TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso por: Jaime Torre Marina
jaimetorremarina@hotmail.com
044 55 1630 3549
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Agosto de 2018.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2018, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. De esta forma, en cada uno de los números buscamos proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. En particular, el artículo de matemáticas, que se incluye al inicio de cada número de la revista, suele ser elaborado por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una vasta experiencia. En este sentido, el artículo de este número titulado *Del incírculo al incírculo mixtilíneo: Un recorrido por algunas circunferencias tangentes a dos lados de un triángulo*, escrito por Olga Medrano Martín del Campo y Julio César Díaz Calderón, no es la excepción. A través de sus páginas, el lector conocerá varias construcciones que son útiles en distintos problemas de geometría, principalmente en aquellos problemas en donde aparece el incentro de un triángulo y los distintos círculos curvilíneos o mixtilíneos del triángulo. Estamos

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

seguros que esta aportación de nuestros amigos Olga y Julio será de mucha utilidad para lectores principantes, pero principalmente para lectores avanzados.

De especial interés para todos, en este tercer número del año 2018 incluimos los exámenes con soluciones, de la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, y de la 59^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas. Ambos certámenes donde México participó en el segundo cuatrimestre de este año 2018.

También presentamos los problemas con soluciones de la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) del año 2017 en el Nivel Elemental (Primaria). Estamos seguros que este material será de mucha utilidad para los más pequeños y servirá como material de entrenamiento para la OMMEB.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.

- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1999. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2018-2019 y, para el 1° de julio de 2019, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 4 al 9 de noviembre de 2018 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2018 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Inglaterra, julio de 2019) y a la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (México, septiembre de 2019).

De entre los concursantes nacidos en 2002 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (República Dominicana, junio de 2019).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2019.

Del incírculo al incírculo mixtilíneo: Un recorrido por algunas circunferencias tangentes a dos lados de un triángulo

Por Olga Medrano Martín del Campo y Julio César Díaz Calderón

Nivel Avanzado

Introducción

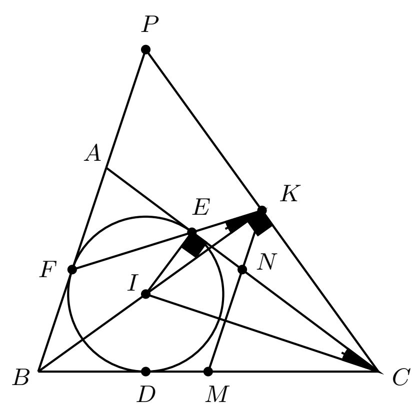
Manejar las propiedades del incírculo es muy importante en la geometría de olimpiada. Sin embargo, hay ocasiones en las que la configuración del problema no presenta un triángulo y su incírculo, pero sí construcciones cercanas que se pueden atacar con técnicas similares. Por ejemplo, los círculos mixtilíneos (o mixtilineales) de un triángulo son circunferencias tales que son tangentes al circuncírculo y a dos lados del triángulo. ¿Cómo trabajar con esas configuraciones geométricas y qué relaciones tienen con las técnicas para trabajar con incírculos? Esta es la pregunta que motiva este artículo. Las propiedades y relaciones que surgen aquí no son inmediatas, y vale la pena aprenderlas. Así, se tendrán herramientas claras que sirvan de punto de partida para desarrollar ideas originales, que serán necesarias para resolver los problemas de olimpiada de este tipo.
En este artículo se presentan varias construcciones que uno puede encontrar en distintos problemas de geometría, sobretodo en aquellos problemas en donde aparece el incentro de un triángulo y los distintos círculos curvilíneos o mixtilíneos del triángulo.

Se combinan algunos resultados conocidos en forma de lemas junto con ejemplos de diversas olimpiadas. Al final se dejan algunos problemas para el lector.

Incentros y excentros

Ángulos rectos en una cuerda del incírculo. El incírculo de $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Sean M y N los puntos medios de BC y de AC, respectivamente. La recta BI interseca a la recta EF en K, donde I es el incentro de $\triangle ABC$. Demuestra que BK es perpendicular a CK y que el punto K se encuentra en la recta MN.

Solución. Comenzaremos por nombrar las medidas de los ángulos de $\triangle ABC$ de manera usual como $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$, y $\angle C = 2\gamma$, respectivamente. Por suma de ángulos internos, sabemos que $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°$. Ahora, por ser I el incentro de $\triangle ABC$, tenemos que $\angle ACI = \frac{\angle C}{2} = \gamma$ y $\angle ABI = \frac{\angle B}{2} = \beta$.



Por otro lado, nótese que $\angle CAB = \angle EAF = 2\alpha$ y $AE = AF$, ya que ambos son segmentos tangentes al incírculo de $\triangle ABC$ desde A. Por tanto, $\triangle AEF$ es isósceles y $\angle AFE = \angle AEF = \frac{180° - \angle EAF}{2} = \frac{180° - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma$. Entonces, $\angle KFB = 180° - \angle AFE = 2\alpha + \beta + \gamma$ y $\angle FBK = \angle FBI = \beta$, por ser I incentro de $\triangle ABC$. Por suma de ángulos internos en $\triangle FBK$, tenemos $\angle FKB = 180° - (2\alpha + \beta + \gamma) - (\beta) = \gamma$. Por otro lado, teníamos que $\angle ACI = \gamma$; por tanto, $\angle ACI = \angle FKB$, con lo que se concluye que $IEKC$ es cíclico. Por esto mismo, $\angle BKC = \angle IKC = \angle IEC = 90°$, ya que E es un punto de tangencia del incírculo de $\triangle ABC$ con AC. Entonces, $BK \perp CK$.

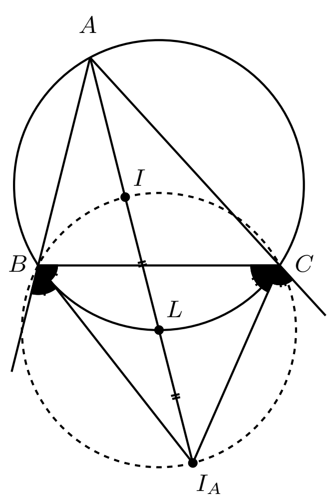
Ahora, si prolongamos CK más allá de K hasta intersecar a AB en P, podemos notar que $\angle BKP = \angle BKC = 90°$. Además, $BK = BK$ y $\angle PBK = \angle CBK$ por ser BK parte de la recta bisectriz de $\angle B$. Por el criterio de congruencia de triángulos ALA, podemos decir $\triangle BKP \cong \triangle BKC$, en conclusión, $KP = KC$. Por esto mismo y por el hecho de que M y N son puntos medios de CB y CA, respectivamente, tenemos que $\frac{CN}{CA} = \frac{CK}{CP} = \frac{CM}{CB} = \frac{1}{2}$. Por último, el teorema de Tales nos garantiza que K, M y N son colineales, o equivalentemente, que K está sobre la recta MN. □

El lema del incentro/excentro. Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta AI interseca al circuncírculo del triángulo $\triangle ABC$ en L. Sea I_A la reflexión de I con respecto a L. Demuestra que:

a) Los puntos I, B, C e I_A se encuentran en una circunferencia de diámetro II_A y centro L. En particular, $LI = LB = LC = LI_A$.

b) Las rectas BI_A y CI_A bisecan a los ángulos exteriores del $\triangle ABC$; esto es, I_A es el excentro del $\triangle ABC$ opuesto al vértice A.

Solución. a) Sean $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta$ y $\angle C = 2\gamma$. Al igual que en el problema anterior tenemos que $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ implica que $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Primero, demostraremos que $LI = LB$, por medio de la igualdad de ángulos $\angle IBL = \angle LIB$, lo que nos va a permitir establecer una relación importante entre los ángulos y los segmentos de la figura.



Por ángulos inscritos en el circuncírculo de $\triangle ABC$, $\angle CBL = \angle CAL = \angle IAC = \alpha$ implica que $\angle IBL = \angle IBC + \angle CBL = \beta + \alpha$. Por otro lado, $\angle BIL = 180° - \angle AIB = \angle IBA + \angle BAI = \alpha + \beta$. Entonces, $\angle IBL = \alpha + \beta = \angle BIL$, por lo que $\triangle LBI$ es isósceles, con $LI = LB$, que es lo que queríamos.
De manera análoga, obtenemos que $LI = LC$. Entonces, se tiene la igualdad $LB = LI = LC$, que implica que L es el centro de un círculo que pasa por B, I, C, el cual nombramos como (BIC). Si recordamos que L es el punto medio de II_A, notamos que $IL = LI_A$, por lo que I_A también está sobre (BIC) y la cuerda II_A es además diámetro del mismo círculo.

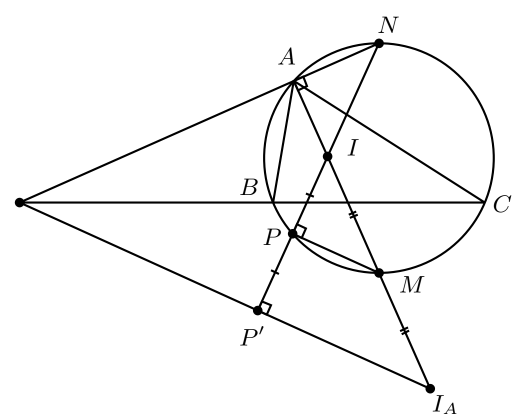
b) Para esta parte, queremos demostrar que $\angle I_ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta) = 90^\circ - \beta$ y que $\angle I_ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\gamma) = 90^\circ - \gamma$, ya que estos resultados implican que BI_A y CI_A son bisectrices externas de $\angle ABC$ y $\angle ACB$, respectivamente. Al usar el resultado de la parte a), sabemos que II_A es diámetro del círculo (BIC), por lo que $\angle IBI_A = \angle ICI_A = 90^\circ$. Esto implica que $\angle I_ABC = \angle I_ABI - \angle IBC = 90^\circ - \beta$. De modo similar, obtenemos $\angle BCI_A = 90^\circ - \gamma$. $\square$

La configuración del problema anterior aparece mucho en geometría de olimpiadas; ¡es útil tenerla en mente para reconocerla cuando vuelva a aparecer en un problema!

Ejemplo 2.1. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con circuncírculo ω_1, y sean I e I_A su incentro y excentro correspondiente a A, respectivamente. Sean N y M los puntos medios de los arcos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{BC}$ en ω_1, respectivamente. NI interseca de nuevo a ω_1 en P, y P' es el punto en la recta NI tal que $PI = PP'$. Demuestra que NA, BC y I_AP' concurren.

Solución. Si usamos el resultado del problema anterior, sabemos que C, I, B e I_A están sobre una circunferencia ω_2 de centro M, por lo que $IM = MI_A$. Además, $IP = PP'$ por construcción. Ahora, por el teorema de Tales, tenemos que $PM \parallel P'I_A$, lo cual implica que $\angle IPM = \angle IP'I_A$.
Por otro lado, como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{CAB}$ y $\widehat{BC}$, tenemos que MN es un diámetro de ω_1, por lo que $\angle IPM = \angle NPM = 90^\circ$. Por lo tanto, $\angle IP'I_A = 90^\circ$, y como II_A es diámetro de ω_2, entonces P' también está sobre dicha circunferencia. Tenemos ahora las siguientes igualdades de ángulos:

$$\angle NAI_A = \angle NAM = \angle NPM = \angle NP'I_A = 90^\circ.$$



Por lo tanto, $NAP'I_A$ es un cuadrilátero cíclico; llamemos ω_3 a su circuncírculo. Notemos lo siguiente:

- AN es el eje radical de ω_1 y ω_3.

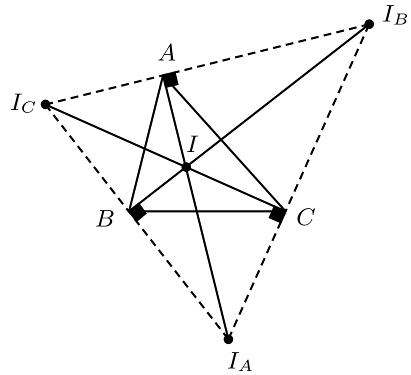
- BC es el eje radical de ω_1 y ω_2.
- $I_A P'$ es el eje radical de ω_2 y ω_3.

Es un hecho conocido que dados tres círculos, sus tres ejes radicales por parejas concurren, con lo que concluímos el problema. $\square$

Nota para el lector: El punto P es de hecho el punto de tangencia del circuncírculo de $\triangle ABC$ con el círculo $A-$mixtilíneo de $\triangle ABC$ que vamos a definir más adelante. Este punto tiene muchas propiedades interesantes, que también vamos a discutir más adelante.

Dualidad de ortocentros y excentros. Si I_A, I_B e I_C son los excentros del triángulo $\triangle ABC$, entonces, el triángulo $\triangle ABC$ es el triángulo órtico (es decir, el triángulo formado por los pies de las alturas) del triángulo $\triangle I_A I_B I_C$ y el ortocentro de $\triangle I_A I_B I_c$ es I.

Solución. Primero, notemos que, de manera similar a como se demuestra que las tres bisectrices internas de $\triangle ABC$ concurren, también BI_A (*externa*), CI_A (*externa*) y AI_A (*interna*) concurren. Sabemos entonces que I está sobre la recta AI_A, ya que ésta es bisectriz interna de $\angle A$.
De acuerdo con el lema del incentro/excentro anterior, tenemos que I, B, I_A y C están sobre una misma circunferencia Ω cuyo centro es el punto medio de II_A. Además, tenemos que II_A es diámetro de Ω y, por ángulos inscritos en esta circunferencia, podemos ver que $\angle IBI_A = \angle I_B BI_A = 90°$. Por lo tanto, B es el pie de altura en $\triangle I_A I_B I_C$ desde el vértice I_B.



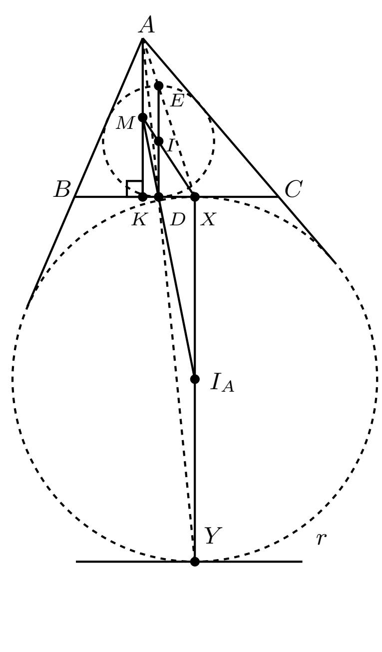
De manera similar vemos que A y que C son pies de altura en $\triangle I_A I_B I_C$ desde los vértices I_A e I_C, respectivamente. Entonces, la intersección de AI_A, BI_B y CI_C es el ortocentro de $\triangle I_A I_B I_C$. Si recordamos que estas tres rectas son bisectrices internas, sabemos que I es su intersección. Por lo tanto, I es el ortocentro de $\triangle I_A I_B I_C$. $\square$

Puntos de tangencia de incírculos y excírculos

Punto medio de las alturas. Sea ABC un triángulo con incentro I y con excentro I_A, opuesto al vértice A. Además, sean D y X los puntos de tangencia asociados al incentro y al excentro correspondiente con el lado BC, respectivamente. Demuestra que las rectas DI_A y XI concurren en el punto medio de la altura desde A.

Solución. Primero, consideremos la altura AK en $\triangle ABC$ desde el vértice A, con K sobre el lado BC. Sea M el punto medio de AK. Nuestra demostración va a consistir en dos partes:

1) Trazamos AX y AD. Sean E y Y, respectivamente, los puntos en que las rectas anteriores intersecan al incírculo y al excírculo, respectivamente, de $\triangle ABC$. Por homotecia entre el incírculo y el excírculo de $\triangle ABC$ desde el punto A, notemos que (I, I_a),(D, Y), y (E, X) son parejas de puntos correspondientes. Eso implica que si nos enfocamos en el segmento BC, que es perpendicular a ID, y en la recta r, que es perpendicular a II_A, estos van a ser paralelos. Además, $I_AX \perp CB$, por tangencia del excírculo con BC; por lo que I_AX es perpendicular a r, de donde I_AX es paralela a I_AY, lo cual implica que X, I_A y Y son colineales. De manera similar, D, I y E son colineales.
Notemos la semejanza entre los triángulos rectángulos $\triangle XAK \sim \triangle XED$, la cual es cierta debido a que $XA \| XE$, $XK \| XD$ y $BC \perp DE$ implican que $DE \| AK$; por otro lado, por construcción, $\frac{AM}{MK} = 1$. Además, I es incentro de $\triangle ABC$, por lo tanto $ID = IE$, lo cual implica que $\frac{ID}{IE} = 1$. Podemos notar entonces que M e I son puntos correspondientes en la semejanza $\triangle XAK \sim \triangle XED$, la cual es a la vez una homotecia desde X, por lo que X, I y M son colineales.

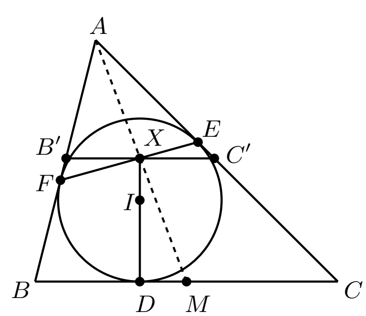


2) Con las construcciones y las propiedades anteriores y al usar que $AK \perp CB \perp XY$ implica $AK \| XY$, podemos mostrar análogamente que $\triangle DAK \sim \triangle DYX$ y que esta semejanza también puede interpretarse como una homotecia desde D. Además, M es punto medio de AK mientras que I_A es punto medio de XY, lo que implica, por la homotecia desde D, que M e I_A son correspondientes. Por lo tanto, D, M, I_A son colineales.

Hemos demostrado que D, I_A y M son colineales y que X, I y M son colineales. Con esto concluimos nuestra demostración. □

Punto de concurrencia en el incírculo. Sea $\triangle ABC$ un triángulo con incentro I y sean D, E y F los puntos en los que el incírculo de $\triangle ABC$ es tangente a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Si M es el punto medio del lado BC, demuestra que las rectas EF, AM y DI concurren.

Solución. Primero, notemos que esta concurrencia es equivalente a decir que si X es el punto de intersección de FE con DI, entonces AX es la mediana de $\triangle ABC$ desde A. Un punto principal para resolver este problema, es observar que el punto M solo es una distracción, pues no tiene muchas relaciones directas con la figura. Podemos olvidarnos de M si trazamos una línea paralela a BC por X. Esta recta interseca a AB y a AC en B' y C', respectivamente. Además, queremos que X sea el punto medio de $B'C'$, ya que la homotecia entre $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ desde A conservaría las razones. Por tangencia, sabemos que $DX \perp BC$ y $DX \perp B'C'$, lo que implica que $\angle IXB' = 90° = \angle IXC'$. Por otro lado, $\angle IFB' = 90° = \angle IEC'$, por la misma tangencia del incírculo. Por lo tanto, $IXB'F$ y $IXEC'$ son cuadriláteros cíclicos.



Ahora, al mover algunos ángulos, podemos notar que:

$$\begin{aligned} 180° - \angle A = \angle AB'C' + \angle AC'B' &= \angle XIF + \angle XIE = \angle FIE \\ &= \angle B'IE + \angle FIB' = \angle B'IE + \angle EIC' = \angle B'IC'. \end{aligned} \tag{1}$$

Donde para las últimas igualdades basta usar las identidades de los ángulos opuestos por el vértice, en efecto $\angle FIB' = \angle FXB' = \angle EXC' = \angle EIC'$. Esto implica que $AB'IC'$ es un cuadrilátero cíclico.

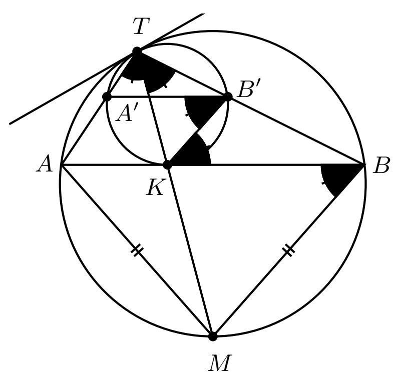
Por otro lado, AI es bisectriz del ángulo $\angle B'AC'$ y el círculo en el que está inscrito

$AB'IC'$ es también el circuncírculo de $\triangle AB'C'$. La intersección de estas dos curvas, es decir I, tiene que ser punto medio del arco $\widehat{B'C'}$. Por lo tanto, $B'I = C'I$. Ahora, dado que IX es altura desde I, tenemos que $B'X = XC'$. Concluimos que X es el punto medio de $B'C'$. $\square$

Incírculos mixtilíneos

Círculos inscritos en segmentos. Sea AB una cuerda de una circunferencia Ω. Sea ω una circunferencia tangente a la cuerda AB en K y tangente internamente a Ω en T. Demuestra que el segmento TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T. Más aún, demuestra que $MA^2 = MB^2$ es la potencia del punto M con respecto a ω.
Con la notación del hecho anterior, sea C otro punto en el arco $\widehat{AB}$ que contiene a T y sea D un punto en AB tal que CD es tangente a ω en L. La circunferencia ω se conoce como el incírculo curvilíneo del $\triangle ABC$. Cuando D varía a lo largo de AB, se obtienen múltiples incírculos curvilíneos. La circunferencia que se obtiene cuando $A = D$ se conoce como la circunferencia A-mixtilineal.

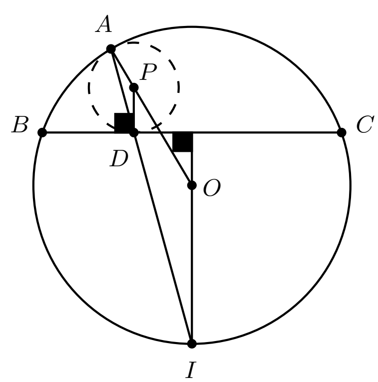
Solución. Los centros de ω y Ω son colineales con T, ya que existe una tangente común entre los dos círculos, por lo que existe una homotecia desde T que manda ω a Ω. Llamemos A', B' a los puntos que son mandados por la homotecia anterior hacia A y B, repectivamente. Por homotecia, podemos decir que $\frac{TA'}{TA} = \frac{TB'}{TB}$, lo cual implica que $A'B' \| AB$. Por ángulos inscritos, vemos que $\angle A'TK = \angle A'B'K$. Además, por ángulos alternos internos entre paralelas, $\angle A'B'K = \angle B'KB$, y por ángulos seminscritos, $\angle B'KB = \angle KTB'$. En resumen, $\angle A'TK = \angle KTB'$, lo cual implica que KT es bisectriz de $\angle ATB$. Así, TK pasa por el punto medio M del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T.



Si usamos el resultado anterior, $\angle MTB = \angle MTA = \angle MBA$. Por otro lado, tenemos que $\angle BMK = \angle TMB$. Ahora, por el criterio de semejanza AA, $\triangle TMB \sim \triangle BMK$. Así, por razones de semejanza $\frac{TM}{BM} = \frac{MB}{MK}$, lo cual implica que $MK \cdot MT = MB^2$. Lo anterior es igual a MA^2 por ser M punto medio del arco $\widehat{AB}$. Por último, sabemos que el valor $MK \cdot MT$ es la potencia de M hacia ω. $\square$

Ejemplo 4.1. Sea ω un círculo y BC una cuerda de ω. Sean I un punto sobre el arco $\widehat{BC}$ y D un punto en el segmento BC. La recta DI interseca por segunda vez a ω en A. Sea γ el círculo que es tangente a BC en D y que pasa por A. Demuestra que γ es tangente a ω si y solo si AI es bisectriz interna del triángulo $\triangle ABC$.

Solución. Notamos primero que la implicación $\Rightarrow$ se demostró anteriormente. Para demostrar el recíproco, supongamos que AI es bisectriz interna de $\angle BAC$. Esto implica que I es punto medio del arco $\widehat{BC}$, por lo que $IB = IC$. Además, si O es el centro de ω, tenemos $OI \perp BC$. Ahora, definimos al punto P como la intersección de AO y de la perpendicular a BC que pasa por D.

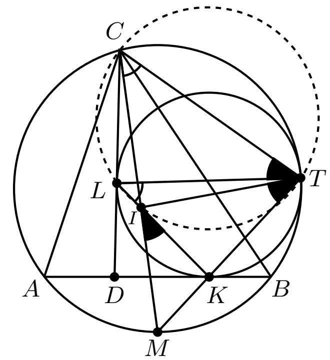


Por construcción, $PD \perp BC$, lo cual implica que $PD \parallel OI$. De esta manera, como $AP \parallel AO$, $AD \parallel AI$, $PD \parallel OI$, podemos concluir que $\triangle APD \sim \triangle AOI$. Por razón de semejanza, $\frac{PD}{OI} = \frac{AP}{AO}$. Como O es centro de ω, sabemos que $OI = AO$ y, en consecuencia, $PD = AP$. Por lo tanto, un círculo γ con centro en P y radio AP sería tangente a BC (por ser $PD \perp BC$) en D como tangente a ω (por ser O, P, A colineales) en A. $\square$

Cuerdas del incírculo curvilíneo. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sea D un punto en el segmento AB. Una circunferencia ω es tangente a CD en L, a AB en K y también es tangente al circuncírculo de $\triangle ABC$ en T. Demuestra que el incentro de $\triangle ABC$ se encuentra en la recta LK.

Solución. Sea I la intersección de LK con CM. Si recordamos el resultado del problema anterior, M es punto medio del arco $\widehat{AB}$, entonces CM es bisectriz de $\angle ACB$. Además, la homotecia de ω hacia Ω desde T manda al arco $\widehat{KT}$ hacia el arco $\widehat{MT}$, por lo que los ángulos inscritos correspondientes tienen medidas iguales; en particular, $\angle MCT = \angle KLT$, lo cual implica que $\angle ICT = \angle ILT$, esto es, C, L, I, T son concíclicos. Nombremos $\alpha = \angle MTI, \beta = \angle ITL, \gamma = \angle LTC$. Como $CLIT$ es cíclico, tenemos $\angle ITL = \angle ICL = \beta$ y $\angle CTL = \angle CIL = \gamma$, de donde $\angle DLK = \beta + \gamma$.

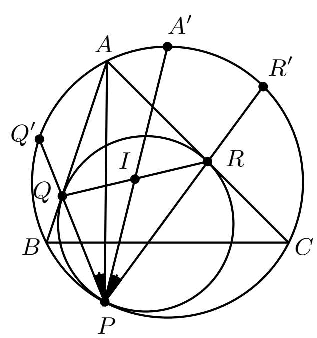
Además, $\angle DLK$ es seminscrito en ω y $\angle DLK = \angle LTK = \angle LTI + \angle ITK = \beta + \alpha$. Por lo anterior, tenemos $\angle DLK = \beta + \gamma = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \gamma$.



Entonces, $\gamma = \angle CTL = \angle CIL = \angle MIK = \alpha$, lo último por ángulos opuestos y porque $\alpha = \angle MTI$. Por tanto, $\angle MIK = \angle MTI$ y $\angle IMK = \angle TMI$. Por el criterio de semejanza AA, vemos que $\triangle MKI \sim \triangle MIT$. Así, por razón de semejanza, tenemos que $MI^2 = MK \cdot MT$. Por el problema anterior recordemos que $MA^2 = MB^2 = MK \cdot MT$. Por lo tanto, $MA = MB = MI$. Para concluir, de la sección de incentros y excentros sabemos que lo anterior implica que I es el incentro de $\triangle ABC$. I está por construcción sobre LK, por lo que concluimos. □

Ejemplo 4.2. Sean $\triangle ABC$ un triángulo inscrito en el círculo ω y γ un círculo tangente al arco $\widehat{BC}$, a AB y a AC en P, Q y R, respectivamente. Sean A' el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que contiene a A e I, el incentro de $\triangle ABC$. Demuestra que P, I y A' son colineales.

Solución. Primero notamos que, por construcción, PA es simediana de $\triangle QPR$ desde P (ya que γ es circuncírculo de $\triangle QPR$, y AR y AQ son dos tangentes a γ). Por otro lado, sabemos que I es punto medio de RQ (un caso particular del problema anterior), por lo que PI es mediana de $\triangle QPR$ desde P y, por tanto, PA y PI son isogonales con respecto a $\angle QPR$. Es decir, $\angle RPA = \angle IPQ$.

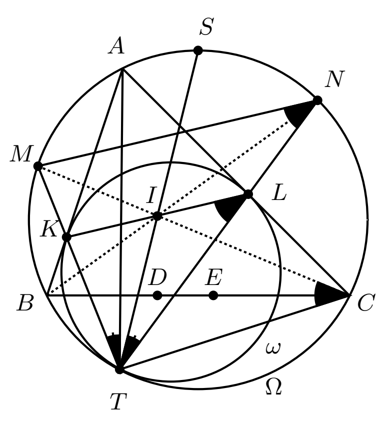


Prolongamos PQ y PR hasta que vuelvan a intersecar a ω en Q' y R'. Ya sabemos que dichos puntos bisecan a los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ en ω, respectivamente. Además, por ángulos en ω, tenemos que $\widehat{R'A} = \frac{\widehat{CA}}{2} = \frac{\widehat{CA}+\widehat{AB}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \widehat{A'B} - \widehat{Q'B} = \widehat{A'Q'}$. En resumen, $\widehat{R'A} = \widehat{A'Q'}$. Entonces, por ángulos inscritos, tenemos que $\angle R'PA = \angle A'PQ'$. Si recordamos que $\angle RPA = \angle R'PA = \angle IPQ = \angle IPQ'$, tenemos $\angle A'PQ' = \angle IPQ'$, lo cual implica que A', I, P son colineales. □

Incírculos mixtilíneos. Sea $\triangle ABC$ un triángulo y sean K, L y T los puntos en los que su circunferencia A-mixtilineal es tangente a AB, a AC y al circuncírculo del $\triangle ABC$, respectivamente. Llamemos D y E a los puntos de tangencia del incírculo y del excírculo opuesto a A en BC, respectivamente. Demuestra que:

1) El punto medio I de KL es el incentro de $\triangle ABC$.
2) Las rectas TK y TL pasan por los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ que no contienen a T.
3) La recta TI pasa por el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que contiene a A.
4) Los cuadriláteros $BKIT$ y $CLIT$ son cíclicos.
5) Los angulos $\measuredangle BAT$ y $\measuredangle CAE$ son iguales.
6) Los angulos $\measuredangle BTA$ y $\measuredangle CTD$ son iguales.

Solución. Recordemos del lema de *cuerdas del incírculo curvilíneo* que I está sobre KL, ya que esta construcción es el caso particular de dicho lema en el que $A = D$. Llamemos ω a dicha circunferencia A-mixtilineal y Ω al circuncírculo de $\triangle ABC$.



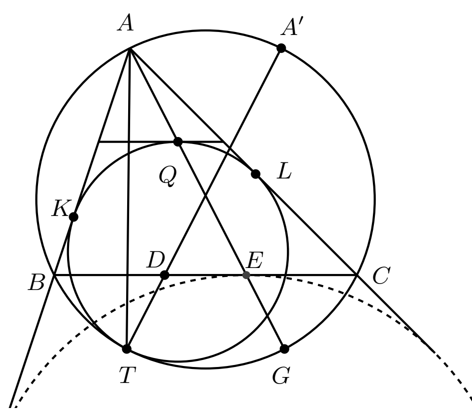
1) Tenemos que AI es bisectriz de $\angle KAL$. Además, $AL = AK$ por ser tangentes desde un mismo punto, hacia ω. Entonces, I es el pie de la bisectriz en un triángulo isóceles, por lo que es punto medio de LK.

2) Esto es un corolario del primer problema de esta sección; ω es tangente a AB en K y a Ω en T, por lo tanto TK pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a T. El resto es análogo.

3) Esto es por el Ejemplo 4.2.

4) Tenemos, gracias a la homotecia desde T, que $LK \| NM$, por lo que $\angle IKT = \angle LKT = \angle NMT$. Por ángulos inscritos en Ω, tenemos que $\angle NMT = \angle NBT = \angle IBT$. Así, $\angle IKT = \angle IBT$, por lo que $BKIT$ es cíclico. La prueba de que $CLIT$ es cíclico es análoga.

5) Primero, tomamos como hecho el problema 7 de la última sección de este artículo (EGMO 2013, 5). Entonces, si trazamos la tangente a ω por Q que es paralela a BC, sucede que $\angle CAQ = \angle BAT$. Por otro lado, por homotecia entre el incírculo de $\triangle ABC$, ω y el excírculo de $\triangle ABC$, los puntos correspondientes sobre dichos círculos son colineales junto con A. En particular, A, Q y E son colineales, por lo que $\angle BAT = \angle CAE = \angle CAQ$.



6) Al usar el resultado de arriba, tenemos $\angle BAT = \angle CAE$. Entonces, si AE interseca al arco $\widehat{BC}$ en G, obtenemos que $TGBC$ es un trapecio isósceles. Por otro lado, sabemos que $BE = DC$ ya que D es el punto de tangencia del incírculo y E es punto de tangencia del excírculo. Por dicha simetría en $TGBC$ y los segmentos $BE = DC$, tenemos que la intersección de TD y GE con el circuncírculo de $\triangle ABC$ (A y A', respectivamente) son simétricas con respecto a la mediatriz de BC. En otras palabras, $AA'BC$ es un trapecio isósceles, por lo que $\angle BTA = \angle CTA' = \angle CTD$.

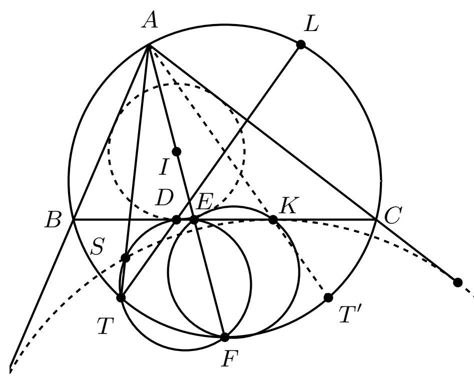
□

Ejemplo 4.3. Sea $\triangle ABC$ un triángulo escaleno inscrito en el círculo Ω. El incírculo de $\triangle ABC$ toca al lado BC en D. La bisectriz de $\angle A$ interseca a BC y a Ω en E y F, respectivamente. El circuncírculo de $\triangle DEF$ interseca al excírculo correspondiente a A, Ω_A, en S_1 y S_2 y a Ω en $T \neq F$. Demuestra que el segmento AT pasa por uno de los dos puntos S_1, S_2.

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $AB < AC$. Sean K el punto de contacto de Ω_A con BC y L la intersección de TD con Ω. Tenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}\angle FTL &= \angle FTD = 180^\circ - \angle FED = 180^\circ - \angle AEC \\ &= \angle EAC + \angle ECA = \angle BAE + \angle BCA = \angle ACF\end{aligned}$$

Así, $\angle FTL = \angle ACF$, es decir, L es el reflejo de A con respecto a la mediatriz de BC. Si reflejamos los puntos colineales T, D, L con respecto a la misma mediatriz, obtenemos los puntos T', K, A. Esto implica que $\angle BAT = \angle CAT' = \angle CAK$.



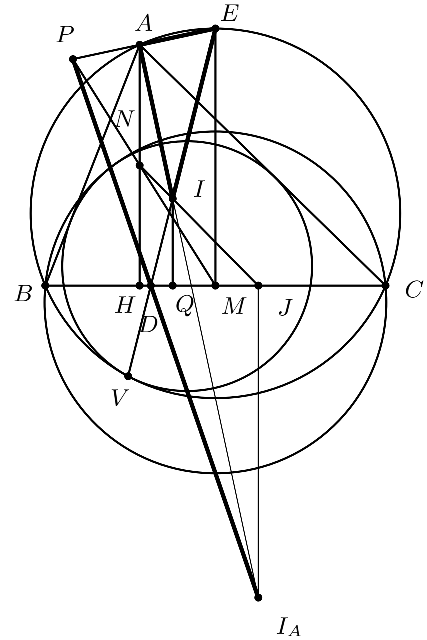
Ahora, llamemos S a la reflexión de K con respecto a AI. Ya que AI es la bisectriz de $\angle A$ y Ω_A es simétrico con respecto a dicha línea, S está sobre Ω_A. Además, tenemos $\angle BAT = \angle CAK = \angle BAS$, entonces A, S, T son colineales. Notemos, sin embargo, que D y K son isotómicos en BC (es decir, $BD = CK$) y que F es punto medio del arco menor $\widehat{BC}$. Por lo tanto, $FD = FK$. Entonces, S, por ser reflexión de K con respecto al eje radical de los circuncírculos de $\triangle FED$ y $\triangle FEK$ (que tienen el mismo radio), está sobre el circuncírculo de $\triangle DEF$ también. Por lo tanto, S es la intersección que se desea. $\square$

Nota: La conclusión de los primeros dos párrafos ($\angle BAT = \angle CAK$) se puede hacer tan solo de notar que como T es la intersección del circuncírculo de $\triangle DEF$ con Ω, también es el punto de tangencia del círculo mixtilineal con respecto a A.

Ejemplo 4.4. Sea $\triangle ABC$ un triángulo, ω su círculo A-mixtilineal, Ω su circuncírculo e I_A su excentro con respecto a A. Sea H el pie de altura desde A hacia BC, E el punto medio del arco $\widehat{BAC}$. Sean M y N los puntos medios de BC y AH, respectivamente, y sea P la intersección de AE con MN. Sea S el punto no en Ω tal que el circuncírculo de $\triangle BSC$ es tangente a ω. Demuestra que I_A, S y P son colineales.

Solución. Sea I el incentro de $\triangle ABC$ y sea Q el punto donde dicho incírculo toca a BC. Si usamos el lema *punto medio de las alturas* de la sección 3, tenemos que IN interseca a BC en J, el punto de tangencia entre BC y el excírculo ϵ con respecto a A.

Entonces $I_AJ \perp BC$ implica que $I_AJ \parallel AH \parallel AN$. Al usar estas paralelas, vemos la semejanza $\triangle INA \sim \triangle IJI_A$ y obtenemos $\frac{AI_A}{I_AI} = \frac{NJ}{IJ} = \frac{NH}{IQ}$.



Nótese que arriba usamos que $IQ \perp BC$. Por otro lado, por ser E punto medio del arco $\widehat{BAC}$, tenemos que $EB = EC$, lo cual implica que $EM \perp BC$, de donde $EM \parallel AN$. Al usar la semejanza $\triangle APN \sim \triangle EPN$, obtenemos $\frac{EP}{PA} = \frac{EM}{AN} = \frac{EM}{NH}$. Sea V el punto de tangencia de ω y Ω. Por el ejemplo 4.2 sabemos que V, I y E son colineales. Digamos que la recta que pasa por dichos puntos interseca a BC en D. Entonces, puesto que $IQ \parallel EM \perp BC$ y por la semejanza $\triangle DIQ \sim \triangle DEM$, obtenemos que $\frac{ID}{DE} = \frac{IQ}{EM}$. Así, al multiplicar las expresiones de arriba, obtenemos que $\frac{AI_A}{I_AI} \cdot \frac{ID}{DE} \cdot \frac{EP}{PA} = \frac{NH}{IQ} \cdot \frac{IQ}{EM} \cdot \frac{EM}{NH} = 1$. Luego, por el teorema de Menelao, P, D, e I_A son colineales. Ahora, se demostrará un resultado previo.

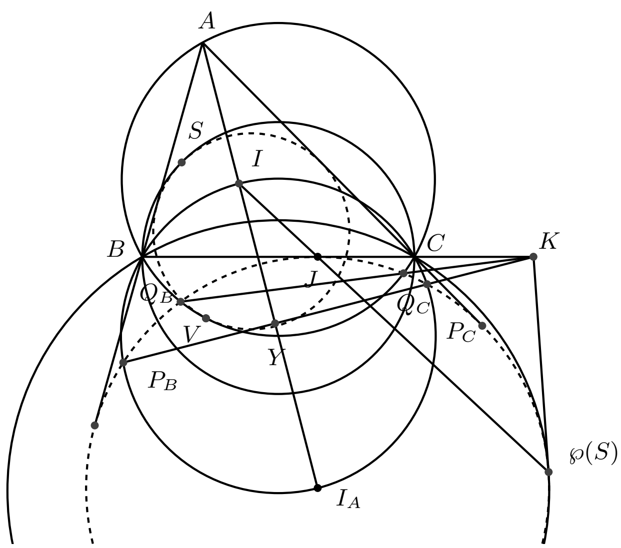
Lema. Los puntos A, I_A, V, y S son concíclicos.

Demostración. Consideremos la transformación $\wp$, que es la composición de una inversión con centro A y radio $\sqrt{AB \cdot AC}$ y de una reflexión con respecto a AI. Sabemos que A, I_A, V, y S son concíclicos solo si los inversos de I_A, V, y S son colineales, lo cual sucede si y solo si $\wp(I_A)$, $\wp(V)$ y $\wp(S)$ son colineales.

Ahora, notemos que $\wp(B) = C$ y que $\wp(C) = B$. Ya que Ω pasa por el centro de inversión, por B y por C, $\wp(\Omega)$ es la recta BC. Además, tenemos que, por la parte 4 de *incírculos mixtilíneos*, $\angle BAJ = \angle CAV$, donde J era el punto de contacto entre BC y el $A-$excírculo ϵ. A esto sumamos que, por ángulos inscritos, $\angle AVC = \angle ABF$, lo que implica que $\triangle AVC = \triangle ABF$. Por tanto,

$$\frac{AV}{AC} = \frac{AB}{AJ} \Rightarrow AV \cdot AJ = (\sqrt{AB \cdot AC})^2 \quad \Rightarrow \quad \wp(V) = J.$$

Ahora, como ω no pasa por A, entonces $\wp(\omega)$ es un círculo. Dado que ω es tangente a las rectas AB y AC (las cuales se preservan con $\wp$), y pasando por V, tenemos que $\wp(\omega)$ es tangente a AB y a AC y que pasa por J. Por lo tanto, $\wp(\omega) = \epsilon$. Como S se encuentra sobre ω, entonces $\wp(S)$ se encuentra sobre ϵ. Por otro lado, tenemos por ángulos en Ω que $\triangle AIB \sim \triangle ACI_A$, lo cual implica que $AI \cdot AI_A = AB \cdot AC$ de donde $\wp(I_A) = I$. Por lo tanto, lo que buscamos demostrar es que $\wp(I_A) = I$, $\wp(V) = J$ y $\wp(S)$ son colineales.
Para esto, tracemos la tangente a ϵ por $\wp(S)$, hasta intersecar a BC (i.e. la tangente a ϵ por J) en K. Lo que queremos probar se reduce a que I está sobre la polar de K, lo cual ocurre si y solo si K está sobre la polar de I. Ahora, definimos a ϑ como el círculo que pasa por I, B, I_A, C. Denotemos con Q_C y con Q_B a las intersecciones de Ω y ϵ; y con P_C y con P_B a las intersecciones de ϑ y ϵ.



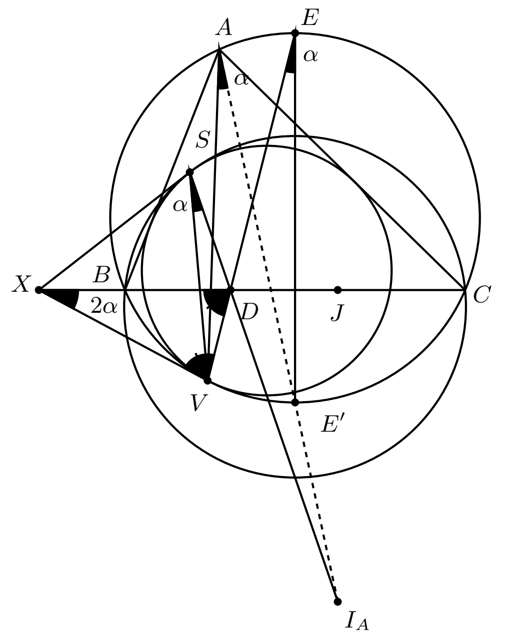
Sea γ el circuncírculo de $\triangle BSC$. Al usar ejes radicales es posible obtener las siguientes concurrencias:

- $\Omega, \epsilon, \wp(\gamma) \to$ los tres ejes radicales Q_CQ_B, $\wp(S)K$ y BC (misma recta que FK) concurren, en K.

- $\vartheta, \epsilon, \Omega \to$ los tres ejes radicales P_CP_B, Q_CQ_B y BC concurren.

Al combinar lo anterior obtenemos que P_CP_B, Q_CQ_B, $\wp(S)K$ y BC concurren en un mismo punto, K. Notemos que ϑ es un círculo de diámetro II_A, y que $I_AP_C = I_AP_B$, entonces $P_CP_B \perp II_A$. Si llamamos Y a la intersección de dichas perpendiculares, entonces sabemos que $\triangle I_AYP_C \sim \triangle I_AP_CI \Rightarrow I_AP_C^2 = I_AY \cdot I_AI \Rightarrow Y$ es el inverso de I en una inversión con respecto a ϵ. Como $\angle KYI_A = \angle P_BYI_A = 90° \Rightarrow K$ está sobre la polar de I, con lo que se demuestra el lema. $\square$

Sabemos que los tres ejes radicales de cada pareja de ω, Ω y γ concurren. El eje radical de Ω y ω es la tangente a ω por V; el eje radical de γ y ω es la tangente a ω por S y el eje radical de γ y ω es BC, por lo que existe un punto X sobre las tres rectas mencionadas, lo cual directamente implica que $XS = XV$.



Más aún, sabemos que $XD = XV$ ya que $\angle XVD = \angle XVE = \frac{\wideparen{VE}}{2} = \frac{\wideparen{VB}+\wideparen{BE}}{2} = \frac{\wideparen{VB}+\wideparen{EC}}{2} = \angle BDV = \angle XDV$. En otras palabras, X es el circuncentro de $\triangle SDV$. Llamemos $\angle DSV = \alpha$. Veamos, por ángulos en una circunferencia, que $2\alpha = \angle DXV$ implica que $\angle XDV = 90^\circ - \alpha$. Por lo anterior, si E' es el punto medio del arco $\wideparen{BC}$ que no contiene a A, notamos que $\angle XDV = \frac{\wideparen{VE}}{2} = 90^\circ - \frac{\wideparen{VE'}}{2} = 90^\circ - \angle VEE'$, lo cual implica que $\angle VEE' = \alpha$. Sabemos que A, E', I_A son colineales, ya que AI_A es bisectriz de $\angle BAC$, y que E' es punto medio del arco $\wideparen{BC}$ opuesto a A. Además, AI_AVS es cíclico; por lo tanto, $\angle VAI_A = \angle VSI_A$. Así, $\alpha = \angle VEE' = VAE' = \angle VAI_A = \angle VSI_A$. Por definición, tenemos $\angle VSD = \alpha$, entonces $\angle VSD = \angle VSI_A$, es decir, S, D, e I_A son colineales. Al combinar lo anterior con que P, D, I_A son colineales, concluimos la prueba. $\square$

Problemas olímpicos

1) (USAMO 1988, Problema 4) Se tiene un triángulo $\triangle ABC$ con incentro I. Prueba que los circuncentros de $\triangle IAB$, $\triangle IBC$ y $\triangle IAC$ se encuentran sobre un círculo cuyo centro es el circuncentro de $\triangle ABC$.

2) El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en un círculo Γ. Sea Γ_A el círculo tangente a Γ, AB, y AC (es decir, el círculo A-mixtilineal). Sea A' la intersección de Γ y Γ_A. De manera similar se definen B' y C'. Demuestra que AA', BB', y CC' concurren.

3) Sea Ω el circuncírculo de u triángulo $\triangle ABC$, y sean P, Q y R los puntos de tangencia de $\widehat{BC}$, AC y AB con el círculo A-mixtilineal, respectivamente. Sean Q' y R' los segundos puntos de intersección de PQ y PR con Ω, respectivamente. Sea K el punto de intersección de los circuncírculos de $\triangle AQ'Q$ y $\triangle AR'R$. Demuestra que $AQ'KR'$ es un paralelogramo.

4) (EGMO 2018, Problema 5) Sea Γ la circunferencia que pasa por los vértices de un triángulo $\triangle ABC$. Una circunferencia Ω es tangente al segmento AB y tangente a Γ en un punto situado al mismo lado de la recta AB que C. La bisectriz del ángulo $\angle BCA$ interseca a Ω en dos puntos distintos, P y Q. Demuestra que $\angle APB = \angle QBC$.

5) (Olimpiada de Japón, 2009) El triángulo $\triangle ABC$ está inscrito en Γ. Se traza un círculo con centro O, tangente a BC en P, y tangente internamente al arco $\widehat{BC}$ de Γ que no contiene a A en el punto Q. Demuestra que si $\angle BAO = \angle CAO$, entonces $\angle PAO = \angle QAO$.

6) (APMO 2006) Sean A, B dos puntos distintos sobre una circunferencia O y sea P el punto medio del segmento AB. Sea O_1 el círculo tangente a AB en P y también tangente al círculo O. Sea l la linea tangente, distinta a AB, a O_1 que pasa por A. Sea C la intersección de l y O, tal que $C \neq A$. Sea Q el punto medio del segmento BC y O_2 el círculo tangente a BC en Q y tangente al segmento AC. Prueba que el círculo O_2 es tangente al círculo O.

7) (EGMO 2013, Problema 5) Sea Ω el circuncírculo de $\triangle ABC$. El círculo ω es tangente a los lados del triángulo, y es tangente internamente a Ω en P. Una línea paralela a AB que pasa por el interior del triángulo $\triangle ABC$ es tangente a ω en Q. Prueba que $\angle ACP = \angle QCB$.

Agradecimientos

Extendemos nuestro agradecimiento a Kevin William Beuchot Castellanos y a Juan Carlos Ortiz Rhoton, quienes ayudaron a resolver el Ejemplo 4.4 hasta el cansancio.

Bibliografía

1) Ayme Jean-Louis. *A new Mixtilinear circle adventure I.* St. Denis, Île de la Réunion, Océan Indiene, France.
`http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/Mixtilinear1.pdf`.

2) Bulajich Manfrino Radmila, Gómez Ortega José Antonio. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2002.

3) Chen Evan. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Washington, The Mathematical Association of America, MAA Problem Book Series, 2016.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2018. Queremos agredecer y felicitar en esta ocasión a Oriol Andreu Solé Pi por su aportación con los Problemas 16, 17 y 18; así como a Diego Hinojosa Tellez por su aportación con el Problema 19 y también a Pablo Alhui Valeriano Quiroz y Eric Iván Hernández Palacios por su aportación con el Problema 20. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Pablito escogió un entero positivo n y escribió las siguientes n fracciones en el pizarrón:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \ldots, \frac{n-1}{n-(n-1)}.$$

Si n es divisible por el entero positivo d, demuestra que entre las fracciones escritas hay una que es igual a $d-1$.

Problema 2. El número 999 tiene la propiedad de que es divisible por 27 y que sus dígitos suman 27. El número de cuatro dígitos 7749 también cumple que es divisible por 27 y que sus dígitos suman 27. Muestra que los números de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ que cumplen esta propiedad, son exactamente los que satisfacen $a+b+c+d=27$ y $3 \mid c-b$.

Problema 3. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$\frac{a^3}{a^2+bc} + \frac{b^3}{b^2+ca} + \frac{c^3}{c^2+ab} \geq \frac{1}{2}.$$

Problema 4. Hay 268 tarjetas numeradas alrededor de una circunferencia. En la otra cara de cada tarjeta se escribió un número entero positivo. Se sabe que el número en la tarjeta 17 es 3, el número en la tarjeta 83 es 4, el número en la tarjeta 144 es 9 y que la suma de los números escritos en cualesquiera 20 tarjetas consecutivas es 90. ¿Qué número se escribió en la tarjeta 210?

Problema 5. Un entero positivo se llama "cuate" si no tiene dígitos 0 y la suma de los cuadrados de sus dígitos es un cuadrado perfecto. Por ejemplo, 122 y 34 son cuates pero 304 y 12 no lo son. Demuestra que existe un número cuate con n dígitos, para cada entero $n > 1$.

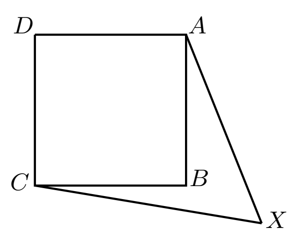
Problema 6. Muestra que para cualesquiera $n \geq m \geq 1$ enteros, el número $\frac{\mathrm{mcd}(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ es un entero.

Problema 7. Sea z un número real distinto de 0. Demuestra que si $|z^3 + \frac{1}{z^3}| \leq 2$, entonces $|z + \frac{1}{z}| \leq 2$.

Problema 8. Sea n un entero positivo. En una fila se acomodaron $2n + 1$ fichas, cada una es blanca o es negra. Una ficha se dice "balanceada" si la cantidad de fichas blancas a su izquierda más la cantidad de fichas negras a su derecha es igual a n. Determina si la cantidad de fichas balanceadas es par o impar.

Problema 9. Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos n tales que $2^n - 8$ es múltiplo de n.

Problema 10. Sea $ABCD$ un cuadrado de lado 1 cm y sea X un punto tal que $XA = \sqrt{5}$ cm y $XC = \sqrt{7}$ cm, como se muestra en la figura.



Determina la medida, en cm, de XB.

Problema 11. Dos enteros positivos a y b son "amigos" si el producto ab es un cuadrado perfecto. Demuestra que: (i) Si a es amigo de b y b es amigo de c, entonces a es amigo de c; (ii) Si a es amigo de b, entonces a es amigo de d, donde d es el máximo común divisor de a y b; (iii) Si x es el menor número que es amigo de a, entonces x divide a todos los amigos de a.

Problema 12. Halla todas las parejas de números primos (p, q) tales que $p^{q+1} + q^{p+1}$ es un cuadrado.

Problema 13. Sean u, v, w números complejos de módulo 1. Demuestra que se pueden elegir signos $+$ o $-$ tales que $| \pm u \pm v \pm w| \leq 1$.

Problema 14. Sea n un entero mayor o igual que 3. A cada subconjunto no vacío del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ se le asocia un punto distinto en el plano, de modo que si tres subconjuntos A, B y C se intersecan, esto es, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$, entonces sus puntos correspondientes son colineales en el plano. Demuestra que todos los puntos son colineales.

Problema 15. Decimos que un número natural n es "abundante" si la suma de sus divisores positivos es mayor que el doble de n. Encuentra un número abundante impar y demuestra que hay una infinidad de números abundantes impares.

Problema 16. Sea S un subconjunto de $9n$ elementos de $\{1, 2, 3, \ldots, 12n\}$, con n un entero positivo. Encuentra el mínimo número de parejas (a, b) de elementos distintos de S que cumplen que $a \mid b$ o $b \mid a$.

Problema 17. Determina si existe una sucesión infinita de enteros positivos (no necesariamente distintos) $a_0 = 1, a_1, a_2, \ldots$ que cumpla que: para todo entero positivo n y cualquier partición del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ en dos partes, la suma de los elementos de uno de los conjuntos de la partición no divide a la suma de los elementos del otro conjunto.

Problema 18. Hay m gusanos en la esquina inferior izquierda de un tablero de $n \times n$. Cada gusano puede moverse únicamente hacia arriba y hacia la derecha. Supongamos que en algún momento a cada casilla del tablero la atravezó al menos un gusano. Encuentra el menor valor que puede tomar m.

Problema 19. Encuentra todos los conjuntos S de n puntos en el plano, con $n \geq 3$, en posición general (es decir, que no haya tres colineales) con la siguiente propiedad: si A, B, C son puntos en S, entonces el circuncentro del triángulo ABC está en S.

Problema 20. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y, se cumple que

$$f(x + y) - f(f(x) - x - y) = xf(y) - (x + y)f(y - x).$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Supongamos que $n = kd$ para algún entero positivo k. Entonces, en el pizarrón está la fracción $\frac{n-k}{k} = \frac{kd-k}{k} = d - 1$.

Solución del problema 2. Notemos que si el número $\overline{abcd}$ cumple lo requerido, entonces $a + b + c + d = 27$. Para la segunda condición veamos que

$$\begin{aligned}
\overline{abcd} &= 10^3a + 10^2b + 10c + d = (9+1)^3a + (9+1)^2b + (9+1)c + d \\
&= (9^3 + 3\cdot 9^2 + 3\cdot 9 + 1)a + (9^2 + 2\cdot 9 + 1)b + (9+1)c + d \\
&= (9^3 + 3\cdot 9^2 + 3\cdot 9)a + 9^2b + (2\cdot 9b + 9c) + a + b + c + d \\
&= 27((27 + 9 + 1)a + 3b + b) + (-9b + 9c) + 27
\end{aligned}$$

como en la expresión anterior todo es múltiplo de 27 salvo $-9b + 9c$, que el número sea divisible por 27 es equivalente a que $27 \mid -9b + 9c$, lo cual equivale a que $3 \mid c - b$, que es lo que se quería demostrar.

Solución del problema 3. Observemos que $\frac{a^3}{a^2+bc} = \frac{a^3+abc-abc}{a^2+bc} = a - abc \cdot \frac{1}{a^2+bc}$. Aplicando la desigualdad MA-MG, tenemos que $a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2bc} = 2a\sqrt{bc}$. Luego,

$-\frac{1}{a^2+bc} \geq -\frac{1}{2a\sqrt{bc}}$. Por lo tanto, $\frac{a^3}{a^2+bc} \geq a - abc \cdot \frac{1}{2a\sqrt{bc}} = a - \frac{1}{2}\sqrt{bc} \geq a - \frac{b+c}{4}$, donde la última desigualdad se obtiene aplicando la desigualdad MA-MG.
De manera análoga obtenemos que $\frac{b^3}{b^2+ca} \geq b - \frac{c+a}{4}$ y $\frac{c^3}{c^2+ab} \geq c - \frac{a+b}{4}$. Finalmente, sumando las tres desigualdades obtenidas y usando que $a+b+c=1$, obtenemos que

$$\frac{a^3}{a^2+bc} + \frac{b^3}{b^2+ca} + \frac{c^3}{c^2+ab} \geq a+b+c - \frac{1}{4}(2b+2c+2a) = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}.$$

Solución del problema 4. Dado que la suma de cualesquiera 20 tarjetas consecutivas es constante, se debe cumplir que $t_1 = t_{21}$, donde t_i es la tarjeta con el número i. Luego, tenemos a lo más 20 números distintos escritos en las tarjetas, $t_1, t_2, \ldots, t_{20}$. Así, $t_{261} = t_1$ y, si empezamos a contar desde ahí, tenemos que $t_{261+20-268} = t_{13} = t_1$, $t_{14} = t_2, \ldots, t_{20} = t_8$. Ahora, $t_{13} = t_{13+20(12)} = t_{253} = t_{253+20-268} = t_5$. De manera análoga, obtenemos que $t_{14} = t_6, \ldots, t_{20} = t_{12}$. Repitiendo el proceso anterior varias veces, obtenemos las siguientes relaciones: $t_9 = t_1 = t_{13} = t_5 = t_{17}, t_{10} = t_2 = t_{14} = t_6 = t_{18}, t_{11} = t_3 = t_{15} = t_7 = t_{19}, t_{12} = t_4 = t_{16} = t_8 = t_{20}$, de modo que hay solo 4 números distintos y cada uno aparece 5 veces. Como ya tenemos los números 3, 4, 9, estos suman $5 \times (3+4+9) = 80$, de modo que el número que falta es 2. Por último, veamos que $t_{210} = t_{10}$ que no está en el mismo grupo que t_{17}, $t_{83} = t_3$ o $t_{144} = t_4$, de modo que $t_{210} = 2$.

Solución del problema 5. Veamos que para $n = 2$, el número 34 es cuate y, para $n = 3$, el número 122 es cuate. Ahora, cualquier número n puede escribirse como $n = k^2 + r$, donde $r < 2k+1$ es la diferencia con el mayor cuadrado menor o igual que n. Veamos que el número $55\ldots53434\ldots34$ es un número cuate de n dígitos, donde el dígito 5 se repite $n-2r$ veces y el bloque 34 se repite r veces. Lo anterior es posible porque $r \leq 2k \leq k^2 = n - r$ para $k \geq 2$. Es decir, para $n \geq 4$, $n \geq 2r$. Por lo tanto, en total, el número tiene $(n-2r) + 2r = n$ dígitos y la suma de los cuadrados de sus dígitos es $5^2(n-2r) + (3^2+4^2)r = 25(n-2r+r) = 25(n-r)$, que es un cuadrado, pues $n - r = k^2$.

Solución del problema 6. Sean $a = \frac{m}{\text{mcd}(m,n)}$ y $b = \frac{n}{\text{mcd}(m,n)}$. Tenemos que

$$\frac{a}{b}\binom{n}{m} = \frac{m}{n}\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1},$$

el cual es entero. Entonces, b divide al producto $a\binom{n}{m}$, pero a y b son primos relativos, lo que implica que b divide a $\binom{n}{m}$. Por lo tanto, $\frac{\text{mcd}(m,n)}{n}\binom{n}{m} = \frac{1}{b}\binom{n}{m}$ es un entero.

Solución del problema 7. Notemos que $z^3 + \frac{1}{z^3} = (z+\frac{1}{z})(z^2 + \frac{1}{z^2} - 1) = (z + \frac{1}{z})((z+\frac{1}{z})^2 - 3)$. Supongamos, por contradicción, que $|z + \frac{1}{z}| > 2$. Entonces,

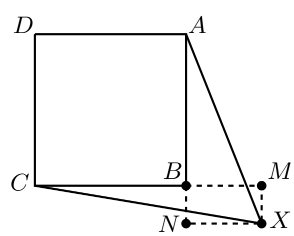
$$\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| = \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 3\right| \geq \left|z + \frac{1}{z}\right| \cdot \left|\left|z + \frac{1}{z}\right|^2 - |3|\right|,$$

pues $|a-b| \geq ||a|-|b||$ para cualesquiera números reales a y b.
Luego, $|z^3+\frac{1}{z^3}| > 2(4-3) = 2$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $|z+\frac{1}{z}| \leq 2$.

Solución del problema 8. Supongamos que hay en total k fichas blancas y $2n+1-k$ fichas negras. Empezamos con el arreglo donde están acomodadas primero las k fichas blancas y luego las negras. No es difícil ver que exactamente una de las fichas es balanceada. Efectivamente, veamos que si $n = k+r$, con $r > 0$, entonces la ficha $2n+1-r$ es la única balanceada y si, en cambio, $n = k-r$, entonces la ficha r es la única balanceada.
Veamos ahora qué sucede cuando una ficha blanca se mueve hacia la derecha y pasa por encima de una ficha negra, es decir, si intercambiamos $...BN...$ por $...NB...$ y todo lo demás permanece igual. Si al inicio, el valor de la ficha blanca es $b+m$, el valor es el mismo para la ficha negra (pues la ficha negra tiene una blanca más a su izquierda pero una negra menos -sí misma- a su derecha). Luego del cambio, el valor de ambas es $b+m-1$, pues la blanca pierde una negra a su izquierda y la negra pierde una blanca a su derecha. Luego, tanto antes como después del movimiento tenemos que o ambas fichas son balanceadas o ninguna lo es. Es fácil ver que podemos obtener cualquier acomodo general a partir de nuestro acomodo inicial y con una cantidad finita de movimientos como los descritos. Como los movimientos no cambian la paridad y al inicio hay una única ficha balanceada, la cantidad de fichas balanceadas en todo acomodo es impar.

Solución del problema 9. Demostraremos que todos los enteros de la forma $n = 3p$ con $p > 3$ número primo, satisfacen que $2^n - 8$ es múltiplo de n. Por el teorema pequeño de Fermat tenemos que $2^p \equiv 2 \pmod{p}$, lo cual implica que $2^{3p} - 8 = (2^p)^3 - 8 \equiv 2^3 - 8 \equiv 0 \pmod{p}$. Por otra parte, como $2 \equiv -1 \pmod{3}$ y $3p$ es un entero impar, tenemos que $2^{3p} \equiv (-1)^{3p} \equiv -1 \pmod{3}$ y, por lo tanto, $2^{3p}-8 \equiv -1-8 \equiv 0 \pmod{3}$. Como 3 y p son primos relativos, se sigue que $2^{3p} - 8 \equiv 0 \pmod{3p}$.

Solución del problema 10. Tracemos desde el punto X las perpendiculares XM y XN sobre CB y AB, respectivamente. Así, $BMXN$ es un rectángulo. Sean $a = BM = NX$ y $b = BN = MX$ las longitudes de los lados de $BMXN$.



Por el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ANX y CMX, obtenemos que $AN^2 + NX^2 = AX^2$ y $CM^2 + MX^2 = XC^2$, esto es, $(1+b)^2 + a^2 = 5$ y $(1+a)^2 + b^2 = 7$. Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos que $2(a-b) = 7-5$, de donde $a = b+1$. Luego, $(1+b)^2 + (b+1)^2 = 5$ y, en consecuencia, $(b+1)^2 = \frac{5}{2}$. Por lo tanto, $b = \sqrt{\frac{5}{2}} - 1$ y $a = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo BMX, obtenemos que $XB^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} - 2\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 = 6 - \sqrt{10}$, de donde $XB = \sqrt{6 - \sqrt{10}}$ cm.

Solución del problema 11. (i) Si a es amigo de b y b es amigo de c, entonces los números ab y bc son cuadrados perfectos, digamos $ab = m^2, bc = n^2$, para m, n enteros positivos. Entonces, $ac = \frac{(ab)(bc)}{b^2} = (\frac{mn}{b})^2$ es un cuadrado perfecto.
(ii) Sea d el máximo común divisor de a y b. Se tiene entonces que $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son primos relativos. Como sabemos que a y b son amigos, entonces $ab = (\frac{a}{d})(\frac{b}{d})(d^2)$ es un cuadrado perfecto. Como d^2 es un cuadrado y $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}$ son primos relativos, cada uno debe ser un cuadrado. Tenemos entonces que $ad = (\frac{a}{d})(d^2)$ es también un cuadrado, por ser el producto de dos cuadrados.
(iii) Procedemos por contradicción. Supongamos que x es el menor amigo de a pero que x no divide a todos los amigos de a. Sea b un amigo de a que no es divisible por x. Luego, b y x también son amigos por (i). Además, d, su máximo común divisor, menor a ambos, es amigo de ambos por (ii) y es amigo de a por (i). Hemos encontrado un amigo de a menor a x, lo que es una contradicción. Luego, el menor amigo de a debe dividir a todos sus otros amigos.

Solución del problema 12. Si $p = q = 2$, entonces $p^{q+1} + q^{p+1} = 2^3 + 2^3 = 16 = 4^2$, así que el par $(2, 2)$ cumple. Supongamos que al menos uno de p y q es impar y, sin pérdida de generalidad, supongamos que es p. Luego, si $p^{q+1} + q^{p+1} = x^2$ para algún entero positivo x, entonces $p^{q+1} = (x - q^{(p+1)/2})(x + q^{(p+1)/2})$, con $\frac{p+1}{2}$ entero. Sea d el máximo común divisor de $x - q^{(p+1)/2}$ y $x + q^{(p+1)/2}$. Tenemos que $d \mid p^{q+1}$. Si $d > 1$, entonces $d = p^r$ para algún entero $r \geq 1$. Entonces, $p \mid d$ y $d \mid x - q^{(p+1)/2} - (x + q^{(p+1)/2}) = -2q^{(p+1)/2}$. Como p es impar y divide a $2q^{(p+1)/2}$, se sigue que $p \mid q$ y, por lo tanto, $p = q$. Luego, $2p^{p+1} = x^2$, de donde $x = \sqrt{2}p^{(p+1)/2}$, lo cual implica que $\sqrt{2}$ es racional, lo que es un absurdo. Por lo tanto, $d = 1$. Así, $x - q^{(p+1)/2} = 1$ y $x + q^{(p+1)/2} = p^{q+1}$. De aquí que $2q^{(p+1)/2} = p^{q+1} - 1$. Si q es impar, entonces $q \equiv 1$ o $3 \pmod 4$ y $2q^{(p+1)/2} \equiv 2 \pmod 4$, mientras que $p^{q+1} - 1 \equiv 0 \pmod 4$ (pues $p = 2a + 1$ y $q + 1 = 2b$ implican que $p^{q+1} = (2a + 1)^{2b} = (4a^2 + 4a + 1)^b \equiv 1 \pmod 4$). Por lo tanto, $q = 2$. Tenemos entonces que $2^{(p+3)/2} = p^3 - 1 = (p - 1)(p^2 + p + 1)$, de donde $p - 1$ y $p^2 + p + 1$ son potencias de 2. Como $p^2 + p + 1$ es impar (pues p es impar), la única posibilidad es $p^2 + p + 1 = 2^0 = 1$, esto es, $p^2 + p = 0$, lo cual es imposible. En conclusión, la única solución es $(2, 2)$.

Solución del problema 13. Sean u, v, w puntos sobre la circunferencia unitaria. Se sabe que el ortocentro h del triángulo uvw tiene coordenadas $u + v + w$. Si el triángulo uvw es acutángulo, h está dentro del triángulo uvw y se cumple que $|u + v + w| \leq 1$. Si el triángulo uvw no es acutángulo, digamos que tiene un ángulo obtuso en w, cambiamos w por $w' = -w$. Ahora, el triángulo uvw' es acutángulo y $h' = u + v - w$ está dentro del triángulo uvw' y, por lo tanto, $|u + v - w| \leq 1$.

Solución del problema 14. Comenzamos probando el siguiente resultado.
Lema. Si un conjunto del plano satisface que cualesquiera tres de sus puntos son colineales, entonces todos los puntos son colineales.

Demostración: En efecto, sean a y b dos puntos fijos y x cualquier otro punto. Claramente a y b están en la recta ab. Además, la terna a, b, x está sobre la misma recta y, por lo tanto, x está en la recta ab. Así, todos los puntos están en la recta ab. $\square$

Ahora, para cada i sea $\mathcal{F}_i$ la familia de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tiene a i. Claramente cualesquiera tres de ellos se intersecan, pues tienen a i. Así, por el lema anterior los puntos asociados están en una misma recta ℓ_i.

Afirmamos que todas las rectas ℓ_i son la misma. Supongamos que este no es el caso. Entonces existen rectas ℓ_i y ℓ_j distintas. Estas se tienen que intersecar, pues ambas tienen al punto correspondiente a $\{i, j\}$, y este es su único punto de intersección. Pero tenemos al menos un elemento $k \neq i$ y $k \neq j$. El conjunto $\{i, j, k\}$ también tiene que estar en ℓ_i y en ℓ_j, pero ya no hay otro punto donde pueda estar. Esto es una contradicción. Esto muestra que todas las rectas ℓ_i son una misma recta ℓ y, por lo tanto, todos los puntos son colineales.

Solución del problema 15. Sea $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ la factorización en potencias de primos. Entonces, $S(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{a_2}) \cdots (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{a_k})$ es la suma de los divisores positivos de n (ver el artículo *"El Teorema Fundamental de la Aritmética"* de Tzaloa No. 1, año 2013). Buscamos un n impar tal que $S(n) > 2n$. Es decir, tal que

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{a_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{a_2})\cdots(1+p_k+p_k^2+\cdots+p_k^{a_k}) > 2p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k},$$

esto es,

$$(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots+\frac{1}{p_1^{a_1}})(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots+\frac{1}{p_2^{a_2}})\cdots(1+\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^2}+\cdots+\frac{1}{p_k^{a_k}}) > 2.$$

Como cada $p_i > 0$, cada uno de los factores del lado izquierdo en la desigualdad anterior también es positivo y, en particular, mayor que 1. Sabemos que si a y b son mayores que 1, entonces $ab > a$ y $ab > b$. Luego, si encontramos un número impar abundante, podemos encontrar una infinidad. En efecto, agregando un nuevo factor primo q, se tiene que $S(nq) = S(n)(1 + \frac{1}{q})$ y, como $1 + \frac{1}{q} > 1$, entonces $S(nq) > S(n) > 2n$. Luego, basta verificar que $n = 3^3 \times 5 \times 7$ cumple, pues $S(n) = 1920 > 2 \cdot 945 = n$.

Solución del problema 16. Primero, analicemos las parejas de la forma $(a, 2a)$ con $a \in \{1, \ldots, 6n\}$. Por el principio de las casillas, tenemos que habrá al menos $3n$ de dichas parejas en S. Ahora, tomemos las parejas de la forma $(b, 3b)$ con $b \in \{1, \ldots, 4n\}$. Otra vez por principio de las casillas sabemos que habrá al menos otras n de las parejas en S. Así, hay al menos $4n$ parejas de elementos distintos en S que satisfacen el problema. Pero, con $S = \{3n+1, 3n+2, \ldots, 12n\}$ se tienen exactamente $4n$ parejas. En efecto, no hay parejas de la forma (c, dc) con $d \geq 4$ pues, si existiera, se tendría que $dc \geq 4 \cdot (3n+1) = 12n + 4 > 12n$, lo cual es una contradicción. Además, no hay elementos de la forma $(c, 2c)$ y $(2c, 4c)$, pues habría un elemento de la forma (c, dc) con $d \geq 4$.

Solución del problema 17. Sí existe. Basta construir la sucesión elemento por elemento de forma que se cumplan dos cosas: 1) la suma de los primeros m términos de la sucesión es un número primo y 2) cada término de la sucesión es mayor que 1. Lo anterior siempre se puede hacer porque hay infinitos números primos;

así, siempre se puede escoger a un número primo p_m que sea mayor que la suma de los primeros m elementos más uno, para cualquier entero positivo m; por tanto, $a_m = p_m - a_0 - a_1 - \cdots - a_{m-1} - 1$.
Ahora, las sumas de los elementos en los conjuntos de la partición deberán ser números primos relativos y mayores a 1, así que no son divisibles entre sí. En efecto, si la suma de cada parte de la partición tuviera un primo común como divisor, entonces la suma de todos los elementos tendría ese mismo primo como divisor positivo, lo cual es una contradicción porque la suma de los elementos de cualquier conjunto de la forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es un primo por construcción y todos los elementos de la sucesión son mayores que 1.

Solución del problema 18. Nos fijamos en la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la inferior derecha. Cada gusano pasa por, a lo más, una casilla de esta diagonal, así que: $m \geq n$. Por otro lado, es fácil construir un ejemplo para n gusanos. Una posibilidad es hacer que el i-ésimo gusano suba por la primera columna hasta la i-ésima fila, que atraviese toda la fila hasta la n-ésima columna y que termine en la casilla en la esquina superior derecha del tablero.

Solución del problema 19. Supongamos que hay un conjunto S que cumple con las condiciones del problema. Sean A, B y C tres puntos en S. Por hipótesis, el circuncentro O del triángulo ABC está en S. Además, se cumple que $OA = OB = OC$. Ahora, el circuncentro de AOB también pertenece a S. Si el circuncentro anterior lo denotamos con Q, notemos que Q es distinto de A, B y O, más aún, cumple que $QO = QA = QB$. Si $Q = C$, entonces A y B son las intersecciones de las circunferencias con centro en C y con centro en O y radio CO. En particular, ACO es equilátero. Así, basta con retomar los puntos A, B y C por A, C y O y repetir los pasos para poder asegurar que Q y C son distintos. Ahora, tomemos el circuncentro de QAB. Este va a ser un punto R tal que $RA = RQ = RB$. Si R es distinto de O, tendremos que Q, O y R son tres puntos en la mediatriz de AB, lo cual no es posible porque los puntos en S están en posición general; entonces, R tiene que ser O. Esto implica que $OA = OB = OQ = QA = QB$. Por lo anterior, OQB es equilátero. Si X es el circuncentro de OQB y Y es el circuncentro de OXB, observemos que Q, X, Y son colineales (están en la mediatriz de OB). Entonces, no existe ningún conjunto S que cumpla lo que buscamos.

Solución del problema 20. Si $x = y = 0$, tenemos por hipótesis que $f(0) = f(f(0))$. Luego, con $x = 0$ y $y = f(0)$, tenemos que $f(f(0)) - f(0) = -f(0)^2$. Pero, $f(0) = f(f(0))$, entonces $f(0)^2 = 0$, por lo que $f(0) = 0$. Luego, con $x = 0$, vemos que $f(y) - f(-y) = -yf(y)$, por lo que $(y+1)f(y) = f(-y)$. Así, si $k = -y$, entonces $f(k) = (-k+1)f(-k)$. Ahora, como tenemos que $f(-y) = (y+1)f(y)$ para todo número real y, entonces sustituimos $y = k$ y obtenemos que $f(-k) = (k+1)f(k)$. Por tanto, para todo número real k, $f(k) = (-k+1)f(-k) = (-k+1)((k+1)f(k)) = (1-k^2)f(k)$, por lo que $f(k) = (1-k^2)f(k)$ para todo número real k. Así, si $f(k)$ es distinto de 0, entonces al dividir entre $f(k)$ a la expresión anterior queda que $1 = 1-k^2$, lo cual pasa si y solo si $k = 0$. En conclusión, si k es distinto de 0, $f(k) = 0$. Pero, ya teníamos que $f(0) = 0$; por lo tanto, $f(x) = 0$ para todo número real x.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2018 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. En esta ocasión, queremos agradecer y felicitar a Pablo Alhui Valeriano Quiroz y Eric Iván Hernández Palacios por ser autores del Problema 7; así como a Bruno Gutiérrez Chávez, por ser autor del Problema 9; y nuevamente a Eric Iván Hernández Palacios, por ser autor del Problema 10.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean x, y, z números reales tales que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Demuestra que

$$(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Problema 2. Para un entero positivo a, se obtiene el entero a' de la siguiente manera: la escritura decimal de a' es la inversa de la escritura decimal de a (es posible que a' empiece con un 0, pero no es posible para a). Por ejemplo, si $a = 2370$, entonces $a' = 0732 = 732$. Sea a_1 un entero positivo y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ la secuencia definida por a_1 y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + a'_n$. ¿Es posible que a_7 sea primo?

Problema 3. Un rectángulo $\mathcal{R}$ con lados enteros impares es dividido en pequeños rectángulos con lados enteros. Prueba que existe al menos un rectángulo, de entre estos rectángulos mas pequeños, tal que la distancia de cada uno de sus lados al rectángulo $\mathcal{R}$ son todos enteros impares o son todos enteros pares.

Problema 4. Demuestra que el número $7^{(2^{20})} + 7^{(2^{19})} + 1$ tiene al menos 21 divisores primos distintos.

Problema 5. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ y $\angle EDC = \angle CBA$. Demuestra que la perpendicular por E a BC y los segmentos AC y BD concurren.

Problema 6. Sean n un número compuesto y sean $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < n$ todos sus divisores positivos. Se sabe que $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1$ son todos los divisores positivos de algún entero positivo m, excepto 1 y m. Encuentra todos los enteros n que cumplen esto.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sean D, E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que BC es paralela a DE. Sean ℓ_1 y ℓ_2 las mediatrices de AD y AE, respectivamente y llámese a su intersección O. Denotemos con M a la intersección de ℓ_1 con DE y con N a la de ℓ_2 con DE. Prueba que AO, BM y CN concurren.

Problema 8. Sea $p \geq 2$ un número primo. Eduardo y Fernando juegan el siguiente juego haciendo movimientos alternadamente: en cada movimiento el jugador en turno escoge un índice del conjunto $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ que no ha sido escogido por ninguno de los dos jugadores con anterioridad y después escoge un elemento a_i del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eduardo juega primero. El juego termina después de que todos los índices $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ han sido escogidos. Después se calcula el valor de la suma

$$\sum_{i=0}^{p-1} 10^i a_i.$$

El objetivo de Eduardo es que la suma anterior sea divisible por p y el objetivo de Fernando es lo contrario. Demuestra que Eduardo tiene estrategia ganadora.

Problema 9. Sea ABC un triángulo que satisface que $3AB = BC + CA$. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea I el incentro de ABC. Además, P y Q son los puntos de tangencia del A-excírculo con BC y del B-excírculo con AC, respectivamente[2]. Sean X, Y y Z las intersecciones de AP con BD, AI con FD y EF con BI, respectivamente. Demuestra que X, Y y Z son colineales.

Problema 10. Sea n un entero positivo y sea k el mayor entero tal que para cada primo p que divide a $2^n + 1$, 2^k divide a $p - 1$. Demuestra que 2^k no divide a n.

[2]Para la definición de A-excírculo se puede consultar el artículo de este número.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2017 No. 4.

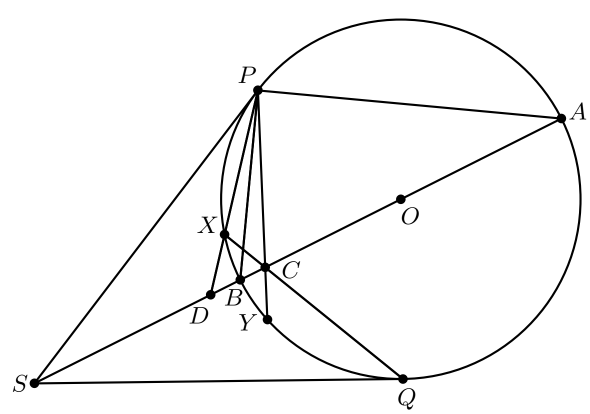
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2017. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2018, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean x, y números reales diferentes de 0 tales que $x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$. Determina todos los valores posibles de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Solución. Sea $E = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Observe que $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy(x + y)$; es decir, $(x + y)^3 - x^3y^3 = 3xy(x + y) - 3x^2y^2$. Así, $(x + y - xy)((x + y)^2 + (x + y)xy + x^2y^2) = 3xy(x + y - xy)$. Por tanto, se cumple que $x + y - xy = 0$ o $(x + y)^2 + (x + y)xy + x^2y^2 = 3xy$. El primer caso implica que $E = 1$, lo cual se puede obtener con $x = y = 2$. Si se multiplica la segunda igualdad por 2, se obtiene que $2(x + y)^2 + 2(x + y)xy + 2x^2y^2 - 6xy = 0$, esto es, $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2x^2y^2 - 6xy = 0$, que es equivalente a la relación $x^2(y + 1)^2 + y^2(x + 1)^2 + (x - y)^2 = 0$. Como x, y no pueden ser cero, entonces la última igualdad solo es posible si $x = y = -1$. Para el caso anterior, $E = -2$, el cual se puede obtener con $x = y = -1$. Por lo tanto, los únicos valores posibles de E son -2 y 1.

Problema 2. Dado un círculo con centro O y un punto exterior S, sean P y Q los puntos de tangencia de las tangentes que pasan por S. La recta SO corta al círculo en A y B con B más cerca de S. Sea X un punto interior del arco menor $\widehat{PB}$ y sean C y D las intersecciones de QX y PX con OS, respectivamente. Prueba que $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$.

Solución. Extendamos el rayo PC para que interseque al arco $\widehat{QB}$ en Y.



Por simetría, los arcos $\widehat{BX}$ y $\widehat{BY}$ son congruentes, de manera que $\angle CPB = \angle YPB = \angle BPX = \angle BPD$. Luego, PB es la bisectriz del ángulo $\angle CPD$. Como $\angle APB$ es recto, PA es la bisectriz externa del ángulo $\angle CPD$ y, por el teorema de la bisectriz (caso interno y externo), tenemos que $\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{AD}$, de donde $\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD}$. Usando las relaciones $BC = AB - AC$ y $BD = AD - AB$, obtenemos que $\frac{AB-AC}{AC} = \frac{AD-AB}{AD}$. Luego, $\frac{AB}{AC} - 1 = 1 - \frac{AB}{AD}$ y, por lo tanto, $AB(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}) = 2$, que es equivalente a lo que se quería demostrar.

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales que satisface lo siguiente:

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \text{ para cada } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Encuentra el valor de $P(m)$ para cada entero $m > n$.

Solución. Notemos que la condición dice que el polinomio $Q(x) = (x+1)P(x) - x$ de grado $n+1$ tiene como raíces a los números en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$, por lo tanto el polinomio $Q(x)$ se puede factorizar de la siguiente manera

$$Q(x) = ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

Por otro lado, al sustituir $x = -1$ en la definición de $Q(x)$ se tiene que $Q(-1) = 1$; combinando esto con la factorización obtenemos que $1 = a(-1)^{n+1}(n+1)!$, de donde se tiene que $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, por lo tanto

$$(x+1)P(x) - x = Q(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

Luego, se tiene que $P(m) = \dfrac{1}{m+1}\left((-1)^{n+1}(m-n)\binom{m}{n+1} + m\right)$.

Problema 4. Un examen tiene 5 preguntas de opción múltiple, cada una con 4 opciones. Si 2000 estudiantes presentan el examen, encuentra el menor entero positivo n para el cual es posible que, si se escogen n estudiantes al azar, existan siempre 4 de ellos de manera que cualquier par de esos cuatro tenga a lo más tres respuestas iguales.

Solución. Cada examen lo podemos representar como $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ donde cada a_i es un número entre 1 y 4 que corresponde a la respuesta escogida de la pregunta i.
Ahora, para cada elección de la respuesta a la primera pregunta, hay 256 posibles formas de terminar el examen, de modo que por el principio de casillas (como $2000 = 256 \cdot 7 + 192$) hay al menos 8 alumnos que coincidieron en las últimas 4 preguntas. Ponemos a esos 8 alumnos aparte y repetimos el argumento con 1992 alumnos, encontrando 8 que coincideron en las últimas 4 preguntas, los ponemos aparte y de los 1984 restantes hallamos 8 que coinciden en las últimas 4 preguntas.
Entre los 24 alumnos que se seleccionaron, si se toman 4 al azar, habrá dos que coincidan en las últimas cuatro preguntas (y por tanto, en más de tres preguntas), con lo cual se demuestra que $n \geq 25$.

Veamos que con $n = 25$ sí es posible. Considera el conjunto de los exámenes tales que la suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ es un múltiplo de 4. Observemos que si dos exámenes en ese conjunto contienen 4 respuestas en común, la quinta también lo será. Por tanto, cuatro valores de a_i determinan al quinto y hay 256 elementos del conjunto.
Lo anterior quiere decir también que dos elementos distintos del conjunto no pueden tener más de tres respuestas iguales en común. Si escogemos 250 elementos del conjunto, y que cada uno de ellos haya sido entregado 8 veces, se consiguen 2000 exámenes y hay 8 grupos de alumnos. Si se escogen 25 resultados, como $25 = 3 \cdot 8 + 1$, por el principio de las casillas debe haber 4 alumnos en un mismo grupo y estos cumplen lo requerido, de manera que con $n = 25$ sí existe forma de lograrlo.

Problema 5. Determina el mayor entero positivo n tal que la suma

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

sea un número primo. (Nota: $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución. Consideremos la sucesión infinita (a_n) de números naturales, definida por $a_n = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Es fácil ver que esta sucesión es no decreciente. Además,

$$k = \sqrt{k^2} < \sqrt{k^2+1} < \cdots < \sqrt{k^2+2k} < \sqrt{k^2+2k+1} = k+1,$$

de modo que la sucesión contiene cada número natural k exactamente $2k+1$ veces. Para cada número natural n, sean $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ y $k = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Entonces, $n = k^2 + \ell$ para algún $\ell \in \{0, 1, \ldots, 2k\}$. Luego, usando las relaciones $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ y $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, obtenemos que

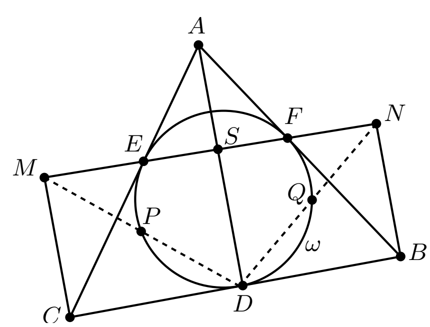
$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=1}^{k-1} i(2i+1) + k(\ell+1) = 2\sum_{i=1}^{k-1} i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} i + k(\ell+1)\\
&= 2\frac{(k-1)(k-1+1)(2(k-1)+1)}{6} + \frac{(k-1)(k-1+1)}{2} + k(\ell+1)\\
&= \frac{(k-1)k(2k-1)}{3} + \frac{k(k-1)}{2} + k(\ell+1) = \frac{(k-1)k(4k+1)}{6} + k(\ell+1).
\end{aligned}$$

Supongamos que $k > 6$ y sea p un número primo tal que $p \mid k$.
Si p es primo relativo con 6, entonces $6p \mid (k-1)k(4k+1)$ (pues p divide a k y 6 divide a $(k-1)k(4k+1)$), de donde se sigue que $p \mid \frac{(k-1)k(4k+1)}{6}$. Luego, $p \mid s_n$ y $s_n > k(\ell+1) \geq k \geq p$, de donde s_n no es primo.
Ahora, si $p = 2$, entonces $k = 2j$ para algún entero $j > 3$ (pues $k > 6$). Luego, $\frac{(k-1)k(4k+1)}{6} = \frac{(2j-1)j(8j+1)}{3}$. Si j es par, entonces $\frac{(2j-1)j(8j+1)}{3}$ es par y s_n es par. Como $6 < k < s_n$, se sigue que s_n no es primo. Si j es impar, entonces j tiene un divisor primo impar q. Si $q \neq 3$, entonces q divide a $\frac{(2j-1)j(8j+1)}{3}$ y, por ende, q divide a s_n. Como $q \leq j < k < s_n$, resulta que s_n no es primo. Si $q = 3$, entonces $j = 3i$ para algún entero $i > 1$ (pues $j > 3$). Luego, $\frac{(2j-1)j(8j+1)}{3} = (6i-1)i(24i+1)$ y, como $i > 1$, existe un primo r que divide a i, de donde se sigue que r es divisor de $\frac{(2j-1)j(8j+1)}{3}$ y, por lo tanto, r es un divisor primo de s_n. Como $r \leq i < j < k < s_n$,

se sigue que s_n no es primo.
Finalmente, si $p = 3$, entonces $k = 3j$ para algún entero $j > 2$ (pues $k > 6$). Entonces, $\frac{(k-1)k(4k+1)}{6} = \frac{(3j-1)j(12j+1)}{2}$. Si j es impar, entonces j tiene un divisor primo impar q (pues $j > 2$) y, por ende, q es divisor de $\frac{(3j-1)j(12j+1)}{2}$ (pues q y 2 son primos relativos). Así, q es un divisor primo impar de s_n. Como $q \leq j < k < s_n$, se sigue que s_n no es primo. Si j es par, entonces $j = 2i$ para algún entero $i > 1$ (pues $j > 2$). Entonces, $\frac{(3j-1)j(12j+1)}{2} = (6i-1)i(24i+1)$ y existe un primo r tal que $r \mid i$. Luego, r es un divisor primo de $\frac{(3j-1)j(12j+1)}{2}$ y, por ende, de s_n. Como $r \leq i < j < k < s_n$, se sigue que s_n no es primo.
Esto muestra que s_n no es primo si $k > 6$. Por lo tanto, $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq 6$, de donde $n < (6+1)^2 = 49$. Si $n = 48$, entonces $s_{48} = 203 = 7 \cdot 29$, que no es primo. Si $n = 47$, entonces $s_{47} = 197$ que es primo. Así, el mayor entero positivo n tal que s_n es primo, es 47.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El incírculo ω del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta perpendicular a BC desde C interseca a EF en el punto M. De manera similar, sea N el punto de intersección entre la perpendicular de BC desde B con la recta EF. La recta DM interseca de nuevo a ω en el punto P. Análogamente, sea Q el segundo punto de intersección de DN con ω. Demuestra que $DP = DQ$.

Solución. Sea S el punto de intersección de EF y la altura del triángulo ABC desde A. Dado que BN, AS y CM son paralelas, los triángulos BNF y ASF son semejantes, al igual que los triángulos ASE y CME. Por lo tanto, $\frac{BN}{AS} = \frac{BF}{AF}$ y $\frac{AS}{CM} = \frac{AE}{CE}$.



Al multiplicar las dos igualdades anteriores se obtiene que $\frac{BN}{CM} = \frac{BF}{AF} \cdot \frac{AE}{CE}$. Por ser tangentes a una circunferencia desde un mismo punto, se sabe que $AE = AF$, $BF = BD$ y $CE = CD$. Así, $\frac{BN}{CM} = \frac{BF}{EC} = \frac{BD}{DC}$. Se sigue del criterio LAL que los triángulos BDN y CDM son semejantes. Por tanto, $\angle BDN = \angle CDM$. Dado que los ángulos anteriores son seminscritos a ω, se tiene que los arcos $\widehat{DQ}$ y $\widehat{DP}$ son iguales; es decir, $DP = DQ$.

Problema 7. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc \geq 1$. Demuestra que

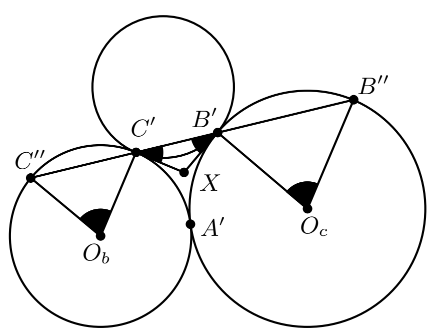
$$\frac{1}{a^3 + 2b^3 + 6} + \frac{1}{b^3 + 2c^3 + 6} + \frac{1}{c^3 + 2a^3 + 6} \leq \frac{1}{3}.$$

Solución. Observemos que por la desigualdad entre la media aritmética y la media geométrica, $a^3+b^3+1\geq 3ab$ y $b^3+1+1\geq 3b$. Entonces, $\frac{1}{a^3+2b^3+6}\leq\frac{1}{3ab+3b+3}$. Así, basta demostrar que $S=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+c+1}+\frac{1}{ca+a+1}\leq 1$.
Como $abc\geq 1$, entonces $\frac{1}{ab^2c+abc+ab}\leq\frac{1}{ab+b+1}$ y $\frac{1}{abc+ab+b}\leq\frac{1}{ab+b+1}$. Por lo tanto,

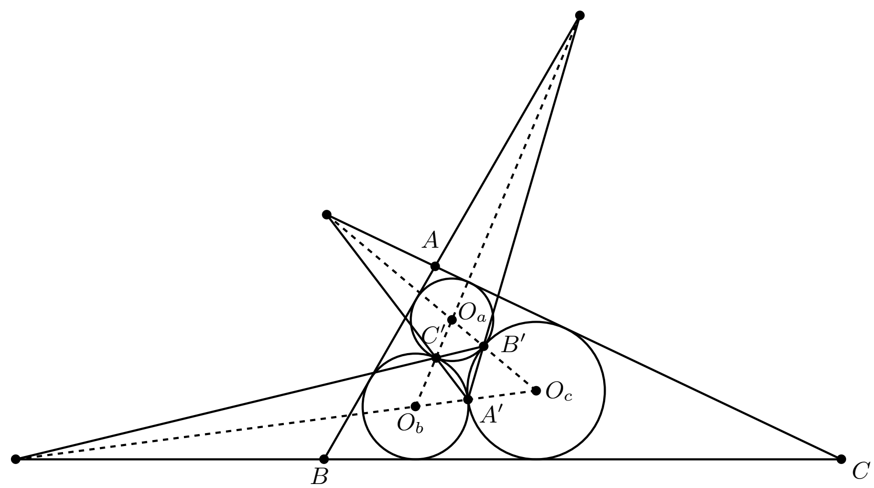
$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab^2c+abc+ab}+\frac{b}{abc+ab+b}\\&\leq\frac{1}{ab+b+1}+\frac{ab}{ab+b+1}+\frac{b}{ab+b+1}=\frac{ab+b+1}{ab+b+1}=1.\end{aligned}$$

Problema 8. Sean ω_a, ω_b y ω_c tres circunferencias que son tangentes exteriormente por pares. El triángulo ABC contiene en su interior a ω_a, ω_b y ω_c de manera que BC es tangente común de ω_b y ω_c, CA es tangente común de ω_c y ω_a, AB es tangente común de ω_a y ω_b. Si los puntos de contacto de los pares de circunferencias (ω_b,ω_c), (ω_c,ω_a) y (ω_a,ω_b) son A', B' y C', respectivamente, demuestra que AA', BB' y CC' concurren.

Solución. Sean O_a, O_b y O_c los centros de las circunferencias ω_a, ω_b y ω_c, respectivamente. Consideremos X el punto de intersección de las tangentes comunes por B' y C' a los pares de circunferencias correspondientes. Como XB' y XC' son las tangentes desde X a ω_a se tiene que $XB'=XC'$, de donde se tiene que $\angle XC'B'=\angle C'B'X$. Consideremos B'' y C'' (distintos de B' y C') puntos sobre ω_c y ω_b, respectivamente, de manera que B',B'',C' y C'' son colineales.



Puesto que los ángulos seminscritos asociados a los arcos $\widehat{B'B''}$ y $\widehat{C''C'}$ son iguales, los ángulos centrales asociados a estos mismos arcos coinciden, esto es, $\angle C'O_bC''=\angle B''O_cB'$, luego los triángulos isósceles $C'O_bC''$ y $B''O_cB'$ son semejantes, además los lados $C'C''$ y $B''B'$, son paralelos, esto implica que este par de triángulos son homotéticos con razón igual a la razón de los radios de las circunferencias ω_b y ω_c. Lo anterior significa que estos triángulos son homotéticos desde el centro de homotecia externo de este par de circunferencias. Por último, al ser BC tangente común externa a ω_b y ω_c, el centro de homotecia externo de estas circunferencias está sobre BC, esto junto con lo anterior implican que BC y $B'C'$ se intersecan en el centro de homotecia externo de las circunferencias ω_b y ω_c.



De manera análoga se puede concluir que $C'A'$ interseca a CA en el centro de homotecia externo de ω_c y ω_a, así como que $A'B'$ interseca a AB en el centro de homotecia externo de ω_a y ω_b. Aplicando el teorema de Menelao al triángulo $O_aO_bO_c$ con los centros de homotecia externos, se concluye que estos tres son puntos colineales, lo cual implica que ABC y $A'B'C'$ son triángulos en perspectiva desde una recta. Por el teorema de Desargues, lo anterior nos dice que ABC y $A'B'C'$ también están en perspectiva desde un punto, que es lo que se quería demostrar.

Problema 9. En una ciudad con n personas se sabe que si dos personas se conocen, entonces no tienen a ningún conocido en común. También se sabe que si dos personas no se conocen, entonces esas dos personas tienen exactamente dos conocidos en común. Demuestra que hay un número k fijo tal que cada persona en la ciudad conoce a exactamente k personas.

Solución. Supongamos que A y B son personas que se conocen y denotemos por M_A y M_B los conjuntos de conocidos por A y B, respectivamente. Por hipótesis $M_A \cap M_B = \emptyset$, además si $X \in M_B - \{A\}$, como X no conoce a A (y no es A), se debe de cumplir que X y A tienen exactamente dos conocidos, uno es B y el otro es un único X_A que es conocido de A, por lo tanto a cada $X \in M_B - \{A\}$ se le asocia un único X_A en $M_A - \{B\}$; de manera análoga a cada persona en $M_A - \{B\}$ se le asocia una única persona en $M_B - \{A\}$. Lo anterior implica que hay una biyección entre $M_B - \{A\}$ y $M_A - \{B\}$, lo cual quiere decir que la cantidad de personas que conoce A es igual a la cantidad de personas que conoce B.

Problema 10. Sea G una gráfica con $n \geq 4$ vértices y m aristas. Demuestra que si $m > \frac{n(\sqrt{4n-3}+1)}{4}$, entonces G contiene un 4-ciclo, esto es, un ciclo de longitud 4.

Solución. Contemos el número de ternas (v, a, b) tales que v es un vértice adyacente a los vértices a, b. Si $d(v)$ es el grado de v, entonces hay $d(v)(d(v) - 1)$ ternas que

inician con v. Entonces, el número de ternas es la suma de estos números corriendo sobre todos los vértices.
Como la suma de todos los grados es $2m$ y $x(x-1)$ es una función convexa, aplicamos la desigualdad de Jensen y obtenemos que la cantidad de ternas es al menos $n \cdot \left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{2m}{n}-1\right) = 2m\left(\frac{2m}{n}-1\right)$. Si no existen 4-ciclos, para cada a, b solo puede haber un v adyacente cuando mucho y, por tanto, hay a lo más $n(n-1)$ ternas de este estilo. De este modo, si

$$2m\left(\frac{2m}{n}-1\right) > n(n-1),$$

necesariamente habrá un 4-ciclo, es decir, si $4m^2-2nm-n^2(n-1) > 0$, que podemos considerar como un polinomio cuadrático en m y que tendrá valor positivo cuando m sea mayor que las dos raíces, lo cual, por la fórmula cuadrática, sucede cuando $m > \frac{n(\sqrt{4n-3}+1)}{4}$.

Competencia Internacional de Matemáticas 2017 (Nivel Elemental)

Este año celebramos el segundo concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB) que se llevó a cabo a principios de junio en Mérida, Yucatán. Tenemos ya la segunda pre-selección rumbo a la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) que nace de la OMMEB, hecha a la medida. Para seguir practicando, presentamos aquí los enunciados y las soluciones de la prueba individual en el nivel elemental (primaria) de la InIMC 2017, que se celebró en Locknow, India. En esa ocasión, México participó con dos equipos de nivel secundaria y con un equipo de primaria, obteniendo cuatro medallas de plata, cinco medallas de bronce y tres menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron dos medallas de plata. En el equipo de primaria, Jacobo de Juan Millón (Yucatán) y Luis Alejandro Alcaraz Orozco (Chihuahua) obtuvieron medalla de plata, Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León) obtuvo medalla de bronce y Fernando Álvarez Ruiz (Nuevo León) obtuvo mención honorífica.

Estos problemas están por encima del nivel necesario para ganar en una OMMEB, pero pueden ayudarte a dar una idea. A partir de lo que hemos visto en las primeras ediciones de la OMMEB, los consejos son simples: administra muy bien tu tiempo y valen mucho más un par de problemas bien resueltos que un montón de problemas con dudas. Por lo que hemos visto en los cortes de las dos primeras OMMEB, sacar la mitad de los puntos es suficiente -y en general más- para asegurar Plata y pre-selección; pero es importante notar que las personas con más experiencia, preparación y con la meta clara de ir a la Competencia Internacional obtienen mucho más que eso.

La IMC, al igual que la OMMEB, es muy estricta en cuanto a la presentación de las respuestas: para que sean tomadas en cuenta, deben estar escritas en la sección de la hoja marcada específicamente para que se escriba ahí la respuesta; para los problemas con solución, debe estar escrita necesariamente en una página, pues no se calificará más que eso. Si tu respuesta está correcta pero escrita en otro lugar de la hoja o tu solución tomó más de una página, simplemente no se tomará en cuenta. Como además no es posible hacer preguntas durante las pruebas, esto exige mucha responsabilidad de parte de los organizadores.

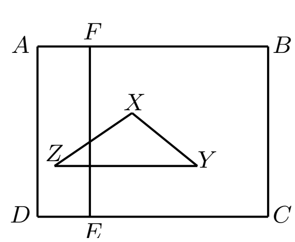
La prueba individual de la EMIC (Elementary Mathematics International Contest) consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas. Sin embargo, considera que estos problemas son para estudiantes de primaria y que los presentan en condiciones de extrema presión - para el caso de los mexicanos, normalmente es en un país muy lejos de casa, donde no entienden nada de lo que dicen las demás personas.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. La suma de los recíprocos de tres enteros positivos es 1. Sabemos que uno de ellos es múltiplo de 2 y que otro es múltiplo de 3. El cociente de dividir el múltiplo de 2 entre 2 se suma al cociente de dividir el múltiplo de 3 entre 3. ¿Cuál es la máxima suma que podría obtenerse?

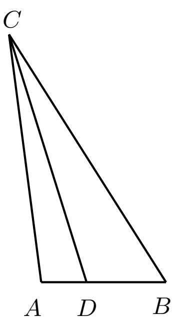
Problema 2. Weni corta una barra de pan en 10 rebanadas paralelas del mismo grosor, pero deja la barra pegada. Lia y Anggi encuentran la misma barra de pan y hacen lo mismo, pero con 15 y 18 rebanadas, respectivamente. Los cortes de todos son paralelos. Luego la barra de pan se separa en rebanadas. ¿Cuántas rebanadas habrá en total al final?

Problema 3. El rectángulo $ABCD$ tiene área 2016 cm^2. El punto E en CD y el punto F en AB cumplen que EF y AD son paralelas. La distancia del punto X hasta CD es el doble de la distancia de X hasta AB. La distancia del punto Y hasta AB es el doble de la distancia de Y hasta CD. La distancia del punto Z hasta AB es el doble de la distancia de Z hasta CD. La distancia del punto Y hasta EF es el doble de la distancia de Y hasta BC. La distancia del punto Z hasta EF es el doble de la distancia de Z hasta AD. Encuentra el área del triángulo XYZ en cm^2.



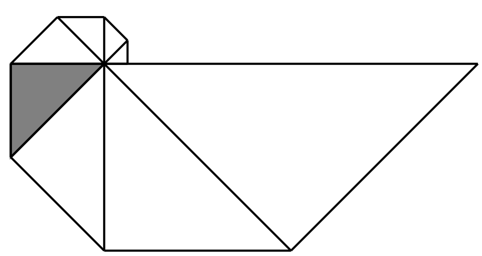
Problema 4. Dos jugadores A y B empiezan con 50 dólares cada uno. Por turnos juegan lanzando una moneda. Cuando cae "águila", el rival debe pagar 4 dólares. Cuando cae "sol", se deben pagar 3 dólares al rival. Después de que cada uno lanza la moneda 10 veces, el jugador A tiene 42 dólares más que el jugador B. Si el jugador A obtuvo águila 6 veces, ¿cuántas veces obtuvo águila el jugador B?

Problema 5. En el triángulo ABC, $\angle A = 2\angle B$, CD biseca el ángulo $\angle ACB$, $AC = 11$ cm y $AD = 2$ cm. Halla la medida de BC en centímetros.



Problema 6. Burton calcula el mínimo común múltiplo de los primeros n enteros positivos. Vargas hace el mismo cálculo, pero incluye los siguientes cuatro enteros positivos de la lista de Burton. Si ambos obtienen la misma respuesta, ¿cuál es el menor valor posible del mayor número en la lista de Burton?

Problema 7. La figura muestra ocho triángulos rectángulos isósceles acomodados alrededor de un punto. La hipotenusa de cada triángulo coincide con el cateto del triángulo que está pegado a él. Si el área total de los ocho triángulos juntos es 637.5 cm^2, encuentra el área del triángulo sombreado (en cm^2).

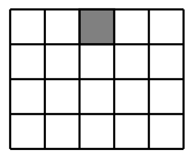


Problema 8. Mary escribe 2017 el primer día. Cada día que sigue ella escribe la suma de los cubos de los dígitos del número que escribió el día anterior. ¿Qué número escribirá Mary el día 2017?

Problema 9. ¿Cuántos números de 4 cifras hay tales que la suma de las primeras tres cifras es 20 y la suma de las últimas tres cifras es 17?

Problema 10. ¿De cuántas formas se pueden acomodar los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$ en un renglón de forma que la resta entre cada pareja de números adyacentes no sea 3?

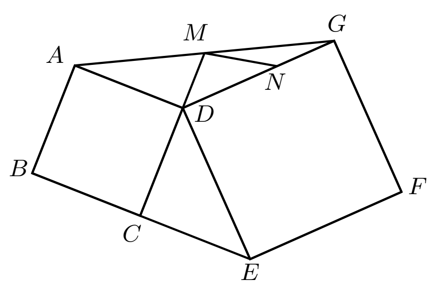
Problema 11. En la figura, el cuadrito del centro del renglón superior de un rectángulo de 4×5 está sombreado. ¿Cuántos rectángulos hay formados por algunos de esos 20 cuadrados que contengan al cuadrito sombreado?



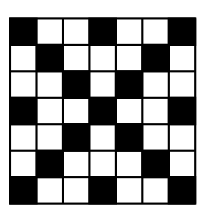
Problema 12. Angus escribe todos los números impares positivos del 1 al 2017. Luego borra todos los dígitos pares. ¿Cuántos dígitos quedan?

Problema 13. Un número de 2017 cifras empieza con el dígito 3. Todos los números de dos cifras formados por cifras adyacentes en ese número son múltiplos de 17 o bien múltiplos de 23. Sabemos que hay exactamente dos números que cumplen las condiciones anteriores. ¿Cuál es la diferencia positiva de ambos números?

Problema 14. Los cuadrados $ABCD$ y $DEFG$ cumplen que el punto E está en la extensión de BC. El punto M es punto medio de AG y DN mide el doble de GN. Si el área del triángulo DCE es 14 cm^2, encuentra el área del triángulo MDN en cm^2.



Problema 15. La figura muestra una cuadrícula de 7×7 con 17 cuadritos negros y 32 cuadritos blancos. Elige cualquier pareja de cuadritos, el primero negro y el otro blanco, que no tengan puntos en común. ¿Cuántas parejas diferentes hay?



Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es 4. El entero 1 puede expresarse como suma de recíprocos de tres enteros positivos de tres maneras distintas: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$. La primera no sirve porque ninguno de los enteros es múltiplo de 2 y la segunda tampoco sirve porque ninguno es múltiplo de 3. En la tercera tenemos varios casos posibles:

a) Si el número divisible entre 3 es 6, entonces el divisible entre 2 es 2; tenemos la suma $\frac{6}{3}+\frac{2}{2}=3$.

b) Si el número divisible entre 3 es 3 y el divisible entre 2 es 2, tenemos la suma $\frac{3}{3}+\frac{2}{2}=2$.

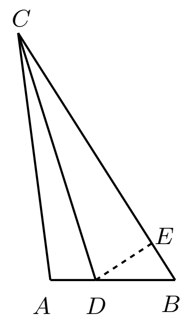
c) Si el número divisible entre 3 es 3 pero el divisible entre 2 es 6, tenemos la suma $\frac{3}{3}+\frac{6}{2}=4$.

Solución del Problema 2. La respuesta es 34. El mínimo común múltiplo de 10, 15 y 18 es 90. Tomamos una pieza de pan de 90 unidades. Weni hizo 9 cortes, Lia hizo 14 y Anggi 17. Si estos cortes no coinciden, entonces la cantidad de piezas es $9+14+17+1=41$. Sin embargo, veamos que Weni hizo un corte cada 9 unidades, Lia hizo un corte cada 6 unidades y Anggi cada 5 unidades. Entonces los cortes de Weni y Lia coinciden en 18, 36, 54 y 72 unidades; los cortes de Lia y Anggi coinciden en 30 y 60 unidades; los cortes de Anggi y Weni coinciden en la marca de las 45 unidades; y observa que, por la manera en que medimos el pan, no hay un lugar donde coincidan los tres cortes (pues el primero sería precisamente 90). Entonces, la cantidad de piezas es $41-(4+2+1)=34$.

Solución del Problema 3. La respuesta es 224 cm^2. La base YZ mide $\frac{2}{3}AB$ mientras que la altura de X a YZ mide $\frac{1}{3}AD$. Por lo tanto, el área del triángulo XYZ es $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times 2016=224$ cm^2.

Solución del Problema 4. La respuesta es 3. Luego de 10 lanzamientos, A tiene $\frac{100+42}{2}=71$ dólares y B tiene $\frac{100-42}{2}=29$ dólares. Sabemos que los lanzamientos de A cayeron seis veces águila, de modo que B pierde $6\times 4-4\times 3=12$ dólares de esa manera. Dado que B pierde $50-29=21$ dólares en total, $21-12=9$ dólares los perdió en sus propios lanzamientos. Si los lanzamientos de B no caen nunca águila, sus pérdidas hubieran sido 30 dólares, que son 21 más de lo que ocurrió. Cambiando un águila por sol representa una ganancia de 7 dólares. Luego, B sacó $\frac{21}{7}=3$ águilas.

Solución del Problema 5. La respuesta es 13 cm. Dado que $\angle A=2\angle B$, entonces $BC>AD$. Tomamos un punto E sobre el lado BC tal que $EC=AC$ y trazamos DE. Observa que los triángulos CED y CAD son congruentes, de modo que $ED=AD$.



Como $\angle BDE = \angle CED - \angle DBE = \angle A - \angle B = \angle B$, entonces tenemos que $BE = DE$. Por lo tanto, $BC = BE+CE = DE+CA = AD+AC = 2+11 = 13$.

Solución del Problema 6. La respuesta es 32. Si uno de nuestros cuatro números adicionales tiene un primo nuevo o un primo viejo elevado a una potencia mayor, eso va a hacer que el mínimo común múltiplo aumente. Nuestro primer candidato es 23, pues 24, 25, 26 y 27 no son primos. Sin embargo, tanto $25 = 5^2$ como $27 = 3^3$ causan problemas. El siguiente candidato es 31, pero $32 = 2^5$ causa problemas. Luego, el primero que funciona es 32, pues los números 33, 34, 35 y 36 no causan problemas.

Solución del Problema 7. La respuesta es 40 cm^2. Como son triángulos rectángulos isósceles, cada uno de los triángulos puede dividirse en dos triángulos iguales entre sí e iguales al anterior si trazamos la altura-mediana desde el vértice opuesto al lado mayor. Supongamos que el área del triángulo más pequeño es 1. Entonces, las áreas de los siguientes rectángulos son 2, 4, 8, 16, 32, 64 y 128, respectivamente; 255 en total. Luego, el área sombreada representa $\frac{16}{255}$ del total, que es 637.5 cm^2, es decir $\frac{637.5\times 16}{255} = 40$ cm^2.

Solución del Problema 8. La respuesta es 217. En el segundo día, Mary escribió $2^3 + 0^2 + 1^3 + 7^3 = 352$. En el tercer día escribió $3^3 + 5^3 + 2^3 = 160$. En el cuarto día escribió $1^3 + 6^3 + 0^3 = 217$. Como la suma de los cubos de los dígitos de 2017 es la misma que la de 217, tenemos un ciclo de longitud 3 y todos los días múltiplo de 3 escribe el 160. Como 2016 es múltiplo de 3, en el día 2017 escribe el 217.

Solución del Problema 9. La respuesta es 35. Como los dos dígitos de en medio se repiten en ambos casos, sabemos que el primer número es 3 unidades mayor que el último; además, si definimos la suma de los dos de en medio, los otros dos deben estar definidos. Lo más que pueden sumar los dos de en medio es 17 (si el último es 0) y lo menos que pueden sumar es 11 (si el primero es 9). Entonces, los dos de en medio pueden sumar $11, 12, \ldots, 17$. Si tomamos en cuenta que son dígitos, hay 8 parejas que suman 11; 7 parejas que suman 12 y así, hasta 2 parejas que suman 17. En total son $8+7+6+5+4+3+2 = 35$ parejas y, por lo tanto, 35 números de 4 dígitos que cumplen las condiciones.

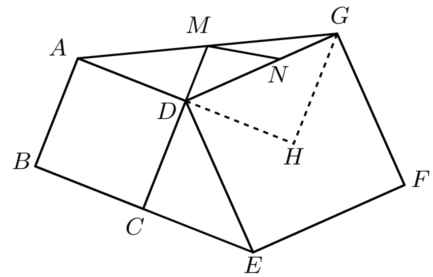
Solución del Problema 10. La respuesta es 240. Los dos números en cada una de las parejas $(1,4)$, $(2,5)$ y $(3,6)$ no pueden quedar adyacentes. Luego, tenemos cinco patrones básicos: $ABACBC$, $ABCABC$, $ABCACB$, $ABCBAC$, $ABCBCA$, donde dos letras iguales representan los números de una misma pareja. Para elegir qué número es A tenemos 6 opciones, para elegir qué número es B tenemos 4 opciones y, para elegir qué número es C, quedan 2 opciones. (Otra manera de resolverlo es pensar que son 3 opciones de pareja para A, 2 opciones para B y una opción para C, y que cada pareja todavía tiene 2 opciones para acomodarse). En total son $5 \times 6 \times 4 \times 2 = 240$ maneras posibles.

Solución del Problema 11. La respuesta es 36. Vamos a numerar las líneas de la cuadrícula de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha. Las líneas verticales son $H1$, $H2$, $H3$, $H4$, $H5$, y las verticales son $V1$, $V2, \ldots, V6$. Observa que nuestro rectángulo siempre debe incluir $H1$. La otra línea horizontal puede ser cualquiera de $H2$, $H3$, $H4$ o $H5$, son 4 opciones. Ahora, podemos hacer parejas de líneas verticales tomando alguna de $V1$, $V2$ o $V3$ y alguna de $V4$, $V5$ o $V6$; son $3 \times 3 = 9$ parejas posibles. Una vez que elegimos nuestras 3 líneas, el rectángulo queda determinado de manera única. Entonces tenemos $4 \times 9 = 36$ rectángulos posibles.

Solución del Problema 12. La respuesta es 2513. Al principio tenemos 5 números de un dígito, 45 números de 2 dígitos, 450 de 3 dígitos y 509 números de 4 dígitos. Es decir, tenemos $5 + 90 + 1350 + 2036 = 3481$ dígitos en total. Vamos a contar los dígitos pares según la posición y luego los restamos.
(i) Como todos los números son impares, no hay ningún dígito par en las unidades.
(ii) De los números del 10 al 2009, la mitad tiene un dígito par en las decenas. Son 2000 números, de los cuales 1000 números son impares; luego, son 500 dígitos menos (contamos hasta el 2009 porque ninguno desde 2010 y hasta 2017 cumple).
(iii) De los números del 100 al 1899, la mitad tiene un dígito par en las centenas. Son 1800 números, de los cuales 900 son impares; luego, son 450 dígitos menos. Del 1900 al 1999 ninguno tiene dígito par en las centenas pero del 2000 al 2017 todos lo tienen. Son 459 dígitos menos.
(iv) En las unidades de millar, los números $2001, 2003, \ldots, 2017$ son los únicos impares que tienen dígito par. Son 9 dígitos menos.
Tenemos entonces $3481 - 500 - 249 - 9 = 2513$ dígitos restantes.

Solución del Problema 13. La respuesta es 717. Los múltiplos de 17 menores que 100 son 17, 34, 51, 68 y 85. Los múltiplos de 23 menores que 100 son 23, 46, 69 y 92. Observa que para cada dígito del 1 al 9 existe un múltiplo que termina en ese dígito o empieza en ese dígito, con la excepción del 7 (no hay ningún 70) y del 6 (hay dos 60). Esto nos dice varias cosas: (1) si el 17 aparece en la lista, debe ser el número final; (2) para cada dígito excepto el 6, existe una única manera de continuar la lista. Sin embargo, si usamos 68 en lugar de 69, estamos obligados a seguir con 85, 51, 17. Es decir, la cadena 68517 solo puede usarse al final, por (1). Sabiendo que la lista empieza en 3 y usando lo anterior, el número empieza 34, 46, 69, 92, 23, es decir, el bloque 34692 se repite (a) hasta terminar el número, (b) todo el número excepto al final. Como es un bloque de 5 dígitos, sabemos que los primeros 2010 dígitos de los dos números posibles son iguales, de modo que únicamente nos importan los últimos 7. Uno de los números termina en 3469234, mientras que el otro cambia en el dígito 6, es decir, 3468517, exactamente 7 dígitos. La diferencia entre ellos es simplemente $3469234 - 3468517 = 717$.

Solución del Problema 14. La respuesta es $\frac{14}{3}$ cm^2. Extendamos el segmento AD hasta un punto H tal que GH sea perpendicular a AH. Como E está sobre la prolongación de BC, tenemos que $\angle ECD = 90° = \angle GHD$.



Observa que $\angle GDH + \angle HDE = 90° = \angle HDE + \angle EDC$, de modo que $\angle GDH = \angle EDC$. Como tenemos también que $GD = ED$, entonces los triángulos GHD y ECD son congruentes. Luego, $GH = CE$ y, por lo tanto, la distancia de G a AD es igual a CE. Así, los triángulos ADG y CDE tienen la misma área. Se sigue que el área del triángulo DMG es $14 \times \frac{1}{2} = 7$ cm^2 y el área del triángulo MDN es $7 \times \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ cm^2.

Solución del Problema 15. La respuesta es 464. Hay $32 \times 17 = 544$ parejas de cuadrados de distinto color. Vamos a eliminar aquellas que comparten vértice fijándonos en la posición del cuadrado negro.
(i) Cada uno de los 4 cuadrados negros de las esquinas comparte puntos con 2 cuadrados blancos. Son $4 \times 2 = 8$ parejas menos.
(ii) Cada uno de los 4 cuadrados negros de las orillas del tablero comparte puntos con 5 cuadrados blancos. Son $4 \times 4 = 20$ parejas menos.
(iii) El cuadrado negro central comparte puntos con 4 cuadrados blancos. Son 4 parejas menos.
(iv) Cada uno de los restantes 8 cuadrados negros dentro del tablero comparte puntos con 6 cuadrados blancos. Son $8 \times 6 = 48$ parejas menos.
Luego, el total de parejas buscadas es $544 - 8 - 20 - 4 - 48 = 464$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Del 18 al 22 de junio de 2018 se llevó a cabo la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe en la Habana, Cuba. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos Katia García Orozco (Chihuahua), Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Darío Hinojosa Delgadillo (Nuevo León) y Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Leonardo Ariel García Morán (tutor).

México ocupó el primer lugar general por países en el evento de un total de 12 países, quedando por encima de El Salvador, Colombia y Cuba, entre otros. Tomás y Diego obtuvieron medalla de oro, mientras que Darío y Katia obtuvieron medalla de plata. Todos ellos estudiantes de secundaria.

A continuación, presentamos los problemas de la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Se tienen 2018 tarjetas numeradas desde 1 hasta 2018. Los números de las tarjetas son visibles todo el tiempo. Tito y Pepe juegan tomando una tarjeta en cada turno hasta que se acaben, empezando por Tito. Cuando terminan de tomar todas las tarjetas, cada uno suma los números de sus tarjetas, y aquel que obtenga como resultado un número par gana el juego. Determine cuál jugador tiene una estrategia ganadora y explique por qué funciona.
Nota: Un jugador tiene una estrategia ganadora si sabe en cada turno cómo jugar para lograr la victoria, sin importar cómo juegue el otro jugador.

Problema 2. Sea ABC un triángulo inscrito en la circunferencia ω de centro O. Sean T el punto diametralmente opuesto a C y T' la reflexión de T con respecto a la recta AB. La recta BT' interseca a ω en un segundo punto R. La recta perpendicular a TC que pasa por O interseca a la recta AC en L. Sea N el punto de intersección de las rectas TR y AC. Pruebe que $CN = 2AL$.

Problema 3. Sean x, y números reales tales que los tres números

$$x - y, \;\; x^2 - y^2, \;\; x^3 - y^3$$

son positivos y números primos. Demuestre que $x - y = 3$.

Problema 4. Determine todas las ternas (p, q, r) de enteros positivos, donde p y q son números primos, tales que:

$$\frac{r^2 - 5q^2}{p^2 - 1} = 2.$$

Problema 5. Sea n un número entero tal que $1 < n < 2018$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ se define el polinomio:

$$S_i(x) = x^2 - 2018x + \ell_i$$

donde $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ son enteros positivos distintos. Si el polinomio $S_1(x) + S_2(x) + \cdots + S_n(x)$ tiene al menos una raíz entera, demuestre que al menos uno de los números $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ es mayor o igual que 2018.

Problema 6. En La Habana se realiza un baile con 2018 parejas. Para el baile, se dispone de una circunferencia donde inicialmente se marcan 2018 puntos distintos, etiquetados con los números $0, 1, \ldots, 2017$. Las parejas son ubicadas sobre los puntos marcados, una en cada punto. Para $i \geq 1$, se define s_i como el residuo (resto) de dividir i entre 2018 y r_i como el residuo de dividir $2i$ entre 2018. El baile comienza en el minuto 0. En el i-ésimo minuto después de iniciado el baile ($i \geq 1$), la pareja ubicada en el punto s_i (si la hay) se mueve al punto r_i, la pareja que ocupaba el punto r_i (si la hay) se retira, y el baile continúa con las parejas restantes. El baile termina después de 2018^2 minutos. Determine cuántas parejas quedarán al terminar el baile.
Nota: Si en el minuto i, $s_i = r_i$, la pareja que está en s_i (si la hay) se mantiene en su lugar y no sale del baile.

59ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 3 al 14 de julio de 2018 se llevó a cabo la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en la ciudad de Cluj-Napoca, Rumania. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León), Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León), Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa), Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México), Oriol Andreu Solé Pi (Ciudad de México) y Pablo

Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Marco Antonio Figueroa Ibarra (líder), Daniel Perales Anaya (tutor) y Luis Eduardo García Hernández (observador).

En esta ocasión, Víctor Antonio obtuvo medalla de plata; Oriol, Isaac, Pablo y Alfredo obtuvieron medalla de bronce y Eric obtuvo mención honorífica. México quedó en el lugar 36 de 107 países participantes.

A continuación presentamos los problemas de la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea Γ la circunferencia circunscrita al triángulo acutángulo ABC. Los puntos D y E están en los segmentos AB y AC, respectivamente, y son tales que $AD = AE$. Las mediatrices de BD y CE cortan a los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ de Γ en los puntos F y G, respectivamente. Demostrar que las rectas DE y FG son paralelas (o son la misma recta).

(Problema sugerido por Grecia)

Problema 2. Hallar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existen números reales $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$, tales que $a_{n+1} = a_1$ y $a_{n+2} = a_2$, y

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(Problema sugerido por Eslovaquia)

Problema 3. Un *triángulo anti-Pascal* es una disposición de números en forma de triángulo equilátero de tal manera que cada número, excepto los de la última fila, es el valor absoluto de la diferencia de los dos números que están inmediatamente debajo de él. Por ejemplo, la siguiente disposición es un triángulo anti-Pascal con cuatro filas que contiene todos los enteros desde 1 hasta 10.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Determinar si existe un triángulo anti-Pascal con 2018 filas que contenga todos los enteros desde 1 hasta $1 + 2 + \cdots + 2018$.

(Problema sugerido por Irán)

Problema 4. Un *lugar* es un punto (x, y) en el plano tal que x, y son ambos enteros positivos menores o iguales que 20.

Al comienzo, cada uno de los 400 lugares está vacío. Ana y Beto colocan piedras alternadamente, comenzando con Ana. En su turno, Ana coloca una nueva piedra roja en un lugar vacío tal que la distancia entre cualesquiera dos lugares ocupados por piedras rojas es distinto de $\sqrt{5}$. En su turno, Beto coloca una nueva piedra azul en cualquier lugar vacío. (Un lugar ocupado por una piedra azul puede estar a cualquier distancia de cualquier otro lugar ocupado). Ellos paran cuando alguno de los dos no pueda colocar una piedra.
Hallar el mayor K tal que Ana pueda asegurarse de colocar al menos K piedras rojas, sin importar cómo Beto coloque sus piedras azules.

(Problema sugerido por Armenia)

Problema 5. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Supongamos que existe un entero $N > 1$ tal que para cada $n \geq N$ el número

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

es entero. Demostrar que existe un entero positivo M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

(Problema sugerido por Mongolia)

Problema 6. Un cuadrilátero convexo $ABCD$ satisface $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. El punto X en el interior de $ABCD$ es tal que

$$\angle XAB = \angle XCD \quad \text{y} \quad \angle XBC = \angle XDA.$$

Demostrar que $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.

(Problema sugerido por Polonia)

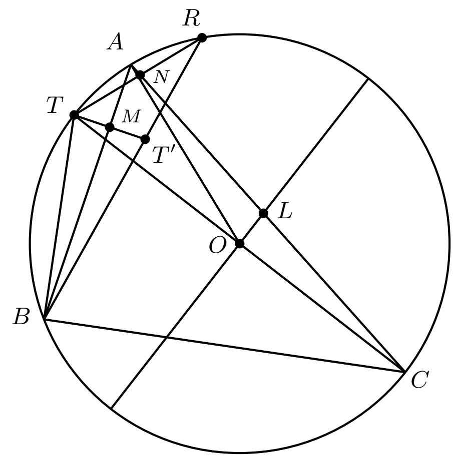
Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

A continuación presentamos las soluciones de la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Solución del problema 1. (Solución de Katia García Orozco). Gana el que tenga una cantidad par de cartas impares. La estrategia ganadora es del primer jugador y es así: El primer jugador toma una tarjeta par. No importa cuál tome el segundo, el primero tomará una de la misma paridad de esta. Hacemos esto hasta que el segundo jugador tome la última tarjeta impar de la mesa. Será el segundo jugador el que la tome, pues el primero lo está imitando. De esta forma nos aseguramos que el segundo jugador tenga una tarjeta más que el primero con un número impar y, a partir de entonces, ambos jugadores toman puras tarjetas pares. Por lo tanto, como hay 1009 tarjetas de número impar, el primero tendría $\frac{1009-1}{2} = \frac{1008}{2} = 504$ y el segundo tendría 505 ya que tiene una más. Así, el primero tiene una suma par de sus tarjetas impares independientemente de cuáles haya tomado el segundo. Como las demás tarjetas son pares, su suma total será par.

Solución del problema 2. (Solución de Darío Hinojosa Delgadillo). Sea M la intersección de AB y TT'. Sea $\angle ACT = \alpha$. Como $OA = OC$ por ser centro O, entonces $\angle ACT = \angle ACO = \angle CAO = \alpha$. Como abren el arco $\widehat{AT}$, $\angle ACT = \angle ABT$. Como $MT = MT'$, entonces $\angle TMB = \angle T'MB = 90^\circ$ y comparten MB, los triángulos BMT y BMT' son congruentes por el criterio LAL. Por lo tanto, $\angle ABT = \angle BMT = \angle MBT' = \alpha$, de donde $\angle TBR = 2\alpha$, lo cual implica que $\angle RBC = 90^\circ - 2\alpha$ y, por lo tanto, $\angle RTC = 90^\circ - 2\alpha$.



En el triángulo ALO tenemos que $\angle LAO = \alpha$, $\angle ALO = \angle LOC + \angle OCL = 90^\circ + \alpha$ y, por lo tanto, $\angle AOL = 180^\circ - \alpha - (90^\circ + \alpha) = 90^\circ - 2\alpha$. Ahora, en el triángulo CNT tenemos que $\angle NCT = \angle ACT = \alpha$ y $\angle NTC = \angle RTC = 90^\circ - 2\alpha$. Entonces entre estos dos triángulos tenemos que $\angle NTC = \angle AOL$ y $\angle LAO = \angle NCP$, lo cual implica que los triángulos ALO y CNT son semejantes, de donde se sigue que $\frac{AL}{CN} = \frac{AO}{CT} = \frac{1}{2}$ ya que CT es diámetro y AO es radio. Por lo tanto, $2AL = CN$, como queríamos demostrar.

Solución del problema 3. (Solución de Diego Alfonso Villarreal Grimaldo). Sean p, q y r números primos positivos tales que $x - y = p$, $x^2 - y^2 = q$ y $x^3 - y^3 = r$ para ciertos números reales x, y, z. Claramente, $\frac{q}{p} = x + y$ y esto implica que $p + \frac{q}{p} = (x - y) + (x + y) = 2x$, esto es, $\frac{p^2+q}{p} = 2x$. Por lo tanto, $x = \frac{p^2+q}{2p}$. Sea $i = p^2 + q$. Si i es impar, entonces $y = x - p = \frac{i}{2p} - p = \frac{i-2p^2}{2p}$ con $j = i - 2p^2$ impar. Luego,

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = p\left(\frac{i^2 + ij + j^2}{4p^2}\right) = r.$$

Tenemos entonces que $i^2 + ij + j^2 = 4pr$, lo cual implica que $i^2 + ij + j^2$ es par, lo que es una contradicción ya que i, j son impares. Por lo tanto, i es par, esto es, $i = 2a$ para algún entero positivo a. Se sigue que $j = i - 2p^2$ también es par, esto es, $j = 2b$ para algún entero positivo b. Por lo tanto, $x - y = \frac{a-b}{p} = p$, de donde $a - b = p^2$. En particular, $p \mid (a - b)$.
Por otro lado, sustituyendo $x = \frac{a}{p}$, $y = \frac{b}{p}$ en la relación $p(x^2 + xy + y^2) = r$, obtenemos que $p\left(\frac{a^2+ab+b^2}{p^2}\right) = r$, de donde $a^2 + ab + b^2 = pr$. Esto muestra que p también divide a $a^2 + ab + b^2$. Como p divide a $(a - b)^2$ (pues p divide a $a - b$), se sigue que p divide a la diferencia $a^2 + ab + b^2 - (a - b)^2 = 3ab$. Como p es primo, tenemos que $p \mid 3$ o $p \mid ab$.
Si $p \mid ab$, entonces $p \mid a$ o $p \mid b$ ya que p es primo. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $p \mid a$, esto es, $a = pk$ para algún entero positivo k. Entonces, $x =$

$\frac{a}{p} = k$, esto es, x es entero y, en consecuencia, $y = x - p$ también es entero. Luego, $x+y = \frac{q}{p}$ es entero, esto es, $p \mid q$. Como p y q son primos positivos, la única posibilidad es $p = q$. Entonces, $p = x - y = (x - y)(x + y) = q$, lo cual implica que $x + y = 1$. Por otro lado, como x, y son enteros, también $r = x^3 - y^3 = p(x^2 + xy + y^2)$ es entero y $p \mid r$. Como p y r son primos positivos, la única posibilidad es $p = r$. Luego, $x^2 + xy + y^2 = 1$. Por lo tanto, $(x + y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = 0$, de donde se sigue que $xy = 0$. Así, $x = 0$ o $y = 0$. Si $y = 0$, entonces $x = 1$ y $p = x - y = 1$, lo que es un absurdo puesto que p es primo y 1 no es primo. Ahora, si $x = 0$, entonces $y = 1$ y $p = x - y = -1$ que tampoco es primo. En conclusión, $p \nmid ab$.
Luego, $p \mid 3$ y, como p es primo positivo, la única posibilidad es $p = 3$, esto es, $x - y = 3$. (Observe que si $x = \frac{14}{3}$, $y = \frac{5}{3}$, entonces $x - y = 3$, $x^2 - y^2 = 19$ y $x^3 - y^3 = 97$ son números primos positivos).

Solución del problema 4. (Solución de Diego Alfonso Villarreal Grimaldo). Recordemos primero que todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 3 y que todo cuadrado es congruente con 0, 1 o 4 módulo 8.
Supongamos que $3 \nmid p$. Entonces, $p^2 \equiv 1 \pmod 3$, lo cual implica que $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Como p^2-1 divide a r^2-5q^2, se sigue que 3 divide también a r^2-5q^2, esto es, $r^2 - 5q^2 \equiv 0 \pmod 3$. Si ahora $3 \nmid q$, entonces $q^2 \equiv 1 \pmod 3$ y, en consecuencia, $r^2 \equiv 5 \equiv 2 \pmod 3$, lo cual no es posible. Por lo tanto, q es múltiplo de 3 y, como q es primo, la única posibilidad es $q = 3$. Luego, $r^2 - 5q^2 = r^2 - 45 \equiv 0 \pmod 3$. Como 45 es múltiplo de 3, resulta que $r^2 \equiv 0 \pmod 3$ y, como 3 es primo, obtenemos que $3 \mid r$. Supongamos que $r = 3k$ para algún entero positivo k. Entonces, $\frac{9k^2-45}{p^2-1} = 2$. Si $p = 2$, tenemos que $9k^2 - 45 = 6$, de donde $k^2 = \frac{17}{3}$ que no es entero. Por lo tanto, $p \neq 2$. Como p es primo, p debe ser impar, de modo que $p^2 \equiv 1 \pmod 8$, esto es, $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 8$. Esto implica que $r^2 - 45 \equiv 0 \pmod 8$, esto es, $r^2 \equiv 5 \pmod 8$, lo cual no es posible. Esto demuestra que $3 \mid p$ y, como p es primo, la única opción es $p = 3$. Luego, $r^2 - 5q^2 = 16$. Si q es impar, entonces $q^2 \equiv 1 \pmod 8$ y $5q^2 \equiv 5 \pmod 8$. Como $16 \equiv 0 \pmod 8$, resulta que $r^2 \equiv 5 \pmod 8$, lo cual no puede ser. Por lo tanto, q es par y, como q es primo, necesariamente $q = 2$. Luego, tenemos que $r^2 = 36$. Como r es positivo, la única posibilidad es $r = 6$. Así, tenemos que la única terna que satisface las condiciones del problema es $(p, q, r) = (3, 2, 6)$.

Solución del problema 5. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x^2 - \sum_{i=1}^{n} 2018x + \sum_{i=1}^{n} \ell_i = nx^2 - 2018nx + \sum_{i=1}^{n} \ell_i,$$
$$Q(x) = x^2 - 2018x + L,$$

donde $L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\ell_i}{n}$.
Sea m una raíz entera de $P(x)$. Como $nQ(x) = P(x)$ y $n \neq 0$, es fácil ver que m también es raíz de $Q(x)$. Sea r la otra raíz de $Q(x)$. Como $Q(x)$ es de grado 2 y mónico, tenemos que $Q(x) = (x - m)(x - r)$. Además, tenemos que $m + r = 2018$ y $mr = L$. Como $m+r$ es un entero y m también lo es, se sigue que r es entero también.

Además, como $m + r$ es un entero positivo, al menos uno de m o r debe ser positivo. Más aún, ambos m y r son positivos, pues si uno es positivo y el otro es negativo o cero, entonces mr sería negativo o cero, lo que es una contradicción ya que $mr = L > 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $m \geq r > 0$. Demostraremos que el valor mínimo que puede tomar L es 2017. Para esto, demostraremos que si aumenta la diferencia entre m y r, el producto mr disminuye, lo cual implicará que el mínimo producto rm se obtiene cuando $m - r$ es máximo. Sean $m_1 = m + k$ y $r_1 = r - k$ con k cualquier entero positivo. Entonces, $m_1 + r_1 = m + r = 2018$ y $m_1 r_1 = (m + k)(r - k) = mr + k(r - m) - k^2$. Como $r - m \leq 0$ y $-k^2 < 0$, tenemos que $m_1 r_1 < mr$.
Ahora, como $m \geq r \geq 1$, tenemos que $2018 = m+r \geq m+1$, de donde $m \leq 2017$ y, por tanto, $m - r \leq 2017 - 1 = 2016$. Así, el valor máximo de $m - r$ es 2016 y, por lo anterior, los valores correspondientes de m y r nos darán el valor mínimo del producto mr. Resolviendo el sistema de ecuaciones $m + r = 2018$ y $m - r = 2016$, obtenemos que $m = 2017$ y $r = 1$. Por lo tanto, $L = mr \geq 2017$.
Supongamos ahora que $\ell_i < 2018$ para $i = 1, \ldots, n$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\ell_1 < \ell_2 < \cdots < \ell_n$. Tenemos entonces que

$$\ell_n \leq 2018 - 1, \ell_{n-1} \leq 2018 - 2, \ldots, \ell_1 \leq 2018 - n,$$

lo cual implica que

$$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n \leq 2018 - (1 + 2 + \cdots + n) = 2018 - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por otra parte, tenemos que $L = \frac{\ell_1+\ell_2+\cdots+\ell_n}{n} \geq 2017$, esto es, $\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n \geq 2017n$. Entonces, $2017n \leq 2018 - \frac{n(n+1)}{2}$, esto es, $(4035+n)n \leq 4036$. Sin embargo, como $n > 1$, resulta que $(4035+n)n > 4035+1 = 4036$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, al menos uno de los números $\ell_1, \ldots, \ell_n$ es mayor o igual que 2018.

Solución del problema 6. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). El problema lo podemos replantear de la siguiente manera: Si existe una pareja en la posición i y otra en r_i, se va a perder la pareja de i (lo podemos ver no como que se mueve la de i, sino como que se sale. Como todas las parejas son iguales para fines del problema, no cambia nada).
Notemos las siguientes observaciones:

1) Las primeras 1009 parejas $P_1, P_2, \ldots, P_{1009}$ se van a perder, porque P_1 se sale en el minuto 1 pues la posición 2 tiene una pareja, P_2 se sale en el minuto 2 pues la posición 4 sigue ocupada, P_3 se sale en el minuto 3 y así sucesivamente hasta que la pareja P_{1009} se sale en el minuto 1009 pues la posición 2018 sigue ocupada. Como va en orden este proceso, efectivamente las parejas $P_1, P_2, \ldots, P_{1009}$, se salen en los minutos del 1 al 1009. Luego, despúes de estos 1009 minutos quedaron las parejas en las posiciones $0, 1010, 1011, \ldots, 2017$.

2) En los minutos del 1010 al 2018 cada pareja en las posiciones en el mismo intervalo de números se moverán a las posiciones $2, 4, 6, \ldots, 2016, 0$. Lo anterior se debe a

que estos son los residuos r_i que se obtienen cuando se varía i entre 1010 y 2018. Además, no se sale ninguna pues las posiciones a donde se van moviendo son todas distintas y si el lugar no estaba libre antes de todo este proceso, como se realiza en orden de tiempo se va liberando cada posición.

3) Reducimos a 1009 parejas en las posiciones pares. Como ya no se van a tocar residuos impares, solo analicemos los minutos pares y posiciones pares. El mismo procedimiento que en 1), muestra que las parejas en las posiciones $2, 4, 6, \ldots, 1008$ se salen, esto pues en cada minuto $2i$ la posición $4i \leq 2018$ está ocupada. Después de este tiempo quedan entonces las parejas en las posiciones $1010, 1012, \ldots, 2016, 0$.

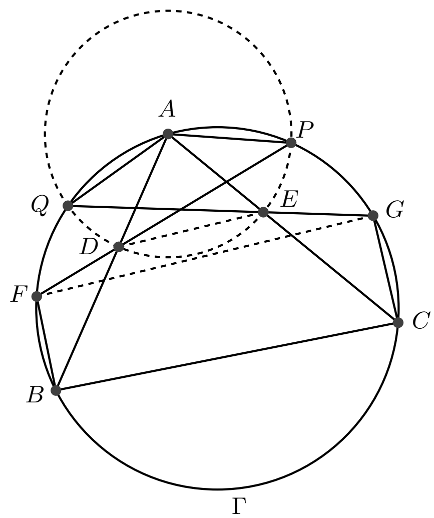
4) Así como 2), después de los minutos $2018 + 1010, 2018 + 1012, \ldots, 2018 + 2018$ sucede un fenómeno similar y todas las parejas se mueven salvo que ahora los saltos serán de 4 en 4 y empezando por la posición 2. Entonces las posiciones ocupadas ahora son las de la forma $4k + 2$ con k entre 0 y 504. Hasta ahora han transcurrido $2 \cdot 2018 = 4036$ minutos.

5) Por último, en los siguientes 1009 minutos la pareja en la posisición $4k + 2$ en ese mismo minuto pasará a estar en la posición $8k + 4$ (la cual está libre según hemos analizado el proceso) donde k varía entre 0 y 252. Y cada movimiento en cada minuto va dejando más pares consecutivos hasta que en el minuto 1009 todas las posicones pares mayores o iguales a 1010 están ocupadas y regresamos a la situación en 4). Hasta este momento han pasado $4036 + 1009 < 2018^2$ minutos, por lo analizado en este punto en este momento se cicla el proceso y no se elimina ninguna pareja, por lo tanto las parejas que prevalecen son un total de 505.

59ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Isaac Jair Jiménez Uribe). Sean $P \neq F$ la intersección de FD con Γ y $Q \neq G$ la intersección de GE con Γ. Como $BFAP$ es cíclico y $FB = FD$ por estar F en la mediatriz de BD, tenemos que $\angle FBD = \angle APD = \angle FDB = \angle ADP$, lo cual implica que $AP = AD = AE$.
Análogamente, como $CGAQ$ es cíclico y $GE = GC$ por estar G en la mediatriz de EC, tenemos que $\angle GCE = \angle AQE = \angle GEC = \angle AEQ$, lo cual implica que $AQ = AE = AD = AP$. Por lo tanto, $QDEP$ es cíclico con centro de su circunferencia circunscrita en A. Entonces, $\angle PDE = \angle PQE = \angle PQG = \angle PFG$, por ser $PGFQ$ cíclico. Luego, $\angle PDE = \angle PFG$ y, por lo tanto, DE y FG son paralelas.



Solución del problema 2. (Solución de Víctor Antonio Domínguez Silva). Demostraremos que los n que cumplen son los múltiplos de 3.
Denotemos los índices módulo n y extendamos a_i incluso con i negativo. Así, por ejemplo, $a_0 = a_n$, $a_{-1} = a_{n-1}$, etcétera.
Es posible que n sea múltiplo de 3, para esto consideremos la secuencia infinita

$$\ldots, -1, 2, -1, -1, 2, \ldots$$

claramente si a_i, a_{i+1} y a_{i+2} son tres términos consecutivos de la secuencia, entonces $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ (note que $(-1)(-1)+1 = 2$ y $(-1)2+1 = -1$). Además, $a_{3u+r} = a_{3l+r}$ para cualesquiera índices enteros u, l y r entero. Entonces podemos tomar una cantidad de elementos múltiplo de 3 de esta secuencia y la secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_{3u}$ formada por estos elementos ($u > 0$) funciona.
Supongamos que cierto n funciona. Demostraremos que:

1) no hay dos positivos consecutivos en la secuencia.

2) no hay un 0 en la secuencia.

3) no hay tres negativos consecutivos en la secuencia.

4) no hay un negativo entre dos positivos de la secuencia.

Esta demostración aplicará para la secuencia infinita. Así, la secuencia infinita tendrá siempre dos elementos negativos seguidos, luego un positivo, luego dos negativos, etcétera, luego a_1, a_2 son en ese orden a_{n+1}, a_{n+2}. Así, los signos de a_1, a_2 serán en ese orden, $(-,-), (-,+)$ o $(+,-)$. Es fácil ver que esos signos coinciden con los de a_{n+1}, a_{n+2} solamente cuando n es múltiplo de 3.

1) Si hay dos positivos, digamos a_i y a_{i+1}, el siguiente término a_{i+2} es positivo y mayor que 1. Por inducción, todos los elementos son positivos y mayores que 1, incluso a_i y a_{i+1}, pues la secuencia es periódica. Sea a_{i+1} el más grande de esta secuencia, luego $a_{i+1} \geq a_{i+2}$, $a_i \leq a_{i+1}$, pero como a_i y a_{i+1} son mayores que 1, tenemos que $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 \geq \text{máx}\{a_i, a_{i+1}\} + 1 > a_{i+1}$, lo que es una contradicción.

2) Si hay un 0, digamos $a_i = 0$, se tiene que que $a_{i+2} = a_i a_{i+1} + 1 = 1$, así mismo $a_{i+1} = a_{i-1} a_i + 1 = 1$. Pero a_{i+1} y a_{i+2} son dos elementos positivos consecutivos en la secuencia, una contradicción.

3) Consideremos dos negativos juntos en la secuencia (si los hay), digamos $a_i, a_{i+1} < 0$, luego $a_i a_{i+1} > 0$ y $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2} > 0$.

4) Supongamos que hay un negativo entre dos positivos en la secuencia, digamos $-b$, con b número real positivo. Digamos que su antecesor es a, con a número real positivo. Luego, el siguiente es $-ab + 1 > 0$. Esto es $ab < 1$. Por 1), el siguiente término a $-ab+1$, $ab^2 - b + 1 < 0$. Si $b < 1$, entonces $1 - b > 0$ y $ab^2 - b + 1 > 0$, una contradicción. Luego $b \geq 1$. Así, como $ab < 1$, resulta que $a < 1$. Luego, si los dos términos anteriores a a son a_i, a_{i+1}, entonces $a_i a_{i+1} + 1 = a < 1$. Luego $a_i a_{i+1} < 0$. Esto quiere decir que entre a_i y a_{i+1}, uno es negativo y otro positivo. Por 1), a_i es positivo y a_{i+1} es negativo. Sean $c = a_i$ y $-d = a_{i+1}$, con c, d números reales positivos. Luego, $a = -cd + 1$, así que $cd - 1 < 0$ o $cd < 1$. Como a_{i+1} es un negativo entre dos positivos, análogamente a la pareja (a, b), $c < 1$. Ahora, $-b = ad + 1 = cd^2 - d + 1$, $b = d - 1 - cd^2 < d - 1$, en particular, $b < d$. Por inducción a la izquierda, podemos ver que $a_{i+3} = b, a_{i+1}, a_{i-1}, \ldots, a_{i+1-2u}, \ldots,$ son todos negativos y los demás elementos son positivos.
Además, también podemos mostrar por inducción a la izquierda que $a_{i+3} = -b > a_{i+1} = -d > a_{i-1} > \cdots > a_{i+1-2u} > \cdots$. Sin embargo, $-b$ tiene que ser igual a un número de la forma a_{i+1-2u}, con $u \leq 0$, pues la secuencia es periódica, esto es una contradicción.

Se sigue que solo los múltiplos de 3 funcionan.

Solución del problema 3. Demostraremos que no existe un triángulo anti-Pascal con 2018 filas que contenga todos los enteros desde 1 hasta $1 + 2 + \cdots + 2018$. Sea T un triángulo anti-Pascal con n filas que contiene a cada entero desde 1 hasta $1+2+\cdots+n$ y sea a_1 el único número de la primera fila en T, como se muestra en la Figura 1. Sean a_2 y $b_2 = a_1 + a_2$ los dos números que están inmediatamente debajo de a_1; a_3 y $b_3 = a_1 + a_2 + a_3$ los dos números que están inmediatamente debajo de a_2 y así sucesivamente hasta llegar a la fila de más abajo donde a_n y $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ son los dos números que están inmediatamente debajo de $b_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Como los números a_k son n enteros positivos distintos cuya suma no es mayor que el mayor número de T, el cual es $1 + 2 + \cdots + n$, se sigue que forman una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$.

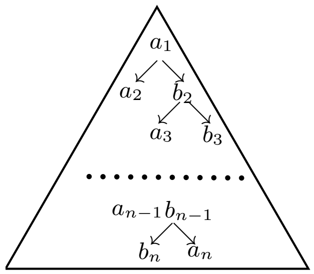


Figura 1

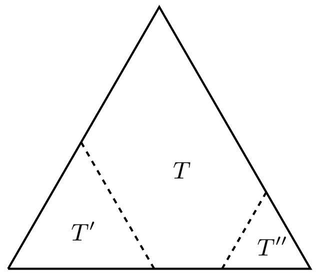


Figura 2

Consideremos ahora (Figura 2) a los dos subtriángulos equiláteros de T cuyas filas de más abajo contienen a los números a la izquierda, respectivamente derecha, del par a_n, b_n. (Uno de estos subtriángulos puede estar vacío). Al menos uno de estos subtriángulos, digamos T', tiene lado de longitud $\ell \geq \lceil (n-2)/2 \rceil$. Como T' satisface la propiedad anti-Pascal, T' contiene ℓ enteros positivos distintos $a'_1, a'_2, \ldots, a'_\ell$, donde a'_1 está en la cúspide de T' y a'_k, $b'_k = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_k$ son los dos vecinos inmediatamente debajo de b'_{k-1} para $k = 2, 3, \ldots, \ell$. Como los números a_k están fuera de T' y forman una partición de los números $1, 2, \ldots, n$, se sigue que los números a'_k son todos mayores que n. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} b'_\ell &\geq (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+\ell) = \frac{\ell(2n+\ell+1)}{2} \\ &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \left(2n + \frac{n-2}{2} + 1 \right) = \frac{5n(n-2)}{8}, \end{aligned}$$

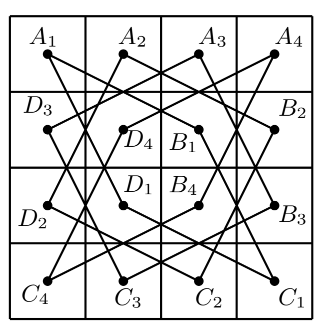
el cual es mayor que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n = 2018$, lo que es una contradicción.

Solución del problema 4. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Primero, observemos que en lugar del plano, el problema es equivalente a considerar un tablero de 20×20 donde cada lugar en el plano es el centro de una casilla del tablero. Ahora, veamos que la restricción de que Ana no puede dejar 2 piedras rojas en lugares en el plano que estén a distancia $\sqrt{5}$, es equivalente a que Ana no puede dejar 2 piedras rojas en lugares en el tablero que estén a distancia $\sqrt{5}$. Demostremos que 2 lugares en el tablero están a distancia $\sqrt{5}$ si y solo si sus casillas correspondientes son esquinas opuestas de un subtablero de 2×3 o de uno de 3×2. Por un lado, el teorema de Pitágoras garantiza que la distancia entre 2 lugares que son esquinas opuestas de un subtablero de 2×3 o de uno de 3×2 es $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Por otro lado, la distancia entre cualesquiera dos lugares es $\sqrt{a^2 + b^2}$, donde a es el número de columnas que se deben pasar horizontalmente desde uno de los lugares para llegar a la columna del otro lugar y b es el equivalente con las filas. Observemos que las únicas soluciones de $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$ son $a = 1$ y $b = 2$ o $a = 2$ y $b = 1$. Las soluciones anteriores corresponden a lugares que son esquinas opuestas de un subtablero de 2×3 o de uno de 3×2.

Por lo tanto, la condición del problema es equivalente a que Ana no puede dejar 2 piedras rojas en lugares que son esquinas opuestas de un subtablero de 2×3 o de uno de 3×2. Para simplificar, coloreemos el tablero con el patrón de uno de ajedrez. Además, veamos que le problema es equivalente a que Ana coloque caballos (en vez de piedras rojas) en casillas vacías de modo que no haya dos caballos que se ataquen, mientras que Beto pone piedras azules en casillas vacías sin alguna otra restricción.
Ahora, en el tablero hay 200 casillas blancas y 200 casillas negras. Además, un caballo en cada movimiento cambia de una casilla de un color a una con el otro color. Así, si Ana solo pone caballos en casillas negras, no habrá dos que se ataquen. Por cada casilla que ponga Ana en una casilla negra, Beto pone a lo más una piedra azul en una casilla negra. Como hay 200 casillas negras, Ana garantiza que puede colocar al menos $\frac{200}{2} = 100$ caballos. En conclusión, en el problema original, Ana puede asegurarse de colocar al menos 100 piedras rojas, sin importar cómo coloque Beto sus piedras azules.
A continuación, se demostrará que 100 es el máximo número de caballos que Ana puede asegurarse que puede colocar sin importar cómo juegue Beto. Es decir, se describirá cómo puede jugar Beto de modo que Ana no pueda colocar más de 100 caballos. Para ello se dividirá el tablero en 25 subtableros de 4×4 como se muestra en la siguiente figura:

4×4	4×4	$\dots$		4×4
4×4	4×4	$\dots$		4×4
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		
4×4	4×4			4×4

Ahora, se verá que Beto puede lograr que en cada subtablero de 4×4 Ana pueda poner a lo más 4 caballos. Lo anterior implicaría que Ana podría poner a lo más $4 \times 25 = 100$ caballos, que es lo que se desea. Para demostrarlo, se dividirán las casillas de un tablero de 4×4 en cuatro rombos $A_iB_iC_iD_i$, con $1 \leq i \leq 4$, como se muestra a continuación:



Veamos que para $1 \leq i \leq 4$, las parejas de casillas (A_i, B_i), (A_i, D_i), (B_i, C_i) y (C_i, D_i) cumplen que son esquinas opuestas de un subtablero de 2×3 o de uno de 3×2. Así, Ana no puede poner un caballo en ambas casillas de una de las parejas anteriores, es decir, Ana puede poner caballos en a lo más dos casillas de un mismo rombo (ya sea A_i y C_i o B_i y D_i).
Las observaciones anteriores nos permiten plantear una estrategia para Beto: si Ana pone un caballo en una esquina de un rombo, Beto pondrá una piedra en la esquina opuesta de ese rombo. Por lo visto anteriormente, Ana no podrá poner más caballos en ese rombo. Por tanto, si Beto sigue la estrategia anterior, Ana podrá poner a lo más un caballo en cada rombo. Como son cuatro rombos, Ana pondrá a lo más cuatro caballos en cada subtablero de 4×4, con lo que se concluye que Ana podrá poner a lo más 100 caballos en el tablero bajo la estrategia anterior de Beto. En conclusión, Ana puede garantizar que puede colocar a lo más 100 caballos.

Solución del problema 5. (Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes). Sea $a_1 = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ la factorización de a_1 en primos. Además, se define $S_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$. Así, para $n \geq N$, se tiene que

$$S_{n+1} - S_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1}$$

es un número entero. Entonces, $\frac{a_n a_1 + (a_{n+1} - a_n) a_{n+1}}{a_{n+1} a_1}$ también es un entero. Por lo tanto, a_{n+1} divide a $a_n a_1$. El resultado anterior permite obtener por inducción que a_{n+1} divide a $a_n a_1$, que $a_n a_1$ divide a $a_{n-1} a_1^2, \ldots$, que $a_{N+1} a_1^{n-N}$ divide a $a_N a_1^{n+1-N}$. Lo anterior implica que todos los elementos de la sucesión tienen los mismos factores primos que a_1 y que a_N. Sea p_i un primo divisor de $a_1 \cdot a_N$. Denotemos como $\nu_{p_i}(a_r)$ a la máxima potencia de p_i que divide a a_r, para cualquier $r \in \mathbb{N}$. Se demostrará que existe un entero positivo M_i tal que $\nu_{p_i}(a_r)$ es constante para $r \geq M_i$. Si la secuencia $\nu_{p_i}(a_s)$ es no creciente para $s = N, N+1, \ldots$, entonces sí se cumpliría lo anterior. En efecto, dado que la secuencia es de enteros no negativos, la secuencia solo puede decrecer por una cantidad finita de veces, entonces, eventualmente, se vuelve constante.
Ahora, supongamos que existe un entero positivo $t \geq N + 1$ tal que $\nu_{p_i}(a_t) > \nu_{p_i}(a_{t-1})$. Así, $\frac{a_{t-1} a_1 + (a_t - a_{t-1}) a_t}{a_t a_1}$ es un entero. Por lo tanto, $a_t a_1$ divide a $a_{t-1} a_1 + (a_t - a_{t-1}) a_t - a_t a_1 = (a_t - a_{t-1})(a_t - a_1)$. Se sigue que $\nu_{p_i}(a_t a_1) \leq \nu_{p_i}(a_t - a_{t-1}) + \nu_{p_i}(a_t - a_1)$; es decir, $\nu_{p_i}(a_t) + \nu_{p_i}(a_1) \leq \nu_{p_i}(a_t - a_{t-1}) + \nu_{p_i}(a_t - a_1)$. Pero $\nu_{p_i}(a_t) > \nu_{p_i}(a_{t-1})$, entonces $\nu_{p_i}(a_t - a_{t-1}) = \nu_{p_i}(a_{t-1})$. Así, $\nu_{p_i}(a_t) + \nu_{p_i}(a_1) \leq \nu_{p_i}(a_{t-1}) + \nu_{p_i}(a_t - a_1) < \nu_{p_i}(a_t) + \nu_{p_i}(a_t - a_1)$. Es decir, $\nu_{p_i}(a_1) < \nu_{p_i}(a_t - a_1)$. Si $\nu_{p_i}(a_1) > \nu_{p_i}(a_t)$, entonces $\nu_{p_i}(a_t - a_1) = \nu_{p_i}(a_t) < \nu_{p_i}(a_1)$, lo cual es una contradicción pues $\nu_{p_i}(a_1) < \nu_{p_i}(a_t - a_1)$. Ahora, si $\nu_{p_i}(a_1) < \nu_{p_i}(a_t)$, entonces $\nu_{p_i}(a_t - a_1) = \nu_{p_i}(a_1)$, que también es imposible. Por tanto, $\nu_{p_i}(a_t) = \nu_{p_i}(a_1)$.
Para concluir el problema será necesario demostrar el siguiente lema:

Lema Si $\nu_{p_i}(a_j) = \nu_{p_i}(a_1)$, entonces $\nu_{p_i}(a_{j+1}) = \nu_{p_i}(a_1)$ para cualquier entero positivo $j \geq N + 1$.

Demostración: Podemos repetir lo que se demostró antes para obtener que $a_{j+1}a_1$ divide a $(a_{j+1}-a_j)(a_{j+1}-a_1)$. Así,

$$\nu_{p_i}(a_{j+1})+\nu_{p_i}(a_1)\leq \nu_{p_i}(a_{j+1}-a_j)+\nu_{p_i}(a_{j+1}-a_1).$$

Si $\nu_{p_i}(a_{j+1})<\nu_{p_i}(a_1)=\nu_{p_i}(a_j)$, ambos términos en la parte derecha de la desigualdad anterior son iguales a $\nu_{p_i}(a_{j+1})$. En consecuencia, la desigualdad se simplifica a $\nu_{p_i}(a_{j+1})\geq \nu_{p_i}(a_1)$, lo cual es imposible. Ahora, si $\nu_{p_i}(a_{j+1})>\nu_{p_i}(a_1)=\nu_{p_i}(a_j)$, entonces la desigualdad anterior equivale a $\nu_{p_i}(a_{j+1})+\nu_{p_i}(a_1)\leq 2\nu_{p_i}(a_1)$. Lo anterior implica que $\nu_{p_i}(a_1)\geq \nu_{p_i}(a_{j+1})$, lo cual es imposible. Por tanto, $\nu_{p_i}(a_{j+1})=\nu_{p_i}(a_j)=\nu_{p_i}(a_1)$, con lo que se concluye el lema. $\square$

Como $\nu_{p_i}(a_t)=\nu_{p_i}(a_1)$ y $t\geq N+1$, por el lema anterior tenemos que existe $M_i=t$ tal que $\nu_{p_i}(a_r)=\nu_{p_i}(a_1)$, una constante, para todo entero $r\geq M_i$. En conclusión, sin importar cómo sea la secuencia infinita $a_1,a_2,\ldots$, todos los factores primos de a_s, con $s\geq N$, son factores de a_1 o de a_N y para cada factor primo p_i de a_1 o de a_N, existe un entero M_i tal que $\nu_{p_i}(a_r)$ es constante para todos los enteros $r>M_i$. Si $p_1,p_2,\ldots,p_s$ son los primos que dividen a a_1 o a a_N; $M_1,\ldots,M_s$ son sus M_i correspondientes y M es un entero tal que $M>\max(\{M_1,\ldots,M_s\})$, entonces $a_{m+1}=a_m$ para todo entero $m\geq M$.

Solución del problema 6. La solución consiste de dos pasos. En el primero se demuestra que son suficientes

$$\frac{XB}{XD}=\frac{AB}{CD} \tag{1}$$

y

$$\frac{XA}{XD}=\frac{DA}{BC}. \tag{2}$$

En el segundo paso demostraremos estas igualdades.

Paso 1. Usando la ley de senos y la igualdad (1), se obtiene que

$$\frac{\operatorname{sen}\angle AXB}{\operatorname{sen}\angle XAB}=\frac{AB}{XB}=\frac{CD}{XD}=\frac{\operatorname{sen}\angle CXD}{\operatorname{sen}\angle XCD}.$$

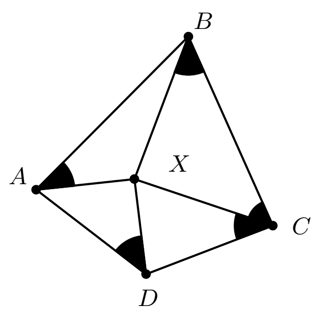
Luego, $\operatorname{sen}\angle AXB=\operatorname{sen}\angle CXD$ por las hipótesis del problema. Análogamente, la relación (2) implica que $\operatorname{sen}\angle DXA=\operatorname{sen}\angle BXC$. Si almenos uno de los pares $(\angle AXB,\angle CXD)$ y $(\angle BXC,\angle DXA)$ consiste de ángulos suplementarios, el problema se concluye. De lo contrario, $\angle AXB=\angle CXD$ y $\angle BXC=\angle DXA$, en este caso X es el punto de intersección de AC y BD y, las condiciones del problema dicen que $ABCD$ es un paralelogramo y entonces es un rombo. En este caso el problema sigue siendo cierto.

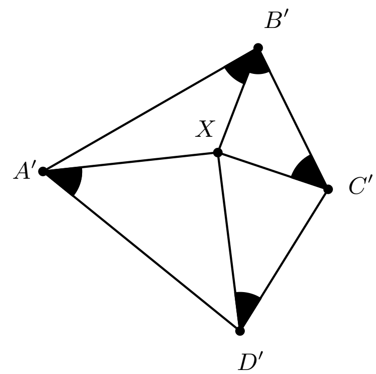
Paso 2. Para mostrar la igualdad (1), consideremos la inversión de centro X y cualquier radio. Las imágenes de los puntos después de la inversión las denotaremos con primas. Se tiene que

$$\angle A'B'C' = \angle XB'A' + \angle XB'C' = \angle XAB + \angle XCB = \angle XCD + \angle XCB = \angle BCD.$$

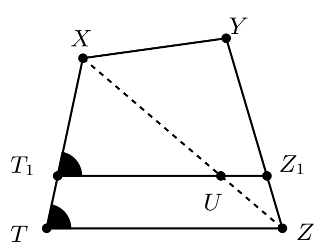
Análogamente, los ángulos correspondientes del cuadrilátero $A'B'C'D'$ son iguales. Mas aún, se tiene que

$$A'B' \cdot C'D' = \frac{AB}{XA \cdot XB} \cdot \frac{CD}{XC \cdot CD} = \frac{BC}{XB \cdot XC} \cdot \frac{DA}{XD \cdot XA} = B'C' \cdot D'A'.$$





Ahora usaremos el siguiente lema.
Lema. Sean $XYZT$ y $X'Y'Z'T'$ cuadriláteros con ángulos correspondientes iguales tales que $XY{\cdot}ZT = YZ{\cdot}TX$ y $X'Y'{\cdot}Z'T' = Y'Z'{\cdot}T'X'$. Entonces, los cuadriláteros son semejantes.
Demostración. Consideremos el cuadrilátero XYZ_1T_1 semejante a $X'Y'Z'T'$ que tiene lado XY tal que, Z_1 y T_1 están sobre los rayos YZ y XT, respectivamente. Por los ángulos, se tiene que $ZT \parallel Z'T'$. Se necesita demostrar que $Z_1 = Z$ y $T_1 = T$.



Sin pérdida de generalidad supongamos que $TX > XT_1$. Los segmentos XZ y Z_1T_1 se intersecan en U. Se tiene que $\frac{T_1X}{T_1Z_1} < \frac{T_1X}{T_1U} = \frac{TX}{ZT} = \frac{XY}{YZ} < \frac{XY}{YZ_1}$, de donde, $T_1X \cdot YZ_1 < T_1Z_1 \cdot XY$, lo que es una contradicción. $\square$

Aplicando el lema anterior, obtenemos que los cuadriláteros $ABCD$ y $A'B'C'D'$ son semejantes. Entonces, $\frac{BC}{AB} = \frac{A'B'}{D'A'} = \frac{AB}{XA{\cdot}XB} \cdot \frac{XD{\cdot}XA}{DA} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{XD}{XB}$ y, por lo tanto, $\frac{XB}{XD} = \frac{AB^2}{BC{\cdot}AD} = \frac{AB^2}{AB{\cdot}CD} = \frac{AB}{CD}$. De esta forma se obtiene (1). De manera similar se demuestra (2).

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 10 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 11 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 12 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.