TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2018, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM.

Impreso por: Creativa Impresores S.A. de C.V.
creaimp_pacheco@hotmail.com
044 55 57 03 22 41
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Noviembre de 2018.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2018, Número 4

El comité editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su cuarto y último número del año 2018. Con este número ya son 40 números publicados de manera ininterrumpida en 10 años consecutivos desde su creación, en 2009. El principal interés de quienes elaboramos esta revista, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. En particular, el artículo de matemáticas, que se incluye al inicio de cada número de la revista, suele ser elaborado por destacados miembros de la comunidad olímpica mexicana y sus contenidos son reflejo de una vasta experiencia. En este sentido, el artículo de este número titulado *Invarianza y Monovarianza*, escrito por Leonardo Ariel García Morán y Oriol Andreu Solé Pi, no es la excepción. A través de sus páginas, el lector conocerá una de las técnicas más útiles en la resolución de problemas de olimpiada: buscar invarianzas o monovarianzas. Estamos seguros que

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

esta aportación de nuestros amigos Leonardo y Oriol será de mucha utilidad para todos los lectores.

De especial interés para todos, en este cuarto número del año 2018 incluimos los exámenes con soluciones, de la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, celebrada en el mes de septiembre de 2018 en España y Portugal, así como los problemas y soluciones de la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) del año 2017 en el nivel secundaria, celebrada en la India.

Finalmente, como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

32ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1999. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2018-2019 y, para el 1° de julio de 2019, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 4 al 9 de noviembre de 2018 en Campeche, Campeche. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2018 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Inglaterra, julio de 2019) y a la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (México, septiembre de 2019).

De entre los concursantes nacidos en 2002 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (República Dominicana, junio de 2019).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2019.

Invarianza y Monovarianza

Por Leonardo Ariel García Morán y Oriol Andreu Solé Pi

Nivel Intermedio

Buscar invarianzas o monovarianzas es una de las técnicas más útiles a la hora de resolver problemas de olimpiada. Con un poco de práctica, es posible darse una idea acerca de cuándo vale la pena hacer uso de este método. No obstante, encontrar la invariante puede llegar a ser bastante complicado. El propósito de este pequeño artículo es introducir al lector inexperimentado a los problemas de este estilo y ayudar a aquellos que ya estén familiarizados a encontrar nuevos caminos e ideas.

Invarianza

Aunque el rango de cosas que pueden considerarse invarianzas es extremadamente amplio, cuando hablamos de una invarianza solemos referirnos a una propiedad (o cantidad) que se conserva a lo largo de un proceso. Para mayor comprensión, daremos dos ejemplos antes de continuar:

Ejemplo 1.1. Se tiene un tablero de 2018×2018 con un foco en cada casilla. Inicialmente, todos los focos están apagados menos uno. Un movimiento consiste en cambiar el estado de dos focos en casillas adyacentes. Determina si es o no es posible llegar a que todos los focos estén encendidos.

Solución. Como en cada paso se modifica el estado de exactamente dos focos, la cantidad de focos encendidos no cambiará nunca de paridad. La paridad de los focos encendidos es la invarianza. Al inicio, la cantidad de focos encendidos es uno, esta cantidad será siempre impar. Por lo tanto, es imposible lograr que todos los focos estén encendidos, pues hay, en total, una cantidad par de focos.

Ejemplo 1.2. En un pizarrón están escritos los números $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2018}$. Un paso consiste en elegir dos números a y b del pizarrón, borrarlos, y escribir en su lugar el número $ab + a + b$. Luego de algunos pasos, queda un único número en el pizarrón. ¿Cuáles son los posibles valores de este número?

Solución. Supongamos que en algún momento los números escritos en el pizarrón son $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Afirmamos que el producto $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_n + 1)$ es invariante. En efecto, si en algún momento los números a y b se reemplazan por $c = ab + a + b$ entonces $c + 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Así, el producto es el mismo y la invarianza es cierta. Inicialmente el valor de este producto es igual a

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2018}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{2019}{2018} = 2019.$$

Por lo tanto, si al final hay un único número n, debemos tener $n + 1 = 2019$, de donde $n = 2018$. Entonces, el único valor posible del número que queda al final es 2018.

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, las invarianzas hacen referencia a un proceso. En el primer caso, el proceso es el cambio del estado de los focos mediante movimientos permitidos y, en el segundo caso, es la toma de parejas de números del pizarrón y la sustitución de los números por su suma más su producto. La invarianza consiste, entonces, en encontrar algún patrón que no se modifique (esto es, que no varíe, que quede invariante) en los diferentes pasos del proceso.

Siempre que se tenga una serie de pasos que modifican a algún conjunto de objetos, se debe tener en mente la técnica de invarianza. Cuando intentemos problemas en los que encontrar una invariante no resulte sencillo, es recomendable hacer algunos casos a mano y tratar de trabajar apartir de ellos. También puede ayudarnos ignorar algunas partes del problema y concentrarnos únicamente en las operaciones permitidas, pues estas son, en realidad, las que debemos analizar para encontrar invariantes.

Ahora que entendemos cómo funcionan las invarianzas y cuándo tiene sentido buscarlas, veamos un par ejemplos con invariantes más rebuscadas.

Ejemplo 1.3. Hay una piedra en cada uno de los cuatro vértices de un cuadrado. Un movimiento consiste en quitar k piedras de uno de los vértices y agregar $2k$ piedras a cualquiera de sus dos vecinos. Determina si es posible, mediante una serie de movimientos, lograr que los vértices tengan 2018, 2018, 2019 y 2017 piedras en ese orden.

Solución. Nos fijamos en la diferencia etre las cantidades de piedras en las dos diagonales (es decir, si los vértices tienen a, b, c y d piedras, en ese orden, consideramos la diferencia $(a + c) - (b + d)$). Cada movimiento quita k piedras a una de las diagonales y añade $2k$ piedras a la otra, así que la diferencia aumenta o disminuye en $3k$; por lo que su congruencia módulo 3 es invariante. Como la diferencia inicial es cero y la diferencia en la posición deseada es 2, es imposible llegar a dicha posición.

Ejemplo 1.4. En cada uno de los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ del plano euclideano se coloca una piedra. En cada paso se puede elegir un punto (x,y) que tenga una piedra y tal que los puntos $(x+1,y)$ y $(x,y+1)$ no tengan piedras, remover la piedra del punto (x,y), y colocar una piedra en cada uno de los puntos $(x+1,y)$ y $(x,y+1)$. ¿Será posible que después de una cantidad finita de movimientos, los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ estén todos libres de piedras?

Solución. No es posible. Observemos primero que por las condiciones del problema, nunca puede haber dos piedras en la misma casilla y que las casillas con piedras siempre tienen coordenadas no negativas. A cada punto (x,y) le asignamos el peso $\frac{1}{2^{x+y}}$. Afirmamos que la suma de los pesos de las posiciones de todas las piedras es invariante. En efecto, esto se sigue de $\dfrac{1}{2^{x+y}} = \dfrac{1}{2^{x+y+1}} + \dfrac{1}{2^{x+y+1}} = \dfrac{1}{2^{(x+1)+y}} + \dfrac{1}{2^{x+(y+1)}}$. Ahora, al inicio del proceso, la suma de los pesos es $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^1} = 2$. Con un poco de álgebra, es posible calcular que la suma de todos los pesos es igual a

$$\left(\sum_{x,y\geq 0} \frac{1}{2^{x+y}}\right) = \left(\sum_{x\geq 0} \frac{1}{2^x}\right)^2 = 2^2 = 4,$$

donde la suma $\sum_{x\geq 0} \frac{1}{2^x} = 2$ es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$. Esto implica que el resto de las casillas tiene suma de pesos igual a 2, y entonces si en algún momento las tres casillas iniciales están vacías, todas las demás casillas deben tener piedras. Pero esto significa que debemos tener una infinidad de piedras, lo cual es imposible, ya que después de una cantidad finita de pasos, la cantidad de piedras en el plano euclideano es finita.

Lo que nos muestra el ejemplo anterior, es que es posible encontrar invarianzas en problemas que presentan una multiplicidad de objetos, que pueden estar en diversas posiciones. En estos casos, suele resultar útil asignarle un peso a cada posición y considerar la suma de los pesos de las posiciones de cada objeto.

El siguiente ejemplo es bastante famoso, pues hace referencia al 15-puzzle[2]; por tanto, es probable que el lector lo encuentre familiar.

Ejemplo 1.5. Se tiene un tablero de 4×4 con los números del 1 al 15 colocados de la siguiente manera:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

[2]El 15-puzzle consiste de un tablero de 4×4 en el que se tienen 15 fichas unitarias marcadas con los números del 1 al 15. El objetivo del juego es acomodar las fichas en orden creciente, como se muestra en la figura figura, deslizando, una por una, las fichas hacia el espacio unitario vacío que quedará siempre en el tablero. Como se demuestra en este ejemplo, no siempre es posible alcanzar el estado final.

Un movimiento permitido consiste en mover un número de una casilla adyacente a la casilla vacía para que ocupe el lugar de la casilla vacía. Determina si es posible, mediante movimientos permitidos, llegar al siguiente acomodo de los números:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Solución. Contamos el número de parejas (a, b) de números enteros entre 1 y 15, con $a < b$, tales que las fichas marcadas con a y b están en orden inverso con respecto al acomodo al que queremos llegar. Los movimientos horizontales no cambian el número de parejas, mientras que los movimientos verticales lo modifican en una cantidad impar. Ahora, como queremos que el lugar vacío termine en la fila donde estaba inicialmente, la cantidad de movimientos verticales debe ser par, así que el número de parejas debe tener la misma paridad que tenía inicialmente. Al principio, el número de parejas es uno (solo la $(14, 15)$ está desordenada), nunca será cero, por lo que es imposible llegar a la posición deseada.

Este fue otro ejemplo en el que la invarianza nos permitió obtener información acerca de los estados a los que es posible llegar mediante una serie de pasos. Con frecuencia se pide en problemas de olimpiada, demostrar que un proceso no puede continuar indefinidamente. En estas situaciones nos conviene hacer uso de la siguiente técnica, la monovarianza.

Monovarianza

A veces resulta imposible o muy complicado encontrar una propiedad que se conserve lo largo de una serie de pasos. Sin embargo, una técnica alternativa y útil consiste en buscar propiedades que cambien siempre del mismo modo (por ejemplo, un valor que disminuye independientemente de la situación). Este tipo de propiedades, conocidas como monovariantes, están presentes en incontables problemas de olimpiada.

Ejemplo 2.1. Hay una cantidad finita de ciudades, cada una de las cuales es una monarquía o una democracia. Algunas de las ciudades son vecinos. Si entre los vecinos de una ciudad, hay más ciudades con un sistema de gobierno ditinto al suyo que ciudades con el mismo sistema de gobierno, esta ciudad puede cambiar su forma de gobierno. Prueba que únicamente se puede realizar una cantidad finita de cambios.

Solución. El número de parejas de ciudades (A, B) tales que A y B son vecinas y tienen la misma forma de gobierno, incrementa con cada cambio que se lleva a cabo, dado que, para que sea posible cambiar el estado de una ciudad, digamos, C, esta ciudad debe pertenecer a más parejas de ciudades vecinas (C, D) en las que C y D tienen formas de gobierno distintas, que a parejas de ciudades vecinas (C, D) en las que C y D coinciden en su sistema de gobierno; así que el número de parejas del segundo tipo incrementa si modificamos a C. Como la cantidad de estas parejas no puede ser mayor al número de parejas de ciudades vecinas, el proceso eventualmente termina.

No debería ser complicado obtener la monovariante anterior si se analiza cuidadosamente la condición necesaria para poder modificar una ciudad. En general, analizar los requisitos que se nos dan para poder hacer un movimiento de algún tipo, suele facilitar la búsqueda de invariantes y monovariantes.

Ejemplo 2.2. Se tiene un entero positivo n escrito en una hoja. En cada paso, si el número x está escrito en la hoja, entonces este se puede reemplazar ya sea por $2x+1$ o por $\frac{x}{x+2}$. Supón que en algún momento, el número escrito en la hoja es 2018. Muestra que $n = 2018$.

Solución. Observemos primero que los números en la hoja siempre son racionales positivos. Entonces, podemos suponer que en algún momento, el número escrito en la hoja es igual a $\frac{a}{b}$, donde a y b son enteros positivos primos relativos entre si. De este modo, se tiene que:

$$2x+1 = \frac{2a}{b} + 1 = \frac{2a+b}{b}, \qquad \frac{x}{x+2} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b}+2} = \frac{a}{2b+a}.$$

Estas fracciones no necesariamente están escritas en forma reducida, pero, si d es un divisor común de $2a+b$ y b, por lo que d debe dividir a $2a$. Como a y b son primos relativos, se sigue que d divide a 2 y, entonces, $\text{mcd}(2a+b, b) \leq 2$. Análogamente, $\text{mcd}(2b+a, a) \leq 2$.
Consideremos ahora la suma del numerador y el denominador de estas fracciones. Esta es igual a $2(a+b)$ si la fracción es irreducible o es $a+b$ si el numerador y el denominador tienen máximo común divisor igual a 2. Esto significa que, después de cada paso, la suma del numerador y el denominador del número en forma reducida se mantiene igual o se duplica. Inicialmente, esta suma es igual a $n+1$ y al final es igual a 2019. Esto significa que $2^m(n+1)$ debe ser igual a 2019 para algún entero m. Pero, como 2019 es impar, debemos tener $m = 0$ y $n = 2018$.

La monovariante anterior corresponde a la manera en que cambia la suma del numerador y el denominador del número escrito en la hoja, cada vez que realizamos un cambio. Como se puede observar, esta suma no es invariante, sin embargo, logramos demostrar que se mantiene o se duplica después de cada movimiento y esto resulta ser suficiente para resolver el problema.

Ejemplo 2.3. (IMO Shortlist, 2012). Se tienen algunos enteros positivos escritos en fila. María puede hacer lo siguiente: elegir dos números adyacentes a y b que cumplan que $a > b$ y que a está a la izquierda de b, y cambiar la pareja (a, b) por $(b+1, a)$ o por $(a-1, a)$. Prueba que María puede realizar solo una cantidad finita de cambios.

Solución. Primero, notemos que la operación no altera el máximo M de los números que se tinene en la fila. Supongamos que en algún momento se tiene la n-tupla a_1, a_2,

$a_3, \ldots, a_n$. Consideremos la suma $S = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$. El lector podrá checar con facilidad que el valor de S aumenta con cada cambio realizado. Además el valor de S es siempre un entero que nunca supera a $M + 2M + 3M + \cdots + nM$, así que eventualmente será imposible seguir realizando cambios.

Las sumas con pesos (como la que acabamos de utilizar) nos ayudan a formalizar el hecho de que un proceso parezca desplazar números u objetos de mayor tamaño siempre hacia el mismo lado y, es en problemas de este estilo, que suelen utilizarse.

Una estrategia estrechamente relacionada consiste en considerar un orden lexicográfico, bajo el cual se dice que una n-tupla es mayor que otra si la primera coordenada en la que difieren (de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, según convenga), es mayor en la tupla inicial.

Las sumas con pesos frecuentemente pueden ser sustituidas por un orden lexicográfico. Por ejemplo, la solución anterior podría haberse concluido del siguiente modo: los movimientos de María generan tuplas cada vez mayores y, como nunca se obtendrá una tupla mayor que $(M, M, \ldots, M)$, el proceso debe concluir.

Ejemplo 2.4. Se tiene un número real en cada casilla de un tablero de $m \times n$. Podemos cambiar el signo de todos los números en una misma fila o columna. Demostrar que podemos hacer algunos de estos cambios para lograr que cada fila y cada columna tenga suma positiva.

Solución. Hacemos lo siguiente siempre que sea posible: si alguna de las columnas o filas tiene suma negativa, entonces cambiamos el signo de todos los números en esa fila. Entonces, si el conjunto de casillas modificado tenía suma $-x$, la suma de los números en el tablero aumenta en $2x$. Como x está acotado inferiormente (¿por qué?) y la suma de todos los números no puede superar a la suma de sus valores absolutos, eventualmente no será posible continuar y habremos logrado nuestro objetivo.

Este ejemplo es peculiar, pues la monovariante no concierne a un proceso descrito en el problema, sino a uno que tenemos que crear por nuestra cuenta. Al enfrentarnos con problemas en los que se necesite encontrar una estrategia que produzca cierto resultado, siempre vale la pena buscar un algoritmo sencillo que modifique las cosas de manera controlada y tratar de encontrar una monovariante alrededor de dicho algoritmo. Pese a todo, no debemos olvidar que existen muchas estrategias para atacar este tipo de problemas y es posible que lo que hicimos en el ejemplo anterior no nos sea de mucha ayuda.

Nuestro último ejemplo será el problema número 3 de la IMO de 1986, que es considerablemente más difícil que los ejemplos anteriores.

Ejemplo 2.5. (IMO, 1986). A cada vértice de un pentágono regular se le asigna un entero de manera que la suma de todos es positiva. Ahora, si 3 vértices consecutivos tienen asignados los números a, b y c, respectivamente, y se cumple que $b < 0$, podemos cambiar la terna (a, b, c) por $(a + b, -b, b + c)$. Decide si, después de cierta cantidad de pasos, el proceso necesariamente termina.

Solución. Sean x, y, z, v, w los números asignados a los vértices del pentágono (en ese orden). Nótese que $x + y + z + v + w$ es invariante. Consideremos la función $S(v, w, x, y, z) = (v - x)^2 + (w - y)^2 + (x - z)^2 + (y - v)^2 + (z - w)^2$. La función S es cíclica en (v, w, x, y, z); así que, al momento de analizar cómo se modifica el valor de S al realizar un movimiento, podemos suponer que el movimiento es el que altera la terna (v, w, x). Nos queda lo siguiente:

$$S(v + w, -w, x + w, y, z) = S(v, w, x, y, z) + 2w(v + w + x + y + x).$$

Como $w < 0$ y $v + w + x + y + x > 0$, el nuevo valor de la función es estrictamente menor al que tenía antes de que se realizara el cambio. Este argumento funciona independientemente de la terna que modifiquemos, así que el valor de $S(v, w, x, y, z)$ se reduce en cada paso. Como este valor es siempre un número entero positivo (¿por qué?), el proceso debe terminar eventualmente.

El problema anterior es bastante educativo. La invariante inicial debería ocurrirse inmediatamente después de observar que $(a+b)+(-b)+(b+c) = a+b+c$. Ahora, nos falta probar que no será posible seguir realizando movimientos de manera indefinida, esto es, que llegará un momento en el que ninguno de los números en los vértices sea negativo. Como la suma de los cinco números es siempre positiva, la intuición nos dice que debemos llegar a que estos números están cada vez "más cerca entre sí", lo cual nos motiva a buscar una función cuadrática en un conjunto cíclico de diferencias entre los números v, w, x, y, z que cumpla que su valor se reduce a cada paso. A partir de aquí, no debería llevarnos mucho tiempo encontrar, a base de prueba y error, la función S y verificar que cumple lo que queríamos.

A continuación dejamos unos problemas para el lector.

Problemas

1) En un tablero de 10×10 hay 9 casillas infectadas. Cada minuto, cada casilla que tenga al menos dos vecinas infectadas, se infectará también. Prueba que el tablero no puede infectarse por completo.

2) Se tienen algunos números reales en una fila. Un movimiento de Lalo consiste en seleccionar dos números adyacentes de manera que el de la izquierda sea mayor, duplicarlos e intercambiar sus posiciones. Demuestra que Lalo puede realizar sólo una cantidad finita de movimientos.

3) Se tienen 2018 fichas en una fila. Cada ficha tiene un lado blanco y uno negro. Inicialmente, todas las fichas tienen el lado negro viendo hacia arriba. A y B juegan por turnos. En cada turno, el jugador correspondiente deberá tomar 50 fichas consecutivas, de modo que la de más a la izquierda tenga el lado negro visible, y voltearlas todas. Determina si A tiene estrategia ganadora.

4) Se tiene un montón con n cartas numeradas del 1 al n. Cada minuto, si la carta de hasta arriba tiene el número k, se invierte el orden de las k cartas superiores. Prueba que, en algún momento, la carta de arriba será la número 1.

5) Se tienen 3 puntos de colores distintos en el plano. Un movimiento consiste en mover alguno de los puntos en línea recta de modo que cruce el segmento determinado por los otros dos. ¿Es posible regresar a la posición inicial tras realizar exactamente 1001 movimientos?

6) Se tienen los números del $1, 2, 3, \ldots, n$ en ese orden. Una transposición consiste en intercambiar dos números de la lista. Demuestra que es imposible regresar a la posición original mediante una cantidad impar de transposiciones.

7) Sea $\Psi = A_1A_2A_3 \ldots A_nA_1$ un polígono no convexo. Podemos alterar a Ψ de la siguiente manera: Tomamos dos vértices no consecutivos de Ψ, A_i y A_j, que cumplan que todo el polígono queda del mismo lado de la recta A_iA_j y reflejamos $A_iA_{i+1}A_{i+2} \ldots A_j$ (los índices se consideran módulo n). Demuestra que el polígono se volverá convexo después de realizar varias de estas operaciones.

8) Se tienen 2^m hojas de papel, cada una tiene un número 1 escrito. En cada paso se permite tomar dos hojas que tengan los números a y b escritos y sustituir ambos números por $a + b$. Muestra que después de $m2^{m-1}$ pasos, la suma de los números escritos en todas las hojas es al menos 4^m.

9) Sean $n \geq 2$ y $m \geq 2$ enteros positivos. Se tienen m urnas dispuestas en fila. Los jugadores A y B juegan por turnos, comenzando por A, de la siguiente manera. En cada turno, A elige dos urnas y coloca un voto en cada una de ellas. Posteriormente, B elige una urna, y elimina todos los votos de ella. A gana si logra que haya una urna con n votos después de algn turno de B. Determina para cada n el mnimo valor de m para el cual A puede garantizar ganar, sin importar los movimientos que haga B.

10) Los números $1, 2, \ldots, 2018$ están escritos en un pizarrón. En cada paso se permite elegir tres números a, b y c tales que a, b, c y $a + b + c$ están escritos en el pizarrón, y sustituir estos números por $a + b, b + c$ y $c + a$. Muestra que no es posible realizar más de 600 pasos.

11) Se tiene un número real positivo r escrito en un pizarrón. Un movimiento consiste en elegir un real positivo x que esté escrito en el pizarrón, y sustituirlo por dos reales positivos a y b que satisfagan $ab = 2x^2$.
Se realizan $k^2 - 1$ movimientos para obtener así k^2 números en el pizarrón. Muestra que alguno de estos es menor o igual que kr.

Sugerencias a los problemas

1) Fijarse en el perímetro de la región infectada.

2) Contar la cantidad de parejas de números adyacentes que cumplen que el de la izquierda es mayor.

3) (IMO Shortlist, 2009) Primero, demostrar que el juego eventualmente termina. Luego, para descubrir quién tiene estrategia ganadora, podemos contar el número de fichas en posición múltiplo de 50 que tienen la cara negra viendo hacia arriba. Para probar que el juego termina, podemos sustituir los colores de las cartas por 0's y 1's y demostrar que el número formado por esta secuencia de dígitos decrece cada turno.

4) Probar que la baraja se irá acomodando gradualmente y el proceso se detiene solo cuando la carta con el número 1 llega a la cima.

5) Clasificar los triángulos que se van formando en dos clases.

6) Contar la cantidad de parejas de números en las que el mayor está más a la izquierda. La solución es similar a la de el ejemplo 1.5.

7) El área de Ψ es monovariante.

8) (IMO Shortlist, 2014) Considera el producto de todos los elementos y ve lo que sucede con él después de cada paso. Encuentra una desigualdad que lo relacione con la suma.

9) (OMM, 2017) La dificultad reside en acotar inferiormente el valor de m. Para esto, asigna a cada urna un valor dependiente de la cantidad de votos que tiene, de modo que la suma de los valores no pueda aumentar, salvo en un caso, y luego ve que en este caso no puede aumentar demasiado.

10) Observa que la suma de los números y de sus cuadrados son ambas invariantes. Encuentra una manera de relacionar estas sumas que involucre también al número de elementos.

11) (APMO, 2009) Observa que la suma de los recíprocos de los cuadrados de los números es monovariante.

Bibliografía

1) Pablo Soberón. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

2) María Luisa Pérez Seguí. *Combinatoria Avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

3) `http://math.stanford.edu/~vakil/putnam07/07putnam5.pdf`, consultado en octubre de 2018.

4) `https://www.math.uwaterloo.ca/~snew/Contests/ProblemSessions/Problems2016/Lesson0soln.pdf`, consultado en octubre de 2018.

5) *Art of Problem Solving.* `https://artofproblemsolving.com/`, consultado en octubre de 2018.

6) `http://www.math.udel.edu/~lazebnik/papers/monovar.pdf`, consultado en octubre de 2018.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2018. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Para cada entero positivo n, sea $a(n)$ el producto de sus dígitos.

a) Demuestra que $n \geq a(n)$ para todo entero positivo n.

b) Encuentra todos los n para los cuales $n^2 - 17n + 56 = a(n)$.

Problema 2. Sean a, b y c números reales positivos tales que

$$\frac{1}{a+2019} + \frac{1}{b+2019} + \frac{1}{c+2019} = \frac{1}{2019}.$$

Demuestra que $abc \geq 4038^3$.

Problema 3. Considera el número de 9 dígitos $n = \overline{30x070y03}$. Determina todas las parejas de dígitos (x, y) tales que n sea múltiplo de 37.

Problema 4. Simplifica la expresión $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

Problema 5. Un círculo de radio r está dentro de otro de radio R. Si el cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del pequeño pero dentro del grande es $\frac{x}{y}$, ¿cuánto vale el cociente $\frac{R}{r}$?

Problema 6. Determina el residuo del polinomio $x^{100} - 2x^{99} + 4$ entre el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sean M y N puntos en el lado AB tales que M está entre A y N, $AN = CA$ y $MB = BC$. Si el ángulo $\angle MCN$ es de $43°$, determina la medida del ángulo $\angle ACB$.

Problema 8. Determina el residuo de la división del polinomio

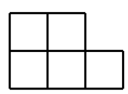
$$x^{200} - 2x^{199} + x^{50} - 2x^{49} + x^2 + x + 1$$

entre el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Problema 9. Una sucesión de 28 enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{28}$ se dice *supercreciente* si cada término es mayor que la suma de todos los términos anteriores. Si $S_1, S_2, \ldots, S_r$ son todas las sumas de cada subconjunto no vacío de una sucesión supercreciente, ¿cuántas sumas distintas hay entre ellas?

Problema 10. Una circunferencia pasa por los vértices A y C de un triángulo ABC, corta a AB en su punto medio D e interseca al lado BC en E. La circunferencia tangente a AC en C que pasa por E, interseca a DE en F. Sea P la intersección de DE con AC. Muestra que CF, AE y BP concurren.

Problema 11. Si un rectángulo de $5 \times n$ puede ser cubierto con n piezas como la siguiente (sin traslaparse o salirse del tablero), prueba que n es par (se vale rotar y reflejar las piezas).



Problema 12. Sean a, b, c, d y e, enteros positivos distintos tales que $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$. Demuestra que $ac + bd$ no es primo.

Problema 13. En un triángulo ABC elegimos puntos D, E y F en los lados BC, AC y AB, respectivamente, de manera que AC, BE y CF concurren en un punto G. La paralela a BC por G corta a DF y a DE en H e I, respectivamente. Demuestra que los triángulos AHG y AIG tienen la misma área.

Problema 14. Un entero positivo de cuatro dígitos $\overline{abcd}$, donde cualquiera de los cuatro dígitos puede ser cero, es *especial* si:

a) $\overline{ab} - \overline{cd}$ y $\overline{ab} + \overline{cd}$ son cuadrados perfectos.

b) $\overline{ab} - \overline{cd}$ divide a $\overline{ab} + \overline{cd}$.

c) $\overline{ab} + \overline{cd}$ divide a $\overline{abcd}$.

Por ejemplo, 2016 es especial. Encuentra todos los números especiales.

Problema 15. Determina si existe un conjunto de números reales positivos con la siguiente propiedad: la suma de todos los números es igual a 2, la suma de sus cuadrados es igual a 3, la suma de sus cubos es igual a 4 y la suma de sus cuartas potencias es igual a 5.

Problema 16. Sea $ABCD$ un cuadrilátero. El circuncírculo del triángulo ABC interseca a los lados CD y DA en los puntos P y Q, respectivamente. El circuncírculo del triángulo CDA interseca a los lados AB y BC en los puntos R y S, respectivamente. Las rectas BP y BQ intersecan a la recta RS en los puntos M y N, respectivamente. Demuestra que los puntos M, N, P y Q están en una misma circunferencia.

Problema 17. Sea a_n una sucesión de números reales positivos tal que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2$ para todo número natural n. Demuestra que todos los números de la sucesión son de la forma $\frac{k(k+1)}{2}$ con k entero.

Problema 18. En un periodo de 100 días, cada uno de un grupo de 6 amigos fue a nadar exactamente 75 días. Si hay n días en que al menos 5 amigos fueron a nadar juntos, determina el menor valor posible de n.

Problema 19. Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $a + b + c + d = 2018$. Determina el valor mínimo de la expresión

$$(a-b)^2 + 2(a-c)^2 + 3(a-d)^2 + 4(b-c)^2 + 5(b-d)^2 + 6(c-d)^2.$$

Problema 20. Sea p un número primo. Demuestra que existe una permutación a_1, $a_2, \ldots, a_p$ de los números $1, 2, \ldots, p$, tal que los números

$$a_1,\ \ a_1a_2,\ \ a_1a_2a_3,\ \ \ldots,\ \ a_1a_2a_3\cdots a_p$$

dejan distinto residuo al dividirse entre p.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Supongamos que $n = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + \cdots + 10^k a_k$. Como $0 \leq a_i < 10$, tenemos que $n \geq 10^k a_k \geq a_0a_1a_2\cdots a_k = a(n)$.
Ahora, tenemos que $n^2 - 17n + 56 \leq a(n) \leq n$, esto es, $n^2 - 18n + 56 = (n - 14)(n-4) \leq 0$, de donde $4 \geq n \geq 14$. Analizando cada posibilidad, obtenemos que $n = 4$ es la única solución.

Solución del problema 2. Sean $x = \frac{a}{2019}$, $y = \frac{b}{2019}$ y $z = \frac{c}{2019}$. Entonces, la ecuación original se convierte en la ecuación $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 1$. Multiplicando esta ecuación por $(x+1)(y+1)(z+1)$ y simplificando, obtenemos que $xyz = 2+x+y+z$. Aplicando ahora la desigualdad MA-MG, obtenemos que $\frac{xyz}{4} = \frac{2+x+y+z}{4} \geq \sqrt[4]{2xyz}$, de donde se sigue que $xyz \geq 8$. Por lo tanto, $abc = 2019^3 xyz \geq 2019^3 \cdot 8 = (2019 \cdot 2)^3 = 4038^3$.

Solución del problema 3. Tenemos que,

$$n = 300070003 + 10^6 x + 10^2 y = 37(8110000) + 27027x + 3y) + (3 + x - 11y).$$

Como $0 \leq x \leq 9$ y $0 \leq y \leq 9$, tenemos que $-96 \leq 3 + x - 11y \leq 12$. Además, 37 debe dividir a $3 + x - 11y$. Luego, los posibles valores de $3 + x - 11y$ son 0, -37 y

-74. Resolviendo las ecuaciones correspondientes en cada caso, obtenemos solamente tres parejas: $(x, y) = (8, 1)$, $(4, 4)$ y $(0, 7)$.

Solución del problema 4. Sea $k = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
k^3 &= 2+\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^2\cdot(2-\sqrt{5})} + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})\cdot(2-\sqrt{5})^2} + 2 - \sqrt{5} \\
&= 4 + 3\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(4-5)} + 3\sqrt[3]{(4-5)(2-\sqrt{5})} \\
&= 4 - 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} - 3\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} \\
&= 4 - 3\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right) \\
&= 4 - 3k.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta resolver la ecuación $k^3 = 4 - 3k$ para determinar el valor de k. Factorizando, obtenemos que

$$k^3 + 3k - 4 = (k-1)(k^2+k+4) = (k-1)\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right) = 0.$$

Como $(k+\frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} > 0$, se sigue que $k = 1$. Así, $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$.

Solución del problema 5. Claramente $x > y$. El cociente entre el área del círculo grande y el área de la región que está fuera del círculo pequeño pero dentro del grande es $\frac{x}{y} = \frac{\pi R^2}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{R^2}{R^2-r^2}$. Así, $xR^2 - xr^2 = R^2 y$, esto es, $(x-y)R^2 = xr^2$. Luego, $\frac{R^2}{r^2} = \frac{x}{x-y}$. Por lo tanto, $\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}}$.

Solución del problema 6. El grado del polinomio cociente $C(x)$ es 98 y el grado del polinomio residuo es 0 o 1. Así que $x^{100} - 2x^{99} + 4 = (x^2-3x+2)\cdot C(x) + mx + n$, con n y m enteros no negativos. Como las raíces del polinomio $x^2 - 3x + 2$ son 1 y 2, tenemos que

$$\begin{aligned}
1^{100} - 2\cdot 1^{99} + 4 &= m + n, \\
2^{100} - 2\cdot 2^{99} + 4 &= 2m + n,
\end{aligned}$$

esto es, $3 = m + n$ y $4 = 2m + n$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $m = 1$ y $n = 2$. Por lo tanto, el residuo buscado es el polinomio $x + 2$.

Solución del problema 7. Sean $x = \angle ACM$ y $y = \angle BCN$. Como $AN = CA$, el triángulo ACN es isósceles y, por lo tanto, $\angle ANC = x + 43^\circ$. Del mismo modo, como $MB = BC$, el triángulo MBC es isósceles y, por lo tanto, $\angle BMC = y + 43^\circ$. Al fijarnos en los ángulos del triángulo MNC, tenemos que $43^\circ + x + 43^\circ + y + 43^\circ = 180^\circ$, de donde $x + y = 51^\circ$. Por lo tanto, $\angle ACB = x + 43^\circ + y = 43^\circ + 51^\circ = 94^\circ$.

Solución del problema 8. Sea $P(x) = x^{200} - 2x^{199} + x^{50} - 2x^{49} + x^2 + x + 1$. Como $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, vamos a determinar primero los residuos de las divisiones de $P(x)$ entre $x-1$ y entre $x-2$. Por el teorema del residuo, los residuos de tales divisiones son $P(1)$ y $P(2)$, respectivamente. Luego, $P(x) = (x-1)P_1(x) + P(1)$ y $P(x) = (x-2)P_2(x) + P(2)$, donde $P_1(x)$ y $P_2(x)$ son polinomios con coeficientes enteros. Entonces,

$$\begin{aligned}(x-2)P(x) &= (x-1)(x-2)P_1(x) + (x-2)P(1),\\ (x-1)P(x) &= (x-1)(x-2)P_2(x) + (x-1)P(2),\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}P(x) &= (x-1)P(x) - (x-2)P(x)\\ &= (x-1)(x-2)(P_2(x) - P_1(x)) + (x-1)P(2) - (x-2)P(1).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{(x-1)(x-2)} &= \frac{(x-1)(x-2)(P_2(x) - P_1(x)) + (x-1)P(2) - (x-2)P(1)}{(x-1)(x-2)}\\ &= P_2(x) - P_1(x) + \frac{(x-1)P(2) - (x-2)P(1)}{(x-1)(x-2)}.\end{aligned}$$

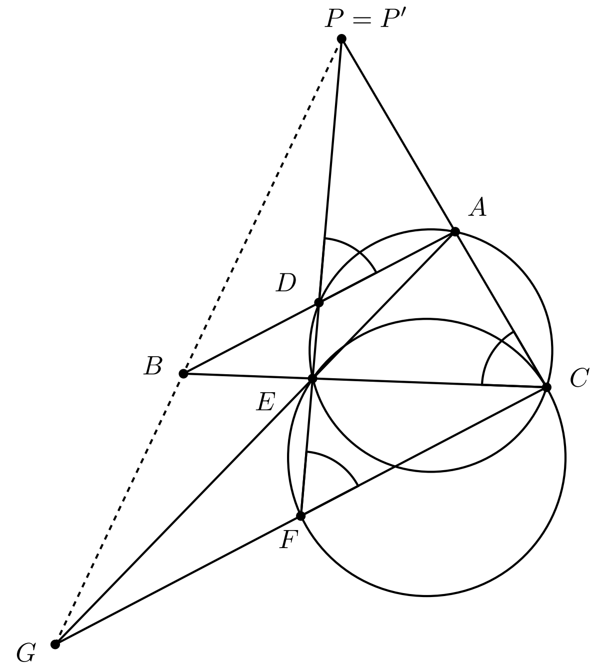
Así, el residuo buscado es igual al residuo que se obtiene al dividir el polinomio

$$(x-1)P(2) - (x-2)P(1) = (x-1)\cdot 7 + (x-2)\cdot(-1) = 6x-5$$

entre el polinomio $x^2 - 3x + 2$, esto es, es igual a $6x-5$.

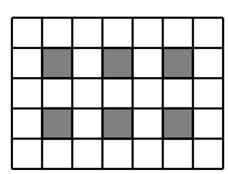
Solución del problema 9. Demostremos que la suma de cada par de subconjuntos distintos es un par de números diferentes. Primero notemos que como cada término es mayor que la suma de los anteriores, en particular es mayor que los anteriores y, por lo tanto, no hay números repetidos en la sucesión. Sean $B = \{b_1, \ldots, b_r : b_1 > b_2 > \cdots > b_r\}$ y $C = \{c_1, \ldots, c_s : c_1 > c_2 > \cdots > c_r\}$ dos conjuntos distintos de la sucesión. Si $b_1 > c_1$, entonces por hipótesis la suma de los elementos de C será más pequeña que b_1 y, por lo tanto, también que la suma de los elementos de B. De manera similar, si $c_1 > b_1$ se concluye que la suma de los elementos de C es mayor que la de los elementos de B. Si $b_1 = c_1$, entonces podemos repetir el argumento con b_2 y c_2 para concluir que la suma de alguno de los conjuntos es más grande. Se puede seguir este proceso hasta que lleguemos a un caso en el que $b_i > c_i$, que $c_i > b_i$ o que un conjunto contenga propiamente al otro. En cualquier caso, la suma de uno de los conjuntos excederá la del otro y por lo tanto resulta un par de números distintos. Luego, hay tantas sumas como subconjuntos no vacíos, que en este caso es $2^{28} - 1$.

Solución del problema 10. Sea G el punto de intersección de AE con CF.

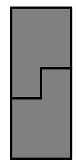


Por el cuadrilátero cíclico $ADEC$, se tiene que $\angle ADP = \angle ACE$ y, por ángulos seminscritos, se tiene que $\angle ACE = \angle CFE$, esto implica que AB y FC son paralelas. Como BA y GC son paralelas, se tiene que los triángulos ABE y GCE son semejantes. Además, la recta ED se corresponde con EF en esta semejanza. Como D es punto medio de AB, se sigue que F es punto medio de GC. Para concluir, basta demostrar que P, B y G están alineados. Supongamos que BG corta a AC en P'. Como D es punto medio de AB, $P'D$ es mediana en el triángulo $P'BA$ y como CG es paralela a BA, también esta recta es mediana del triángulo $P'GC$. Entonces, $P'A$ es la misma recta que $P'F$, lo cual implica que $P = P'$ y se obtiene la colinealidad deseada.

Solución del problema 11. Supongamos que n es impar y consideremos la siguiente coloración del tablero.



Con esta coloración están coloreados $n - 1$ de los cuadritos. Como cada ficha cubre al menos una casilla coloreada, entonces a lo más se pueden poner $n - 1$ fichas. Sin embargo, con $n - 1$ fichas solo se pueden cubrir $5(n - 1)$ cuadritos y faltaría cubrir 5. Luego, con n impar no es posible, así que n debe ser par. Para probar que con n par sí es posible, basta usar varios de los siguientes bloques.



Solución del problema 12. Supongamos que $ac + bd = p$ es primo. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\max\{a, b, c, d\} = a$. Como $a^4 + b^4 = c^4 + d^4$, se sigue que $\min\{a, b, c, d\} = b$. Notemos que $ac \equiv -bd \pmod p$, lo cual implica que $a^4c^4 \equiv b^4d^4 \pmod p$. Luego, tenemos que

$$b^4d^4 + b^4c^4 \equiv a^4c^4 + b^4c^4 = c^4(a^4 + b^4) = c^4(c^4 + d^4) = c^8 + c^4d^4 \pmod p,$$

esto es, $(c^4 + d^4)(c^4 - b^4) \equiv 0 \pmod p$. Como p es primo, debe dividir a alguno de $c - b$, $c + b$, $c^2 + b^2$ o $c^4 + d^4$. Como b y c son enteros positivos distintos, tenemos que

$$0 < c - b < c + b < c^2 + b^2 < ac + bd = p.$$

Por lo tanto, p debe dividir a $c^4 + d^4 = e^5$ y, en consecuencia, p divide a e. Luego, $p^5 = (ac + bd)^5$ divide a $c^4 + d^4$, lo cual es imposible ya que $(ac + bd)^5 > c^4 + d^4$. Por lo tanto, $ac + bd$ no es primo.

Solución del problema 13. Denotemos por $[ABC]$ al área del triángulo ABC. Observemos el triángulo FDC. Dado que HG y DC son paralelas, tenemos que $HG = \frac{FG}{FC} \cdot DC = \frac{[AGB]}{[ABC]} \cdot DC$, pues la razón de FG a FC es igual a la razón de sus alturas, usando AB como base. De manera análoga, considerando el triángulo EBD y que GI y BD son paralelas, obtenemos que $GI = \frac{EG}{EB} \cdot BD = \frac{[AGC]}{[ABC]} \cdot BD$. Luego, $\frac{HG}{GI} = \frac{[AGB]}{[AGC]} \cdot \frac{DC}{BD} = \frac{[AGB]}{[AGC]} \cdot \frac{[AGC]}{[AGB]} = 1$, donde la última igualdad se sigue de que $\frac{[ADC]}{[ADB]} = \frac{[GDC]}{[GDB]}$, pues al tener la misma altura, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases.
Tenemos entonces que $HG = GI$. Como los triángulos AGH y AGI tienen bases colineales y comparten el tercer vértice, entonces tienen la misma altura. Luego, la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases. Pero demostramos que sus bases son iguales. Por lo tanto, sus áreas son iguales también.

Solución del problema 14. Sea $\overline{abcd}$ un número especial. Entonces, $\overline{ab} - \overline{cd} = x^2$ y $\overline{ab} + \overline{cd} = x^2y^2$, con $x, y \geq 1$. En el caso en que $y = 1$, tenemos que $\overline{cd} = 00$ y los nueve números $0100, 0400, 0900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100$ son todos especiales.
En general, tenemos que $\overline{ab} + \overline{cd}$ divide a $\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd}$, de donde x^2y^2 divide a $99\overline{ab} = 99x^2(y^2 + 1)$. Esta última expresión se obtiene de despejar $\overline{ab}$ de las primeras dos ecuaciones que planteamos, considerando que si un número es divisible entre otro, también su doble lo es.

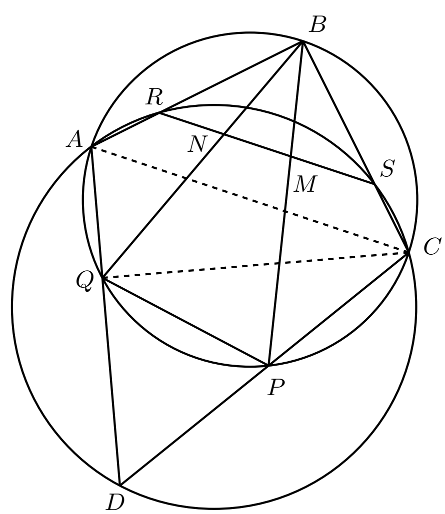
Como x^2y^2 divide a $99x^2y^2+99x^2$, se sigue que x^2y^2 divide a $99x^2$, de donde $y^2 \mid 99$. Por lo tanto, $y = 1$ o 3. Si $y = 3$, tenemos que $\overline{ab}-\overline{cd} = x^2$ y $\overline{ab}+\overline{cd} = 9x^2$, de donde $\overline{ab} = 5x^2$ y $\overline{cd} = 4x^2$. Al hacer los casos, obtenemos los números $0504, 2016, 4536$ y 8064, los cuales son todos especiales. Con lo que se concluye el problema.

Solución del problema 15. Supongamos que sí existe, digamos $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Entonces, $\sum_{n=1}^{k} a_k = 2$, $\sum_{n=1}^{k} a_k^2 = 3$, $\sum_{n=1}^{k} a_k^3 = 4$ y $\sum_{n=1}^{k} a_k^4 = 5$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{k} a_k \cdot a_k^2\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_k^2\right)\left(\sum_{n=1}^{k} (a_k^2)^2\right),$$

esto es, $4^2 = \left(\sum_{n=1}^{k} a_k^3\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} a_k^2\right)\left(\sum_{n=1}^{k} a_k^4\right) = 3 \cdot 5$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, no existe tal conjunto.

Solución del problema 16. Por ángulos inscritos, tenemos que $\angle BAC = \angle BQC$ y $\angle CQP = \angle CBP$. Además, en el cuadrilátero cíclico $ACSR$ tenemos que $\angle RSC + \angle RAC = 180^{\perp}$. Así, $\angle BSR = 180° - \angle RSC = \angle RAC = \angle BAC = \angle BQC$.



Usando estas relaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} 180° - \angle PMN &= 180° - \angle BMS = \angle SBM + \angle BSM \\ &= \angle CBP + \angle BSR = \angle CQP + \angle BQC = \angle BQP = \angle NQP, \end{aligned}$$

esto es, $\angle PMN + \angle NQP = 180°$. Por lo tanto, el cuadrilátero $MNPQ$ es cíclico.

Solución del problema 17. La condición $a_{n+1}+a_n = (a_{n+1}-a_n)^2$ se puede reescribir como $a_{n+1}^2 - (2a_n + 1)a_{n+1} + a_n^2 - a_n = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en a_{n+1}, obtenemos que $a_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_n + 1 \pm \sqrt{8a_n + 1})$. Ahora, demostraremos por inducción en n que cada término de la sucesión a_n es de la forma $\frac{k(k+1)}{2}$ con k entero. Claramente $a_1 = 1 = \frac{1\cdot 2}{2}$. Supongamos que $a_n = \frac{k(k+1)}{2}$ para algún entero $k \geq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}(k(k+1) + 1 \pm \sqrt{4k(k+1)+1}) = \frac{1}{2}(k^2 + k + 1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k + 1}) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 + k + 1 \pm (2k+1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(k^2 - k) = \frac{(k-1)k}{2}$ o $a_{n+1} = \frac{1}{2}(k^2 + 3k + 2) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, en cualquier caso se cumple el resultado.

Solución del problema 18. Observemos que cada amigo no nadó 25 días, lo cual nos da un total de $25 \cdot 6$ no nadadores en los cien días. Ahora, notemos que si en cada día hay menos de 5 amigos que nadan juntos, entonces hay al menos dos que no nadaron. Luego, a lo más hay $\frac{150}{2} = 75$ de estos días y, por lo tanto, hay al menos $100 - 75 = 25$ días en los que fueron al menos 5.
Para ver que es posible alcanzar este mínimo, consideremos el siguiente acomodo: los seis amigos A, B, C, D, E y F nadan los primeros 25 días; del día 26 al día 50 no van A ni B; del día 51 al día 75 no van C ni D y del día 76 al día 100 no van E ni F.

Solución del problema 19. Sea $E = (a-b)^2 + 2(a-c)^2 + 3(a-d)^2 + 4(b-c)^2 + 5(b-d)^2 + 6(c-d)^2$. Como 2018 no es divisible por 4, los números a, b, c y d no pueden ser todos iguales. Si tres de ellos son iguales, entonces tres de los cuadrados son 0 y los otros tres cuadrados son distintos de cero. Además, los cuatro números a, b, c, d deben tener la misma paridad, por lo que los cuadrados que no son cero son al menos 4. Por lo tanto, $E \geq 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 24$.
Si dos de los números son iguales y los otros dos son distintos (de esos dos y distintos entre ellos), entonces $E \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$.
Si dos de los números son iguales y los otros dos son iguales, entonces:

a) Si $a = b$ y $c = d$, entonces $E \geq 2 + 3 + 4 + 5 = 14$.

b) Si $a = c$ y $b = d$, entonces $E \geq 1 + 3 + 4 + 6 = 14$.

c) Si $a = d$ y $b = c$, entonces $E \geq 1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Por último, si a, b, c y d son distintos entre sí, entonces $E \geq 1+2+3+4+5+6 = 21$. Para concluir que 14 es el valor mínimo de E, basta dar un ejemplo donde se alcanza este valor. Un ejemplo es $a = b = 505$ y $c = d = 504$.

Solución del problema 20. Sea $b_i = a_1 a_2 \cdots a_i$ para $1 \leq i \leq p$. Demostraremos que es posible elegir una permutación tal que $b_i \equiv i \pmod{p}$ para todo i. Para $i \geq 2$, la congruencia $a_i \equiv b_i b_{i-1}^{-1} \pmod{p}$ se satisface si $b_{i-1} \not\equiv 0 \pmod{p}$, donde b_{i-1}^{-1} denota al inverso multiplicativo de b_{i-1} módulo p. Ahora, hagamos $a_1 = 1$ y $a_i = i(i-1)^{-1} \pmod{p}$ para $2 \leq i \leq p$. Entonces, es suficiente mostrar que

$a_i \not\equiv 1 \pmod p$ para todo $2 \leq i \leq p$ y $a_i \not\equiv a_j \pmod p$ para todo $2 \leq j < i \leq p$. Supongamos lo contrario y que $a_i \equiv 1 \pmod p$ para cierto $2 \leq i \leq p$. Entonces, $i(i-1)^{-1} \equiv 1 \pmod p$ y, por lo tanto, $i \equiv i - 1 \pmod p$, esto es, $0 \equiv -1 \pmod p$, lo que es una contradicción ya que $p \geq 2$. Ahora, si $a_i \equiv a_j \pmod p$ para ciertos $2 \leq j < i \leq p$, entonces $i(i-1)^{-1} \equiv j(j-1)^{-1} \pmod p$, de donde $i(j-1) \equiv j(i-1) \pmod p$, esto es, $ij - i \equiv ij - j \pmod p$. Luego, $-i \equiv -j \pmod p$, lo que es una contradicción ya que $2 \leq j < i \leq p$.

En conclusión, si elegimos a_i como antes, todos los a_i son distintos, así que forman una permutación de los números $1, 2, \ldots, n$. Más aún, por definición tenemos que $a_1 a_2 \cdots a_i \equiv i \pmod p$ y, por lo tanto, también se satisface la segunda condición.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2018 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. En esta ocasión, agradecemos a Victor Antonio Domínguez Silva porsu aportación con el Problema 7 y aprovechamos para invitarte a que nos envíes tus problemas para que sean publicados en esta sección. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean ABC un triángulo con área 1 y P el punto medio del lado BC. Sean M y N puntos en AB y AC, respectivamente, distintos de A y B y C, tales que $AM = 2MB$ y $CN = 2AN$. Las dos rectas AP y MN se intersecan en D. Encuentra el área del triángulo ADN.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Encuentra, en términos de n, el número de parejas de enteros positivos (x, y) que son solución de la ecuación $x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$ y demuestra que tal número nunca es un cuadrado.

Problema 3. Determina todos los números enteros n tales que $n^2 + 9n + 9$ sea múltiplo de 121.

Problema 4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 3. Demuestra que

$$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}\leq 3.$$

Problema 5. Un entero positivo de cinco dígitos $abcde$, escrito en base 10 y con $a\neq 0$, se llama *coordillera* si sus dígitos satisfacen las desigualdades $a<b$, $b>c$, $c<d$ y $d>e$. Por ejemplo, 37452 es un número coordillera. ¿Cuántos números coordillera hay?

Problema 6. Sean a, b y c enteros positivos tales que $a>b>c$ y $12b>13c>11a$. Demuestra que $a+b+c\geq 56$.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sea D un punto en la altura trazada desde A, de tal manera que A y D se encuentran de distintos lados de la recta BC. Los puntos P y Q son tales que $\angle PAB=\angle BAD$, $\angle DAC=\angle CAQ$, P se encuentra en BD y Q se encuentra en CD. Demuestra que BC, PQ y la tangente al circuncírculo del triángulo ABC trazada desde A concurren.

Problema 8. Sean a, b, c y d números reales del intervalo $[0,1]$. Demuestra que

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+d}+\frac{d}{1+a}+abcd\leq 3.$$

Problema 9. Cada casilla de un tablero de $n\times n$ es coloreada con uno de n posibles colores, tal que hay exactamente n casillas coloreadas por cada posible color. Muestra que hay una fila o una columna que contiene al menos $\sqrt{n}$ colores distintos.

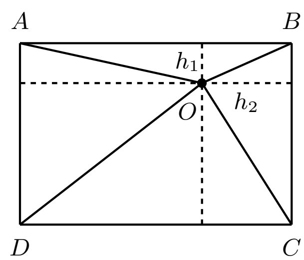
Problema 10. Demuestra que $\dfrac{\sqrt{2}}{2n}\leq \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4n}$ para todo entero positivo n.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2018 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2018. En esta ocasión, agradecemosa Guillermo Courtade Morales por habernos compartido sus soluciones a los Problemas 1, 2 y 4; también agradecemos a Milton Adolfo Lozano Arroyo por habernos compartido sus soluciones a los Problemas 3 y 9. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2018, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sasha, Bigui, Canelita y Mansita deben medir las distancias desde un punto interior de un terreno rectangular hasta las esquinas del mismo. Tres de ellas miden las distancias a tres esquinas consecutivas y obtuvieron, en orden, las mediciones 24 m, 6 m y 22 m, respectivamente. Canelita, sin moverse de su sitio, aprovecha el trabajo de sus amigas para obtener el valor de la distancia a la cuarta esquina. ¿Cuál es dicho valor?

Solución de Guillermo Courtade Morales. Primero nombramos al punto interior O y a los vértices A, B, C, D como se muestra en la figura, donde OA, OB y OC miden 24 m, 6 m y 22 m, respectivamente. Después trazamos la altura del triángulo ABO desde O y la llamamos h_1 y trazamos la altura del triángulo BOC desde O y la llamamos h_2.



Así, por el teorema de Pitágoras, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}(AB-h_2)^2+h_1^2 &= OA^2=24^2,\\ (BC-h_1)^2+h_2^2 &= OC^2=22^2,\\ h_1^2+h_2^2 &= OB^2=6^2,\\ (AB-h_2)^2+(BC-h_1)^2 &= OD^2.\end{aligned}$$

Despejando, obtenemos que $(AB-h_2)^2 = 24^2-h_1^2$ y $(BC-h_1)^2 = 22^2-h_2^2$. Sumando ambas ecuaciones y sustituyendo en la cuarta ecuación, tenemos que

$$OD^2=(24^2-h_1^2)+(22^2-h_2^2)=22^2+24^2-(h_1^2+h_2^2)=22^2+24^2-6^2,$$

de donde $OD=\sqrt{22^2+24^2-6^2}=32$ m.

Problema 2. La compañía aeroespacial TotoroX va a lanzar 5 cohetes desde sus dos puertos espaciales. Los puede lanzar en el orden que sea, del puerto que sea, simultánea o secuencialmente. Por ejemplo: $D1, A1-C2, E1, B2$ es una manera de lanzarlos, donde las comas dividen tiempos de lanzamiento y el guión es un lanzamiento simultáneo. ¿De cuántas maneras se puede programar el lanzamiento?

Solución de Guillermo Courtade Morales. Primero vemos que hay $5!$ formas de ordenar los cohetes A, B, C, D, E, ya que no se puede lanzar el mismo cohete más de

una vez. Después notamos que se les puede agregar un 1 o un 2 para indicar la plataforma, como por ejemplo $A1$, $B2$, $C1$, $D2$, $E2$, en el caso en que todos los lanzamientos sean de forma secuencial, lo cual se puede hacer de 2^5 maneras. Cuando se lanzan dos cohetes al mismo tiempo (que indicaremos colocando un guión), no es posible que ambos sean lanzados del mismo puerto espacial, por lo que hay que ver por cada guión, cuántas posibles combinaciones hay. Si hay un solo guión, hay 4 formas de ponerlo: $1, 1, 1, 1-2$; $1, 1, 1, 1-2, 1$; $1, 1-2, 1, 1$; $1-2, 1, 1, 1$. En los lanzamientos individuales hay 2 formas de elegir el puerto; para la última vamos a convenir que el primer miembro de la pareja sale del puerto 1 y el segundo sale del puerto 2. Luego, hay $4 \cdot 2^3 = 32$ maneras en este caso. Si hay dos guiones, hay 3 formas de ponerlo: $1, 1-2, 1-2$; $1-2, 1, 1-2$; $1-2, 1-2, 1$, donde solo el lanzamiento independiente tiene oportunidad de elegir puerto y los otros dos siguen la convención anterior. Luego, hay $3 \cdot 2 = 6$ maneras en este caso.
En total tenemos $120(32+32+6) = 120(70) = 8400$ maneras distintas de realizar los lanzamientos.

Problema 3. Para cada entero positivo n sea $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^3$. Determina el valor de la suma $\dfrac{1}{a_2-1} + \dfrac{1}{a_3-1} + \cdots + \dfrac{1}{a_{100}-1}$.

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Observemos que $a_n = n^3 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = n^3 - (n-1)^3$. Entonces, para cada entero positivo n, tenemos que

$$a_n - 1 = n^3 - (n-1)^3 - 1 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - 1 = 3n^2 - 3n = 3n(n-1).$$

Luego, $\frac{1}{a_n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a_2-1} + \frac{1}{a_3-1} + \cdots + \frac{1}{a_{100}-1} \\
&= \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3-1} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99-1} - \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{100-1} - \frac{1}{100}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{98} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{100}\right) \\
&= \frac{33}{100}.
\end{aligned}$$

Problema 4. Considera la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reales tales que $a_0 = a_1 = 1$ y, para cada entero $n \geq 1$, se cumple que $a_{n+1} = \dfrac{a_{n-1}}{1 + n a_{n-1} a_n}$. Determina el valor de $\dfrac{1}{a_{2018} a_{2017}}$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Realizando los primeros cálculos obtenemos $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{7}, \ldots$, de donde $\frac{1}{a_0 a_1} = 1$, $\frac{1}{a_1 a_2} = 2$,

$\frac{1}{a_2a_3} = 4$, $\frac{1}{a_3a_4} = 7, \ldots$, encontrando que un posible patrón para la sucesión está dado por $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ para $n \geq 1$. Demostremos esto por inducción en n. La base de inducción está dada por los cálculos anteriores. Para el paso inductivo, supongamos que $\frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ para cierto entero $n \geq 1$. Entonces,

$$a_n = \frac{2}{a_{n+1}(n(n+1)+2)}.$$

Sustituyendo en la recursión original, obtenemos que

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{1+(n+1)a_na_{n+1}} = \frac{\frac{2}{a_{n+1}(n(n+1)+2)}}{1+(n+1)\left(\frac{2}{n(n+1)+2}\right)} = \frac{2}{a_{n+1}[(n+1)(n+2)+2]},$$

esto es, $\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$, lo que completa el paso inductivo.
Por lo tanto, $\frac{1}{a_{2018}a_{2017}} = \frac{2017(2018)}{2} + 1 = 2017(1009) + 1 = 2035154$.

Problema 5. Encuentra, en caso de existir, todas las soluciones (x, y, z, t) con x, y, z, t enteros positivos, del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x^2 + 10y^2 &= z^2, \\ 10x^2 + y^2 &= t^2. \end{aligned}$$

Solución. Si x, y, z, t es una solución del sistema dado, entonces $11(x^2+y^2) = z^2+t^2$. Pero, las congruencias de un cuadrado módulo 11 son 0, 1, 4, 9, 5, 3; así, para que la suma de los cuadrados de dos enteros sea múltiplo de 11, los dos enteros deben ser múltiplos de 11. Por lo tanto, 11 divide a z y a t. Luego, 11^2 divide a $z^2 + t^2 = 11(x^2 + y^2)$; por lo que, 11 divide a $x^2 + y^2$. Por el mismo argumento que antes, tenemos que 11 divide a x y a y. Por lo tanto, existen números naturales x_1, y_2, z_1, t_1, tales que $x = 11x_1$, $y = 11y_1$, $z = 11z_1$ y $t = 11t_1$. Así, $11(x_1^2 + y_1^2) = z_1^2 + t_1^2$. Repitiendo el proceso anterior, por descenso infinito, obtenemos que x es múltiplo de cualquier potencia de 11, lo que es una contradicción pues $x \neq 0$. En conclusión, el sistema de ecuaciones inicial no tiene soluciones en los enteros positivos.

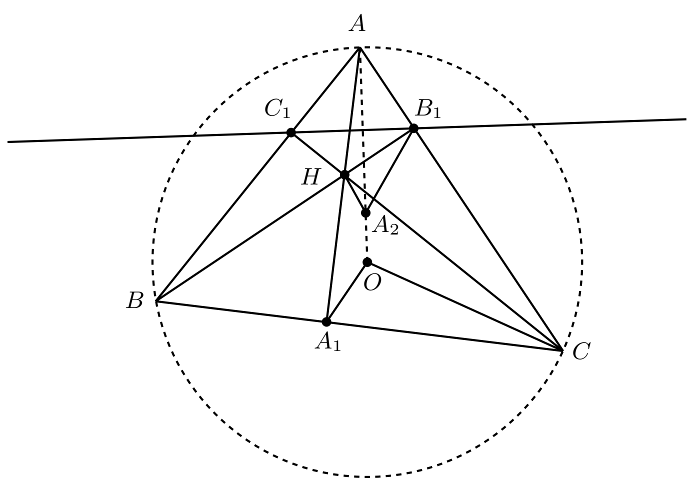
Problema 6. Sea p un número primo de la forma $3k + 2$. Si a y b son enteros tales que $a^2 + ab + b^2$ es divisible por p, demuestra que a y b son ambos divisibles por p.

Solución. Sea $p = 3k + 2$ para algún entero $k \geq 0$. Como $a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, también $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \equiv 0 \pmod{p}$, esto es, $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$. Esto implica que $a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p}$. Multiplicando por ab^2, obtenemos que $a^{3k+1}b^2 \equiv ab^{3k+2} \pmod{p}$. Por otra parte, según el teorema pequeño de Fermat, $b^p \equiv b \pmod{p}$, esto es, $b^{3k+2} \equiv b \pmod{p}$. Luego, $a^{3k+1}b^2 \equiv ab \pmod{p}$.
Supongamos, por contradicción y sin pérdida de generalidad, que $p \nmid a$. Como p es primo, tenemos que p y a son primos relativos. Luego, por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, esto es, $a^{3k+1} \equiv 1 \pmod{p}$. Por lo tanto,

$b^2 \equiv ab \pmod{p}$. De aquí que $p \mid b(b-a)$ y, como p es primo, $p \mid b$ o $p \mid (b-a)$.
Si $p \mid b$, entonces $p \mid b^3$. Como $p \mid (a^3 - b^3)$, se sigue que $p \mid a^3$ y, en consecuencia, $p \mid a$ (ya que p es primo), lo que es una contradicción. Por lo tanto, $p \nmid b$. Entonces, debemos tener que $p \mid (b-a)$. Esto implica que $p \mid (b^2-a^2)$ y como $p \mid (a^2+ab+b^2)$, concluimos que p debe dividir a $a^2+ab+b^2-(b^2-a^2) = a(2a+b)$. Así, $p \mid a$ o $p \mid (2a+b)$. Como $p \nmid a$, debemos tener que $p \mid (2a+b)$. Por lo tanto, p divide a $2(b-a)+2a+b = 3b$, de modo que $p \mid 3$ o $p \mid b$. Si $p \mid 3$, entonces $p = 3$ (pues p es primo), lo cual no es posible pues 3 no es de la forma $3k+2$. Por lo tanto, $p \mid b$ y, como vimos antes, esto último implica que $p \mid a$, lo que es una contradicción.
Lo anterior prueba que p debe dividir al entero a. Luego, $p \mid a^3$ y, como $p \mid (a^3 - b^3)$, se sigue que $p \mid b^3$, de donde $p \mid b$. En conclusión, p divide a los dos enteros a y b.

Problema 7. Las alturas AA_1, BB_1 y CC_1 de un triángulo acutángulo ABC se intersecan en H. Sea A_2 el punto reflejado de A sobre la recta B_1C_1 y sea O el circuncentro del triángulo ABC. Demuestra que OHA_1A_2 es un cuadrilátero cíclico.

Solución. Como $\angle CB_1B = \angle CC_1B = 90°$, tenemos que BC_1B_1C es un cuadrilátero cíclico. Así, $\angle ABC = \angle AB_1C_1$; por lo tanto, sus ángulos complementarios $\angle BAA_1$ y $\angle A_2AC$, respectivamente, son iguales. Luego, AH y AA_2 son isogonales; pero es conocido que AH y AO son isogonales, entonces A_2, A y O son colineales. Por ser radios, $AO = OC$, de donde $\angle ACO = \angle OAC$. Pero, por ser A_2 el reflejado de A, $\angle B_1AA_2 = \angle B_1A_2A$; por tanto, $\angle B_1A_2A = \angle B_1CO$. Así, OA_2CB_1 es un cuadrilátero cíclico.



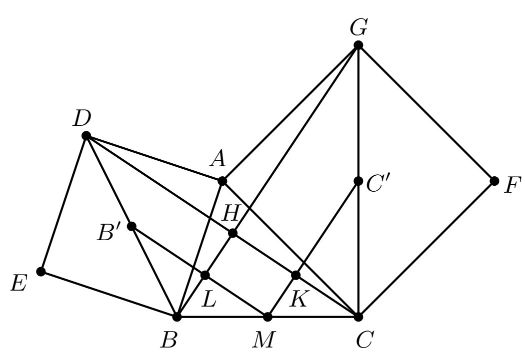
Por tener dos ángulos opuestos de $90°$, el cuadrilátero HA_1CB_1 es cíclico. Por la potencia de A a las circunferencias OA_2CB_1 y HA_1CB_1, se sabe que $AB_1 \cdot AC = AO \cdot AA_2$ y $AB_1 \cdot AC = AH \cdot AA_1$, respectivamente. Así, $AO \cdot AA_2 = AH \cdot AA_1$, de donde se sigue que OHA_1A_2 es un cuadrilátero cíclico.

Problema 8. Dada una cuadrícula de $m \times n$ y tres colores, se quiere colorear cada uno de los segmentos de la cuadrícula con uno de los tres colores de tal manera que cada cuadrado unitario tenga dos lados de un mismo color y los otros dos lados de un segundo color. ¿Cuántas coloraciones diferentes se pueden hacer?

Solución. Se numeran las filas de la cuadrícula de arriba a abajo y las columnas de izquierda a derecha. El lado de la izquierda del cuadrado unitario en la esquina superior izquierda se puede colorear de 3 formas. A partir de ese momento, hay 3 maneras de escoger el lado del cuadrado unitario que se coloreará del mismo color que el primer lado. Los dos lados restantes se colocarán del mismo color. Este color se puede escoger de dos maneras. En conclusión, el cuadrado unitario en la esquina superior izquierda se puede colorear de $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ maneras distintas.
Luego, se pueden colorear de manera sucesiva los cuadrados unitarios de la primera fila, de izquierda a derecha. En cada caso, el lado izquierdo del cuadrado unitario ya se coloreó. Por tanto, hay 6 formas de colorear cada cuadrado unitario. De la misma manera se puede colorear la primera columna. Se colorearán de arriba a abajo los cuadrados unitarios y por cada cuadrado unitario hay 6 formas de colorearlos.
Ahora, si se colorean los cuadrados unitarios de las filas $2, 3, \ldots, m$ y las columnas $2, 3, \ldots, n$, de arriba a abajo y de izquierda a derecha, entonces, cuando se vaya a colorear, el cuadrado unitario ya tendrá dos lados coloreados: el de arriba y el de la izquierda. Si los lados coloreados tiene diferentes colores, entonces los colores del cuadrado ya se decidieron y hay 2 formas de colorear el resto de los lados con los dos colores. Si los lados del cuadrado que ya están coloreados tienen el mismo color, entonces los dos lados que quedan por colorear deben tener el mismo color. Dicho color se puede escoger entre las dos opciones restantes. Por tanto, por cada uno de los cuadrados unitarios, hay 2 formas de colorearlos. En conclusión, hay $18 \cdot 6^{m-1} \cdot 6^{n-1} \cdot 2^{(m-1)(n-1)} = 3^{m+n} \cdot 2^{mn}$ coloraciones diferentes.

Problema 9. Sea ABC un triángulo. En los lados AB y CA se construyen exteriormente cuadrados $BADE$ y $ACFG$, respectivamente y cuyos centros son C' y B'. Si M es el punto medio de BC, demuestra que los segmentos MB' y MC' son perpendiculares y de la misma longitud.

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Tracemos CD y BG.



Notemos que los triángulos ADC y AGB son congruentes por el criterio LAL, puesto que comparten $\angle BAC + 90^\circ$ y además, $AD = AB$ y $AC = AG$. Esto implica que $DC = BG$. Por otro lado, es claro que B' es el punto medio de DB ya que el centro de un cuadrado es la intersección de sus diagonales y como un cuadrado es un paralelogramo, sus diagonales se bisecan. Luego, los triángulos BMB' y BDC son semejantes ya que tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual. Esto implica que $2MB' = DC$, ya que están en razón $2 : 1$. De manera análoga, tenemos que los triángulos CMC' y CGB son semejantes y $2MC' = GB$. Por lo tanto, $MC' = MB'$.
Ahoraa, sea $\angle BGC = \alpha$. Entonces, $\angle AGB = 45^\circ - \alpha$; como $\angle DCA = \alpha$, entonces $\angle C'KC + 45^\circ - \alpha + 45^\circ + \alpha = 180^\circ$ y de aquí $\angle C'KC = 90^\circ$. Además, como GK y GH son paralelas y C, K y H son colineales, tenemos que $\angle AHC = 90^\circ$. Ahora, sea $\angle CDA = \beta$, entonces $\angle BDC = 45^\circ - \beta$ y, como $\angle ABG = \beta$, tenemos que $\angle B'LB + 45^\circ - \beta + 45^\circ + \beta = 180^\circ$. Luego, $\angle B'LB = 90^\circ$ y al igual que antes, como $B'M$ y DC son paralelas y B, L y H son colineales, entonces $\angle AHB = 90^\circ$. Por lo tanto, $90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle LMK = 360^\circ$, de donde $\angle LMK = 90^\circ$, como queríamos demostrar.

Problema 10. Sea n un entero positivo par. Decimos que una lista de números a_1, $a_2, \ldots, a_n$ es n-completa si para cada $1 \leq m \leq n$ alguna de las sumas $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$ o $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_{n-m+1}$ es un entero. Para cada n encuentra la mínima cantidad de enteros que puede haber en una lista n-completa.

Solución. Mostremos que para cada n el mínimo es 2. consideremos $n = 2$ y a_1, a_2 la lista 2-completa, entonces $a_1 + a_2$ es entero. Por otro lado, alguno de a_1 y a_2 es entero, esto implica que ambos tienen que ser enteros, de donde se cumple la afirmación para $n = 2$.
Supongamos que $n = 2k$ con $k > 1$ y sea $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_k + 1 \ldots, a_n$ una lista n-completa. Como la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es un entero y alguna de las sumas $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}$ es un entero, también la otra debe ser un entero. Por otro lado, como $a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$ o $a_{k+2} + a_{k+2} + \cdots + a_{2k}$ es un entero, alguno de los números a_k o a_{k+1} tiene que ser entero. Lo anterior junto con que a_1 o a_n son enteros, implica que del conjunto $\{a_1, a_k, a_{k+1}, a_n\}$ debe haber al menos dos enteros (uno por cada pareja (a_1, a_n), (a_k, a_{k+1})).
Por último, veamos que para cada k hay una lista $2k$-completa. Si k es impar consideramos la lista $a_1 = a_{k+1} = 1$ y los demás términos iguales a $\frac{1}{2}$; si k es par, consideramos la lista $a_1 = a_k = 1$ y los demás términos iguales a $\frac{1}{2}$. En cualquiera de los dos casos se tiene que las listas son $2k$-completas y cada una tiene exactamente dos enteros como se quería.

Competencia Internacional de Matemáticas 2017 (Secundaria)

Como mencionamos en el número 3 de Tzaloa de 2018, durante el mes de junio de 2018 celebramos el segundo concurso nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB). Tenemos ya la segunda preselección rumbo a la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) que nace de la OMMEB, hecha a la medida. En ese mismo número 3 publicamos los enunciados y las soluciones de la prueba individual en el nivel elemental (primaria) de la InIMC 2017, que se celebró en Locknow, India. En esta ocasión publicamos los enunciados y las soluciones de las pruebas individuales y por equipos del nivel secundaria de la InIMC 2017.

En la InIMC 2017, México participó con dos equipos de nivel secundaria y con un equipo de primaria, obteniendo cuatro medallas de plata, cinco medallas de bronce y tres menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron dos medallas de plata.

El Equipo A estuvo integrado por Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León), Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas), Rogelio Esaú Aguirre González (Coahuila) y Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León). Eric obtuvo una medalla de plata, Sofía y Pablo obtuvieron medallas de bronce y Rogelio obtuvo una mención honorífica.

El Equipo B estuvo integrado por Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato), Itzanami Berlanga Contreras (San Luis Potosí), Jorge Antonio Joseph Fernández (Ciudad de México) y Kenny Eduard Vercaemer González (Morelos). Jesús Omar obtuvo una medalla de plata, Jorge y Kenny obtuvieron medallas de bronce e Itzanami obtuvo una mención honorífica.

La prueba individual de la IMC (en el nivel secundaria) consiste de 15 preguntas, divididas en dos secciones A y B, con un tiempo de 120 minutos. La sección A consiste de 12 preguntas en las que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones), cada problema vale 5 puntos y no hay puntos parciales. La sección B consiste de 3 preguntas, cada una vale 20 puntos, hay puntos parciales y se tiene solo una página completa para escribir la solución. Esta segunda parte es similar a un examen común y corriente de Olimpiada con la restricción de espacio y tiempo.

La prueba por equipos consiste de 10 problemas para resolver en 70 minutos. Los problemas impares requieren nada más la respuesta, mientras que los problemas pares requieren solución completa; cada problema vale 40 puntos, donde no hay puntos parciales para los problemas impares. Con los equipos reunidos, se entregan los primeros 8 problemas. Los integrantes tienen 10 minutos para discutirlos y repartirlos, con la condición de no poder escribir nada durante ese lapso; cada integrante debe tener al menos un problema asignado. Cuando concluye ese tiempo, los integrantes se separan y tienen 35 minutos para hacer su trabajo individual. Finalmente, el equipo vuelve a reunirse y tiene 25 minutos para resolver los últimos 2 problemas.

Examen Individual

Parte A

Problema 1. La misma cantidad de libros de historia y libros de matemáticas tienen pasta dura; $\frac{2}{5}$ de los libros de historia y $\frac{3}{4}$ de los libros de matemáticas tienen pasta dura. ¿Qué fracción del total de libros tienen pasta dura?

Problema 2. Un granjero recoge 2017 manzanas con un peso promedio de 100 gramos cada una. El promedio de los pesos de las manzanas que pesan más de 100 gramos es 122 gramos, mientras que el promedio de los pesos de las manzanas que pesan menos de 100 gramos es 77 gramos. ¿Al menos cuántas manzanas de las que recogió el granjero pesan exactamente 100 gramos?

Problema 3. La suma de tres lados de un rectángulo es 2017 cm, la suma del cuarto lado y la diagonal es también 2017 cm. Halla la longitud de la diagonal del rectángulo en centímetros.

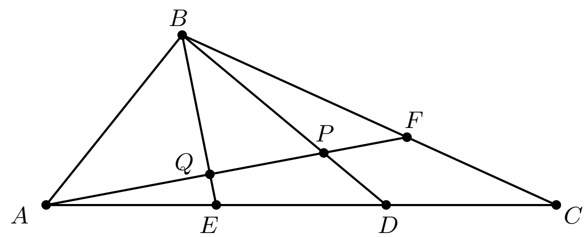
Problema 4. Sean a, b, c, d números reales tales que $a \leq b \leq c \leq d$ y $c + d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Halla el máximo valor de $a + b$.

Problema 5. Halla el menor valor posible de la fracción $\frac{a^2+b^2+c^2}{ac+bc}$ donde a, b y c son números reales positivos.

Problema 6. Un octágono de lados $3, 3, 1, 1, 15, 15, 15, 15$ cm se inscribe en un círculo. ¿Cuál es el área del octágono en cm^2?

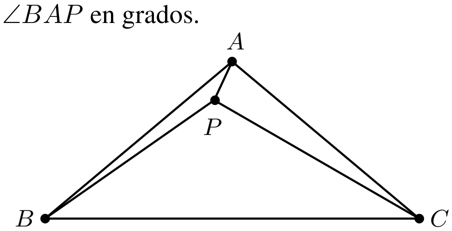
Problema 7. Si x, y son números reales tales que $4x^2 + y^2 = 4x - 2y + 7$, halla el valor máximo de $5x + 6y$.

Problema 8. En el triángulo ABC, los puntos E y D están en AC, el punto F está en BC de forma que $AE = ED = DC$ y $BF : FC = 2 : 3$. AF corta a BD y a BE en los puntos P y Q, respectivamente. Halla la razón entre las áreas de $EDPQ$ y el triángulo ABC.



Problema 9. La suma de los números reales no negativos $x_1, x_2, \ldots, x_8$ es igual a 8. Halla el mayor valor posible de la suma $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_7x_8$.

Problema 10. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y $\angle BAC = 100°$. Un punto P dentro del triángulo ABC cumple que $\angle CBP = 35°$ y $\angle PCB = 30°$. Halla la medida del ángulo $\angle BAP$ en grados.



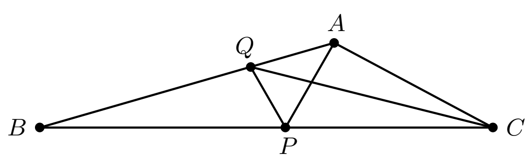
Problema 11. Si $xyz = -1$, $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ y $c = z + \frac{1}{z}$, calcula el valor de $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + abc}$.

Problema 12. Mal, Num y Pin tienen diferente cantidad de canicas. Cinco veces la suma de los productos de la cantidad de canicas de cada pareja de ellos es igual a siete veces el producto de las cantidades que tiene cada uno de los tres. Halla el máximo valor posible para la suma de todas las canicas.

Parte B

Problema 1. Sean x, y enteros no negativos tales que $2^6 + 2^x + 2^{3y}$ es un cuadrado perfecto menor que 10000. Halla el máximo valor de $x + y$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle B = 16°$ y $\angle C = 28°$.



Sea P un punto en BC tal que $\angle BAP = 44°$ y sea Q un punto en AB tal que $\angle QCB = 14°$. Halla la medida de $\angle PQC$ en grados.

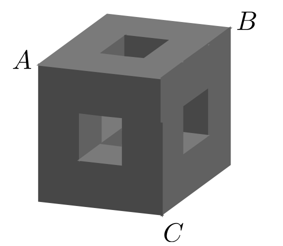
Problema 3. Sean $f(x)$ y $g(x)$ polinomios cuadráticos diferentes tales que los coeficientes principales de ambos polinomios son iguales a 1 y

$$f(1) + f(2017) + f(2017^2) = g(1) + g(2017) + g(2017^2).$$

Encuentra el valor de x si $f(x) = g(x)$.

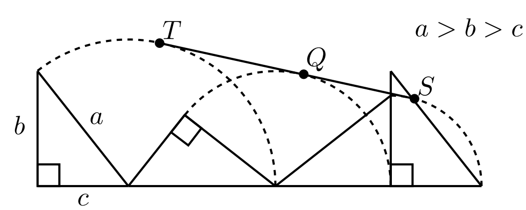
Examen por Equipos

Problema 1. El Cubo Hueco es un cubo de $3 \times 3 \times 3$ al que se le han quitado los cubos unitarios centrales y solo quedan agujeros por los que se puede ver a través de ellos, como lo muestra el diagrama. Considera la sección que resulta de cortar al cubo con un plano que pasa por los vértices A, B y C. Dibuja la figura de esta sección. (Sombrea la parte sólida del triángulo ABC y deja en blanco la parte agujerada).



Problema 2. Se tienen 314 monedas en 21 cajas abiertas. En cada movimiento, elige dos cajas y puedes tomar una moneda de cada una de ellas y colocarlas en una tercera caja. En el movimiento final, toma todas las monedas de una sola caja. ¿Cuál es el máximo número de monedas que puedes tomar al final?

Problema 3. Un triángulo rectángulo de hipotenusa a se dibuja sobre su cateto más corto $c = 1$. Cuando lo rotamos sucesivamente tres veces nos queda la siguiente figura.

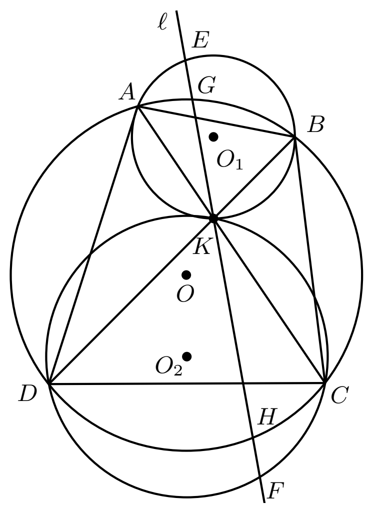


Si TS es una tangente común a los tres arcos de circunferencia, encuentra el valor de a.

Problema 4. Encuentra todos los pares ordenados (x, y) de enteros positivos que satisfacen la ecuación $x^3 + y^3 = x^2 + 18xy + y^2$.

Problema 5. Sean $P(x)$ un polinomio de grado 3 y x_1, x_2, x_3 las soluciones de $P(x) = 0$. Si $\frac{P(\frac{1}{3})-P(\frac{-1}{3})}{P(0)} = 8$, $\frac{P(\frac{1}{4})-P(\frac{-1}{4})}{P(0)} = 9$ y $x_1 + x_2 + x_3 = 35$, encuentra el valor de $\frac{x_2+x_3}{x_1} + \frac{x_1+x_3}{x_2} + \frac{x_1+x_2}{x_3}$.

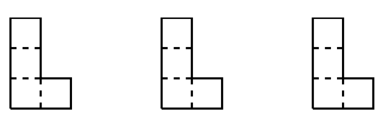
Problema 6. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en un círculo de centro O. Las diagonales AC y BD se intersecan en K. O_1 es el circuncentro del triángulo ABK y O_2 es el circuncentro del triángulo CDK. Una recta ℓ que pasa por K interseca a los dos circuncírculos en E y F, respectivamente, y al circuncírculo de $ABCD$ en los puntos G y H. Prueba que $EG = FH$.



Problema 7. Sea $a > 0$ y se define $x_n = a^n - \frac{1}{a_n}$ para $n = 1, 2, \ldots$ Si $x_1 = 3$, encuentra el dígito de las unidades de x_{2017}.

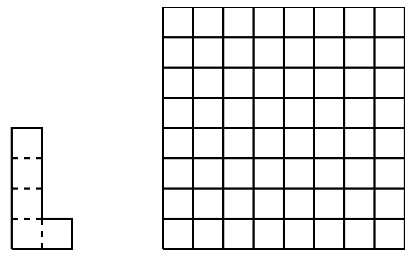
Problema 8. Sean x, y, z números reales. Sean k y m los mínimos valores posibles de $\frac{x^2+y^2+z^2+1}{xy+yz+z}$ y $\frac{x^2+y^2+z^2+1}{xy+y+z}$, respectivamente. Encuentra $km + k + m$.

Problema 9. Usa tres copias, no traslapadas, de un L-tetraminó para construir una figura simétrica. Cada L-tetraminó debe tener un punto común con al menos otro L-tetraminó.



Encuentra una solución en la cual las copias pueden ser rotadas, pero no reflejadas.

Problema 10. ¿De cuántas maneras se puede colocar un solo L-pentominó sobre el tablero de ajedrez de 8×8 de manera que cubra completamente cinco de los cuadrados pequeños del tablero?



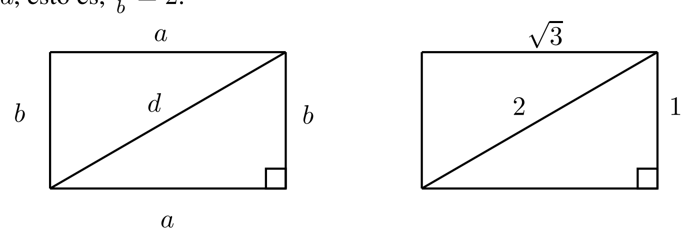
Soluciones del Examen Individual

Parte A

Solución del Problema 1. Supongamos que hay x libros de historia y y libros de matemáticas. Como hay la misma cantidad de libros de historia que de matemáticas que tienen pasta dura, tenemos que $\frac{2}{5}x = \frac{3}{4}y$ y, por lo tanto, $y = \frac{8}{15}x$. Luego, el número total de libros es $x + y = x + \frac{8}{15}x = \frac{23}{15}x$. Sabemos que el número total de libros con pasta dura es $2 \times \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x$. Por lo tanto, la fracción del total de libros en pasta dura es $\frac{4}{5}x \div \frac{23}{15}x = \frac{12}{23}$.

Solución del Problema 2. Supongamos que el número de manzanas que pesan más de 100 gramos es m y que el número de manzanas que pesan menos de 100 gramos es n. Entonces, el número de manzanas que pesan exactamente 100 gramos es $2017-m-n$. Podemos calcular el peso total como $122m + 77n + 100(2017 - m - n) = 201700$, de donde $22m = 23n$. Luego, existe un entero positivo k tal que $m = 23k$ y $n = 22k$. Como $m + n = 45k < 2017$, tenemos que $k \leq 44$, y el número de manzanas que pesan exactamente 100 gramos es al menos $2017 - (45 \times 44) = 37$. Si el granjero tiene $23 \times 44 = 1012$ manzanas que pesan 122 gramos y $22 \times 44 = 968$ manzanas que pesan 77 gramos, todas las condiciones del problema se satisfacen.

Solución del Problema 3. Tenemos que $2b+a = 2017$ y $a+d = 2017$, lo cual implica que $2b = d$, esto es, $\frac{d}{b} = 2$.

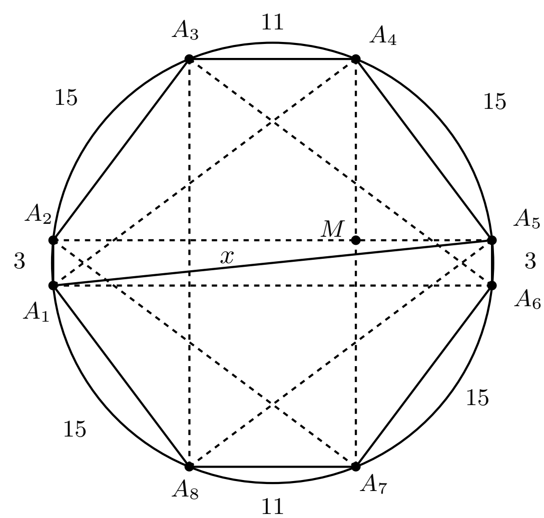


Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2 + b^2 = d^2 = 4b^2$, de donde $a^2 = 3b^2$. Entonces, $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. Por lo tanto, $\frac{d}{a} = \frac{d}{b}/\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, esto es, $a = \frac{d\sqrt{3}}{2}$. Sustituyendo en la relación $a + d = 2017$ y despejando d, obtenemos que $d = \frac{2017\times 2}{2+\sqrt{3}} = 4032(2-\sqrt{3})$ cm.

Solución del Problema 4. Tenemos que $1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 3c^2 + d^2 = 3c^2 + (1-c)^2$, de donde $2c(2c-1) \geq 0$. Si $c = 0$, entonces $d = 1$ y $a = b = 0$. Si $c > 0$, entonces $c \geq \frac{1}{2}$ y, en consecuencia, $d \geq c \geq \frac{1}{2}$. Como $c + d = 1$, tenemos que $c = d = \frac{1}{2}$ y, como $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}$ y $0 \leq a \leq b \leq \frac{1}{2}$, obtenemos que $a = b = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tenemos dos soluciones (a, b, c, d) para el problema: $(0, 0, 0, 1)$ y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Luego, el máximo valor de $a + b$ es 1.

Solución del Problema 5. Escribamos $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a^2 + \frac{1}{2}b^2 + c^2$. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que $a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{2}b^2} = \sqrt{2}ab$ y $\frac{1}{2}b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{2}c^2} = \sqrt{2}bc$. Sumando estas dos desigualdades, obtenemos que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{2}(ab + bc)$. El valor mínimo $\sqrt{2}$ se obtiene cuando $a = c = 1$ y $b = \sqrt{2}$.

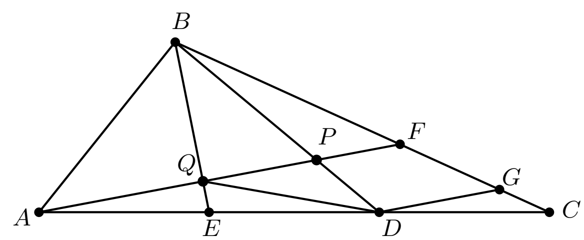
Solución del Problema 6. El área del octágono no depende del orden de sus lados. Sea x un diámetro del círculo. Entonces, $A_2A_5 = \sqrt{x^2 - 9}$, $A_1A_4 = \sqrt{x^2 - 225}$ y $A_4A_7 = \sqrt{x^2 - 121}$. En el triángulo rectángulo A_4A_5M, tenemos que $15^2 = \left(\frac{\sqrt{x^2-9}-11}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x^2-121}-3}{2}\right)^2$. De aquí, obtenemos que $x = \sqrt{850}$ y el área del octágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ es $3\sqrt{850-9} + (11 + \sqrt{850-9})(\frac{\sqrt{850-121}-3}{2}) = 567$ cm^2.



Solución del Problema 7. Reescribimos la ecuación dada como $(2x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$. Sean $a = 2x - 1$ y $b = y + 1$. Entonces, $a^2 + b^2 = 9$ y $5x + 6y = \frac{5}{2}a + 6b - \frac{7}{2}$.

Multiplicando por 2 esta última ecuación, obtenemos que $10x+12y+7 = 5a+12b$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que $(5a+12b)^2 \leq (5^2+12^2)(a^2+b^2) = 1521$, de donde $5a+12b \leq 39$. Esta desigualdad implica que $10x+12y \leq 32$, esto es, $5x+6y \leq 16$. La igualdad se sostiene cuando $\frac{a}{5} = \frac{b}{12}$. De esta relación y de la igualdad $a^2+b^2 = 9$, obtenemos que $a = \frac{15}{13}$ y $b = \frac{36}{13}$. Luego, $x = \frac{14}{13}$ y $y = \frac{23}{13}$. Por lo tanto, el máximo valor de $5x+6y$ es $5 \times \frac{14}{13} + 6 \times \frac{23}{13} = 16$.

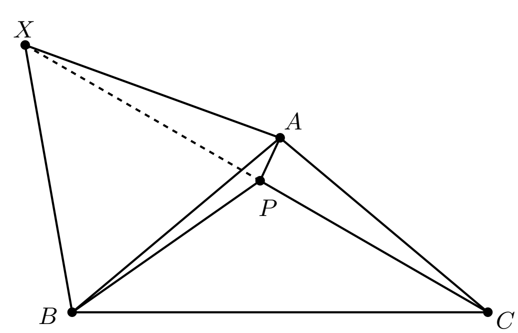
Solución del Problema 8. Sea G un punto sobre BC tal que DG y AF son paralelas. Sean $BF = 2x$ y $CF = 3x$. Por el paralelismo anterior, tenemos que $CG : GF = CD : DA = 1 : 2$. Supongamos entonces que $CG = x$ y que $GF = 2x$. Tenemos también que $DP : PB = GF : FB = 1 : 1$, de donde AP y BE son medianas del triángulo ABD. Entonces, Q es el punto de intersección de las medianas del triángulo ABD.



Esto implica que los triángulos EDQ, DPQ y PQD tienen la misma área. Como $AE = ED = DC$, las áreas de los triángulos AED, EBD y DBC son iguales. Por lo tanto, $(EDPQ) = 2(EQD) = 2 \times \frac{1}{3}(EBD) = 2 \times \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}(ABC) = \frac{2}{9}(ABC)$, donde los paréntesis denotan área.

Solución del Problema 9. Tenemos que $(x_1+x_3+x_5+x_7)(x_2+x_4+x_6+x_8) \geq x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_8$, pues $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, 8$. Se sigue que, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\cdots+x_7x_8 \leq (x_1+x_3+x_5+x_7)(x_2+x_4+x_6+x_8) = a(8-a) = -a^2+8a = 16-(a-4)^2 \leq 16$, donde $a = x_1+x_3+x_5+x_7$. El valor máximo 16 se alcanza cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$ y $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$.

Solución del Problema 10. Sea X un punto en distinto semiplano de C con respecto a AB tal que ABX es un triángulo equilátero.



Tenemos que $AX = AB = AC$, por lo que AXC es un triángulo isósceles, lo cual implica que $\angle ACX = \frac{1}{2}(180° - \angle BAC) = \frac{1}{2}(180° - 60° - 100°) = 10° = \angle ACP$ y, por lo tanto, los puntos X, P y C son colineales. Además, por ángulo externo, tenemos que $\angle XPB = 30° + 35° = 65° = \angle PBX$, por lo que $XP = XB$ y, en consecuencia, $XP = XA$.
Por otra parte, notemos que $\angle BXP = 50°$, de modo que $\angle PXA = 10°$, lo cual implica que $\angle BAP = \angle XAP - \angle XAB = \frac{1}{2}(180° - 10°) - 60° = 25°$, donde la segunda igualdad se sigue por ser isósceles el triángulo AXP.

Solución del Problema 11. Tenemos que $a = x + \frac{1}{x} = x - \frac{-1}{x} = x - \frac{xyz}{x} = x - yz$. Análogamente, obtenemos que $b = y - xz$ y $c = z - xy$. Por lo tanto,

$$a^2 = x^2 - 2xyz + y^2z^2 = x^2 + y^2z^2 + 2, \quad b^2 = y^2 + x^2z^2 + 2, \quad c^2 = z^2 + x^2y^2 + 2,$$

de donde, $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 6$.
Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned} abc &= (x - yz)(y - xz)(z - xy) \\ &= -x^2y^2z^2 + xyz - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 + xyz(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= -2 - x^2y^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Luego, $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ y, por lo tanto, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + abc} = 2$.

Solución del Problema 12. Si M, N y P denotan el número de canicas que tienen Mal, Num y Pin, respectivamente, entonces podemos representar la situación como $5(MN + NP + PM) = 7MNP$. Si dividimos ambos lados entre $5MNP$, obtenemos $\frac{1}{M} + \frac{1}{N} + \frac{1}{P} = \frac{7}{5}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $M < N < P$, entonces $\frac{1}{M} > \frac{1}{N} > \frac{1}{P}$, de donde $\frac{3}{M} > \frac{7}{5}$, esto es, $M < \frac{15}{7}$. De modo que los posibles valores de M son 1 y 2.
Si $M = 1$, entonces $\frac{1}{N} + \frac{1}{P} = \frac{2}{5}$. Como $\frac{1}{N} > \frac{1}{P}$, tenemos que $\frac{2}{N} > \frac{2}{5}$ y, por lo tanto, $N < 5$. Además, como $1 = M < N$, los posibles valores de N son 2, 3 y 4. Si $N = 2$, entonces $P < 0$; si $N = 3$, entonces $P = 15$; si $N = 4$, entonces $P = \frac{20}{3}$ que no es entero.
Si $M = 2$, entonces $\frac{1}{N} + \frac{1}{P} = \frac{9}{10}$. Como $\frac{1}{N} > \frac{1}{P}$, tenemos que $\frac{2}{N} > \frac{9}{10}$, esto es, $N < \frac{20}{9} < 3$ y, como $2 = M < N$, se sigue que no hay soluciones en este caso.
Por lo tanto, la única solución posible es que Mal, Num y Pin tuvieran 1, 3 y 15 canicas (en algún orden), de modo que el número total de canicas es $1 + 3 + 15 = 19$.

Parte B

Solución del Problema 1. Vamos a determinar todas las parejas de enteros no negativos (x, y) tales que $2^6 + 2^x + 2^{3y}$ es un cuadrado menor que 10000 y, de ellas, elegimos la que tiene mayor suma. Claramente $x \leq 13$ y $y \leq 4$, pues de lo contrario, $2^6 + 2^x + 2^{3y} > 10000$. Tenemos que $x \geq 6$ o $x < 6$. Supongamos que $x \geq 6$ y $y \geq 2$. Entonces, $2^6 + 2^x + 2^{3y} = 2^6(1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6})$ y, como 2^6 es un cuadrado, el otro factor también debe ser un cuadrado.

Si $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6}$ es par, entonces $x = 6$ o $y = 2$ pero no ambos. Si $x = 6$, entonces $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6} = 2 + 2^{3y-6}$ no es un cuadrado para $y = 3, 4$. Ahora, si $y = 2$, entonces verificando las posibilidades $x = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$, es fácil ver que $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6} = 2 + 2^{x-6}$ es un cuadrado solo para $x = 7$ y $2^6 + 2^7 + 2^6 = 64 + 128 + 64 = 256 = 16^2$.
Si $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6}$ es impar, entonces es de la forma $(2M + 1)^2 = 4M^2 + 4M + 1$ para algún entero positivo M y $x > 6$. Si $x = 7$, entonces $3 + 2^{3y-6} = 4M^2 + 4M + 1$, esto es, $2 + 2^{3y-6} = 4M(M + 1)$. Como el lado derecho de esta igualdad es par, necesariamente $y \geq 3$. Luego, 2^{3y-6} es múltiplo de 4 y, en consecuencia, $2 = 4M(M + 1) - 2^{3y-6}$ es múltiplo de 4, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $x \geq 8$.

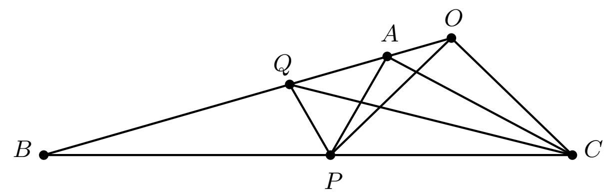
a) Si $x \leq 3y$, la igualdad $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6} = 4M^2 + 4M + 1$ es equivalente a la igualdad $2^{x-8}(1 + 2^{3y-x}) = M(M + 1)$. Si $x = 3y$, entonces $2^{x-8}(1 + 2^{3y-x}) = 2^{x-7}$, lo cual implica que M y $M + 1$ deben ser potencias de 2 (ya que M y $M + 1$ son primos relativos), pero las únicas potencias de 2 que difieren en 1 son 2 y 1, así que $M+1 = 2$ y $M = 1$. Luego, $2^{x-7} = 2$, de donde $x-7 = 1$, esto es, $x = 8$. Esto implica que $2^{3y-6} = 4$ y, en consecuencia, $3y - 6 = 2$, esto es, $y = \frac{8}{3}$ que no es un entero. Así, $8 < x < 3y$. Entonces, 2^{x-8} es par y $1 + 2^{3y-x}$ es impar. Como 2^{x-8} divide a $M(M+1)$ y M y $M+1$ son primos relativos, concluimos que $2^{x-8} \mid M$ o $2^{x-8} \mid (M+1)$. Luego, $2^{x-8} \leq M$ o $2^{x-8} \leq (M+1)$. Observemos que no puede suceder que $2^{x-8} < M$ o que $2^{x-8} < M + 1$, pues en cualquier caso, tendríamos que 2 divide a $1 + 2^{3y-x}$, lo cual es imposible. Por lo tanto, $2^{x-8} = M$ o $2^{x-8} = M + 1$. Si $M = 2^{x-8}$, entonces $M + 1 = 1 + 2^{3y-x}$, esto es, $2^{x-8} = 2^{3y-x}$, lo cual implica que $x = \frac{3}{2}y + 4 \leq 3y$. Luego, $8 \leq 3y$, esto es, $y > 2$. Como $y \leq 4$, las posibilidades para y son 3 o 4. Si $y = 3$, entonces $x = \frac{9}{2} + 4 = \frac{17}{2}$ que no es entero. Si $y = 4$, entonces $x = 10$ y $2^6 + 2^{10} + 2^{12} = 64 + 1024 + 4096 = 5184 = 72^2$. Ahora, si $M + 1 = 2^{x-8}$, entonces $M = 1 + 2^{3y-x}$, esto es, $2^{x-8} - 1 = 1 + 2^{3y-x}$, lo cual implica que $2^{x-8} - 2^{3y-x} = 2$. No es difícil ver que los posibles valores para este caso se dan cuando $3y - x = 1$ y $x - 8 = 2$, esto es, $x = 10$ y $y = \frac{11}{3}$ que no es entero.

b) Si $x > 3y$, entonces $1 + 2^{x-6} + 2^{3y-6} = 4M^2 + 4M + 1$. Si $y = 2$, el lado izquierdo sería un entero par, lo cual no puede ser porque el lado derecho es impar. Luego, $y \geq 3$ y, por lo tanto, la igualdad anterior se puede escribir en la forma $2^{3y-8}(1 + 2^{x-3y}) = M(M + 1)$. De manera análoga al inciso anterior, concluimos que $M = 2^{3y-8}$ o $M + 1 = 2^{3y-8}$. En el primer caso, obtenemos que $M + 1 = 1 + 2^{x-3y}$, lo cual implica que $x - 3y = 3y - 8$, esto es, $6y = x + 8$. Como $3 \leq y \leq 4$, tenemos que $y = 3$ o 4. Si $y = 3$, obtenemos $x = 10$. Si $y = 4$, obtenemos $x = 16$ que no es posible porque $x \leq 13$. Luego, la única solución en este caso es $(x, y) = (10, 3)$. Ahora, si $M + 1 = 2^{3y-8}$, entonces $M = 1 + 2^{x-3y}$. Luego, $2^{x-3y} + 2 = 2^{3y-8}$, que no tiene soluciones para $y = 2, 3, 4$.

Si $x < 6$, entonces $x + y < 6 + y \leq 6 + 4 = 10$ y se puede probar que las soluciones en este caso son $(x, y) = (4, 0)$ y $(4, 2)$.
Si $y = 0$, obtenemos que $2^6 + 2^x + 2^{3y} = 65 + 2^x$ es un cuadrado para $x = 4, 10$ verificando las posibilidades para $0 \leq x \leq 13$.
Si $y = 1$, es fácil verificar que $2^6 + 2^x + 2^{3y} = 72 + 2^x$ no es un cuadrado para

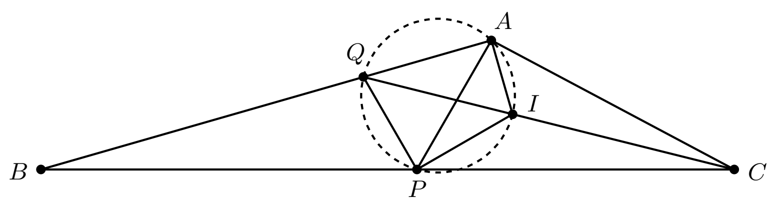
$0 \leq x \leq 13$.
En conclusión, tenemos seis parejas de enteros no negativos (x, y) tales que $2^6 + 2^x + 2^{3y}$ es un cuadrado menor que 10000: $(4, 0)$, $(4, 2)$, $(7, 2)$, $(10, 0)$, $(10, 3)$ y $(10, 4)$. Por lo tanto, el mayor valor de $x + y$ es 14.

Solución del Problema 2. Sea O el punto sobre AB tal que $\angle OCP = 44°$.



Entonces, $\angle OCP = 44° = \angle BAP$ y, por lo tanto, $\angle OCP + \angle PAC = 180°$, esto es, $OAPC$ es un cuadrilátero cíclico. Luego, $\angle CPO = \angle CAO = 44° = \angle OCP$. Con esto podemos concluir que el triángulo OPC es isósceles. Como $\angle AOP = \angle ACP = 28° = 2\angle QCP$, tenemos que O es el circuncentro del triángulo QPC y $\angle POC = 180° - 16° - 28° - 44° = 92°$. Por lo tanto, $\angle PQC = \frac{1}{2}\angle POC = 46°$.

Solución alternativa. Sea I el incentro del triángulo PAC y consideremos los segmentos AI y PI.



Observemos que $\angle PAC = 180° - 16° - 28° - 44° = 92°$ y $\angle APC = 180° - 28° - 92° = 60°$, de modo que $\angle AQI = 180° - 44° - 92° - 14° = 30°$ y $\angle API = \frac{1}{2}60° = 30°$, esto es, $\angle API = \angle AQI$. Por lo tanto, A, Q, P, I son concíclicos. Luego, $\angle PQC = \angle PAI = \frac{1}{2}\angle PAC = 46°$.

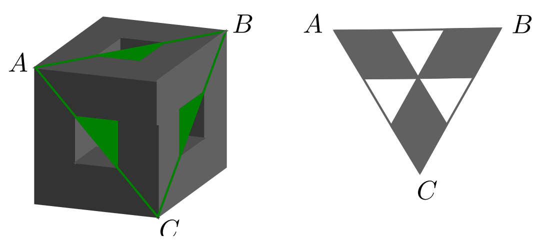
Solución del Problema 3. Sean $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^2 + cx + d$ distintos. Entonces,

$$\begin{aligned} &1 + a + b + 2017^2 + 2017a + b + 2017^4 + 2017^2a + b = \\ &\qquad\qquad 1 + c + d + 2017^2 + 2017c + d + 2017^4 + 2017^2c + d, \end{aligned}$$

esto es, $a(1+2017+2017^2)+3b = c(1+2017+2017^2)+3d$. Factorizando, tenemos que $(a-c)(1+2017+2017^2) = 3(d-b)$. Si $a = c$, entonces $3(d-b) = 0$ y, por lo tanto, $d = b$, esto es, los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son iguales, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a - c \neq 0$ y, en consecuencia, $\frac{1+2017+2017^2}{3} = \frac{d-b}{a-c}$. Como $f(x) = g(x)$ para cierto número x, tenemos que $ax + b = cx + d$, esto es, $(a - c)x = d - b$, de donde $x = \frac{d-b}{a-c}$. Por lo tanto, $x = \frac{1+2017+2017^2}{3} = 1356769$.

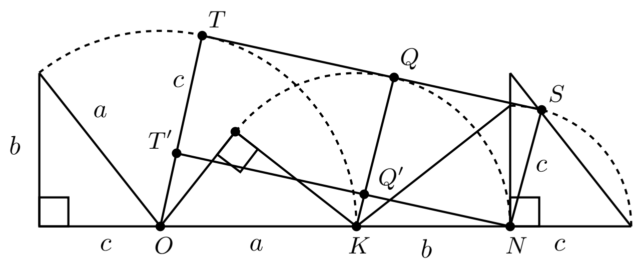
Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Observemos que ABC es un triángulo equilátero. Llamamos A_s, B_s y C_s a los tres vértices que corresponden a A, B y C en el cubito faltante de la cara superior. La ausencia de este cubo resulta en la ausencia del triángulo $A_sB_sC_s$ de la sección de corte. Sean A_f, B_f y C_f los tres vértices que corresponden a A, B y C en la cara frontal, respectivamente. Nota que $C_f = B_s$. La ausencia de este cubo resulta en la ausencia del triángulo $A_fB_fC_f$ de la sección de corte. Por último, llamamos A_d, B_d y C_d a los tres vértices que corresponden a A, B y C en el cubo faltante de la cara derecha. Nota que $A_d = C_f = B_s$. La ausencia de este cubo resulta en la ausencia del triángulo $A_dB_dC_d$ de la sección de corte. Por lo tanto, la sección de corte es un triángulo equilátero menos tres triángulos equiláteros más pequeños, cuyas bases miden una tercera parte de cada lado del triángulo ABC y cuyo vértice en común es el centro del triángulo ABC.



Solución del Problema 2. En la primera parte, vaciamos las cajas con la menor cantidad de monedas hasta que solo queden 4 cajas no vacías. En la segunda parte, redistribuimos la cantidad de monedas entre las cajas de manera que la mayor diferencia entre el número de monedas en cualesquiera dos cajas es a lo más 2. Esto se puede hacer tomando una moneda de dos cajas cualesquiera con la mayor cantidad de monedas y colocarlas en la caja con la menor cantidad de monedas. Dado que $314 \equiv 2 \pmod 4$, el número de monedas en las cuatro cajas puede ser $(n+2, n, n, n)$, $(n+1, n+1, n, n)$, $(n+2, n+2, n+2, n)$, para algún entero positivo n.
En la tercera parte, dado que podemos convertir $(1, 1, 1, 1)$ en $(4, 0, 0, 0)$ pasando por $(3, 1, 0, 0)$, $(2, 2, 0, 0)$ y $(2, 1, 0, 0)$, podemos convertir (n, n, n, n) en $(4n, 0, 0, 0)$. Análogamente, $(n+2, n, n, n)$ se convierte en $(4n+2, n, n, n)$; $(n+1, n+1, n, n)$ se convierte en $(4n, 1, 1, 0)$ y luego en $(4n+2, 0, 0, 0)$; y $(n+2, n+2, n+2, n)$ se convierte en $(4n+2, 2, 2, 0)$ y luego en $(4n+6, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, siempre podemos obtener todas las monedas.

Solución del Problema 3. Claramente, OT y KQ son paralelas, pues $\angle OTQ = \angle KQS = 90°$. Además, $OT = a$ y $QK = b$. Como $a > b > c = 1$, sean T' un punto sobre OT y Q' un punto sobre QK tales que $TT' = 1$ y $QQ' = 1$. Entonces, $OT' = a - 1$ y $Q'K = b - 1$. Luego, de la semejanza de los triángulos NKQ' y NOT', tenemos que $\frac{b-1}{b} = \frac{a-1}{a+b}$, de donde $b^2 = a$.



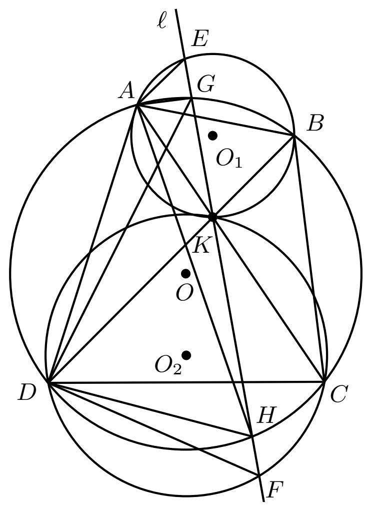
Ahora, por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 1$, lo cual implica que $a^2 - a - 1 = 0$, cuyas soluciones son $a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, la única posibilidad es $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución del Problema 4. Usando la factorización $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, tenemos que $x + y = \frac{x^2+18xy+y^2}{x^2-xy+y^2} = 1 + \frac{19xy}{x^2-xy+y^2}$. Luego, $x^2 - xy + y^2$ debe dividir a $19xy$. Sea d el máximo común divisor de x y y. Entonces, $x = dm$ y $y = dm$, donde $\text{mcd}(m, n) = 1$ y, por lo tanto, $x + y = 1 + \frac{19xy}{x^2-xy+y^2} = 1 + \frac{19mn}{m^2-mn+n^2}$. Como $\text{mcd}(m, m^2 - mn + n^2) = \text{mcd}(n, m^2 - mn + n^2) = 1$, tenemos que $m^2 - mn + n^2$ debe dividir a 19, lo cual implica que $m^2 - mn + n^2 = 1$ o 19.
Si $m^2 - mn + n^2 = 1$, entonces $m = n = 1$, $x = y$ y $x + y = 20$, de donde $(x, y) = (10, 10)$.
Si $m^2 - mn + n^2 = 19$, entonces $(m, n) = (5, 3)$, $(3, 5)$ y $x + y = 16$. Sin embargo, $x = dm$, $y = dn$ y, por lo tanto, $x + y = 8d = 16$, de donde $d = 2$. Luego, $x = 10$ y $y = 6$, o $x = 6$ y $y = 10$.

Solución del Problema 5. Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tenemos que $P(0) = d$, $P(\frac{1}{3}) - P(-\frac{1}{3}) = (\frac{a}{27} + \frac{b}{9} + \frac{c}{3} + d) - (-\frac{a}{27} + \frac{b}{9} - \frac{c}{3} + d)$ y $P(\frac{1}{4}) - P(-\frac{1}{4}) = (\frac{a}{64} + \frac{b}{16} + \frac{c}{4} + d) - (-\frac{a}{64} + \frac{b}{16} - \frac{c}{4} + d)$. Como $\frac{P(\frac{1}{3})-P(-\frac{1}{3})}{P(0)} = 8$, tenemos que $\frac{(\frac{a}{27}+\frac{b}{9}+\frac{c}{3}+d)-(-\frac{a}{27}+\frac{b}{9}-\frac{c}{3}+d)}{d} = 8$. Análogamente, como $\frac{P(\frac{1}{4})-P(-\frac{1}{4})}{P(0)} = 9$, tenemos que $\frac{(\frac{a}{64}+\frac{b}{16}+\frac{c}{4}+d)-(-\frac{a}{64}+\frac{b}{16}-\frac{c}{4}+d)}{d} = 9$. Simplificando, obtenemos que $\frac{2a}{27} + \frac{2c}{3} = 8d$ y $\frac{a}{32} + \frac{c}{2} = 9d$, esto es, $2a + 18c = 27(8d)$ y $a + 16c = 32(9d)$. Multiplicando esta última igualdad por 2, obtenemos que $2a + 32c = 64(9d)$. Luego, $(2a + 32c) - (2a + 18c) = 64(9d) - 27(8d)$, esto es, $14c = (72 - 27)(8d) = 45(8d)$. De aquí que $\frac{c}{d} = \frac{4 \cdot 45}{7} = \frac{180}{7}$. Por otra parte, como x_1, x_2 y x_3 son las raíces de $P(x)$, tenemos que $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$ y $x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}$. Luego,

$$\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3} = (x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) - 3$$
$$= 35\left(\frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3}\right) - 3 = 35\left(\frac{c/a}{-d/a}\right) - 3 = 35(-c/d) - 3$$
$$= 35(-180/7) - 3 = -903.$$

Solución del Problema 6. Tracemos los segmentos EA, GA, HA, GD, HD y FD.



Dado que $\angle AEK = \angle ABK = \angle AHD$ y $\angle AGE = \angle ADH$, tenemos que los triángulos AGE y ADH son semejantes. De manera similar, tenemos que los triángulos DHF y DAG son semejantes. Luego,

$$\frac{EG}{HF} = \frac{EG}{AG} \cdot \frac{AG}{DH} \cdot \frac{DH}{HF} = \frac{DH}{AD} \cdot \frac{AG}{DH} \cdot \frac{DA}{AG} = 1,$$

de donde se sigue que $EG = FH$.

Solución del Problema 7. Observemos que $a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} = (a - \frac{1}{a})^2 = x_1^2 = 9$, lo cual implica que $a^2 + \frac{1}{a^2} = 11$, esto es, $a^4 = 11a^2 - 1$ y, por lo tanto, $\frac{1}{a^4} = \frac{11}{a^2} - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} x_{n+4} = a^{n+4} - \frac{1}{a^{n+4}} &= a^n(a^4) - \frac{1}{a^n}\left(\frac{1}{a^4}\right) = a^n(11a^2 - 1) - \frac{1}{a^n}\left(\frac{11}{a^2} - 1\right) \\ &= 11\left(a^{n+2} - \frac{1}{a^{n+2}}\right) - \left(a^n - \frac{1}{a^n}\right) = 11x_{n+2} - x_n, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $x_{n+4} \equiv x_{n+2} - x_n \pmod{10}$.

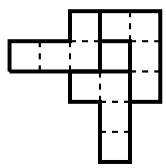
Ahora, notemos que $x_3 = a^3 - \frac{1}{a^3} = (a - \frac{1}{a})(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}) = 3(11 + 1) = 36$, de modo que los dígitos de las unidades de $x_1, x_3, x_5, \ldots$ forman una sucesión periódica $3, 6, 3, 7, 4, 7, 3, 6, 3, 7, 4, 7, \ldots$ Como 2017 es el entero impar positivo número 1009 y $1009 = 6 \cdot 168 + 1$, se sigue que el dígito de las unidades de x_{2017} es 3.

Solución del Problema 8. Notemos que cada expresión la podemos escribir en la forma $\frac{x^2+y^2+z^2+1}{xy+yz+z\cdot 1}$ y $\frac{x^2+y^2+1+z^2}{xy+y\cdot 1+1\cdot z}$ para ver que ambas son de la forma $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ab+bc+cd}$. Sea p la raíz positiva del polinomio x^2+x-1. Tenemos que $(a-pb)^2+p(b-c)^2+(pc-d)^2 \geq 0$ con la igualdad si y solo si $a - pb = b - c = pc - d = 0$. Usando que $p^2 + p = 1$, tenemos que

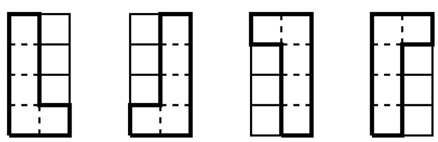
$$\begin{aligned}
&(a-pb)^2+p(b-c)^2+(pc-d)^2\\
&=a^2-2pab+p^2b^2+pb^2-2pbc+pc^2+p^2c^2-2pcd+d^2\\
&=a^2-2pab+(p^2+p)b^2-2pbc+(p^2+p)c^2-2pcd+d^2\\
&=a^2+b^2+c^2+d^2-2p(ab+bc+cd)\\
&\geq 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ab+bc+cd} \geq 2p$. Con $d=1$, obtenemos $\frac{x^2+y^2+z^2+1}{xy+yz+z\cdot 1} \geq 2p$ y, con $c=1$, obtenemos $\frac{x^2+y^2+1+z^2}{xy+y\cdot 1+1\cdot z} \geq 2p$. Por lo tanto, $k=m=2p$ y $km+k+m=2p\cdot 2p+2p+2p=4(p^2+p)=4$.

Solución del Problema 9. Las rotaciones están permitidas.



Solución del Problema 10. Observemos que hay 4 maneras de colocar un solo L-pentominó en una cuadrícula de 2×4.



Como la cuadrícula de 2×4 aparece vertical, existen $7\times 5=35$ maneras de colocarla en el tablero de 8×8 de modo que cubra por completo 8 cuadritos pequeños. Por lo tanto, hay $4\times 35=140$ maneras de colocar un solo L-pentominó en el tablero de 8×8, de manera que cubra por completo 5 cuadritos pequeños. Si colocamos la cuadrícula de 2×4 de manera horizontal, encontramos por simetría, otras 140 maneras de colocar el L-pentominó. Por lo tanto, en total hay $140\times 2=280$ maneras.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 21 al 29 de septiembre de 2018 se llevó a cabo en La Rábida (España) y en Monte Gordo (Portugal) la edición 33 de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas con la participación de 79 estudiantes provenientes de 22 países de habla hispana y portuguesa.

México participó con cuatro estudiantes: Oriol Andreu Solé Pi (Ciudad de México), Diego Hinojosa Téllez (Jalisco), Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León) y Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León). En esta ocasión, México ocupó el cuarto lugar de la competencia por países, quedando por debajo de Argentina, Brasil y España. De manera individual, Diego, Oriol y Víctor obtuvieron medallas de plata, mientras que Eric obtuvo medalla de bronce. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Ignacio Barradas Bribiesca (líder), Julio César Díaz Calderón (tutor), Rogelio Valdez Delgado (observador A) y Olga Rivera Bobadilla (observadora B).

Una particularidad especial de esta edición de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas fue que se invitaron a diversos países africanos de habla portuguesa. Solo resta decir que México será la sede de la edición número 34 de este concurso, el cual se llevará a cabo en septiembre de 2019 en la ciudad de Guanajuato, Gto.

A continuación, presentamos los problemas de la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cada número natural $n \geq 2$, hallar las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= (x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018},\\
x_2 &= (x_1 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n)^{2018},\\
&\vdots\\
x_n &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1})^{2018}.
\end{aligned}
$$

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle BAC = 90^\circ$ y $BA = CA$. Sea M el punto medio de BC. Un punto $D \neq A$ es elegido en la semicircunferencia de diámetro BC que contiene a A. La circunferencia circunscrita al triángulo DAM interseca a las rectas DB y DC en los puntos E y F, respectivamente. Demostrar que $BE = CF$.

Problema 3. En un plano tenemos n rectas sin que haya dos paralelas, ni dos perpendiculares, ni tres concurrentes. Se elige un sistema de ejes cartesianos con una de las n rectas como eje de las abscisas. Un punto P se sitúa en el origen de coordenadas del sistema elegido y comienza a moverse a velocidad constante por la parte positiva del eje de las abscisas. Cada vez que P llega a la intersección de dos rectas, sigue por la recta recién alcanzada en el sentido que permite que el valor de la abscisa de P sea siempre creciente. Demostrar que se puede elegir el sistema de ejes cartesianos de modo que P pase por puntos de las n rectas.

Nota: El eje de las abscisas de un sistema de coordenadas del plano es el eje de la primera coordenada o eje de las x.

Problema 4. Un conjunto X de enteros positivos es *ibérico* si X es un subconjunto de $\{2, 3, 4, \ldots, 2018\}$ y, siempre que m y n pertenezcan a X, entonces el $\operatorname{mcd}(m, n)$ pertenece también a X. Un conjunto ibérico es *olímpico* si no está contenido en ningún otro conjunto ibérico. Encontrar todos los conjuntos ibéricos olímpicos que contienen el número 33.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Para una permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de los números $1, 2, \ldots, n$, definimos

$$b_k = \min_{1\le i\le k} a_i + \max_{1\le j\le k} a_j$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Decimos que la permutación $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es *guadiana* si la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n$ no tiene dos elementos consecutivos iguales. ¿Cuántas permutaciones guadianas existen?

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB > BC$. Las mediatrices de AC y AB intersecan a la recta BC en D y E, respectivamente. Sean P y Q puntos distintos de A sobre las rectas AC y AB, respectivamente, tales que $AB = BP$ y $AC = CQ$, y sea K la intersección de las rectas EP y DQ. Sea M el punto medio de BC. Demostrar que $\angle DKA = \angle EKM$.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios). Sea x_1, $x_2, \ldots, x_n$ una solución. Como $z^{2018} = (z^{1009})^2 \geq 0$ para todo número real z, tenemos que $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. En particular, si $s = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, entonces $s - x_i = \sum_{k \neq i} x_k \geq 0$. Consideremos $1 \leq i \leq j \leq n$. Tenemos que $x_i = (s - x_i)^{2018}$ y $x_j = (s - x_j)^{2018}$, lo cual implica que

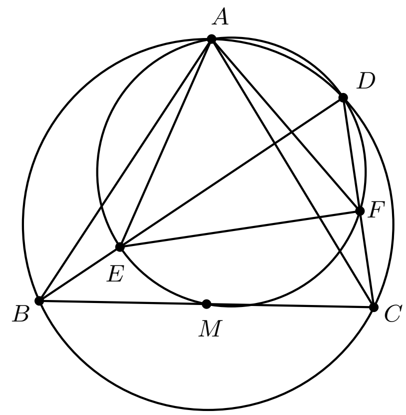
$$x_i - x_j = [s - x_i - (s - x_j)][(s - x_i)^{2017} + (s - x_i)^{2016}(s - x_j) + \cdots + (s - x_i)(s - x_j)^{2016} + (s - x_j)^{2017}],$$

esto es,

$$(x_i - x_j)[(s - x_i)^{2017} + (s - x_i)^{2016}(s - x_j) + \cdots + (s - x_i)(s - x_j)^{2016} + (s - x_j)^{2017} + 1] = 0.$$

Como el segundo factor no puede ser cero porque es suma de 1 y números no neativos, tenemos que el primer factor es cero y se tiene que $x_i = x_j$ para todo i, j. Por último, este valor a debe satisfacer que $a = [(n-1)a]^{2018}$, esto es, $a[(n-1)^{2018}a^{2017} - 1) = 0$. Luego, $a = 0$ da la solución $(0, 0, \ldots, 0)$ para todo $n \geq 2$ o $(n-1)^{2018}a^{2017} = 1$ y ambos $(n-1)^{2018}$ y a^{2017} son iguales a 1 dando la solución $(1, 1)$ para $n = 2$. En ambos casos se verifican las identidades deseadas.

Solución del problema 2. (Solución de Víctor Antonio Domínguez Silva). Demostraremos el problema en una configuración más general donde no hay restricción del ángulo $\angle BAC$ ni en que M sea el punto medio de BC.
Por ser $BADC$ un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\angle EBA = \angle DBA = \angle DCA = \angle FCA$.



Por ser $EADF$ un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\angle DEA = \angle DFA$, así que $\angle AEB = 180° - \angle DEA = 180° - \angle DFA = \angle AFB$. Con las dos igualdades de ángulos mostradas previamente se deduce que los triángulos AEB y AFC son semejantes y, puesto que $AB = AC$, se sigue que son congruentes. En particular, tenemos que $BE = CF$.

Solución del problema 3. Supongamos elegidos los ejes con una de las n rectas, r_0, como eje de abscisas. La pendiente de cada una de las rectas está definida por un ángulo del intervalo abierto $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sea m el número de rectas con pendiente positiva ($n - m - 1$ rectas con pendiente negativa). Podemos suponer que $m \geq \frac{n}{2}$; en caso contrario se razonará de manera análoga. Llamamos $r_1, \ldots, r_m$ a las rectas con pendiente positiva, en orden de pendiente creciente. Para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, sea p_i el número de rectas con pendiente positiva respecto de unos ejes cartesianos con eje de abscisas r_i, obtenidos a partir de los iniciales mediante un giro de ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ y una traslación. Obviamente, $p_0 = m$. Además, $p_m < \frac{n}{2}$, puesto que cuando el nuevo eje de abscisas es r_m, las rectas $r_0, r_1, \ldots, r_{m-1}$ tienen pendiente negativa; luego, $p_m \leq n - m - 1 < \frac{n}{2}$. Por otra parte, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, se cumple que $p_{i+1} \geq p_i - 1$, ya que de las rectas con pendiente positiva para r_i, solo r_{i+1} deja de tener pendiente positiva para r_{i+1} (y tal vez alguna de las de pendiente negativa para r_i pasa a tenerla positiva para r_{i+1}). Así pues, los pasos descendentes ($p_{i+1} < p_i$) en la sucesión $p_0, p_1, \ldots, p_m$ solo pueden ser de una unidad. Esto prueba que existe j con $p_j = \frac{n}{2}$ si n es par, o $p_j = \frac{n-1}{2}$, si n es impar. Como consecuencia y tras el adecuado cambio de notación, queda probado que se pueden elegir los ejes de forma que el de las abscisas, r_0, cumpla $p_0 = \frac{n}{2}$ si n es par, o $p_0 = \frac{n-1}{2}$ si n es impar; y también de forma que todos los puntos de corte de r_0 con otra recta tengan abscisa positiva.

Ahora renombramos a las rectas distintas de r_0: las de pendiente positiva son $r_1, \ldots, r_m$ pero escritas en orden tal que si $i < j$, la abscisa de $r_0 \cap r_i$ es menor que la abscisa de $r_0 \cap r_j$; las de pendiente negativa son $a_1, \ldots, a_k$ ($k = m$ si n es impar; $k = m - 1$ si n es par) y si $i < j$, la abscisa de $r_0 \cap a_i$ es menor que la abscisa de $r_0 \cap a_j$.

Para visualizar mejor el argumento que sigue, pintamos de negro las rectas de pendiente positiva y de gris las de pendiente negativa. Observemos que, en lo referido al recorrido del punto P, cada corte de dos rectas negras lo podemos ver como dos líneas quebradas que se acercan y no llegan a cortarse, siempre de forma que la pendiente de todos los tramos es positiva. Y lo análogo para cada corte de dos rectas grises.

De esta forma, para seguir la trayectoria de P, podemos pensar que cada recta negra, r_i, se ha transformado en una línea quebrada, R_i, de modo que $r_0 \cap r_i = r_0 \cap R_i$, y dos de estas líneas quebradas no se cortan nunca. Lo mismo con las rectas grises: a_j se transforma en una línea quebrada A_j, con $r_0 \cap a_j = r_0 \cap A_j$, con todos los tramos de pendiente negativa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la abscisa de $r_0 \cap R_1$ es menor que la abscisa de $r_0 \cap A_1$. Veamos el recorrido de P. Comienza en el origen de coordenadas, va por r_0 hasta $r_0 \cap R_1$, sigue por R_1 (camino ascendente) hasta la intersección con una A_j que forzosamente es A_1. Desciende por A_1 hasta la intersección de A_1 con R_2 o con r_0. En cualquier caso, el proceso será: $r_0, R_1, A_1, \ldots, R_j, A_j, r_0$. A partir de aquí, la situación es análoga a la inicial cambiando m por $m-j$. Se termina con el argumento inductivo obvio, teniendo en cuenta que el caso $m = 1$ es trivial tanto si $n = 2$ como si $n = 3$.
Finalmente, hay que hacer notar que el hecho de que P pase por todas las R_i y las A_j garantiza que pasa por todas las r_i y las a_j. En efecto, si n es impar, P termina moviéndose solo por r_0 y en algún momento habrá "atravesado" todas las r_i $(i > 0)$ y todas las a_j. Si n es par, el argumento es análogo, solo que tras atravesar $r_1, \ldots, r_{m-1}$ y todas las a_j, termina alejándose por r_m.

Solución alternativa. El primer párrafo de la primera solución es el mismo para esta segunda solución. Si la velocidad constante a la que se mueve P es v, la velocidad a la que crece el valor de la abscisa de P es en todo momento mayor o igual a $v \cos\alpha > 0$, siendo α el ángulo que forma con r_0 la recta con mayor pendiente (en valor absoluto). Por lo tanto, el valor de la abscisa de P tenderá a ser $+\infty$. Supongamos que las coordenadas de P en un momento dado son (x_0, y_0). Diremos que, en ese momento, una recta r_i "está por encima de P" (respectivamente, "está por debajo de P") si el punto de r_i cuya abscisa es x_0, tiene ordenada mayor (respectivamente, menor) que y_0. Cuando P está en el origen, las rectas que están por encima de P son las de pendiente negativa y las rectas que están por debajo de P son las de pendiente positiva.
Cada vez que P, en su avance, llega a la intersección de dos rectas, o sea cambia de recta, ocurre:

- Si pasa de una recta a otra de pendiente menor (gira a la derecha), la nueva deja de estar por encima de P y la que abandona pasa a estar por encima. Para las demás rectas no hay cambio en cuanto a estar por encima o por debajo de P.

- Si pasa de una recta a otra de pendiente mayor (gira a la izquierda), la nueva deja de estar por debajo de P y la que abandona pasa a estar por debajo. Para las demás rectas no hay cambio en cuanto a estar por encima o por debajo de P.

En consecuencia, cuando la abscisa de P sea mayor que la de cualquier punto de corte de dos rectas, P seguirá teniendo por debajo el mismo número de rectas que al principio ($\frac{n-1}{2}$ si n es impar; $\frac{n-2}{2}$ si n es par). Si la recta por la que P se aleja indefinidamente es r', las que quedan por debajo de P son las que tienen pendiente menor que r', luego $r' = r_0$ (si n es impar), o r' es la recta de menor pendiente positiva (si n es par). En cualquier caso (salvo en los casos triviales $n = 1$ o $n = 2$), todas las rectas han pasado de estar por encima a estar por debajo o viceversa. Para que esto ocurra, P ha tenido que tocar a todas las rectas, puesto que describe una trayectoria continua.

Solución del problema 4. (Solución de Oriol Andreu Solé Pi). Sea S un conjunto ibérico olímpico tal que $33 \in S$. Consideraremos cuatro casos.

a) Supongamos que existe $a \in S$ tal que ni 3 ni 11 dividen a a. Así, $\text{mcd}(a, 33) = 1$ y, por hipótesis del problema, $1 \in S$, lo cual es una contradicción puesto que $S \subseteq \{2, \dots, 2018\}$. Por lo tanto, todo elemento $a \in S$ es un múltiplo de 11 o de 3.

b) Supongamos que existen $a, b \in S$ tales que $3 \mid a$, $11 \nmid a$, $11 \mid b$ y $3 \nmid b$. Entonces, $\text{mcd}(a, 33) = 3 \in S$ y $\text{mcd}(b, 33) = 11 \in S$. Luego, $\text{mcd}(3, 11) = 1 \in S$, lo que es una contradicción. De este modo, quedan solo dos posibilidades que se analizarán en los siguientes casos.

c) Supongamos que todos los elementos de S son divisibles por 3. En este caso, $S \subseteq \{3, 6, 9, \dots, 2016\}$. Ahora, $\{3, 6, 9, \dots, 2016\}$ es ibérico. En efecto, para cualesquiera $a, b \in \{3, 6, 9, \dots, 2016\}$, se tiene que 3 divide a $\text{mcd}(a, b)$ y que $\text{mcd}(a, b) \leq \text{mín}(a, b) \leq 2016$; en consecuencia, $\text{mcd}(a, b) \in \{3, 6, 9, \dots, 2016\}$. Como S es olímpico, S no puede estar contenido en ningún conjunto ibérico distinto de S. Por lo tanto, $S = \{3, 6, 9, \dots, 2016\}$.

d) Supongamos que existe $a \in S$ tal que $3 \nmid a$. Por hipótesis, $11 \mid a$, pues 3 o 11 dividen a todo elemento en S. Supongamos que existe un elemento $b \in S$ tal que $11 \nmid b$. Así, por hipótesis del problema, debemos tener que $3 \mid b$. Luego, $a, b \in S$, $3 \nmid a$, $11 \mid a$, $3 \mid b$ y $11 \nmid b$, lo cual no puede suceder por el caso b). Por lo tanto, no existe un elemento $b \in S$ tal que 11 no lo divida; esto es, $S \subseteq \{11, 22, 33, \dots, 2013 = 11 \cdot 183\}$. Al igual que en el caso anterior se prueba que $\{11, 22, 33, \dots, 2013\}$ es ibérico. En efecto, para cualesquiera $x, y \in \{11, 22, 33, \dots, 2013\}$, tenemos que 11 divide a $\text{mcd}(x, y)$ y que $\text{mcd}(x, y) \leq \text{mín}(x, y) \leq 2013$; en consecuencia, $\text{mcd}(x, y) \in \{11, 22, 33, \dots, 2013\}$. Como S no puede estar contenido en ningún conjunto ibérico distinto de S, se sigue que $S = \{11, 22, 33, \dots, 2013\}$.

De los cuatro casos anteriores, concluimos que los únicos conjuntos ibéricos olímpicos que contienen al número 33 son $\{3, 6, 9, \dots, 2016\}$ y $\{11, 22, 33, \dots, 2013\}$.

Solución del problema 5. (Solución de Diego Hinojosa Téllez). Sea $f(n)$ el número de permutaciones guadianas para cada entero positivo n. Es fácil ver que $f(1) = 1$ y

$f(2) = 2$. Ahora, supongamos que $n \geq 3$, $a_i = 1$ y $a_j = n$. Demostraremos dos lemas previos.

Lema 1. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación guadiana. Si $a_i = 1$ y $a_j = n$, entonces $\max\{i, j\} = n$.

Demostración. Si $\max\{i, j\} = n$, entonces

$$b_{\max\{i,j\}} = \min_{1 \leq k \leq \max\{i,j\}} a_k + \max_{1 \leq r \leq \max\{i,j\}} a_r = a_i + a_j = 1 + n,$$

pues $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es una permutación de $(1, 2, \ldots, n)$.
Ahora, como $\max\{i, j\} < n$, tenemos que $\max\{i, j\} + 1 \leq n$. Por construcción,

$$\begin{aligned} b_{\max\{i,j\}+1} &= \min\left\{\min_{1 \leq k \leq \max\{i,j\}} a_k, a_{\max\{i,j\}+1}\right\} + \max\left\{\max_{1 \leq r \leq \max\{i,j\}} a_r, a_{\max\{i,j\}+1}\right\} \\ &= \min\left\{1, a_{\max\{i,j\}+1}\right\} + \max\left\{n, a_{\max\{i,j\}+1}\right\} = 1 + n = b_{\max\{i,j\}}. \end{aligned}$$

En consecuencia, $b_m = b_{m+1}$ con $m = \max\{i, j\}$, lo cual es una contradicción pues, por ser $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación guadiana, cualesquiera dos elementos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son distintos. Esto prueba que $\max\{i, j\} = n$. □

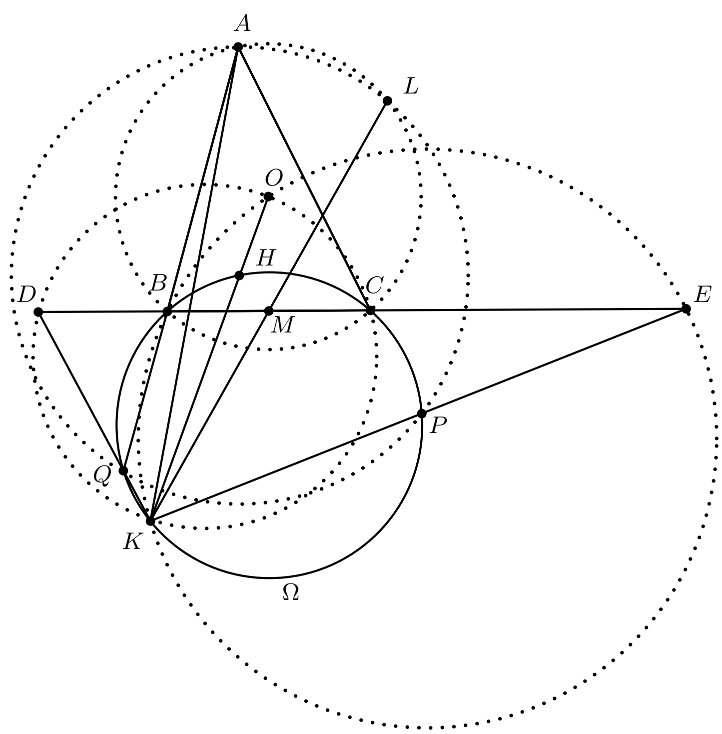
Lema 2. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una permutación guadiana, entonces $a_k = \max_{1 \leq i \leq k} a_i$ o $a_k = \min_{1 \leq i \leq k} a_i$, para todo entero positivo $1 \leq k \leq n$.

Demostración. Por el Lema 1, tenemos que $a_n = 1$ o $a_n = n$. Si existe un entero $1 \leq k \leq n - 1$ tal que $a_k \neq \max_{1 \leq i \leq k} a_i$ y $a_k \neq \min_{1 \leq i \leq k} a_i$, entonces $b_k = b_{k-1}$. En efecto, no se alterarían ni el mínimo ni el máximo al pasar del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$ al conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k\}$. Así, sus sumas ($b_k$ y b_{k-1}) tampoco cambian, lo cual es una contradicción al hecho de que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es una permutación guadiana. □

A partir de los dos lemas anteriores, demostraremos ahora que es posible construir todas las permutaciones guadianas del elemento final a_n al elemento inicial a_1. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutación guadiana. Por el Lema 1, tenemos que $a_n = n$ o $a_n = 1$, esto es, hay dos posibilidades para a_n. Ahora, por el Lema 2, a_{n-1} puede ser el máximo o el mínimo del conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, así que también hay dos opciones para a_{n-1}. Notemos que con cada elección, queda bien definido el conjunto de valores que no se han asignado. El razonamiento anterior se repite para los demás términos de la sucesión. En efecto, a a_{n-2} podemos asignarle el máximo o el mínimo de los términos que quedan $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, así que hay dos posibilidades para a_{n-2} y, continuando este proceso, llegamos a que a a_2 podemos asignarle el mayor o el menor de los términos que quedan (a_1, a_2). Como podemos hacer la elección de cada elemento entre a_n y a_2 de dos maneras, por la regla del producto tenemos 2^{n-1} permutaciones guadianas posibles.
Todas las permutaciones posibles que se construyeron en el párrafo anterior cumplen

las condiciones para ser guadianas. En efecto, no puede haber dos términos b_k y b_{k+1} iguales porque siempre que se agrega un término a_{k+1} al conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, esto cambia exactamente uno de los valores correspondientes al máximo o al mínimo respecto del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ a comparación de los correspondientes valores del conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$. Como los elementos son distintos, las sumas $b_k = \text{mín}_{1\leq r\leq k} a_r + \text{máx}_{1\leq s\leq k} a_s$ y $b_{k+1} = \text{mín}_{1\leq r\leq k+1} a_r + \text{máx}_{1\leq s\leq k+1} a_s$ cambian en exactamente un sumando; por tanto, son distintas. En conclusión, todas las permutaciones posibles son guadianas y $f(n) = 2^{n-1}$.

Solución del problema 6. Sean H y O el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC, respectivamente y sea Ω el circuncírculo del triángulo BHC. Veamos que $\angle BHC = 180° - \angle BAC$ y $\angle BPC = \angle BPA = \angle BAP = \angle BAC = 180° - \angle BHC$.

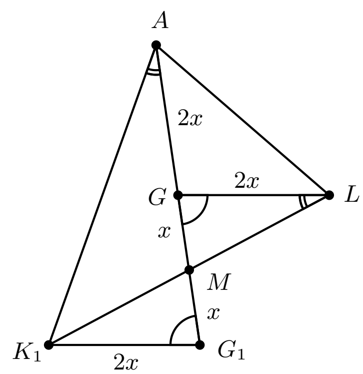


Por lo tanto, P está en Ω. Análogamente, Q está en Ω. Sea K' la segunda intersección de OH con Ω. Mostraremos que K' está en las rectas EP y DQ, lo cual probará que $K = K'$. Notemos primero que OD es la mediatriz de AC y, en consecuencia, es perpendicular a AC. Luego, $\angle CDO = 90° - \angle ACB = \angle CBH = \angle CK'H = \angle CK'O$, lo cual implica que los puntos O, D, K' y C son concíclicos. Se sigue entonces que,

$$\angle OK'D = \angle OCD = \angle OCB = \angle OBC = \angle HBA = \angle HK'Q = \angle OK'Q,$$

donde $\angle OBC = \angle HBA$ se cumple porque O y H son conjugados isogonales. Se si-

gue de $\angle OK'D = \angle OK'Q$ que D, Q y K' son colineales. Análogamente, los puntos E, P y K' son colineales, con lo cual concluimos que $K = K'$.
De los cuadriláteros cíclicos $ODKC$ y $OEKB$ tenemos que $\angle OKD = \angle OCB = \angle OBC = \angle OKE$ y, por lo tanto, OK biseca al ángulo $\angle DKE$. Luego, para demostrar el resultado, basta probar que biseca también al ángulo $\angle AKM$.
Sea L la intersección de los circuncírculos de los triángulos ABC y APQ, distinta de A. Notemos que BH es la mediatriz de AP pues $BA = BP$ y BH es perpendicular a AC. Análogamente, CH es la mediatriz de AQ. Se sigue que H es el circuncentro del triángulo APQ y, por lo tanto, OH es la mediatriz de AL, pues esta es la cuerda común de los circuncírculos de ABC y APQ. Luego, el triángulo AKL es isósceles con base AL y OK biseca al ángulo $\angle AKL$. Para concluuir, basta mostrar que K, M y L son colineales.
Sea K_1 la reflexión de L respecto a M. Buscamos probar que $K = K_1$. Ya que los circuncírculos de ABC y BHC son simétricos respecto a M, y L está en el circuncírculo de ABC, tenemos que K_1 está en Ω. Luego, basta probar que también está en la recta OH.



Sea G el gravicentro de ABC. Veamos que G está en la recta OH, la cual es la mediatriz de AL y, por lo tanto, $GA = GL$. Sea G_1 la reflexión de G respecto a M. Entonces, K_1GLG_1 es un paralelogramo. Denotando la distancia $GM = x$, tenemos que $G_1M = x$ y $G_1K_1 = GL = AG = 2GM = 2x$. Luego, $\frac{AG_1}{G_1K_1} = 2 = \frac{LG}{GM}$. Además, tenemos que $\angle AG_1K_1 = \angle MG_1K_1 = \angle LGM$. Se sigue que los triángulos AG_1K y LGM son semejantes. Entonces, $\angle K_1AG = \angle K_1LG$ y, por lo tanto,

$$\angle K_1AL = \angle K_1AG + \angle GAL = \angle K_1LG + \angle GLA = \angle K_1LA,$$

por lo que $K_1A = K_1L$ y así, K_1 está en la mediatriz de AL, que es la recta OH. Luego, $K = K_1$, con lo cual hemos terminado.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*

2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*

3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 10 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 11 (Ley de senos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 12 (Ley de cosenos)**.** *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.