como $n^4 + n^2 + 2 + n^3 + 2n > n^4 + n^2 + 2 - n^3 - 2n$ para todo entero positivo n, se sigue que $n^4 + n^2 + 2 - n^3 - 2n = 1$, esto es, $n^4 + n^2 + 1 = n^3 + 2n$. De aquí que $n \mid 1$. Luego, la única posibilidad es $n = 1$ y, en este caso, $n^8 + n^6 + n^4 + 4 = 7$, que es primo.

Solución del problema 13. Sea n un entero de A. La propiedad: el residuo que se obtiene cuando n es dividido por 20 es menor que el residuo que se obtiene cuando n es dividido por 18, es equivalente al enunciado: el mayor múltiplo de 20 menor o igual que n es mayor que el mayor múltiplo de 18 menor o igual que n. Por lo tanto, para determinar el resultado, basta contar la cantidad de enteros positivos n menores o iguales que 2018 tales que el residuo obtenido cuando n es dividido por 80 es mayor o igual a 20 y menor que $18 \cdot 2 = 36$, o es mayor o igual que 40 y menor que $18 \cdot 3 = 54$, o es mayor o igual que 60 y menor que $18 \cdot 4 = 72$. Como 2000 es múltiplo de 80 y no hay ningún entero n mayor o igual que 2001 que satisfaga las condiciones del problema, tenemos que el número de enteros n que satisfacen el problema es $\frac{2000}{80} \cdot (16 + 14 + 12) = 25(42) = 1050$.

Solución del problema 14. Tenemos que

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= (a + b + c + d)^2 - (a + b)(c + d) - (a + c)(b + d) - (a + d)(b + c) \\ &= (a + b + c + d)^2 - 2 - 3 - 4 = (a + b + c + d)^2 - 9. \end{aligned}$$

Por otra parte, tenemos que

$$((a+d)+(b+c))^2 - 4(a+d)(b+c) = ((a+d)-(b+c))^2 \geq 0,$$

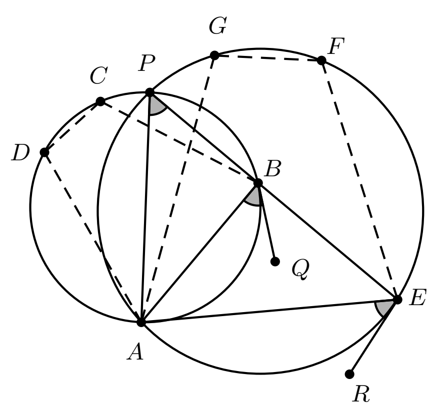
de donde, $(a+b+c+d)^2 \geq 4(a+d)(b+c) = 16$ con la igualdad si y solo si $a+b+c+d = \pm 4$. Por lo tanto, $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 16-9 = 7$ con la igualdad si y solo si $a+b+c+d = \pm 4$. Si, por ejemplo,

$$(a,b,c,d) = \left(\frac{3+\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{3-\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right),$$

entonces la igualdad en la desigualdad anterior se sostiene, lo cual significa que el valor mínimo de la suma $a^2+b^2+c^2+d^2$ es 7.

Solución del problema 15. Observemos que para todo $i \geq 1$, $a_{i+1} \leq a_i$ (pues cada divisor positivo de a_i es menor o igual que a_i) y que $a_{i+1} = a_i$ si y solo si $a_i = 1$ o 2, pues para $a_i \geq 3$ el número $a_i - 1$ no es divisor de a_i.
Si $a_1 = 1$, entonces a_1 es un cuadrado. Si $a_1 = 2$, entonces $a_2 = 2$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, podemos suponer que $a_1 \geq 3$, en cuyo caso la sucesión disminuye en cada paso hasta que alcanza el valor 2 (por la primera observación). Sea $k > 2$ el primer índice para el cual $a_k = 2$. Entonces, a_{k-1} es un número primo, pues solo los números primos tienen exactamente dos divisores positivos. Supongamos que $a_{k-1} = 2$. Como $k-1 > 1$ (pues $k > 2$), tenemos que $k-1 = 2$ o $k-1 > 2$. Si $k-1 = 2$, entonces $a_2 = 2$, lo que es una contradicción; y si $k-1 > 2$, contradecimos la definición de k. Por lo tanto, a_{k-1} es un primo impar. Luego, a_{k-2} tiene un número impar de divisores (positivos), lo cual implica que a_{k-2} es un cuadrado (si a_{k-2} no fuera un cuadrado, el conjunto de sus divisores positivos se podría dividir en parejas de la forma $(a, \frac{a_{k-2}}{a})$ con $a \neq \frac{a_{k-2}}{a}$ y a divisor de a_{k-2}, lo cual implicaría que el número de divisores positivos de a_{k-2} es par).

Solución del problema 16. Sean Q y R puntos en las tangentes de $ABCD$ y de $AEFG$ desde los puntos B y E, respectivamente, de forma que $\angle ABQ = \angle AER$. Lo anterior se puede realizar porque los cuadriláteros $ABCD$ y $AEFG$ son semejantes.



Por la semejanza tales cuadriláteros, los ángulos incritos a los arcos que delimitan lados correspondientes de los cuadriláteros son iguales; por tanto, $\angle APB = \angle APE$. Es decir, B, E y P son colineales. (Note que en este caso, el punto P quedó fuera del segmento BE. El caso en que P esté entre B y E es análogo).

Solución del problema 17. Primero observemos que existen 2016 enteros consecutivos que son olímpicos, basta con tomar $N+2, N+3, \ldots, N+2017$, donde $N = 2^{2017!}$. Para un número natural n, denotemos con $f(n)$ al número de enteros olímpicos en el conjunto $\{n, n+1, \ldots, n+2017\}$.
Tenemos que $f(i) = f(i+1)$, $f(i) = f(i+1) - 1$ o $f(i) = f(i+1) + 1$ para cualquier entero i del conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$. Dado que $f(1) < 2016$ (pues los números $1, 2, 3, 4, 5$ no son olímpicos) y $f(N) \geq 2016$, existe un número natural n_0 tal que $f(n_0) = 2016$. En efecto, si no existiera tal entero n_0, la función f no podría pasar de un número menor que 2016 a uno mayor, pues al pasar de $f(i)$ a $f(i+1)$, con $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, el valor de la imagen aumenta o disminuye en a lo más una unidad.

Solución del problema 18. Asumamos lo contrario, es decir, que existen enteros x, y tales que $x(x+1)(x+2)(x+3)+2018 = y^2$. Al examinar la ecuación anterior módulo 5 se tienen dos casos: $x(x+1)(x+2)(x+3)$ es divisible por 5 o $x(x+1)(x+2)(x+3) \equiv 1(2)(3)(4) \equiv 4$ (mod 5). Es decir, el lado izquierdo de la ecuación es congruente a 3 o a 2 módulo 5. No obstante, el cuadrado de un entero es congruente con $0, 1$ o 2 módulo 5, lo cual es una contradicción porque ambos lados de la ecuación deben ser congruentes al mismo número módulo 5. Por lo tanto, no existen cuatro enteros consecutivos cuyo producto es de la forma $y^2 - 2018$, para algún entero y.

Solución del problema 19. La condición del problema es equivalente a la igualdad $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, se sabe que $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{x^2y \cdot \frac{1}{y}} = 2x$. Análogamente se obtiene que $y^2z + \frac{1}{z} \geq 2y$ y $z^2x + \frac{1}{x} \geq 2z$. Al sumar las desigualdades anteriores se obtiene la desigualdad deseada. La igualdad se satisface cuando $x^2y = \frac{1}{y}$, $y^2z = \frac{1}{z}$ y $z^2x = \frac{1}{x}$, que es equivalente a que $x = y = z = 1$.

Solución del problema 20. Sean a y b números reales. Se define $L\{a, b\} = \{ax + by : x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Primero se demostrará el siguiente lema:
Lema. Sean $a > 1$ y $b > 1$ enteros primos relativos.

a) $N = ab - a - b$ es el número natural más grande que no está en $L\{a, b\}$.

b) Para cualquier entero z se tiene que $z \in L\{a, b\}$ si y solo si $N - z$ no está en $L\{a, b\}$.

Demostración: a) Si $N = (b-1)a - b = ax + by$ par algunos números enteros $x \in \{0, \ldots, b-1\}$, y, entonces $x \equiv b - 1$ (mod b); por tanto, $x \geq b - 1$. Así, $y < 0$, lo cual es una contradicción, entonces N no está en $L\{a, b\}$. Que sea el máximo es una consecuencia del inciso b). En efecto, si $x > N$, entonces por el inciso b) tenemos que $N - x \in L\{a, b\}$. Pero esto último es imposible, pues ningún número negativo, en este caso $N - x$, está en $L\{a, b\}$.

b) Si $z \in L\{a, b\}$, entonces $N - z$ no está en $L\{a, b\}$ (de otra forma $N = z + (N - z) \in L\{a, b\}$). Ahora, sea $z \in \mathbb{Z} \setminus L\{a, b\}$. Como $\text{mcd}(a, b) = 1$, existe un entero $x \in \{0, \dots, b-1\}$ tal que $ax \equiv z \pmod{b}$. Pero, $z \in \mathbb{Z} \setminus L\{a, b\}$, entonces $z < ax$. En consecuencia, $ax - by = z$ para algún $y \in \mathbb{N}$ ($y > 0$ porque $z \in \mathbb{Z} \setminus L\{a, b\}$). Así, se tiene que $N - z = (b - 1 - x)a + b(y - 1) \in L\{a, b\}$.
Sea A el primer jugador y B el segundo. Se demostrará que A tiene estrategia ganadora. En el primer turno A escribe un número primo $a \geq 5$ y B es escribirá un número b tal que a no divide a b. El juego es finito, pues solo hay una cantidad finita de números naturales que pertenecen a $L\{a, b\}$. En consecuencia, uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.
Consideremos un juego en el que A escoja el número N en su segundo movimiento. Si este es un movimiento ganador, A escogerá N y ganará. En caso contrario, B puede escoger un natural $c \in \mathbb{Z} \setminus L\{a, b\}$ en su segundo movimiento que deja a A en una posición perdedora. Entonces, A puede escoger el número c en su segundo movimiento en lugar de N y continuar con la estrategia ganadora de B en el caso anterior. En efecto, las condiciones en las que estaría B en caso de que A escogiera el número c en su segundo turno, son las mismas que tenía A cuando B escoge c en su segundo turno. Para verificar la afirmación anterior basta observar que por el lema anterior, $N - c$ está prohibido, así que después de escoger el número c, el número $N = (N - c) + c$ también está prohibido.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2018 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea O el centro del plano cartesiano. Se toma un punto A en el primer cuadrante con coordenadas (a, b) y se traza el segmento OA. Se gira OA en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta un punto B con coordenadas (b, a). Si $\angle AOB = 30°$, encuentra el valor de $\frac{a}{b}$.

Problema 2. Encuentra todas las ternas (x, y, z) de enteros no negativos tales que $x^2 + yz = 1$, $y^2 + xz = 2$ y $z^2 + xy = 4$.

Problema 3. Andrea tiene 7 cuyos de los cuales 3 son hembras y 4 son machos. Ella quiere repartirlos en 4 jaulas distintas (ninguna jaula quedará vacía). ¿De cuántas maneras puede hacer esto si quiere que, donde haya al menos una hembra, no haya ningún macho? Nota: Los cuyos son diferentes entre sí.

Problema 4. Si escribimos la secuencia $AAABABBB$ a lo largo del perímetro de un círculo, cada palabra de longitud 3 que consiste en las letras A y B (es decir, AAA, AAB, ABA, BAB, ABB, BBB, BBA, BAA) aparece exactamente una vez en el perímetro. Muestra que es posible escribir una secuencia de letras de un alfabeto de k elementos a lo largo del perímetro de un círculo, de tal manera que cada palabra de longitud ℓ (es decir, una ℓ-tupla de letras ordenada) aparezca exactamente una vez en el perímetro.

Problema 5. Sean a y d dos enteros positivos. Demuestra que existe una constante K tal que cada conjunto de K elementos consecutivos de la progresión aritmética $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a + nd\}_{n=1}^{\infty}$ contiene al menos un número que no es primo.

Problema 6. Sea $\delta(n)$ el máximo divisor impar de n, con n un entero positivo. Demuestra que para todo entero positivo m,

$$\left| S(m) - \frac{2m}{3} \right| < 1,$$

donde $S(m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\delta(n)}{n}$.

Problema 7. Determina todas las parejas de enteros positivos (a, n) con $a \geq n \geq 2$, tales que $(a+1)^n + a - 1$ sea una potencia de 2.

Problema 8. Se escoge un punto K en la diagonal de un cuadrilátero convexo $ABCD$ de forma que $KD = DC$, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$ y $\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. Prueba que $\angle KDA = \angle BCA$ o $\angle KDA = \angle KBA$.

Problema 9. Encuentra el menor entero positivo n con la siguiente propiedad: para todo conjunto finito X de puntos en el plano, si por cada $m \leq n$ puntos del conjunto existen dos líneas que contienen a todos los m puntos, entonces existen dos líneas que contienen a todos los puntos de X.

Problema 10. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface $f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2017 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2017. En esta ocasión felicitamos a Iván García Mestiza por habernos enviado su solución al problema 7 y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2017, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Encuentra todos los números m de tres dígitos tales que si formamos el número de seis dígitos obtenido al escribir de forma consecutiva m y $m+1$, el resultado es un cuadrado perfecto.

Solución. Si el número de tres dígitos es $m = \overline{abc}$, entonces $1001m = \overline{abcabc}$ y, por lo tanto, $1001m + 1$ es un cuadrado perfecto. El cuadrado a^2 que obtenemos debe tener seis dígitos, de modo que $a \leq 999$, pero, también debe cumplir que $a \geq 317$ (pues si fuera menor a 316, su cuadrado tendría solo cinco dígitos).
Entonces, $a^2 \equiv 1 \pmod{1001}$ y, como $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, basta considerar las 8 posibilidades con $a \equiv \pm 1$ módulo 7, 11 y 13.
Por ejemplo, si $a \equiv 1$ módulo 7, 11 y 13, entonces a es congruente a 1 módulo $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ (pues 7, 11 y 13 son primos relativos dos a dos) y, por lo tanto, $a = 1$ (pues $a \leq 999$) que no está en el rango buscado. Ahora, si $a \equiv 1 \pmod 7$ y $a \equiv 1 \pmod{11}$ pero $a \equiv -1 \pmod{13}$, obtenemos que $a = 155$, que no nos sirve. Si $a \equiv 1 \pmod 7$ y $a \equiv -1 \pmod{13}$, pero $a \equiv -1 \pmod{11}$, obtenemos que $a = 274$, que tampoco nos sirve. Sin embargo, cuando $a \equiv 1 \pmod 7$, $a \equiv -1 \pmod{11}$ y $a \equiv -1 \pmod{13}$, obtenemos que $a = 428$ y, como $a^2 = 183184$, resulta que $m = 183$.
Las demás soluciones que se obtienen son $a = 573$ y $m = 328$ si $a \equiv -1 \pmod 7$, $a \equiv 1 \pmod{11}$ y $a \equiv 1 \pmod{13}$; $a = 727$ y $m = 528$ si $a \equiv -1 \pmod 7$, $a \equiv 1 \pmod{11}$ y $a \equiv -1 \pmod{13}$; $a = 846$ y $m = 715$ si $a \equiv -1 \pmod 7$, $a \equiv -1 \pmod{11}$ y $a \equiv 1 \pmod{13}$; finalmente, si $a \equiv -1$ en los tres módulos $7, 11$ y 13 se obtiene $a \equiv -1 \pmod{1001}$ y, por lo tanto, $a = 1000$, el cual está fuera del rango deseado.

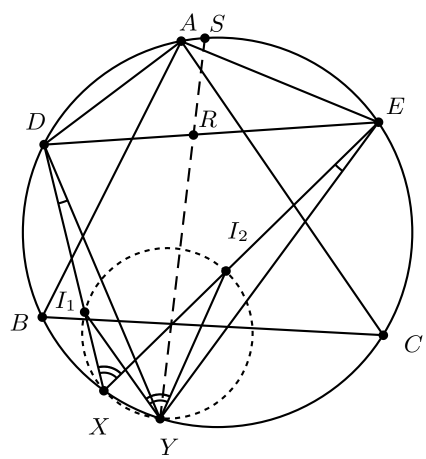
Problema 2. Hay n islas conectadas vía aérea por m aerolíneas (todas las rutas son de ida y vuelta). Sea d_i el número de aerolíneas que tienen vuelos que salen de la isla i. Si $1 \leq d_i \leq 2010$ para toda i, demuestra que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 4022m - 2010n.$$

Solución. Las condiciones del problema implican que el producto $(d_i - 1)(2010 - d_i)$ nunca es negativo, para cualquier i, es decir $0 \leq 2011d_i - d_i^2 - 2010$ y, por lo tanto, $d_i^2 \leq 2011d_i - 2010$. Por otro lado, el teorema de la suma de los grados en una gráfica nos dice que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$. Al sustituir en la cota para la suma de los valores de d_i^2 obtenemos el resultado buscado.

Problema 3. Tres puntos A, B y C están sobre la circunferencia Ω. Sea X un punto variable sobre el arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A y considera I_1 y I_2 los incentros de los triángulos ABX y CAX, respectivamente. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos I_1XI_2 intersecan a Ω en un punto fijo.

Solución. Sean D y E los puntos medios de los arcos $\widehat{BA}$ y $\widehat{AC}$, respectivamente. Consideremos un punto Y (distinto de A) sobre Ω, tal que $\frac{DA}{AE} = \frac{DY}{YE}$. A continuación se determina cómo encontrar un punto Y. Sea R el pie de la bisectriz del ángulo $\angle DAE$ en DE y sea S el punto medio del arco $\widehat{DE}$ que contiene a A. Tenemos que Y puede ser el punto de intersección de RS con Ω, pues el teorema de la bisectriz garantiza que $\frac{DA}{AE} = \frac{DR}{RE} = \frac{DY}{YE}$. Sea X un punto sobre el arco $\widehat{CB}$. Es conocido[2] que D es el circuncentro del triángulo AI_1B, entonces se tiene que $DA = DI_1$. Análogamente se tiene que $EA = EI_2$. Como I_1X es bisectriz del ángulo inscrito $\angle AXB$, tenemos que I_1X pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$, esto es, pasa por D, lo que significa que los puntos D, I_1 y X son colineales. De manera análoga tenemos que los puntos E, I_2 y X son colineales.
Por otro lado, tenemos que $\angle YDI_1 = \angle YEI_2$ porque estos ángulos subtienden el arco $\widehat{XY}$ en Ω. Todo lo anterior implica que $\frac{DI_1}{EI_2} = \frac{DA}{AE} = \frac{DY}{EY}$, que junto con la igualdad de ángulos nos permite concluir que los triángulos DYI_1 y EYI_2 son semejantes. Por lo tanto, $\angle I_1YD = \angle I_2YE$, en particular $\angle I_2YI_1 = \angle EYD = \angle EXD = \angle I_2XI_1$, donde la segunda igualdad se da porque el cuadrilátero $DEXY$ es cíclico.



Lo anterior implica que I_1I_2YX es cíclico y, por lo tanto, Y pertenece al circuncírculo del triángulo I_1XI_2. Como lo anterior se mostró para cualquier punto X, se tiene que las circunferencias descritas pasan todas por el punto Y que es fijo y que está sobre Ω por construcción.

Problema 4. Cada vértice de un $n-$ágono regular se colorea de un color entre verde, rojo y azul de manera que hay una cantidad impar de vértices coloreados de cada color. Si n es impar, demuestra que existe un triángulo isósceles tal que ningún par de vértices son del mismo color.

[2]Si ABC es un triángulo cuyos vértices están sobre una circunferencia Ω, I es el incentro del triángulo ABC y M es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ sobre Ω que no contiene a A, entonces M, I y A están alineados y $MI = MB = MC$.

Solución. Pensemos al $n-$ágono regular como una gráfica completa de n vértices y supongamos que existe una coloración de los vértices de manera que no existen triángulos isósceles con vértices de los tres colores. Hagamos un doble conteo de las aristas que tienen un vértice de color rojo y otro verde. Fijémonos en un vértice de color verde, digamos v. Sea O_v el conjunto de las aristas cuyos extremos son vértices del $n-$ágono y que tienen a v en su mediatriz. Como n es impar, todos los vértices están en exactamente una arista de O_v. Más aún, cada diagonal del n-ágono está en exactamente un conjunto O_v. Ahora, veamos que cada arista en O_v debe cumplir que sus extremos son una combinación de colores (verde,verde), (rojo, rojo), (azul,azul), (verde, rojo) o (verde, azul), esto pues no hay triángulos isósceles con vértices de tres colores. Puesto que hay una cantidad impar de vértices rojos y cada arista de tipo (rojo, rojo) tiene dos vértices rojos, la cantidad de aristas de tipo (rojo,verde) en O_v es impar. Puesto que O_v es una partición de aristas de la gráfica y solo contaremos aristas de tipo (rojo,verde) cuando v sea de color verde o rojo en total debe haber una cantidad impar + impar = par (es una cantidad impar de los conjuntos de la forma O_v con v verde y otra cantidad impar de los conjuntos de la forma O_u con u rojo). Por otro lado, por la regla del producto, la cantidad total de aristas de tipo (rojo,verde) son una cantida impar $\times$ impar = impar, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, deben existir triángulos isósceles con sus vértices de tres colores distintos.

Problema 5. Sean a y b enteros positivos tales que $b \mid a^2 + 1$. Si $b > a$, demuestra que $b - a \geq \sqrt{a}$.

Solución. Escribamos $b = a + d$ con d positivo. Por hipótesis, tenemos que $a + d$ divide a $a^2 + 1$. Como $a + d \mid (a + d)(d - a) = d^2 - a^2$, se sigue que $a + d$ divide a $a^2 + 1 + d^2 - a^2 = d^2 + 1$. Por lo tanto, $a + d \leq d^2 + 1$, de donde $0 \leq d^2 - d - a + 1$. Así, $d \geq \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}$, pues el polinomio en d describe una parábola que toma valores positivos fuera del intervalo de sus raíces y, como d es positivo, d es mayor o igual que la raíz más grande. Por último, es fácil ver que $\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2} \geq \sqrt{a}$ para enteros a mayores o iguales que 1 (basta con desarrollar la desigualdad y elevar al cuadrado), con la igualdad en $a = 1$. Por lo tanto, $a - b = d \geq \sqrt{a}$.

Problema 6. Sea G una gráfica conexa con k aristas. Demuestra que se pueden etiquetar las aristas con los números $1, 2, \dots, k$, de manera que para cualquier vértice de grado mayor que 1, el máximo común divisor de todas las aristas que llegan a él es 1.

Solución. Seleccionemos una arista arbitraria y etiquetémosla con 1. Luego, recorramos a partir de ella un camino tan largo como sea posible y etiquetemos las aristas de forma consecutiva. Todos los vértices por los cuales se pasó, tienen dos aristas con etiquetas consecutivas y, por tanto, el máximo común divisor es 1, excepto en las etiquetas inicial y final.
La etiqueta inicial no es problema, pues contiene la arista 1 y, por tanto, también el máximo común divisor es 1. Para la etiqueta final hay dos casos: el camino termina porque se llegó a un vértice de grado 1, en cuyo caso el máximo común divisor no importa, o ha llegado a un vértice por el cual se pasó antes y, como ya sabemos que

tiene dos aristas con números consecutivos, su máximo común divisor se mantiene en 1.
Esta estrategia no garantiza que se recorrieron todas las aristas; sin embargo, de ser así, se escoge una nueva arista adyacente a una de las que ya se etiquetaron (lo cual es posible por la conexidad de la gráfica), se coloca el siguiente entero que no se usó y se repite el mismo argumento anterior de caminos. Al realizar este procedimiento tantas veces como sea necesario, se cubrirán eventualmente todas las aristas.

Problema 7. Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2+b}{b^2-a} \quad \text{y} \quad \frac{b^2+a}{a^2-b}$$

sean ambos enteros positivos.

Solución de Iván García Mestiza. Al ser $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ y $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ enteros positivos, son mayores o iguales a 1, de donde $a^2+b \geq b^2-a > 0$ y $b^2+a \geq a^2-b > 0$. Luego, $a^2+b-(b^2-a) \geq 0$ y $b^2+a-(a^2-b) \geq 0$.
Además, tenemos que $b^2-a \mid a^2+b$, por lo que $b^2-a \mid a^2+b-(b^2-a)$; es decir, $b^2-a \mid (a+b)(a-b+1)$. Análogamente, tenemos que $a^2-b \mid b^2+a-(a^2-b)$, de donde $a^2-b \mid (a+b)(b-a+1)$. Estas relaciones de divisibilidad implican que $(a+b)(a-b+1) \geq b^2-a$ y $(a+b)(b-a+1) \geq a^2-b$ y, como $a+b>0$, se sigue que $a-b+1 \geq 0$ y $b-a+1 \geq 0$, de donde obtenemos que $b+1 \geq a \geq b-1$.
Puesto que a y b son enteros positivos, a puede tomar 3 valores: $a=b+1$, $a=b$ o bien $a=b-1$. Analizaremos los distintos casos que se producen.
Caso 1: $a=b+1$. Tenemos que $b^2-a \mid (a+b)(a-b+1)$; así, al sustituir el valor de a, llegamos a que $b^2-b-1 \mid 4b+2$. Como $4b+2>0$, se sigue que $4b+2 \geq b^2-b-1$, de donde se obtiene que $5b+3 \geq b^2$.
Podemos observar que la desigualdad anterior solo se cumple para $b \leq 5$. En efecto, si $b>5$, entonces podemos escribir $b=5+n$, donde n es un entero positivo. Entonces, $b^2=(5+n)^2=25+10n+n^2=25+5n+5n+n^2 \geq 25+5n+6 > 25+5n+3 = 5(5+n)+3=5b+3$. Así que los posibles valores para la pareja (a, b) son: $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$, $(5,4)$ y $(6,5)$. Al hacer las sustituciones en las fracciones iniciales, tenemos que la única pareja (a, b) que cumple es $(3,2)$.
Caso 2: $a=b$. Tenemos que $a^2-a \mid a^2+a$, de donde $a(a-1) \mid a(a+1)$, por lo que $a-1 \mid a+1$; luego $a-1 \mid (a+1)-(a-1)$ y, finalmente, llegamos a que $a-1 \mid 2$. Entonces, los valores posibles de $a-1$, al ser entero positivo, son 1 y 2, lo que genera las parejas $(2,2)$ y $(3,3)$ que sí cumplen la condición.
Caso 3: $a=b-1$. Dada la simetría en las fracciones, con $b=a+1$ llegamos a las mismas soluciones que en el Caso 1, por lo que ahora tenemos que la única pareja (a, b) que cumple es $(2,3)$.
Por lo tanto, las parejas (a, b) que satisfacen las condiciones del problema son: $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,2)$ y $(3,3)$.

Problema 8. Sean $n \geq 2$ un entero y $0 \leq x_i \leq 1$ números reales para $i=1,2,\ldots,n$.

Demuestra que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

y determina cuándo se da la igualdad.

Solución. Denotemos por $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al lado izquierdo de la desigualdad. Observemos que

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \text{máx}\{S(0, x_2, \ldots, x_n), S(1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

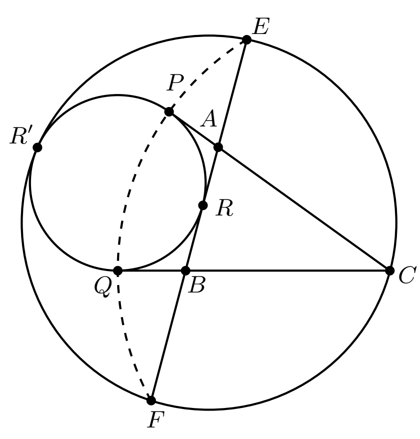
En efecto, todo depende del signo de $1 - x_2 - x_n$, que es el factor por el que se multiplica x_1. De esta manera, un argumento inductivo garantiza que basta demostrar la desigualdad cuando todos los números reales $0 \leq x_i \leq 1$ son iguales a 0 o a 1. Por otro lado, si consideramos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} 2S(x_1, x_2, \ldots, x_n) = n &- (1-x_1)(1-x_2) - (1-x_2)(1-x_3) - \cdots \\ &- (1-x_n)(1-x_1) - x_1x_2 - x_2x_3 - \cdots - x_{n-1}x_n - x_nx_1, \end{aligned}$$

se sigue que $2S(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq n$ cuando $x_i \in \{1, 0\}$, es decir, $S(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \frac{n}{2}$.

Problema 9. Sea ABC un triángulo con semiperímetro s. Los puntos E y F están en la recta AB de tal forma que $CE = CF = s$. Demuestra que el excírculo ω_1 del triángulo ABC opuesto a C interseca al circuncírculo ω del triángulo EFC.

Solución. Sean P y Q los puntos de tangencia de ω_1 con las rectas CA y CB, respectivamente.



Dado que es conocido que $CP = CQ = s$, entonces los puntos E, P, Q y F están en una misma circunferencia ω_2 con centro en C y radio s. Se invertirá con respecto a ω_2. Dado que ω es una circunferencia que pasan por el centro de ω_2, entonces se invierte en una recta. No obstante, E y F se invierten en si mismos con respecto a ω_2. Entonces, ω se invierte en EF. Ahora, ω_1 es ortogonal a ω_2, así que ω_1 se invierte en si misma con respecto a ω_2. Pero, ω_1 y EF comparten al punto de tangencia de ω_1 con el lado AB del triángulo ABC, al cual denotaremos con R. Así, ω y ω_1 comparten el punto R', el inverso de R con respecto a ω_2.

Problema 10. Sea $A = \{1, 2, \ldots, m+n\}$, donde m y n son enteros positivos y sea $f : A \to A$ una función definida por las ecuaciones:

- $f(i) = i+1$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, m+n-1$,
- $f(m) = 1$ y $f(m+n) = m+1$.

Demuestra que si m es par, entonces $m = n$ si y solo si existe una función $g : A \to A$ tal que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.

Solución. Si $m = n$, sea $g : A \to A$ tal que $g(i) = m+i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$, $g(m+i) = i+1$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1$ y $g(2m) = 1$. Una verificación directa por casos demuestra que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$.
Ahora, supongamos que existe una función $g : A \to A$ tal que $g(g(a)) = f(a)$ para todo $a \in A$. Sea $M = \{1, 2, \ldots, m\}$. Por la definición de f se sabe que $f(M) = M$. De la misma forma $f(A\backslash M) = A\backslash M$. Así, f es biyectiva. Dado que $g(g(A)) = f(A) = A$, entonces g es biyectiva.
Demostraremos que $g(M) \cap M = \emptyset$. Supongamos lo contrario, entonces existe $i \in M$ tal que $g(i) \in M$. Ahora, en el conjunto

$$\{i, g(i), g^2(i) = g(g(i)), \ldots, g^{2m}(i) = f^m(i) = i\}$$

aparecen todos los elementos del conjunto

$$\{i, f(i), f^2(i) = f(f(i)), \ldots, f^m(i) = i\}$$

en las posiciones pares y en este último aparecen todos los elementos de M. Dado que $g(i) \in M$, entonces $g(i) = f^j(i)$ para algún $j \in M$. Así, $g^{2k+1}(i) = g^{2k}(f^j(i)) = f^k(f^j(i)) = f^{k+j}(i) \in M$, para todo $k \in M$. Por lo tanto, $g(M) = M$.
Se sigue que existe una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de los elementos de M, tales que $g(a_i) = a_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, m-1$; $g(a_m) = a_1$ y $f(a_{2i-1}) = a_{2i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, s-1$; $f(a_{2s-1}) = a_1$, donde $m = 2s$. Pero, las últimas identidades no son posibles por como está definida la función f. Por lo tanto, $g(M) \cap M = \emptyset$. De manera análoga se demuestra que $g(A\backslash M) \cap A\backslash M = \emptyset$.
No obstante, si se retoma el análisis con el conjunto

$$\{i, g(i), g^2(i) = g(g(i)), \ldots, g^{2m}(i) = f^m(i) = i\},$$

se sabe que cuando se toma un elemento de M y se le aplica la función g, entonces se llega a un elemento de $A\backslash M$. Además, al aplicar por segunda vez la función g, se regresa a M. El mismo análisis se puede hacer al iniciar con un elemento de $A\backslash M$. Así, $\{i, g(i), g^2(i) = g(g(i)), \ldots, g^{2m}(i) = f^m(i) = i\} = A$. Por lo tanto, A tiene $2m$ elementos y $n = m$.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica

En el año 2017 se celebró el primer concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB) con sede en Oaxtepec, Morelos, con la participación de 23 Estados del país. La intención es que esta Olimpiada actúe como el proceso selectivo nacional para elegir a los equipos que nos representan en la IMC (Competencia Internacional de Matemáticas), competencia de Primaria y Secundaria que cada año se celebra en el sureste asiático. Aunque México lleva varios años participando en la IMC, esta fue la primera vez que se formó una preselección a partir de estudiantes que hubieran presentado exámenes que tienen el mismo formato que la competencia internacional. Los exámenes y soluciones del primer Concurso Nacional de la OMMEB fueron publicados en los números 3 y 4 de Tzaloa, año 2017; los exámenes selectivos del proceso 2017-2018 aparecieron en el Folleto Introductorio OMMEB 2018; y los resultados del primer equipo IMC formado de esta manera los tendremos hasta julio de este año. Como el Concurso Nacional de la OMMEB se celebra en junio, el equipo lleva más de un año preparándose para la competencia internacional veraniega.

Una de las grandes oportunidades que nos abrió la creación de la OMMEB fue la posibilidad de llegar a participantes más jóvenes con el mismo entusiasmo que sus compañeros y compañeras que participan en la Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Sin embargo, es probable que encuentren la mayoría del contenido de esta revista ligeramente por encima de su nivel, de modo que quizás no sea muy útil. Con eso en mente, iniciamos esta sección que está pensada para nuestros competidores más jóvenes.

Puesto que únicamente hemos celebrado una edición, una de las tareas más importantes es construir un banco de problemas para entrenar y prepararnos. Este conjunto se irá haciendo más grande de manera natural conforme pase el tiempo y podremos compartir exámenes selectivos de distintos estados. Además, hay problemas de otros exámenes que funcionan bastante bien para entrenamiento como los Exámenes Eliminatorios que propone el Comité de la Olimpiada o los exámenes del Canguro Matemático, que están disponibles en ommenlinea.org -no olvides hacerlos sin leer opciones. En esta primera entrega, presentamos los problemas de los exámenes selectivos del nivel 2 de la cuarta etapa en la Ciudad de México, uno de los equipos más fuertes de la primera edición. Al momento de escribir esto, falta todavía una etapa para definir al equipo que representará a la Ciudad de México en el Concurso Nacional de la 2^a OMMEB. Tres de los participantes de la Ciudad de México en la 1^a OMMEB, formaron parte de los equipos mexicanos para la IMC 2018: Mateo Iván Latapí Acosta y Rosa Victoria Cantú Rodríguez, del equipo de primaria, y Tomás Francisco Cantú Rodríguez, del equipo de secundaria. La presencia en internet de la Olimpiada de Matemáticas en la Ciudad de México sigue haciendo referencia al Distrito Federal en el nombre de su sitio http://www.omdf.matem.unam.mx/, y el proceso selectivo para la OMMEB se conoce como el Concurso de Primaria y Secundaria. Para cuando esta revista llegue a tus manos, los equipos de la Ciudad de México estarán listos para refrendar su excelente papel en la segunda edición de la OMMEB.

Tanto las categorías como el formato de la OMMEB/IMC son muy diferentes a lo que estamos acostumbrados. Vamos a repasarlo:
Nivel 1: Para estudiantes de 4° y 5° de Primaria.
Nivel 2: Para estudiantes de 6° de primaria y 1° de secundaria.
Nivel 3: Para estudiantes de 2° de secundaria.

Además, presentan dos pruebas distintas: una prueba individual y una prueba por equipos. Incluimos aquí problemas diseñados para pruebas individuales. Para el Nivel 1, la prueba individual consiste de 15 problemas de respuesta cerrada (sin procedimiento ni explicación) para resolver en 90 minutos. Para los Niveles 2 y 3, la prueba consiste de 12 problemas de respuesta cerrada y 3 problemas abiertos para 120 minutos. Además, el examen tiene sus propias costumbres y reglas muy estrictas: tu respuesta debe escribirse en el lugar indicado para ello o no se tomará en cuenta; tu explicación debe caber en una página y nada más una. Las respuestas deben expresarse de una forma simplificada y como una expresión cerrada, evitando dejar operaciones indicadas en la medida de lo posible. Este concurso es muy rápido: hay que resolver muchos problemas con relativamente poco tiempo, de modo que hay que venir armados con muchos trucos, estrategias, heurísticas y algo de suerte. Para los Niveles 2 y 3, la parte de respuesta cerrada y la parte de respuesta abierta tienen el mismo valor en puntos, de modo que es tan importante resolver los problemas rápido como saber explicarlos.

OMMEB, Ciudad de México, Cuarta Etapa, Nivel 2

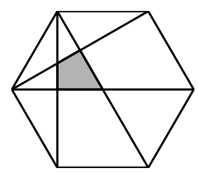
Parte A

1) Denisse tiene una calculadora que tiene una tecla $\otimes$. Cuando Denisse escoge dos números a y b y hace la operación $a \otimes b$, la calculadora calcula el resultado de

$(2 \times a) + (3 \times b)$. Por ejemplo, $1 \otimes 4 = (2 \times 1) + (3 \times 4) = 2 + 12 = 14$. ¿Cuánto da la calculadora si Denisse le pide que calcule $((1 \otimes 2) \otimes 3) \otimes 4$?

2) Lalo tiene 4 llaves y 4 candados. Cada llave abre exactamente un candado. Sin embargo, Lalo olvidó cuál llave abre cuál candado. Si Lalo prueba una llave por candado a la vez, ¿cuántas veces debe Lalo probar las llaves en los candados para saber cuál llave abre cuál candado?

3) Un hexágono regular de área 1 se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



4) ¿Cuánto vale la suma de los dígitos del número $10^{2018} - 2018$?

5) Karla invitó a varios amigos a su casa, pero no sabe si van a venir 7 u 8 personas. Quiere partir un pastel en pequeños pedazos, no necesariamente todos del mismo tamaño, de manera que no importe cuántas personas vengan a la fiesta, pueda servir todo el pastel y darle la misma cantidad de pastel a cada invitado y a ella misma. ¿Cuál es la mínima cantidad de piezas en las que debe partir el pastel?

6) Alfie organizó una fiesta para su cumpleaños. Invitó a tres grupos de amigos: los de la escuela, los de su cuadra y los de la olimpiada. Los amigos de cada uno de los tres grupos se conocen todos entre sí, pero no conocen a ninguna persona de otro de los grupos de amigos. Cuando llegaron a la fiesta, todos saludaron a Alfie y se saludaron entre ellos. Los que ya se conocían se saludaron con un abrazo y los que no se conocían se saludaron dándose la mano. Si a la fiesta fueron 10 amigos de la escuela, 4 de la cuadra y 15 de la olimpiada, ¿cuántos apretones de mano hubo?

7) El triángulo acutángulo isósceles ABC, con $AB = AC$, está inscrito en una circunferencia. La tangente BP a la circunferencia en B, con P y A del mismo lado con respecto a BC, forma con el lado BC un ángulo de $66°$. ¿Cuánto vale el ángulo $\angle ACB$?

8) Sean a y b enteros positivos tales que a^b tiene exactamente 5 divisores positivos y b^a tiene exactamente 7 divisores positivos. ¿Cuántos divisores positivos tiene $a \times b$?

9) ¿Cuántos números de 3 dígitos abc existen tales que cuando les sumas el número que resulta de invertir sus dígitos, (es decir, el cba) te da el doble del número original?

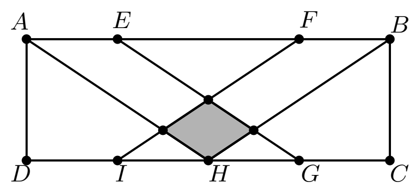
10) En el cuadrado $ABCD$, sea P un punto dentro de él tal que el triángulo APD es equilátero. Sea Q el punto de intersección de la bisectriz del ángulo $\angle PAD$ con DC. Si $BC = 2$, calcula el perímetro del cuadrilátero $APQD$.

11) Un entero positivo n deja 35 de residuo cuando se divide entre 2018 y también cuando se divide entre 2019. ¿Cuál es el residuo cuando se divide a n entre 3027?

12) ¿Cuántos cuadrados perfectos menores que 2^{2018} existen tales que todos sus dígitos sean impares?

Parte B

1) En el rectángulo $ABCD$, $AE = FB = CG = GH = HI = DI$. ¿Cuál es la razón del área sombreada entre el área del rectángulo $ABCD$?



2) Encuentra el número de parejas de enteros positivos (a, b) con $1 \leq a < b \leq 15$ tales que existe al menos un entero positivo m con $a < m < b$ tal que m es divisible por todos los divisores comunes de a y b.

3) La rana Reneé está parada en un lirio acuático que tiene el número 1. Enfrente de ella hay 19 lirios más, en fila, numerados del 2 al 20. La rana Reneé puede saltar 1, 2 o 3 lirios en cada salto que da y su objetivo es llegar al lirio número 20. Por ejemplo, al principio podría llegar al lirio marcado con el 2, el 3 o el 4. Desgraciadamente, los lirios que tienen números primos están envenenados y si cae en uno de ellos, se muere. ¿De cuántas formas distintas puede llegar la rana Reneé al lirio número 20?

Soluciones de los problemas de la parte A

1) Hacemos paso a paso, de adentro hacia afuera: $1 \otimes 2 = (2 \times 1) + (3 \times 2) = 2 + 6 = 8$; $8 \otimes 3 = (2 \times 8) + (3 \times 3) = 16 + 9 = 25$; $25 \otimes 4 = (2 \times 25) + (3 \times 4) = 50 + 12 = 62$. La respuesta es 62.

2) Para saber cuál llave abre el primer candado, Lalo debe probar a lo más 3 llaves; si ninguna abre el candado, entonces debe abrirlo la cuarta. Ahora solo le quedan 3 llaves y debe probar a lo más 2 para saber cuál abre el segundo candado. Solo debe probar una de las que le quedan para saber cuál llave abre el tercer candado y la llave que sobra tiene que abrir el último candado. En total, son necesarios a lo más $3 + 2 + 1 = 6$ intentos para saber cuál llave abre cuál candado. (Son necesarios $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ intentos para de hecho abrir los candados).

3) El hexágono se parte en 6 triángulos equiláteros iguales, en uno de los cuales se encuentra el área sombreada. Dos de las líneas trazadas cortan al hexágono en ángulo de $90°$, de modo que son alturas - y por lo tanto bisectrices, medianas y mediatrices - del triángulo equilátero marcado. Si estuvieran marcadas las tres alturas, el triángulo estaría dividido en 6 pedazos iguales, de los cuales están sombreados 2. Luego, el área sombreada es $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{6}$, es decir, $\frac{1}{18}$.

4) La resta es de 1 seguido de 2018 ceros menos 2018. Si hacemos $10000 - 2018$ el resultado es 7982. Si a 10^{2018} le restamos 10000, el resultado es $999\ldots990000$ donde el dígito 9 se repite exactamente 2018 veces. Luego, la suma que buscamos es $9 \times 2014 + 7 + 9 + 8 + 2 = 18152$.

5) No sabemos si el pastel se repartirá entre 7 u 8 personas. Si dividimos el pastel en 56 pedazos iguales, esto resuelve la situación: si vienen 7, cada quien recibe 8 pedazos; si vienen 8, cada quien recibe 7 pedazos. Sin embargo, los pedazos no necesariamente son iguales y eso nos da mucha libertad. Partimos el pastel en 8 pedazos iguales. Luego, el último pedazo se parte en 7 pedazos. Veamos que esta división en 14 pedazos funciona: si llegan 8 personas, cada quien recibe uno de los pedazos grandes (una persona recibirá su pedazo partido en 7 pedacitos, pero recibe lo mismo que los demás); si solo llegan 7 personas, cada quien recibe un pedazo grande y uno de los pedazos pequeños.

6) Los apretones se dan entre las personas que no se conocen entre sí: los 10 de la olimpiada saludaron a 19 personas que no conocían. Después de eso, los 4 de la cuadra saludaron a los 15 de la olimpiada (porque ya saludaron a los de la escuela). Contando de esta manera tenemos $10 \times 19 + 4 \times 15 = 190 + 60 = 250$ saludos en total.

7) Tenemos que $\angle PBA = \angle ACB = \angle ABC$ ya que el ángulo tangente es igual al ángulo inscrito. Como $\angle PBC = 66^\circ = \angle PBA + \angle ABC = 2\angle ABC$, los ángulos del triángulo miden 33°, 33° y 114°.

8) Si a fuera primo, necesitaríamos que b fuera 4 para que a^b tuviera 5 divisores. Si b fuera 4, tenemos que $b^a = 4^a = 2^{2a}$ tiene 7 divisores, de donde $2a = 6$ y $a = 3$, que es primo. Luego, $(a, b) = (3, 4)$ es una solución y $3 \times 4 = 12$ tiene 6 divisores. Si a no fuera primo, b podría ser 2 o 1. Sin embargo, ninguna potencia de 1 tiene 7 divisores y, si b fuera 2, entonces a tendría que ser 6 para que 2^a tuviera 7 divisores. Sin embargo, $6^2 = 36$ no tiene 5 divisores. Tenemos que $(3, 4)$ es la única solución.

9) Lo que buscamos es un entero de la forma abc tal que $abc + cba = 2(abc)$. Esto ocurriría solo si $cba = abc$, es decir, si $a = c$. Como a tiene 9 valores posibles (porque no puede ser 0) y, para cada uno de esos valores, b tiene 10 valores posibles, en total son $9 \times 10 = 90$ números.

10) Calculamos lado por lado. Sabemos que $AD = 2$ porque es un lado del cuadrado. También $AP = 2$ porque es un lado del triángulo equilátero APD. Como Q es el punto sobre DC y sobre la bisectriz del ángulo $\angle PAD$, el triángulo ADQ es medio triángulo equilátero, es decir, sus ángulos miden $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Si la altura mide 2, los lados $DQ = x$ y $QA = 2x$ cumplen que $4 + x^2 = 4x^2$, de donde $DQ = x = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Como los triángulos ADQ y APQ son congruentes, $PQ = DQ = \frac{2}{\sqrt{3}}$. El perímetro del cuadrilátero $APQD$ es $4 + \frac{4}{\sqrt{3}}$.

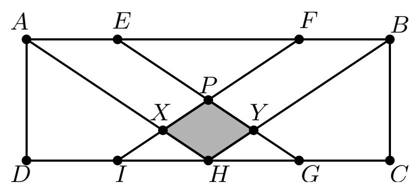
11) El número n es 35 más que un múltiplo de 2018 o un múltiplo de 2019. Luego, se puede escribir como $n = (2018 \times 2019k + 35)$. Como $3027 = 1009 \times 3, 2018 =$

$1009 \times 2, 2019 = 3 \times 673$, entonces n también es 35 más que un múltiplo de 3027 y el residuo que deja es también 35. (El menor n que cumple es, de hecho, 35).

12) Veamos que 1 y 9 cumplen. Además, es necesario que sea el cuadrado de un número impar, para que el último dígito sea impar. Para todos los mayores el dígito de la decenas será par. Consideremos los últimos dígitos ab, que son los únicos que influyen en unidades y decenas. Tenemos que $(ab)^2 = (10a + b)^2 = 100a^2 + 20(a \times b) + b^2$). El término de en medio es siempre par, de modo que el dígito de las decenas es par siempre que si b^2 "lleva" algo, sea par. Eso se verifica fácilmente viendo que $1^2 = 1, 3^2 = 9, 5^2 = 25, 7^2 = 49$ y $9^2 = 81$.

Soluciones de los problemas de la parte B

1) Veamos que $EFGI$ es un rectángulo, de modo que sus diagonales se intersecan a la mitad de la altura, en P. Entonces $XYHI$ es un paralelogramo con $XY = \frac{1}{2}IG$.



Luego, el triángulo XYP tiene la cuarta parte de la altura y la cuarta parte de la base del rectángulo $ABCD$. Luego, su área es $\frac{1}{32}$ del área del rectángulo. Como el área del paralelogramo $XPYH$ es el doble del área del triángulo XYP, el área sombreada es $\frac{1}{16}$ del área del rectángulo $ABCD$.

2) Hay $\frac{14\times 15}{2} = 105$ parejas que cumplen la primera condición. De esas, hay 14 parejas de números consecutivos que no funcionan. Además, si a es par, la pareja $(a, a + 2)$ no sirve y son 6 parejas de ese tipo; si a es múltiplo de 3, la pareja $(a, a + 3)$ no sirve y son 4 parejas de ese tipo. Son 2 parejas $(a, a + 4)$ con a múltiplo de 4, otras 2 parejas $(a, a+5)$ con a múltiplo de 5. Es una pareja $(a, a+k)$ con a, k múltiplos de 6 o 7. Todas las demás parejas deberían funcionar, que son: $105 - 14 - 6 - 4 - 2 - 2 - 1 - 1 = 75$.

3) La rana Reneé puede pisar únicamente los lirios 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20. A cada lirio n le asignamos un número $s(n)$ que es la cantidad de maneras de llegar a ese lirio. Por las reglas del problema, $s(n) = s(n-1)+s(n-2)+s(n-3)$. (Para los primos p, $s(p) = 0$). Es fácil ver que $s(1) = s(4) = s(6) = s(8) = 1$ y que $s(14) = s(12), s(20) = s(18)$. Empezamos con $s(9) = s(8) + s(7) + s(6) = 2$. Si seguimos esta estrategia tendremos que $s(10) = 3, s(12) = 5, s(14) = 5, s(15) = 10, s(16) = 15, s(18) = 25$ y, finalmente, $s(20) = 25$.
También es posible ver que hay 5 maneras de llegar desde 1 hasta 12: 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12; 1, 4, 6, 8, 10, 12; 1, 4, 6, 8, 9, 12; 1, 4, 6, 9, 10, 12; y 1, 4, 6, 9, 12. De manera análoga, hay 5 maneras de llegar desde 12 hasta 18, pues los números 12, 14, 15, 16, 18 son 6, 8, 9, 10, 12 aumentados en 6 cada uno, respectivamente. Como solo es posible llegar a 20 desde 18, hay $5 \times 5 = 25$ caminos desde 1 hasta 20.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

Durante el mes de marzo de 2018 se aplicó el examen de la XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos preseleccionados para las competencias internacionales y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador es México.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 1 de plata y 6 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 132 puntos quedando en el lugar número 18 de 39 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León): Medalla de plata.
- Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa) : Medalla de bronce.
- Oriol Andreu Solé Pi (Ciudad de México): Medalla de bronce.
- Bruno Gutiérrez Chávez (Colima): Medalla de bronce.
- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León): Medalla de bronce.

- Diego Hinojosa Tellez (Jalisco): Medalla de bronce.
- Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México): Medalla de bronce.
- Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos): Mención honorífica.
- Cristina Irene Sotomayor Vivas (Ciudad de México): Mención honorífica.
- Carlos Alberto Paez De la Cruz (Querétaro): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Sean M y N los puntos medios de los lados AB y AC, respectivamente. Supón que H está en el interior del cuadriátero $BMNC$ y que los circuncírculos de los triángulos BMH y CNH son tangentes entre sí. La recta que pasa por H y es paralela a BC interseca a los circuncírculos de los triángulos BMH y CNH en los puntos K y L, respectivamente. Sea F el punto de intersección de MK y NL y sea J el incentro del triángulo MHN. Demuestra que $FJ = FA$.

Problema 2. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones dadas por $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \cdots + \frac{1}{x-2018}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017}$. Demuestra que $|f(x) - g(x)| > 2$ para cualquier número real x que no sea entero y satisfaga $0 < x < 2018$.

Problema 3. Una colección de n cuadrados en el plano es llamada *tri-conectada* si los siguientes criterios se satisfacen:

i) Todos los cuadrados son congruentes.

ii) Si dos cuadrados tienen un punto P en común, entonces P es vértice de cada uno de los dos cuadrados.

iii) Cada cuadrado toca exactamente otros tres cuadrados.

¿Cuántos enteros positivos n existen con $2018 \leq n \leq 3018$, tal que hay una colección de n cuadrados que sea tri-conectada?

Problema 4. Sea ABC un triángulo equilátero. Del vértice A dibujamos un rayo hacia el interior del triángulo de manera que el rayo llegue a uno de los lados del triángulo. Cuando el rayo llega a un lado, rebota siguiendo la *ley de reflexión*, esto es, si llega con un ángulo dirigido α, sale con un ángulo dirigido $180° - \alpha$. Después de n rebotes, el rayo regresa a A sin haber llegado antes a alguno de los otros dos vértices. Encuentra todos los posibles valores de n.

Problema 5. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros tales que para cualesquiera números reales s y t, si $P(s)$ y $P(t)$ son ambos números enteros, entonces $P(st)$ es también un número entero.

7ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Del 9 al 15 de abril, se llevó a cabo la séptima edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO), en la Ciudad de Florencia, Italia. El equipo mexicano estuvo integrado por: Nuria Sydykova Méndez (de la Ciudad de México), Violeta Alitzel Martínez Escamilla (de Morelos), Marcela Cruz Larios (de Campeche) y Ana Paula Jiménez Díaz (de la Ciudad de México). Se obtuvieron excelentes resultados, pues las cuatro estudiantes obtuvieron medalla de plata. México obtuvo el séptimo lugar de 52 países participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron: Enrique Treviño (líder) e Isabel Hubard Escalera (tutor).

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la quinta ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la 7^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con $CA = CB$ y $\angle ACB = 120°$, y sea M el punto medio de AB. Sea P un punto variable de la circunferencia que pasa por A, B y C. Sea Q el punto en el segmento CP tal que $QP = 2QC$. Se sabe que la recta que pasa por P y es perpendicular a la recta AB interseca a la recta MQ en un único punto N. Demuestre que existe una circunferencia fija tal que N se encuentra en dicha circunferencia para todas las posibles posiciones de P.

Problema 2. Considere el conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{1}{k} \mid k = 1, 2, 3, \ldots\right\}.$$

a) Demuestre que todo entero $x \geq 2$ puede ser escrito como el producto de uno o más elementos de A, no necesariamente distintos.

b) Para todo entero $x \geq 2$, sea $f(x)$ el menor entero tal que x puede ser escrito como el producto de $f(x)$ elementos de A, no necesariamente distintos.
Demuestre que existen infinitos pares (x, y) de enteros con $x \geq 2$, $y \geq 2$, tales que $f(xy) < f(x) + f(y)$. (Nota: Los pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son diferentes si $x_1 \neq x_2$ o $y_1 \neq y_2$).

Problema 3. Las n concursantes de cierta EGMO se llaman $C_1, \ldots, C_n$. Después de la competencia, se ponen en fila fuera del restaurante de acuerdo a las siguientes reglas:

- El Jurado escoge el orden inicial de las concursantes en la fila.
- Cada minuto, el Jurado escoge un entero i con $1 \leq i \leq n$.
    - Si la concursante C_i tiene al menos otras i concursantes delante de ella, le paga un florín[3] al Jurado y se mueve exactamente i posiciones adelante en la fila.
    - Si la concursante C_i tiene menos de i concursantes delante de ella, el restaurante se abre y el proceso termina.

a) Demuestre que el proceso no puede continuar indefinidamente, sin importar las elecciones del Jurado.

b) Determine para cada n el máximo número de florines que el Jurado puede recolectar escogiendo el orden inicial y la secuencia de movimientos astutamente.

Problema 4. Un *dominó* es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios.
Sea $n \geq 3$ un entero. Se ponen dominós en un tablero de $n \times n$ casillas de tal manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero sin superponerse (en otras palabras, sin traslaparse). El *valor* de una fila o columna es el número de dominós que cubren al menos una casilla de esta fila o columna. Una configuración de dominós se llama *balanceada* si existe algún entero $k \geq 1$ tal que cada fila y cada columna tiene valor k.
Demuestre que existe una configuración balanceada para cada $n \geq 3$ y encuentre el mínimo número de dominós necesarios para una tal configuración.

Problema 5. Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo ABC. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos P y Q. Demuestre que $\angle ABP = \angle QBC$.

Problema 6. (a) Demuestre que para todo número real t tal que $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un entero positivo n con la siguiente propiedad: para todo conjunto S de n enteros positivos, existen dos elementos distintos x, y de S y un entero no negativo m (esto es, $m \geq 0$), tal que $|x - my| \leq ty$.
(b) Determine si para todo número real t con $0 < t < \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito S de enteros positivos tal que $|x - my| > ty$ para todo par de elementos distintos x, y de S y para todo entero positivo m (esto es, $m > 0$).

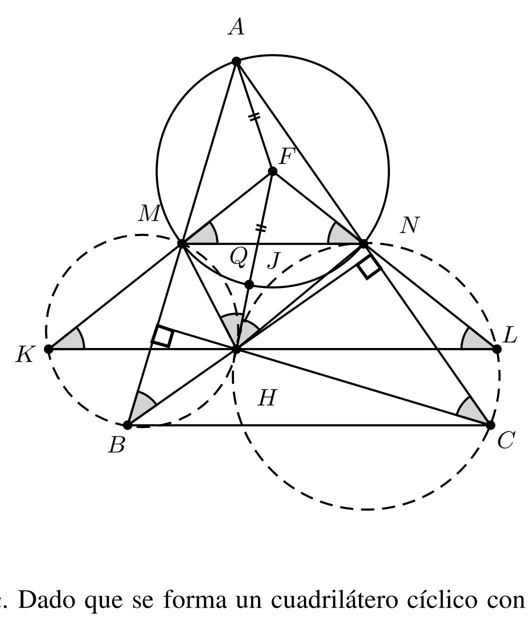
[3] Moneda antigua usada en los siglos XIII y XIV en Florencia.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de la XXX Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Marcela Cruz Larios). Como N es el punto medio de AC y M es el punto medio de AB, tenemos que MN y BC son paralelas, lo que implica que MN, BC y LK son paralelas.



Sea $\angle HBA = \alpha$. Dado que se forma un cuadrilátero cíclico con BC y los pies de las alturas del triángulo ABC desde B y desde C, tenemos que $\angle ACH = \alpha$. Por cíclicos, tenemos que $\angle NLH = \angle NCH = \alpha$ y $\angle MKH = \angle MBH = \alpha$. Así, el triángulo LFK es isósceles, en consecuencia, $LF = FK$. Sea ℓ la tangente común al circuncírculo del triángulo MHB y al del triángulo NHC, así, ℓ pasa por H. Ahora, sea Q un punto sobre ℓ de tal forma que Q y C están en lados distintos respecto a LK. Entonces, $\angle QHM = \angle HBM$ por inscrito-semiinscrito, de donde $\angle QHM = \alpha$. De igual manera, tenemos que $\angle QHN = \angle HCN = \alpha$. Luego, ℓ es bisectriz del ángulo $\angle NHM$ y $\angle NHM = 2\alpha$. Por lo tanto, J está sobre ℓ. Ahora, ya que el triángulo LFK es isósceles y $\angle FLK = \angle FKL = \alpha$, se sigue que $\angle LFK = 180° - 2\alpha$. Entonces, ya que $\angle NHM = 2\alpha$, $NFMH$ es un cuadrilátero cíclico. Luego, MN y LK son paralelas, de donde $\angle FMN = \angle FKL = \angle KLF = \angle MNF = \alpha$. Entonces, el triángulo NFM es isósceles y así, F está sobre la mediatriz de NM. Además, por suma de ángulos en el triángulo formado por B, A y el pie de la altura desde B, tenemos que $\angle CAB = 90° - \alpha$, lo cual implica que $\angle NAM = 90° - \alpha$. Ahora, $\angle NJM = 180° - \angle JNM - \angle NMJ = 180° - (\frac{\angle HNM}{2} + \frac{\angle NMH}{2})$. Pero, por suma de ángulos, $\angle HNM + \angle NMH + \angle NHM = 180°$. Luego,

$$\frac{1}{2}\angle HNM + \frac{1}{2}\angle NMH = \frac{1}{2}(180° - \angle NHM) = 90° - \frac{1}{2}(2\alpha) = 90° - \alpha,$$

lo cual implica que $\angle NJM = 180° - (\frac{1}{2}\angle HNM + \frac{1}{2}\angle NMH) = 90° + \alpha$. Por lo tanto, $\angle NAM + \angle NJM = (90° - \alpha) + (90° + \alpha) = 180°$, lo que significa que el cuadrilátero $ANJM$ es cíclico. Trazamos una recta λ perpendicular a FM y que pase por M. Luego, el ángulo entre λ y NM es de $90° - \alpha$. Pero, $\angle NAM = 90° - \alpha$, entonces, λ es tangente al circuncírculo del triángulo NAM. Luego, el centro de tal circuncírculo está sobre FM, pero sabemos que está sobre la mediatriz de NM. Por lo tanto, el centro del circuncírculo del triángulo NAM es F. Esto implica que $FA = FJ$, pues ambos son radios.

Solución del problema 2. (Solución de Isaac Jair Jiménez Uribe). Sea x un número real no entero. Resolveremos el problema en dos casos.
Caso 1: Sea $2k < x < 2k+1$ para algún entero $k \in \{0, 1, \ldots, 1008\}$. Así, $\frac{1}{x-2n} > \frac{1}{x-2n+1}$ para $1 \leq n \leq k-1$ y $\frac{1}{2m+1-x} > \frac{1}{2m+2-x}$ para $k \leq m \leq 1008$. Entonces,

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x-2k-2} - \frac{1}{x-2k-1}\right) + \frac{1}{x-2k} + \\ + \left(\frac{1}{2k+1-x} - \frac{1}{2k+2-x}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2017-x} - \frac{1}{2018-x}\right),$$

donde cada sumando entre paréntesis es positivo.
Ahora, como $(x-2k) + (2k+1-x) = 1$, entonces $\min\{x-2k, 2k+1-x\} \leq \frac{1}{2}$; por tanto, $\max\{\frac{1}{x-2k}, \frac{1}{2k+1-x}\} \geq 2$. Si $\frac{1}{x-2k} \geq 2$, la desigualdad $f(x) - g(x) > 2$ se sigue de la expresión anterior. Por otro lado, si $\frac{1}{x-2k} < 2$, entonces $\frac{1}{2k+1-x} \geq 2$. Así, basta cambiar $\frac{1}{x-2k}$ por $\frac{1}{2k+1-x}$ y $\left(\frac{1}{2k+1-x} - \frac{1}{2k+2-x}\right)$ por $\left(\frac{1}{x-2k} - \frac{1}{2k+2-x}\right)$, en la expresión anterior de $f(x) - g(x)$ para obtener que $f(x) - g(x) > 2$. En efecto, $\frac{1}{x-2k} > \frac{1}{2k+2-x}$, pues $x < 2k+1$.

Caso 2. Sea $2k-1 < x < 2k$ para algún entero $k \in \{1, \ldots, 1009\}$. Así, $\frac{1}{x-(2n+1)} > \frac{1}{x-2n}$ para $0 \leq n \leq k-1$ y $\frac{1}{2m-x} > \frac{1}{2m+1-x}$ para $k \leq m \leq 1008$. Entonces,

$$g(x) - f(x) = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x-(2k-3)} - \frac{1}{x-(2k-2)}\right) + \frac{1}{x-(2k-1)} + \\ + \left(\frac{1}{2k-x} - \frac{1}{2k+1-x}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2016-x} - \frac{1}{2017-x}\right) + \frac{1}{2018-x},$$

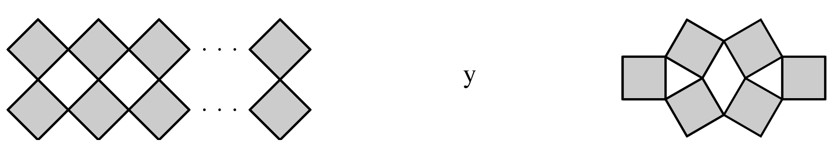
donde cada sumando entre paréntesis es positivo.

Ahora, como $(x-(2k-1))+(2k-x) = 1$, entonces $\min\{x-(2k-1), 2k-x\} \leq \frac{1}{2}$; por tanto, $\max\{\frac{1}{x-(2k-1)}, \frac{1}{2k-x}\} \geq 2$. Si $\frac{1}{x-(2k-1)} \geq 2$, la desigualdad $g(x)-f(x) > 2$ se sigue de la expresión anterior. Por otro lado, si $\frac{1}{x-(2k-1)} < 2$, entonces $\frac{1}{2k-x} \geq 2$. Así, basta cambiar $\frac{1}{x-(2k-1)}$ por $\frac{1}{2k-x}$ y $\left(\frac{1}{2k-x} - \frac{1}{2k+1-x}\right)$ por $\left(\frac{1}{x-(2k-1)} - \frac{1}{2k+1-x}\right)$, en la expresión anterior de $g(x) - f(x)$ para obtener que $g(x) - f(x) > 2$. En efecto, $\frac{1}{x-(2k-1)} > \frac{1}{2k+1-x}$, pues $x < 2k$. En conclusión, $|f(x) - g(x)| > 2$ para cualquier número real x que no es entero y que satisface las desigualdades $0 < x < 2018$.

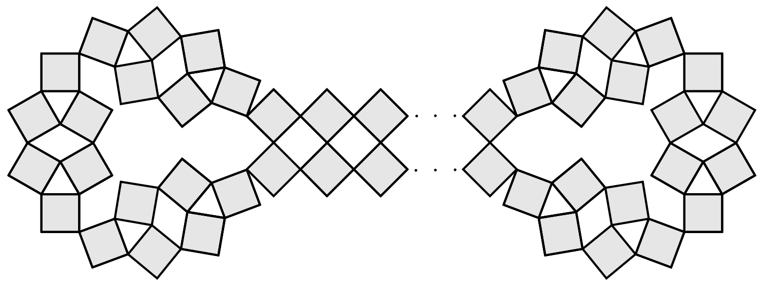
Solución del problema 3. Demostraremos que no hay colecciones triconectadas si n es impar y que las colecciones triconectadas existen para todo entero n par con $n \geq 38$. Como hay 501 enteros pares en el rango de 2018 a 3018, la respuesta es 501.

Para cualesquiera dos cuadrados distintos A y B escribiremos $A \sim B$ para indicar que el cuadrado A toca al cuadrado B. Como cada cuadrado toca exactamente a otros tres cuadrados y hay n cuadrados en total, el número total de parejas de cuadrados (A, B) tales que $A \sim B$ es $3n$. Como $A \sim B$ si y solo si $B \sim A$, el número total de parejas de cuadrados (A, B) tales que $A \sim B$, es par. Por lo tanto, $3n$ es par, esto es, n es par.

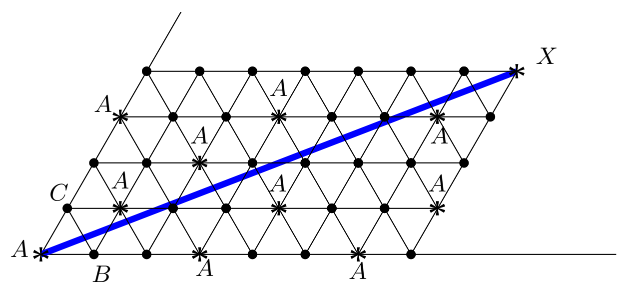
Ahora daremos una construcción de colecciones triconectadas para cada entero n par en el rango. La idea es usar las siguientes configuraciones.



Observemos que en cada configuración, cada cuadrado toca a tres cuadrados, a excepción de los cuadrados de más a la izquierda y de más a la derecha, los cuales tocan a dos cuadrados. Notemos que la configuración de la izquierda es de longitud variable. También observemos que podemos unir múltiples copias de la configuración de la derecha para terminar alrededor de las esquinas. Poniendo los dos tipos de configuraciones anteriores juntas, como se muestra a continuación, obtenemos una colección triconectada para cada entero par $n \geq 38$.



Solución del problema 4. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez). Veamos que cuando la bola de billar rebota sobre una pared de la mesa, podemos reflejar la mesa sobre esa pared y el movimiento del rebote en la reflexión solo es continuar la trayectoria en línea recta. De esta manera, podemos analizar el problema con el siguiente diagrama.



En efecto, el problema se traduce en encontrar los enteros n que satisfacen que el rayo de la trayectoria termina en un A y no contiene otro vértice de la triángulación. Notemos que cada punto X de la triangulación se puede identificar con coordenadas (a, b), donde a y b son las longitudes (en términos del número de lados de un triángulo equilátero) de los lados del paralelogramo definidos por AX. Además, si AX no pasa por otro vértice de la triangulación, entonces el rayo interseca un total de $(a-1) + (b-1) + (a-1+1+b-1) = 2a+2b-3$ rectas (basta ver el número de cortes en cada dirección), lo cual es justamente el número de rebotes que hubo antes de regresar a alguna esquina.
Si el rayo AX no pasa por otro vértice de la triangulación y X tiene coordenadas (a, b), entonces $\text{mcd}(a, b) = 1$, pues de lo contrario, si $1 < d = \text{mcd}(a, b)$, entonces la recta AX también pasaría por el punto $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d})$ y este punto está en la triangulación, lo cual es una contradicción a las hipótesis del rayo AX.
Notemos que los vértices de la triangulación que están identificados con A, tienen coordenadas de la forma (x, x), $(x+3k, x)$ o $(x, x+3k)$ con x y k enteros positivos tales que $0 \leq x \leq x+3k \leq \text{máx}\{a, b\}$. Como X debe tener coordenadas de alguna de las formas anteriores, hay dos casos: si X tiene coordenadas de la forma (x, x), entonces solo pudo ser $(1, 1)$. Así, los rebotes son solo 1. Ahora, supongamos que X tiene coordenadas (x, y) con $x \neq y$, sin pérdida de generalidad supongamos que $x < y$,

entonces $y = x + 3k$ con k entero positivo. Como $\text{mcd}(x, 3k) = \text{mcd}(x, x + 3k) = 1$ se tiene en particular que x es primo relativo con 3.
Si $x \equiv 1 \pmod 3$, se tiene que $n = 2x + 2y - 3 = 4x + 6k - 3 \equiv 1 \pmod 6$. Si $x \equiv 2 \pmod 3$, entonces $n = 4x + 6k - 3 \equiv 5 \pmod 6$. Por lo tanto, los únicos n posibles son los números congruentes con 1 o 5 módulo 6.
Para ver cuáles de estos se pueden lograr, veamos que si X tiene coordenadas $(1, 1+3k)$ entonces $n = 2(3k+2)-3 = 6k+1$. Para los números de la forma $12k+5$, tenemos que si X tiene coordenadas $(3k-1, 3k+5)$ con k par o tiene coordenadas $(3k-4, 3k+8)$ con k impar funcionan, y estos nos dan todos los enteros de la forma $12k + 5$ para $k \geq 2$. Además, es fácil ver con casos que 5 y 17 no se pueden. Para los números de la forma $12k + 11$, tomamos las parejas $(3k - 1, 3k + 2)$, que nos dan todos los enteros de la forma $12k + 11$. Por lo tanto, la respuesta son los enteros de la forma $6k + 1$ y los de la forma $6k + 5$ excepto el 5 y el 17.

Solución del problema 5. Notemos que si $P(x)$ es una solución, entonces también son solución $P(x) + k$ y $-P(x) + k$ para cualquier entero k, de tal manera que podemos asumir que el coeficiente principal de $P(x)$ es positivo y que $P(0) = 0$, esto es, podemos asumir que $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ con $a_n > 0$ y n un entero positivo. Demostraremos que $P(x) = x^n$ en este caso.
Sea p un número primo grande tal que $p > \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Como P tiene coeficiente principal positivo y p es grande, existe un número real t tal que $P(t) = p$ (en efecto, como $P(x)$ es un polinomio con coeficiente principal positivo, $P(x)$ es continua y toma valores tan grandes como se desee; en particular, existe un número real positivo y tal que $P(y) > p$. Como $P(1) \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| < p$, por el teorema del valor intermedio, existe un número real $1 < t < y$ tal que $P(t) = p$). Denotemos con $f(x)$ al máximo común divisor de los polinomios $P(x) - p$ y $P(2x) - P(2t)$. Dado que t es raíz de $P(x) - p$ y de $P(2x) - P(2t)$, tenemos que t es raíz de $f(x)$. Luego, $f(x)$ es un polinomio no constante. Usando las hipótesis para $s = 2$ y t, tenemos que $P(2t)$ es un entero. Como $P(x) - p$ y $P(2x) - P(2t)$ son polinomios con coeficientes enteros, $f(x)$ se puede elegir como un polinomio con coeficientes racionales.
Demostraremos que $f(x)$ es un múltiplo constante de $P(x) - p$. En efecto, supongamos que $P(x) - p = f(x)g(x)$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios no constantes. Por el lema de Gauss[4], existen polinomios con coeficientes enteros $f_1(x)$ y $g_1(x)$ tales que $P(x) - p = f_1(x)g_1(x)$ donde $f_1(x)$ es un múltiplo escalar de $f(x)$ y $g_1(x)$ es un múltiplo escalar de $g(x)$ y alguno de $f_1(x), g_1(x)$ tiene término constante igual a 1 o -1 (esto último es porque $-p = P(0) - p = f(0)g(0)$ con p primo). Luego, $P(x) - p$ tiene al menos una raíz r cuyo valor absoluto no es mayor que 1 (por las fórmulas de Vieta, el producto de las raíces del polinomio con término constante ± 1 es ± 1). Sin embargo,

$$|P(r) - p| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r^i - p \right| > p - \sum_{i=1}^{n} |a_i| > 0,$$

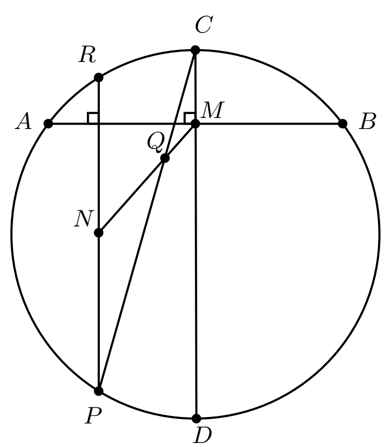
[4]Lema de Gauss: Si $f(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros primos relativos y $f(x) = A(x)B(x)$ donde $A(x)$ y $B(x)$ son polinomios con coeficientes racionales de grado positivo, entonces existen polinomios con coeficientes enteros $a(x)$ y $b(x)$ tales que $f(x) = a(x)b(x)$, donde $a(x) = \mu A(x)$ y $b(x) = \mu^{-1} B(x)$ para algún número racional μ.

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x)$ es un múltiplo constante de $P(x) - p$, de manera que $P(2x) - P(2t)$ es un múltiplo constante de $P(x) - p$, ya que ambos polinomios tienen el mismo grado. Comparando coeficientes principales, obtenemos que $P(2x) - P(2t) = 2^n(P(x) - p)$. Comparando el resto de los coeficientes, obtenemos que $P(x) = a_n x^n$. Si hacemos $a = b = (1/a_n)^{1/n}$, entonces $P(a) = P(b) = 1$, de donde $P(ab)$ también debe ser entero. Como $P(ab) = \frac{1}{a_n}$, se sigue que $a_n = 1$ y, por lo tanto, $P(x) = x^n$. En conclusión, la respuesta es $P(x) = x^n + k, -x^n + k$ con n entero no negativo y k entero.

7ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 7^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz). Sabemos que $PQ = 2QC$. También tenemos que CM es perpendicular a AB porque M es punto medio de AB y el triángulo ABC es isósceles. Luego, al ser PR y CM paralelas (pues ambas son perpendiculares a AB), tenemos que los triángulos QNP y QMC son semejantes, en efecto, tenemos que $\angle PNQ = \angle CMQ$ y $\angle QPN = \angle QCM$. Luego, tenemos que $NQ = 2QM$ y $NP = 2CM$.



Ahora, sabemos que los puntos equivalentes a N cuando P varía están en una circunferencia si y solo si los puntos correspondientes que equivalen a Q están en una circunferencia, ya que podemos aplicar una homotecia con centro M y razón 3 y tendríamos dos figuras iguales. De la misma manera, observemos que los puntos que equivalen a Q cuando P varía forman una circunferencia si y solo si los puntos correspondientes que equivalen a P están en una circunferencia, en efecto, basta con hacer una homotecia con centro en C y razón $\frac{1}{3}$. Como los distintos valores posibles de P están sobre una circunferencia (la circunferencia que pasa por A, B y C), entonces todos los puntos equivalentes al punto N están en una circunferencia.

Solución del problema 2. (Solución de Violeta Alitzel Martínez Escamilla). Dado que $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, los elementos de A son todos los racionales de la forma $\frac{k+1}{k}$ con k entero positivo. Sea n un entero mayor que 2. Observemos que $n = \frac{n^2}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdots \frac{n^2}{n^2-1}$, en efecto, el numerador de cada factor se cancela con el denominador del siguiente factor. Por tanto, todo entero n mayor que 2 se puede expresar como producto de uno o más elementos de A, lo que demuestra el inciso a).
Para el demostrar el inciso b), primero demostraremos tres resultados.

Lema 1. $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

Demostración. Si $n = 2$, entonces $f(2) = 1 = \lceil \log_2 2 \rceil$. Ahora, sea $2 \leq 2^x < n \leq 2^{x+1}$, con x un entero positivo. Si $a \in A$, entonces $0 < a \leq 2$. Así, si tomamos x elementos de A, el producto de estos elementos será a lo más $2^x < n$. Por tanto, necesitamos al menos $x + 1 = \lceil \log_2 n \rceil$ elementos de A para que al multiplicarlos nos den como resultado n.

Lema 2. $f(11) \geq 5$.

Demostración. Por el Lema 1, tenemos que $f(11) \geq \lceil \log_2 11 \rceil = 4$. Supongamos que existen 4 elementos de A, tales que al multiplicarlos nos den 11. Así, existen enteros x, y, z y w tales que $\frac{x+1}{x} \cdot \frac{y+1}{y} \cdot \frac{z+1}{z} \cdot \frac{w+1}{w} = 11$. Luego,

$$
\begin{aligned}
10 &= \frac{xyz + xyw + xzw + yzw + xy + xz + xw + yz + yw + zw + x + y + z + w + 1}{xyzw} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xw} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{yw} + \frac{1}{zw} + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyw} + \frac{1}{xzw} \\
&\quad + \frac{1}{yzw} + \frac{1}{xyzw} \\
&= S.
\end{aligned}
$$

Notemos que $x = y = z = w = 1$ no se puede porque $2^4 \neq 11$. De la misma forma, $x = y = z = 1$ y $w = 2$ no se puede porque $2^3 \cdot \frac{3}{2} \neq 11$. Por tanto, alguno es mayor o igual a 3 o hay al menos dos números tales que son mayores o iguales a 2.
Si existe un entero, entre $\{x, y, z, w\}$, que es mayor o igual que 3, entonces

$$S \leq 1 + 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 7 + \frac{8}{3} < 10,$$

lo cual es una contradicción, por tanto, este caso no funciona.
Si existen dos enteros, entre $\{x, y, z, w\}$, que son mayores o iguales que 2, entonces

$$
\begin{aligned}
S &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= 3 + \frac{8}{2} + \frac{4}{4} = 8 < 10,
\end{aligned}
$$

lo cual es una contradicción, por tanto, este caso no funciona. En conclusión, $f(11) \geq 5$.

Lema 3. $f(2^x + 1) = x + 1 = \lceil \log_2(2^x + 1) \rceil$.

Demostración. Por el Lema 1, $f(2^x+1) \geq \lceil \log_2(2^x+1) \rceil = x+1$. Al tomar x veces el elemento 2 en A y una vez el elemento $\frac{2^x+1}{2^x}$ en A, obtenemos que la multiplicación de esos $x+1$ elementos de A es $2^x \cdot \frac{2^x+1}{2^x} = 2^x + 1$. Por tanto, $f(2^x + 1) = x + 1 = \lceil \log_2(2^x + 1) \rceil$.

Ahora, como $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$, entonces $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$; así, $2^{10x+5} \equiv -1 \pmod{11}$ para todo entero x. Por tanto, existen infinitos enteros positivos n tales que $2^n \equiv -1 \pmod{11}$, es decir, existen infinitos enteros positivos n tales que $2^n + 1 = 11 \cdot x$, para algún entero positivo x, mayor que 2.
Sea n_0 uno de los enteros tales que $2^{n_0} + 1 = 11 \cdot x$, para algún entero positivo x, mayor que 2. Por propiedades de los logaritmos, $\log_2(2^{n_0} + 1) = \log_2 x + \log_2 11$. Ahora, por propiedades de la función techo, $\lceil \log_2(2^{n_0} + 1) \rceil = \lceil \log_2 x + \log_2 11 \rceil \leq \lceil \log_2 x \rceil + \lceil \log_2 11 \rceil$. Por el Lema 3, $f(2^{n_0} + 1) = \lceil \log_2(2^{n_0} + 1) \rceil$; por el Lema 2, $\lceil \log_2 11 \rceil < f(11)$; y por el Lema 1, $\lceil \log_2 x \rceil \leq f(x)$. Por tanto, $f(2^{n_0} + 1) = f(x \cdot 11) < f(11) + f(x)$. Como hay infinitos valores posibles para n_0, entonces existen infinitas parejas de enteros positivos mayores que 2, (x, y), tales que $f(xy) < f(x) + f(y)$.

Solución del problema 3. Sea S el conjunto

$$S = \{(i, j) \mid i < j \text{ y } C_j \text{ está delante de } C_i\}.$$

Sea W el siguiente "peso":

$$W = \sum_{(i,j) \in S} 2^i.$$

Demostraremos que cada movimiento reduce W por un número mayor o igual a 2. Esto demostraría el inciso a) y de paso pondría la cota superior de $W/2$ para el inciso b).
Notemos que si C_i se desplaza i posiciones, entonces alguno de los que desplaza es mayor a i ya que solo existen $i-1$ números menores a i. Digamos que j es el que desplaza, entonces $(i, j) \in S$. Al hacer el movimiento, W pierde uno de los sumandos 2^i pero puede generar nuevos sumandos como $2, 2^2, \ldots, 2^{i-1}$. En el peor de los casos tenemos que el nuevo W, llamémoslo W', está acotado de la siguiente manera:

$$W' \leq W - 2^i + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{i-1} = W - 2.$$

Acotemos W. Supongamos que todas las C_i, C_j están de orden equivocado, entonces

$$\begin{aligned}
W &\leq 2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \cdots + (n-1) \cdot 2^1 \\
&= (2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}) + (2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) + \cdots + (2 + 2^2) + (2) \\
&= (2^n - 2) + (2^{n-1} - 2) + \cdots + (2^3 - 2) + (2^2 - 2) \\
&= 2^{n+1} - 4 - 2(n-1) = 2^{n+1} - 2n - 2.
\end{aligned}$$

Como cada movimiento reduce W por al menos 2, entonces el máximo número de florines que puede recolectar el Jurado es $W/2 \leq 2^n - 1 - n$.
Demostraremos que el Jurado puede recolectar $2^n - 1 - n$ florines. Primero demostraremos que el Jurado puede recolectar $2^{n-1} - 1$ florines de la configuración

$$C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1C_n$$

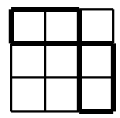
donde las concursantes se mueven de izquierda a derecha, es decir, las concursantes a la derecha son las que están en frente. Demostrémoslo por inducción. Si $n = 1$, entonces se recolectan 0 florines y $2^{1-1} - 1 = 0$. En el caso $n = 2$ se recolecta un florín y $2^{2-1} - 1 = 1$. Ahora demostraremos el caso de n a partir de que suponemos que se cumple para $n - 1$. Tenemos $C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1C_n$. Consideremos las últimas $n - 1$ concursantes. Por inducción se pueden recolectar $2^{n-2} - 1$ florines cuando las concursantes empiezan con $C_{n-2}C_{n-3}\ldots C_1C_{n-1}$. Pero, notemos que C_{n-1} nunca puede rebasar a alguien en esta dinámica, de modo que el arreglo $C_{n-2}C_{n-3}\ldots C_1C_n$ costaría el mismo número de florines para llegar a $C_nC_{n-2}C_{n-3}\ldots C_1$ porque C_n tampoco se puede mover en esta situación. Entonces, después de gastar $2^{n-2} - 1$ florines, estamos en la situación:

$$C_{n-1}C_nC_{n-2}\ldots C_1.$$

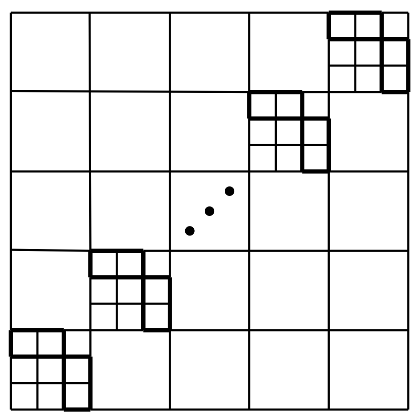
Al gastar un florín más tenemos $C_nC_{n-2}\ldots C_1C_{n-1}$. Ahora cuesta $2^{n-2} - 1$ florines acomodar este último arreglo. Por lo tanto, gastamos $2^{n-2} - 1 + 1 + 2^{n-2} - 1 = 2^{n-1} - 1$ florines. Entonces, por inducción tenemos un acomodo donde el Jurado puede recolectar $2^{n-1} - 1$ florines.
Ahora, consideremos el acomodo donde todas las concursantes están en desorden (el que da el máximo W), es decir, $C_1C_2C_3\cdots C_n$. Lo demostraremos por inducción. Cuando $n = 1$ no hay costo y tenemos $2^1 - 1 - 1 = 0$. Cuando $n = 2$ tenemos que el máximo costo es 1 y $2^2 - 2 - 1 = 1$. Entonces, tenemos el caso base. Supongamos que aplica para $n - 1$. Ahora analicemos el caso de n. Usando la hipótesis de inducción, podemos recolectar $2^{n-1} - (n - 1) - 1$ florines para reordenar a las primeras $n - 1$ concursantes: $C_{n-1}C_{n-2}\cdots C_1C_n$. Ahora, por lo que se demostró anteriormente, se pueden recolectar $2^{n-1} - 1$ florines para terminar en la configuración $C_nC_{n-1}\cdots C_1$. Entonces recolectamos $2^{n-1} - (n - 1) - 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^n - n - 1$ florines. Por lo tanto, se pueden recolectar $2^n - n - 1$ florines y ya se demostró que es el máximo.

Solución del problema 4. (Solución de Nuria Sydykova Méndez). Cada dominó cubre exactamente 3 filas o columnas. Así, al sumar el valor de cada fila y cada columna, se obtiene como resultado el triple de la cantidad de fichas que hay en el tablero. Ahora, en un tablero balanceado la suma de los valores de las filas y de las columnas es $2nk$. En efecto, hay n filas y n columnas y en cada una hay k fichas. Así, el número total de fichas es $\frac{2nk}{3}$. Se dividirá el resto de la solución en tres casos: cuando 3 divide a n; cuando 3 no divide a n y n es par; y cuando 3 no divide a n y n es impar.
Como el número de fichas en un tablero balanceado es proporcional a k, el mínimo número de fichas se alcanza cuando k es mínimo también.

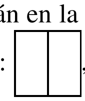
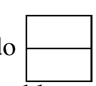
Caso 1. Aquí el mínimo valor posible de k es 1, entonces la mínima cantidad de fichas posible es $\frac{2n}{3}$. A continuación, daremos un ejemplo de un tablero balanceado con esa cantidad de fichas.
Si $n = 3$, basta con considerar el siguiente acomodo de las fichas.

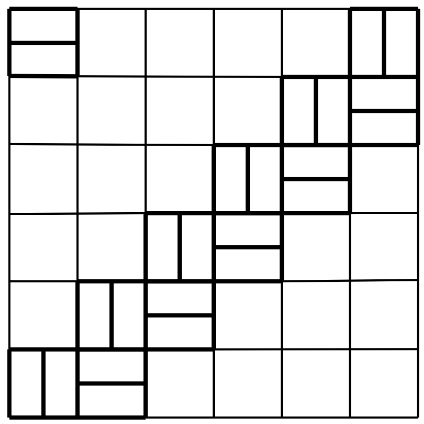


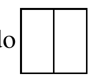
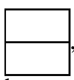
En general, se puede cuadricular el tablero de $n \times n$, en tableros con cuadrados de 3×3. Así, en cada uno de los cuadros de una diagonal se coloca un cuadrado con dos fichas como en el caso de $n = 3$. Por tanto, el tablero quedará como en la siguiente figura:



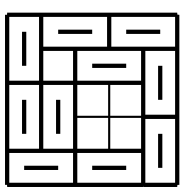
Se verifica de inmediato que cada columna y cada fila tiene una sola ficha, y que la cantidad de fichas es $2 \cdot \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{2n}{3}$.

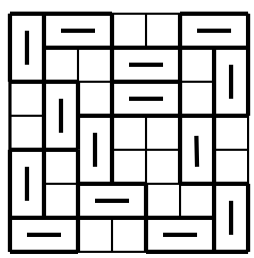
Caso 2. Como hay $\frac{2nk}{3}$ fichas y $\text{mcd}(2,3) = \text{mcd}(n,3) = 1$, entonces 3 divide a k, es decir, $k \geq 3$. Así, el mínimo número de fichas es $\frac{2n \cdot 3}{3} = 2n$. A continuación, daremos un ejemplo de un tablero balanceado con esa cantidad de fichas.
Como n es par, entonces es posible dividir el tablero original en subtableros de 2×2. En todos los subtableros de 2×2 que están en la diagonal que empieza en la esquina inferior izquierda pondremos el acomodo: , mientras que a la derecha de cada uno de los subtableros anteriores colocaremos al acomodo  (para el caso del subtablero en la esquina superior derecha, se pondrá su subtablero correspondiente en la esquina superior izquierda). Por tanto, el tablero quedará como en la siguiente figura:

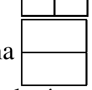


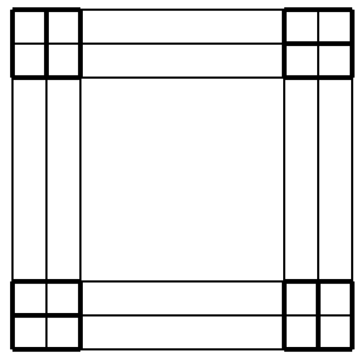
Como cada fila y cada columna pasa por exactamente un acomodo  y un acomodo , entonces el valor de cada fila y cada columna es 3. Además, por construcción, hay exactamente $2n$ fichas, n horizontales y n verticales.

Caso 3. Igual que en el caso anterior se demuestra que $k \geq 3$ y que la mínima cantidad de fichas es $2n$. Demostraremos por inducción sobre n que para todos los impares $n \geq 5$ existe un tablero de lado n y que es balanceado con $k = 3$. En las siguientes dos figuras se da la configuración para los casos base $n = 5$ y $n = 7$.



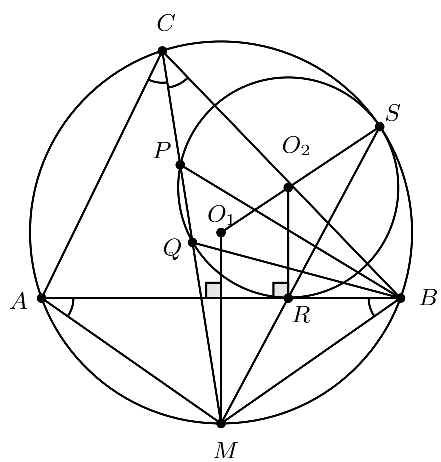


Así, la hipótesis de inducción es que para todo entero impar n, tal que $5 \leq n \leq m$ y que $m \geq 7$ es impar, existe un tablero de lado n y que es balanceado con $k = 3$. El siguiente entero impar es $m+2$. Por hipótesis de inducción, existe un tablero T de lado $m-2$ y que es balanceado con $k = 3$. Coloquemos una copia de T en el centro de un tablero de $(m+2) \times (m+2)$. Además, coloquemos subtableros de la forma  en las esquinas superior izquierda e inferior derecha, y subtableros de la forma  en las esquinas superior derecha e inferior izquierda. Por tanto, el tablero quedará como en la siguiente figura:



Observemos que cada fila y cada columna tienen valor 3. En efecto, el centro está balanceado con $k = 3$ y no se afectaron a las columnas y las filas que pasan por el centro. Como T tiene $2(m-2)$ fichas y se agregaron 8 fichas, la nueva configuración tiene $2(m-2)+8 = 2(m+2)$ fichas, con lo que se termina la inducción.
Al juntar los tres casos, se concluye que para todo entero $n \geq 3$ existe una configuración balanceada. Además, el mínimo de dominós necesarios para lograr una configuración balanceada cuando n es múltiplo de 3 es $\frac{2n}{3}$ y para el resto es $2n$.

Solución del problema 5. (Solución de Marcela Cruz Larios). Sean O_1 y O_2 los centros de Γ y Ω, respectivamente; M la intersección de CP con Γ; S el punto de tangencia de Γ con Ω y R el punto de tangencia de Ω con AB. Por los cuadriláteros cíclicos y porque CM es bisectriz, se tiene que $\angle ABM = \angle ACM = \angle MCB = \angle MAB$. Entonces, el triángulo AMB es isósceles con $MA = MB$, luego M está en la mediatriz de AB. Como AB es cuerda de Γ, O_1 está sobre la mediatriz de AB. Así, O_1M es mediatriz de AB, es decir, O_1M y AB son perpendiculares.



Por otro lado, por ser tangente Ω en R, tenemos que AB y O_2R son perpendiculares, lo cual implica que O_1M y O_2R son paralelas. Claramente, al ser Ω y Γ tangentes en S, se tiene que S, O_1 y O_2 son colineales. Veamos que el triángulo MO_1S es semejante al triángulo RO_2S, pues $O_1S = O_1M$, $O_2S = O_2R$ y $\angle MO_1S = \angle RO_2S$. De lo anterior se deduce que M, R y S son colineales. Luego, $\angle RSB = \angle MSB = \angle MCB = \angle ABM$, lo cual implica que MB es tangente al circuncírculo del triángulo RSB en B. Así, $MB^2 = MR \cdot MS$. Además, por potencia de M con respecto a Ω, tenemos que $MR \cdot MS = MP \cdot MQ$. Por lo tanto, $MB^2 = MP \cdot MQ$, entonces MB es tangente al circuncírculo del triángulo BPQ en B. Lo anterior implica que $\angle PBM = \angle MQB$. Por otro lado, por propiedad de ángulo externo de un triángulo, tenemos que $\angle MQB = \angle QBC + \angle BCQ$, de donde, por suma de ángulos, $\angle PBM = \angle MBA + \angle ABP = \angle MQB = \angle QBC + \angle BCQ$. Por lo tanto, $\angle ABP = \angle QBC$ (pues $\angle MBA = \angle BCQ$).

Solución del problema 6. (a) Sea $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ tal que $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$. Supongamos que no existen $x, y \in S, m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ tales que $|x - my| \leq ty$. Así, tenemos que $s_2 - s_1 > ts_1$. Esto implica que $s_2 > (1+t)s_1$. Similarmente tenemos que $s_{i+1} > (1+t)s_i$. Luego, $s_n > (1+t)s_{n-1} > (1+t)^2 s_{n-2} > \cdots > (1+t)^{n-1}s_1$. Por otro lado, escogiendo $y = s_n$, $x = s_1$ y $m = 0$, tenemos que $s_1 > ts_n$. Luego, $s_1 > ts_n > t(1+t)^{n-1}s_1$. No obstante, como t es positivo, existe un entero n suficientemente grande tal que $(1+t)^{n-1} > \frac{1}{t}$. Por lo tanto, obtenemos que $s_1 > s_1$, lo que es una contradicción.
(b) Sí se puede. Empecemos con $s_1 = 2$. Sea s_2 un impar suficientemente grande que satisfaga que $s_2(\frac{1}{2} - t) > \frac{1}{2}$. Tal s_2 existe, ya que $t < \frac{1}{2}$. Como s_2 es impar entonces $|s_2 - ks_1| \geq 1 > ts_1$ para cualquier entero k. Escojamos un s_3 mayor a s_2, tal que $s_3 \equiv 1 \pmod 2$ y $s_3 \equiv \frac{s_2-1}{2} \pmod{s_2}$. Por el teorema chino del residuo, como s_2 es impar, existe una solución módulo $2s_2$. Por lo tanto, podemos escoger s_3 suficientemente grande que satisfaga esa congruencia módulo $2s_2$. Ya que s_3 es impar, tenemos que $|s_3 - ks_1| \geq 1$ para cualquier entero k. Por otro lado, $s_3 = ms_2 + \frac{s_2-1}{2}$ para algún entero no negativo m. Si $k \leq m$, entonces $s_3 - ks_2 \geq \frac{s_2-1}{2} > ts_2$, esto último porque $s_2(1/2 - t) > \frac{1}{2}$. Por otro lado, si $k \geq m+1$ entonces $|s_3 - ks_2| \geq \frac{s_2+1}{2} > ts_2$. Por lo tanto, s_1, s_2 y s_3 cumplen los requisitos.
Notemos que s_3 es primo relativo con s_2. Esto es porque

$$\text{mcd}(s_3, s_2) = \text{mcd}\left(\frac{s_2-1}{2}, s_2\right) = \text{mcd}\left(\frac{s_2-1}{2}, \frac{s_2+1}{2}\right) = 1.$$

Ya que 2, s_2 y s_3 son primos relativos dos a dos, por el teorema chino del residuo existe un entero s_4 tal que $s_4 \equiv 1 \pmod 2$, $s_4 \equiv \frac{s_2-1}{2} \pmod{s_2}$ y $s_4 \equiv \frac{s_3-1}{2} \pmod{s_3}$. Podemos escoger $s_4 > s_3$ porque hay infinitas soluciones al sistema de congruencias. Por las mismas razones que en el caso de s_3 tenemos que $|s_4 - ms_1| > ts_1, |s_4 - ms_2| > ts_2, |s_4 - ms_3| > ts_3$. También por construcción, tenemos que s_4 es primo relativo con 2, s_2 y s_3.
Continuamos este proceso obteniendo $s_5, s_6, \ldots$. Como el procedimiento crea números más grandes que son primos relativos con todos los anteriores podemos siempre invocar el teorema chino del residuo. Como se sigue la regla de $s_k \equiv \frac{s_{k-1}-1}{2} \pmod{s_{k-1}}$ entonces siempre se satisface la desigualdad $|s_k - ms_{k-1}| \geq \frac{s_{k-1}-1}{2} > ts_{k-1}$ (la última parte es porque para $s > s_2$ tenemos que $s(\frac{1}{2} - t) > \frac{1}{2}$ y, por lo tanto, $\frac{s-1}{2} > ts$).

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 10 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 11 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 12 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.