TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2016, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
México D.F.
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Impreso: Torre y de la Torre Impresos
Aragón no. 134
Col. Álamos, 03400
México D.F.
Teléfonos: (55) 55-30-14-82 y (55) 55-38-34-53

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2016.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2016, Número 1

Tzaloa recibe el nuevo año con optimismo y llena de ese sano espíritu renovador que impulsa los grandes cambios. Con este número Tzaloa inicia su octavo año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida tanto a José Antonio Gómez Ortega como a Julio César Díaz Calderón, quienes desde ahora se integran al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Marco Antonio Figueroa Ibarra (conocido en la comunidad olímpica como “El Niño”), quien participó en este comité desde el año 2011, y que ahora pasa a ser el nuevo coordinador académico de la olimpiada mexicana de matemáticas. Así mismo queremos agradecer al profesor José Antonio

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

Gómez Ortega, por estos 4 años de trabajo (2012-2016) como presidente de la OMM y que ahora se integra al equipo editorial de Tzaloa.

Es así, que inciamos este 2016 llenos de entusiasmo. La elección del Dr. Rogelio Valdez Delgado como nuevo presidente del Comité Organizador de la OMM no pudo ser más acertada. El indiscutible y apasionado compromiso de Rogelio, junto con su experiencia en el mundo olímpico, constituyen sobradas garantías de que durante esta nueva etapa, el movimiento olímpico mexicano seguirá madurando y alcanzando cada vez mayores logros.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Sangaku, el segundo teorema de Mikami-Kobayashi*, contribución de Julio César Magaña Cáceres. En él, el lector principiante y el lector avanzado, encontrarán un par de resultados sobre geometría, que fueron colgados en los templos antiguos de Japón en los siglos XVII y XVIII, conocidos actualmente como teoremas de Mikami-Kobayashi. En particular, el artículo muestra una bella aplicación del segundo teorema en la resolución del problema más difícil del concurso nacional de la 26^a OMM, celebrada en el año 2012 en la ciudad de Guanajuato. A lo largo del artículo, nuestro amigo Julio nos muestra varios problemas sangaku para adentrarnos en el fascinante mundo de la resolución de problemas.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes, información olímpica y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2016.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

30ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1997. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2016-2017 y, para el 1° de julio de 2017, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 11 de noviembre de 2016 en Acapulco, Guerrero. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2016 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXIX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 58^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Brasil, julio de 2017) y a la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Argentina, septiembre de 2017).

De entre los concursantes nacidos en 2000 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XIX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2017).

De entre los más jóvenes se seleccionará la delegación mexicana que nos representará en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) a realizarse en la India en julio de 2017.

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en Zurich, Suiza, en el mes de abril de 2017.

Sangaku, el segundo teorema de Mikami-Kobayashi

Por Julio César Magaña Cáceres

Nivel Intermedio

La historia de Japón se divide por eras. Cada uno de estos periodos recibe el nombre del respectivo emperador que gobierna. La era Tokugawa, también conocida como Edo, inició en el siglo XVII y finalizó en el siglo XIX. En esta época, Japón estuvo en aislamiento de otros países por cuestiones religiosas, manteniendo su relación solo con China y Corea. Esta política se conoce como *sakoku* o país cerrado. Durante el sakoku, algunas personas se entretenían resolviendo problemas de matemáticas, generalmente de geometría, que encontraban escritos en tablas de madera colgadas en los muros y techos de los templos budistas y sintoístas de todo Japón. Estos problemas, son llamados *sangaku*, cuya traducción literal es *tablas de madera* (ver Figura 1).

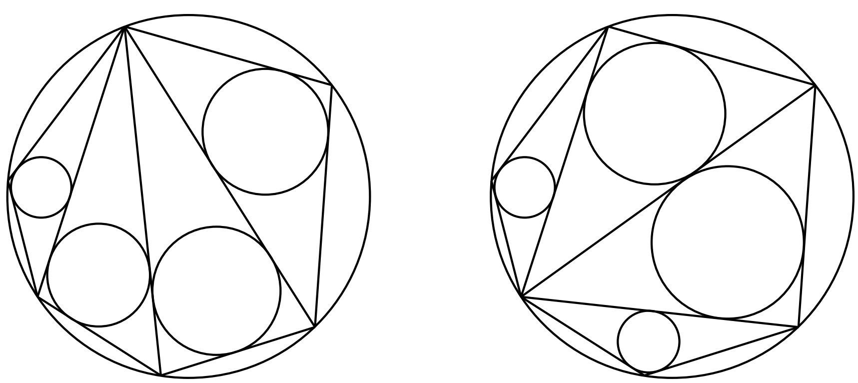
Figura 1: Cuatro sangaku del santuario Itsukushima en Hiroshima (1885).

En este artículo vamos a enunciar y demostrar dos sangaku que fueron colgados en el templo de Zenkoji en la ciudad de Nagano y que actualmente son conocidos como los teoremas de Mikami-Kobayashi. El que ahora se conoce como *Segundo teorema*, fue colgado en el año 1796, mientras que el que se conoce como *Primer teorema*, fue colgado en el año 1804. Sin embargo, ambos aparecieron con anterioridad en el libro *Shinpeki Sanpo* del autor Fujita Kagen, en el año 1789 (ver Figura 2).

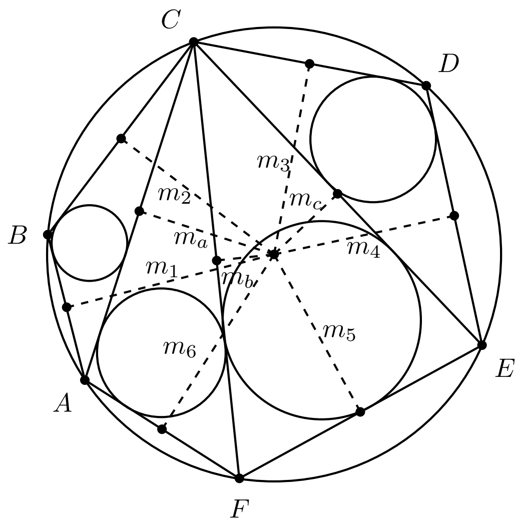
Figura 2: Templo de Zenkoji en la ciudad de Nagano y la ilustración del Segundo teorema de Mikami-Kobayashi en el libro *Shinpeki Sanpo*.

El Primer teorema de Mikami-Kobayashi trata sobre circunferencias inscritas en una triangulación de un polígono convexo cíclico, en donde por *triangulación* entenderemos el trazo de todas las diagonales del polígono desde un vértice específico.

Teorema 1 (**Primer teorema de Mikami-Kobayashi).** *En cada polígono convexo cíclico, la suma de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos de cualquier triangulación es constante.*



Demostración. La demostración será por inducción en el número de lados del polígono convexo. Primero analizaremos el caso particular de un hexágono convexo cíclico. Consideremos la siguiente figura.



Denotemos por r_1, r_2, r_3 y r_4 los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos ABC, ACF, FCE y ECD respectivamente. Si R es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono, aplicando el teorema de Carnot[2] a los triángulos anteriores tenemos que,

$$\begin{aligned} R + r_1 &= m_1 + m_2 - m_a, \\ R + r_2 &= m_a + m_6 - m_b, \\ R + r_3 &= m_5 + m_b + m_c, \\ R + r_4 &= m_3 + m_4 - m_c, \end{aligned}$$

donde m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 y m_6 denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los lados del polígono, y m_a, m_b y m_c denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los segmentos AC, CF y CE, respectivamente.
Esto implica que

$$\sum_{j=1}^{4} r_j = \left(\sum_{i=1}^{6} m_i \right) - 4R.$$

Observemos que la expresión anterior no depende de la triangulación elegida, pues tal expresión ya no depende de los radios de las circunferencias.
El argumento usado en el hexágono se puede aplicar a un cuadrilátero convexo cíclico para demostrar que $\sum_{j=1}^{2} r_j = \left(\sum_{i=1}^{4} m_i \right) - 2R$, lo cual constituye el caso base de la inducción.

[2]El teorema de Carnot establece que en todo triángulo, la suma de las distancias (con signo) desde el circuncentro a los lados del triángulo es igual a la suma de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. El signo del segmento es negativo si el segmento se encuentra completamente afuera del triángulo, y es positivo en cualquier otro caso.

Supongamos que para un polígono convexo cíclico de $n > 3$ lados y cualquier triangulación, se tiene que $\sum_{j=1}^{n-2} r_j = (\sum_{i=1}^{n} m_i) - (n-2)R$, donde los m_i's denotan las distancias del centro de la circunferencia circunscrita a los lados del polígono, y consideremos un polígono convexo cíclico $A_1 \ldots A_{n+1}$ de $n+1$ lados. Aplicando la hipótesis de inducción en el polígono convexo cíclico $A_1 \ldots A_n$, con una triángulación desde el vértice A_1, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n-2} r_j = \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right) + m_a - (n-2)R,$$

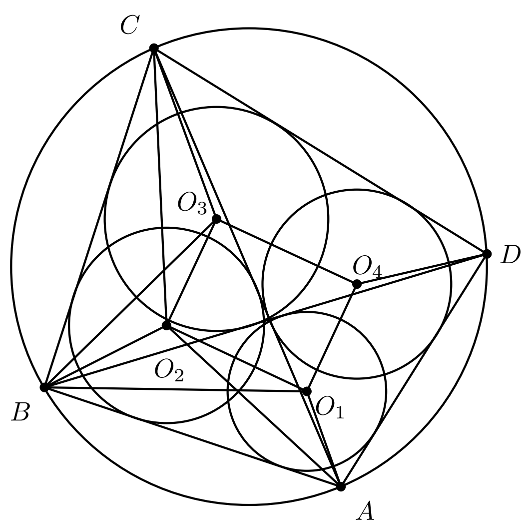
donde m_a es la distancia del centro de la circunferencia circunscrita al segmento A_nA_1. Aplicando el teorema de Carnot al triángulo $A_1A_nA_{n+1}$, tenemos que $R + r_{n-1} = m_n + m_{n+1} - m_a$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1} r_j &= \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\right) + m_a - (n-2)R + m_n + m_{n+1} - m_a - R \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} m_i\right) - (n-1)R.\end{aligned}$$

Esto concluye la inducción. □

Teorema 2 (Segundo teorema de Mikami-Kobayashi). *Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico y O_1, O_2, O_3, O_4 son los centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABD, ABC, BCD y CDA respectivemamante, entonces $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo.*

Demostración. Demostraremos primero que los cuadriláteros CO_3O_2B y BO_2O_1A son cíclicos.



Aplicando el resultado del Ejercicio 1 tenemos que

$$\angle CO_3B = 90^\circ + \frac{\angle CDB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle CAB}{2} = \angle CO_2B,$$

lo que significa que el cuadrilátero CO_3O_2B es cíclico. Luego, $\angle O_3O_2B + \angle O_3CB = 180^\circ$. Aplicando nuevamente el resultado del Ejercicio 1 tenemos que $\angle BO_2A = 90^\circ + \frac{\angle BCA}{2} = 90^\circ + \frac{\angle BDA}{2} = \angle BO_1A$, lo que significa que el cuadrilátero BO_2O_1A es cíclico. Luego, $\angle BO_2O_1 + \angle O_1AB = 180^\circ$. Entonces,

$$\begin{aligned}\angle O_3O_2B + \angle BO_2O_1 &= (180^\circ - \angle O_3CB) + (180^\circ - \angle O_1AB)\\ &= 360^\circ - (\angle O_3CB + \angle O_1AB)\\ &= 360^\circ - \left(\frac{\angle DCB + \angle DAB}{2}\right)\\ &= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.\end{aligned}$$

Se sigue que $\angle O_1O_2O_3 = 360^\circ - (\angle O_3O_2B + \angle BO_2O_1) = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ$. Análogamente se demuestra que $\angle O_2O_3O_4 = \angle O_3O_4O_1 = \angle O_4O_1O_2 = 90^\circ$. Por lo tanto, $O_1O_2O_3O_4$ es un rectángulo. $\square$

El *Segundo teorema de Mikami-Kobayashi* lo podemos aplicar para resolver el problema 6 del concurso nacional de la 26ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, realizada en Guanajuato, Guanajuato, en el año 2012. De los 196 participantes en esta olimpiada, sólo 6 lo resolvieron completamente obteniendo 7 puntos, y 134 participantes obtuvieron cero puntos de calificación. Veamos cómo aplicar el Teorema 2 en la solución de este problema.

Ejemplo 1 (OMM, 2012/6). Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncírculo $\mathcal{C}$. Sean H el ortocentro del triángulo ABC y M el punto medio de BC. Las rectas AH, BH y CH cortan por segunda vez a $\mathcal{C}$ en D, E y F, respectivamente. La recta MH corta a $\mathcal{C}$ en J, de manera que H queda entre M y J. Sean K y L los incentros de los triángulos DEJ y DFJ, respectivamente. Muestra que KL es paralela a BC.

Demostración. De acuerdo con el Ejercicio 2, tenemos JM es bisectriz del ángulo $\angle FJE$. Dado que JB es bisectriz del $\angle FJD$ y JC es bisectriz del $\angle DJE$, los puntos K y L están sobre los segmentos CJ y BJ, respectivamente. Sabemos que H es el incentro del triángulo DEF. Por el Segundo teorema de Mikami-Kobayashi, KL es la diagonal del rectángulo $KHLI$ formado por los incentros respectivos (I es el incentro del triángulo FJE). Como JM es bisectriz del $\angle FJE$ entonces I está sobre JM y este segmento biseca a KL. Por lo tanto, los triángulos KJL y BJC son semejantes y KL es paralela a BC. $\square$

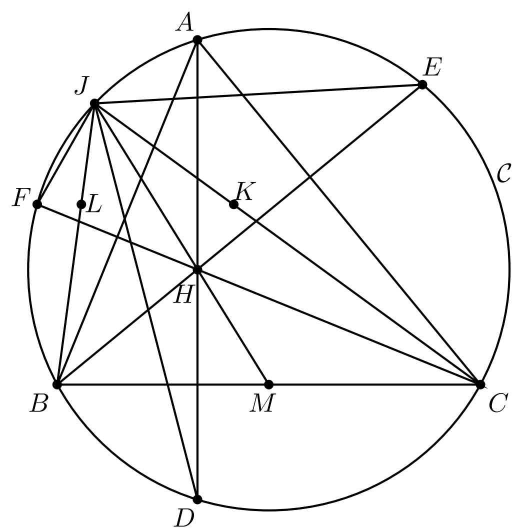
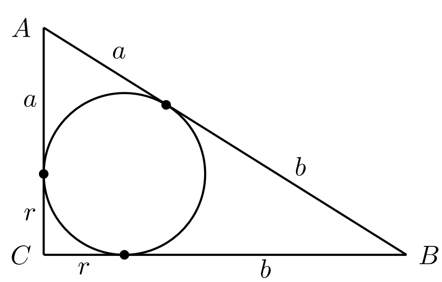


Figura 3: Problema 6 del concurso nacional de la 26ª OMM.

A continuación demostraremos dos resultados básicos que servirán posteriormente para resolver otros problemas sangaku.

Lema 1. *Consideremos un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en C. Si r es el radio de la circunferencia inscrita del triángulo, entonces $2r = AC + BC - AB$.*

Demostración. El resultado es inmediato por las propiedades de tangencia que se muestran en la siguiente figura.

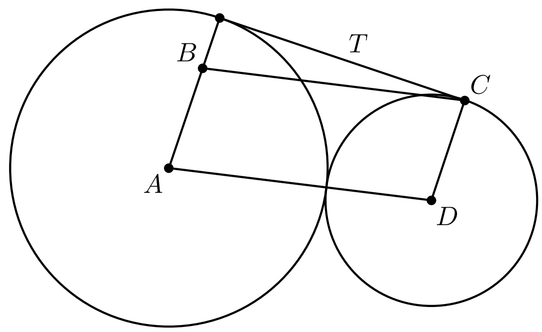


□

Lema 2. *Consideremos dos circunferencias, tangentes exteriormente y de radios R_1 y R_2. Si T es la longitud de la tangente común, entonces $T = 2\sqrt{R_1 R_2}$.*

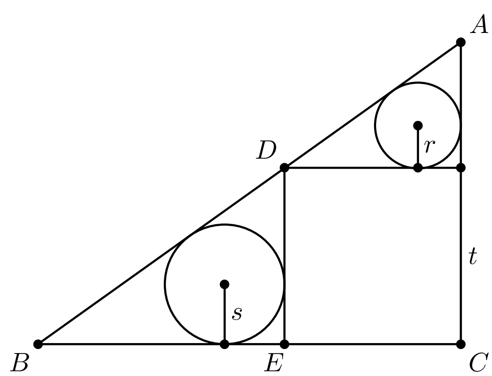
Demostración. Si $R_1 = R_2$, el resultado es inmediato.
Si $R_1 > R_2$, consideremos la siguiente figura, donde A y D son los centros de las

circunferencias, C es un punto de tangencia y B es el punto tal que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.



Por el teorema de Pitágoras $(R_1+R_2)^2 = T^2+(R_1-R_2)^2$. Simplificando la expresión obtenemos el resultado. El caso $R_1 < R_2$ es análogo. □

Ejemplo 2. En un triángulo rectángulo se inscribe un cuadrado de lado t, como se muestra en la figura. Encuentra t en términos de los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos pequeños.



Solución. Consideremos $a = BC$ y $b = AC$. Por el Lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned} 2s &= t + (a-t) - BD, \\ 2r &= t + (b-t) - DA. \end{aligned} \tag{1}$$

Usando la semejanza de los triángulos pequeños, tenemos que

$$\frac{t}{b-t} = \frac{a-t}{t} = \frac{a}{b} = \frac{s}{r}. \tag{2}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo BDE, así como la segunda y tercera igualdades de (2) tenemos que

$$BD = \sqrt{(a-t)^2 + t^2} = \sqrt{t^2\frac{a^2}{b^2} + t^2} = \sqrt{t^2\frac{s^2}{r^2} + t^2}.$$

Sustituyendo BD y la tercera igualdad de (2) en la ecuación (1), obtenemos

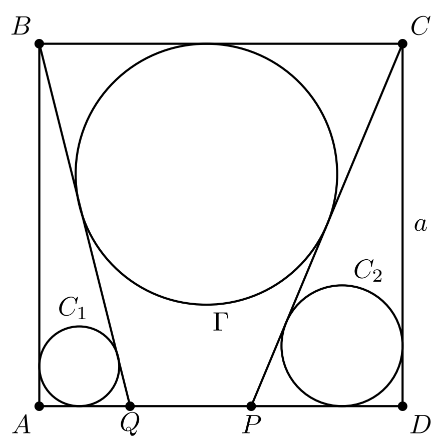
$$2s = t + t\frac{s}{r} - \sqrt{t^2\frac{s^2}{r^2} + t^2} = t + t\frac{s}{r} - t\frac{\sqrt{s^2+r^2}}{r} = t\left(\frac{s + r - \sqrt{s^2+r^2}}{r}\right),$$

de donde $2sr = t(s + r - \sqrt{s^2+r^2})$. Despejando t y multiplicando por $\frac{s+r+\sqrt{s^2+r^2}}{s+r+\sqrt{s^2+r^2}}$ obtenemos que

$$t = \frac{2sr}{s + r - \sqrt{s^2+r^2}} = s + r + \sqrt{s^2+r^2}.$$

Ejemplo 3. Los puntos P y Q están sobre el lado AD del cuadrado $ABCD$, como se muestra en la figura. La circunferencia Γ es tangente a QB, BC y CP. Sean a, r_1 y r_2 el lado del cuadrado y los radios de las circunferencias inscritas a los triángulos AQB y PCD, respectivamente. Si r es el radio de Γ, demuestra que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a-2r_1} + \frac{1}{a-2r_2}.$$



Demostración. Denotemos AQ por k y PD por ℓ. Entonces, $QP = a-(k+\ell)$. Usando el Lema 1 tenemos que

$$QB = a + k - 2r_1, \tag{3}$$
$$PC = a + \ell - 2r_2. \tag{4}$$

Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo ABQ tenemos que $QB = \sqrt{k^2 + a^2}$. Sustituyendo esta expresión en la relación (3) y despejando k obtenemos que

$$k = \frac{2r_1(a - r_1)}{a - 2r_1}. \tag{5}$$

Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo PCD tenemos que $PC = \sqrt{a^2+\ell^2}$. Sustituyendo esta expresión en la relación (4) y despejando ℓ obtenemos que

$$\ell = \frac{2r_2(a-r_2)}{a-2r_2}. \tag{6}$$

Calculemos el área del trapecio $PQBC$ de dos maneras distintas.
De la fórmula estándar

$$(PQBC) = \frac{(QP+BC)a}{2} = \frac{[(a-(k+\ell))+a]a}{2} = \frac{2a^2-a(k+\ell)}{2}.$$

Por otro lado, si O es el centro de Γ, entonces

$$\begin{aligned}(PQBC) &= (QOB)+(BOC)+(COP)+(POQ)\\ &= \frac{(QB+BC+PC)r+PQ(a-r)}{2}.\end{aligned}$$

Sustituyendo las relaciones 3, 4 y la expresión para QP en la relación anterior obtenemos que,

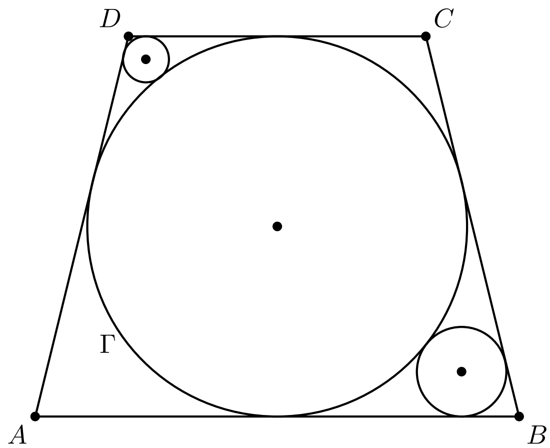
$$\begin{aligned}(PQBC) &= \frac{[(a+k-2r_1)+a+(a+l-2r_2)]r+(a-(k+l))(a-r)}{2}\\ &= \frac{2ar-2r(r_1+r_2)+2r(k+\ell)-a(k+\ell)+a^2}{2}.\end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para el área del trapecio $PQBC$ obtenemos que $a^2 = 2ar-2r(r_1+r_2)+2r(k+\ell)$, de donde

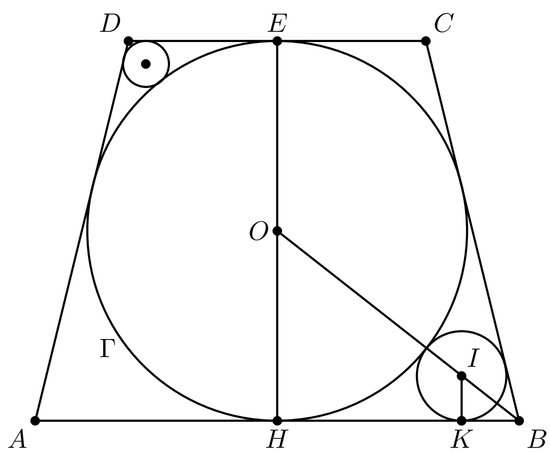
$$\frac{a^2}{r} = 2a-2(r_1+r_2)+2(k+\ell) = [a-2r_1+2k]+[a-2r_2+2\ell]. \tag{7}$$

Finalmente, sustituyendo (5) y (6) en (7) obtenemos el resultado.

Ejemplo 4. Γ es la circunferencia inscrita al trapecio isósceles $ABCD$. Se trazan dos circunferencias tangentes a Γ, cada una tangente a dos lados del trapecio $ABCD$, como se muestra en la figura. Si los radios de las circunferencias pequeñas son 4 y 9, encuentra el valor del radio de Γ.



Solución. Consideremos la siguiente figura.



Denotemos por $a = HB$, $R = OH = OE$ y $r = IK$. Por el Lema 2, $HK = 2\sqrt{Rr}$. Usando la semejanza de los triángulos OHB e IKB tenemos que

$$\frac{IK}{KB} = \frac{OH}{HB} \Rightarrow \frac{r}{a - 2\sqrt{Rr}} = \frac{R}{a} \Rightarrow a = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R - r}.$$

Análogamente, si s es el radio de la otra circunferencia pequeña y $b = DE$, entonces

$$b = \frac{2R\sqrt{Rs}}{R - s}.$$

Como el cuadrilátero $ABCD$ tiene una circunferencia inscrita, entonces usando nuevamente el teorema de Pitágoras, obtenemos que

$$\begin{aligned}
AB + DC &= AD + CB \\
2a + 2b &= 2\sqrt{(2R)^2 + (a-b)^2} \\
(a+b)^2 &= 4R^2 + a^2 - 2ab + b^2 \\
ab &= R^2 \\
\left(\frac{2R\sqrt{Rr}}{R-r}\right)\left(\frac{2R\sqrt{Rs}}{R-s}\right) &= R^2 \\
\frac{4R^3\sqrt{rs}}{(R-r)(R-s)} &= R^2 \\
4R\sqrt{rs} &= R^2 - (r+s)R + rs
\end{aligned}$$

que es equivalente a la ecuación cuadrática $R^2 - (r + s + 4\sqrt{rs})R + rs = 0$. Por hipótesis sabemos $r = 9$ y $s = 4$. Sustituyendo estos valores y resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos que $R = 1$ o $R = 36$, de los cuales la única solución posible es $R = 36$.

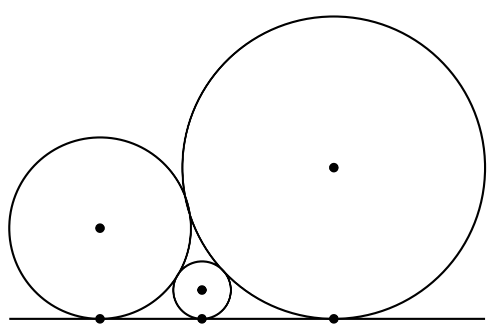
Ejercicios

A partir del Ejercicio 3, enunciamos problemas sangaku. Todas las figuras son cortesía de las notas de Francisco Javier García Capitán ([1]).

Ejercicio 1. *Considera un triángulo ABC con incentro I. Demuestra que $\angle BIC = 90^\circ + \frac{\angle BAC}{2}$.*

Ejercicio 2. *Usando las hipótesis del Ejemplo 1, demuestra que JM es bisectriz del ángulo $\angle FJE$.*

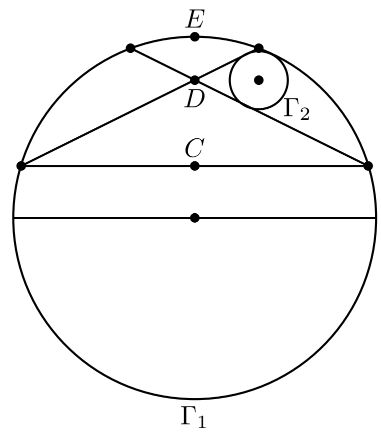
Ejercicio 3. *Considera tres circunferencias tangentes a una recta por el mismo semiplano y tangentes entre sí como se muestra en la figura. Encuentra una relación entre sus radios.*



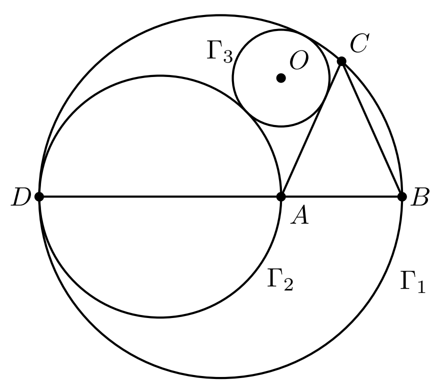
Ejercicio 4. *Considera dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 tales que Γ_2 es tangente a Γ_1 y a dos cuerdas de ella, como se muestra en la figura. Si r es el radio de Γ_2, demuestra*

que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{CD} + \frac{1}{DE}.$$



Ejercicio 5. *Sean* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ *tres circunferencias y* ABC *un triángulo isósceles tales que,* DB *es diámetro de* Γ_1*,* DA *es diámetro de* Γ_2 *y* Γ_3 *es tangente a* Γ_1, Γ_2 *y* AC *(ver figura). Si* O *es el centro de* Γ_3*, demuestra que* OA *es perpendicular a* DB*.*



Bibliografía

1. Francisco Javier García Capitán. *Resolución de Problemas Bonitos de Geometría con Métodos Elementales*. Notas, 2003.

2. Fukagawa Hidetoshi y Tony Rothman. *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*. Princeton University Press, 1943.

Problemas de práctica

En esta sección encontrarás 20 problemas seleccionados especialmente para comenzar tu preparación de este año. Los problemas de esta sección se presentan en formato de opción múltiple. Esto se debe en parte, a que el filtro inicial de la mayoría de los concursos estatales suele ser presentado así.

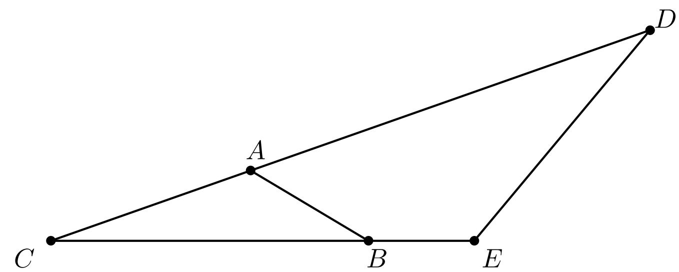
Ten en cuenta que en la olimpiada de matemáticas no solo se trata de saber la respuesta correcta, sino que además, es necesario justificar dicha respuesta. En las etapas más avanzadas de la olimpiada, las preguntas siempre son abiertas y no se utiliza el formato de opción múltiple. En el caso de esta publicación, dicho formato se adopta con el fin de que el estudiante que recién se inicia se vaya familiarizando con el concurso y sus etapas.

El material que hemos escogido para esta sección está pensado mayoritariamente para principiantes y no es muy elevado. Conforme el año transcurra, su nivel se irá incrementando paulatinamente, de forma que, para el último número del año, el material será en su mayoría de nivel avanzado.

Problema 1. Un bombero tiene una cubeta de 15 litros y otra de 20 litros, ambas sin marcas para medir. Suponiendo que el bombero tiene un pozo infinito de agua y que solo puede llenar las cubetas y cambiar contenido en ellas, ¿cuál de las siguientes cantidades puede obtener con este proceso?

(a) 2 litros (b) 4 litros (c) 6 litros (d) 8 litros (e) 10 litros

Problema 2. En la siguiente figura, el área del triángulo ABC es 3 cm^2. Si $CA = 4$ cm, $AD = 8$ cm, $CB = 6$ cm y $BE = 2$ cm, ¿cuál es el área del triángulo CDE?



(a) 6 cm^2 (b) 9 cm^2 (c) 12 cm^2 (d) 15 cm^2 (e) No se puede determinar

Problema 3. Cuatro matrimonios se juntan para jugar ajedrez una sola vez. Se sabe que Beatriz jugó con Eduardo, Alicia jugó contra el esposo de Clara, Federico jugó contra la mujer de Gustavo, Daniela jugó contra el marido de Alicia y Gustavo jugó contra la esposa de Eduardo. ¿Quién jugó contra Humberto?

(a) Alicia (b) Beatriz (c) Clara (d) Daniela (e) No se puede determinar

Problema 4. En un tablero de ajedrez las únicas piezas colocadas son la reina blanca, un caballo blanco y el rey negro. La reina está en la casilla f6 y el rey en la casilla g8. Suponiendo que es el turno de las fichas negras, ¿dónde debería estar el caballo para que el juego se ahogara (es decir, el rey no está en jaque pero tampoco se puede mover a ningún cuadro)?

(a) f7 (b) f8 (c) g6 (d) g7 (e) h6

Problema 5. Considera la siguiente lista de afirmaciones:

1. En esta lista hay exactamente una afirmación falsa.
2. En esta lista hay exactamente dos afirmaciones falsas.
3. En esta lista hay exactamente tres afirmaciones falsas.
4. En esta lista hay exactamente cuatro afirmaciones falsas.

¿Cuál de las afirmaciones es verdadera?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) Ninguna

Problema 6. En el rancho de Darío hay un corral con animales. Si todos son caballos menos tres, todos son gallinas menos dos, y todos son patos menos tres, ¿cuántos animales hay en el corral?

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Problema 7. Si n es un número entero, vamos a denotar por $\langle n \rangle$ a la cantidad de números positivos que dividen a n. Por ejemplo, $\langle 5 \rangle$ vale 2 porque hay dos números positivos que dividen al 5 (el 1 y el 5 mismo). ¿Cuánto vale $\langle\langle 10\rangle \cdot \langle 12\rangle\rangle$?

(a) 2 (b) 4 (c) 6 (d) 8 (e) 10

Problema 8. ¿Cuál es el mayor número primo de la forma $n^2 - 12n + 27$ donde n es un entero positivo?

(a) 91 (b) 37 (c) 23 (d) 17 (e) 7

Problema 9. Mauricio tiene 7 pokemones de agua, 5 de tierra, 10 de fuego y 4 de hielo. Un día decide regalar todos sus pokemones de su tipo favorito a José, mientras que dividió los demás entre Luis, Jorge y Saúl en partes iguales. ¿Cuál es el tipo favorito de pokemón de Mauricio?

(a) Agua (b) Tierra (c) Fuego (d) Hielo (e) No se puede saber

Problema 10. ¿Cuántos enteros positivos cumplen que al sumar sus dígitos el resultado es 2016 y al multiplicarlos el resultado es 2?

(a) 1008 (b) 2^{2016} (c) 2015 (d) 2016 (e) 1

Problema 11. Las dos raíces del polinomio $x^2 - 33x + c$ son números primos. ¿Cuánto vale c?

(a) 33 (b) 14 (c) 62 (d) 66 (e) 99

Problema 12. Si a y b son enteros positivos tales que $56 \leq a + b \leq 59$ y $0.9 < \frac{a}{b} < 0.91$, ¿cuánto vale $b^2 - a^2$?

(a) 177 (b) 153 (c) 125 (d) 110 (e) 100

Problema 13. Vamos a colorear dos cuadritos de una cuadrícula de 4×4 de color rojo, los cuadritos restantes quedarán de color verde. Dos coloraciones se consideran equivalentes si una se puede obtener de la otra bajo una rotación. ¿Cuántas coloraciones no equivalentes se pueden hacer?

(a) 30 (b) 31 (c) 32 (d) 60 (e) 64

Problema 14. ¿Cuántos divisores positivos tiene 2016 que no son divisibles entre 6?

(a) 13 (b) 14 (c) 15 (d) 16 (e) 17

Problema 15. Sobre un cuadrado $ABCD$ construimos un triángulo isósceles AEB con $AE = EB$. Si sabemos que $\angle ECB = 35°$, ¿cuánto vale $\angle DEC$?

(a) $35°$ (b) $60°$ (c) $70°$ (d) $80°$ (e) $90°$

Problema 16. Juan camina por los puntos de coordenadas enteras en el plano. En cada paso avanza una unidad entre dos puntos adyacentes. Si Juan quiere ir del punto $A = (0, 0)$ al punto $B = (0, 10)$ en exactamente 12 pasos, ¿cuántos caminos distintos que no repitan vértices puede seguir?

(a) 55 (b) 45 (c) 90 (d) 110 (e) 125

Problema 17. Diego quiere comprar un terreno rectangular para construir una escuela de matemáticas, pero necesita que su superficie sea al menos de $2016 \cdot 2015$ m^2. Además, requiere que la diferencia entre los lados del rectángulo sea a lo más 4 m. ¿Cuál es la longitud mínima que puede tener uno de sus lados?

(a) 2012 m (b) 2013 m (c) 2014 m (d) 2015 m (e) 2016 m

Problema 18. Si a, b y c son números reales positivos tales que

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b+c} = \frac{c}{b+c},$$

¿cuánto vale $\frac{a}{b}$?

(a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$

Problema 19. Sean x, y, z números reales tales que $x+y+z = 9$ y $xy+yz+zx = 24$. ¿Cuál es el mayor valor posible de z?

(a) 1 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) 3 (e) 5

Problema 20. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (m, n) satisfacen la ecuación $m^3 - n^3 = 5mn + 43$?

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La respuesta es (e).
Como la capacidad de ambas cubetas es un múltiplo de 5, cualquier cantidad medible, que es una combinación lineal de la forma $15x + 20y$, también será múltiplo de 5. Por lo tanto, la única opción posible es 10 litros, lo cual se logra con $x = 2$ e $y = -1$. Esto es, primero se sacan 15 litros del pozo, se vacía en la cubeta de 20 litros, luego se sacan otros 15 litros y se completa la cubeta de 20 litros, quedando así 10 litros en la cubeta pequeña y 20 litros en la grande, y esta última se vacía para terminar el proceso.

Solución del problema 2. La respuesta es (c).
Con las longitudes dadas se puede ver que $2CA = CE$ y $2CB = CD$. Además, los triángulos CAB y CED comparten el ángulo en C, luego son semejantes en razón $1 : 2$. Por lo tanto, la razón de sus áreas es de $1 : 4$, de donde se tiene que el área del triángulo CDE es 12 cm^2.

Solución del problema 3. La respuesta es (c).
Puesto que Gustavo jugó contra la esposa de Eduardo y Eduardo jugó contra Beatriz, se debe tener que Beatriz no es la esposa de Eduardo. Además si Alicia fuera la esposa

de Eduardo se tendría que Daniela jugó contra Eduardo, lo cual no puede pasar pues él jugó contra Beatriz. Por lo tanto, la esposa de Eduardo debe ser Clara o Daniela. Si fuera Clara entonces se tendría que Alicia jugó contra Eduardo lo cual, de nuevo, no ocurre. Por lo tanto, la única posibilidad es que Eduardo, sea esposo de Daniela. Como Gustavo jugó contra la esposa de Eduardo se sigue que Gustavo jugó contra Daniela. Como Daniela jugó contra el esposo de Alicia, se tiene que Alicia es esposa de Gustavo. Por último, como Federico jugó contra la esposa de Gustavo se tiene que Federico jugó contra Alicia. Entonces, la única pareja restante de juego es Humberto contra Clara.

Solución del problema 4. La respuesta es (b).
Puesto que la reina blanca solo no ataca las posiciones g8 y h7, el único cuadro al que se podría mover el rey es a h7. Entonces, para ahogar el juego se necesita que el caballo ataque ese cuadro, lo cual ocurre cuando está en el cuadro f8.

Solución del problema 5. La respuesta es (c).
Si las cuatro afirmaciones fuesen falsas, la cuarta afirmación sería simultáneamente verdadera y falsa, lo cual no es posible, por lo que hay al menos una afirmación verdadera. Suponiendo la veracidad de cualquiera de ellas, cada una de las afirmaciones restantes contradice a las demás, por lo que no puede haber dos o más afirmaciones verdaderas. Por lo tanto, solo una afirmación es verdadera y hay 3 afirmaciones falsas. Esto significa que la tercera afirmación es la verdadera.

Solución del problema 6. La respuesta es (b).
Denotemos por c, g y p a las cantidades de cada tipo de animal, respectivamente, y por N a la cantidad total de animales. Según las condiciones del problema tenemos que $c = N - 3$, $g = N - 2$ y $p = N - 3$. Sumando estas tres ecuaciones obtenemos que $c + g + p = 3N - 8$. Además, como $N = c + g + p$, obtenemos $N = 3N - 8$ de donde $N = 4$.

Solución del problema 7. La respuesta es (d).
Por un lado, tenemos que $\langle 10\rangle = 4$ porque los divisores positivos de 10 son $1, 2, 5$ y 10. Por otro lado, tenemos que $\langle 12\rangle = 6$ porque los divisores positivos de 12 son $1, 2, 3, 4, 6$ y 12. De este modo, $\langle\langle 10\rangle \cdot \langle 12\rangle\rangle = \langle 4 \cdot 6\rangle = \langle 24\rangle$. Como los divisores positivos de 24 son $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$ y 24, la respuesta buscada es 8.

Solución del problema 8. La respuesta es (e).
Tenemos que $n^2 - 12n + 27 = (n - 9)(n - 3)$. Para que este producto sea un número primo, o bien $n - 9 = \pm 1$ o $n - 3 = \pm 1$. Si $n - 9 = 1$, entonces $n = 10$ y $(n-9)(n-3) = 7$ que es primo. Si $n-9 = -1$, entonces $n = 8$ y $(n-9)(n-3) = -5$ que es primo. Si $n - 3 = 1$, entonces $n = 4$ y $(n - 9)(n - 3) = -5$ que es primo. Si $n - 3 = -1$, entonces $n = 2$ y $(n - 9)(n - 3) = 7$ que es primo. Por lo tanto, la respuesta es 7.

Solución del problema 9. La respuesta es (b).
Como el enunciado dice que tras regalar sus pokemones favoritos pudo repartir los

demás en partes iguales, eso quiere decir que la cantidad que le queda al restar los favoritos es un múltiplo de 3. No podrían ser los de agua, porque los restantes suman $5 + 10 + 4 = 19$, que no es múltiplo de 3. Un proceso de descarte similar nos muestra que la única posibilidad es que sean de tierra, ya que en ese caso, los restantes suman $7 + 10 + 4 = 21$.

Solución del problema 10. La respuesta es (c).
Si el producto de los dígitos es 2 y el número no es cero, los dígitos pueden ser únicamente 2 y 1. Además, como la suma de sus dígitos es 2016, sus dígitos son $2, 1, 1, 1, \ldots, 1$ con 2014 unos. Cada forma distinta de ordenarlos corresponde a uno de los números buscados, por lo que solo nos falta contar las maneras de ordenarlos. El único dígito diferente es el 2 y, como los números que estamos formando tienen 2015 dígitos, el 2 puede ser cualquiera de ellos. Esto nos muestra que hay 2015 números con la propiedad buscada.

Solución del problema 11. La respuesta es (c).
Sabemos que si a y b son las raíces del polinomio cuadrático $x^2 - 33x + c$, este se puede factorizar como $(x - a)(x - b)$ y por tanto tendremos $a + b = 33$ y $ab = c$. Necesitamos entonces dos números primos cuya suma sea igual a 33. Pero si sumamos dos primos impares, necesariamente el resultado será par, por lo que esta opción queda descartada. Así, uno de los primos debe ser 2 y, por tanto, el otro será 31. Concluimos entonces que $c = 2(31) = 62$.

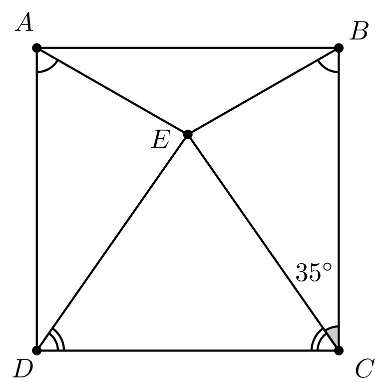
Solución del problema 12. La respuesta es (a).
De las desigualdades $0.9b < a < 0.91b$, obtenemos que $0.9b + b < a + b < 0.91b + b$. Luego, $0.9b + b < 59$ y $0.91b + b > 56$. Se sigue que $b < 31.05$ y $b > 29.3$. Por lo tanto, $b = 30$ o 31. Si $b = 30$, entonces $27 < a < 27.3$, y no hay valores enteros de a. Si $b = 31$, entonces $27.9 < a < 28.2$ de donde $a = 28$. Luego, $b^2 - a^2 = (b + a)(b - a) = (31 + 28)(31 - 28) = 177$.

Solución del problema 13. La respuesta es (b).
Tenemos dos opciones: a) que los dos cuadritos que se coloreen de rojo sean diametralmente opuestos (con respecto al vértice que divide a la cuadrícula en cuatro cuadros de 2×2) o b) que no lo sean.
En el caso a), cada coloración es equivalente a otras dos. Así, en este caso hay 4 posibles coloraciones (dos por cada diagonal) y 2 coloraciones no equivalentes. Por otro lado, en el caso b), cada coloración genera otras cuatro coloraciones. En este caso hay 4 menos que el total de las coloraciones posibles. Como $\binom{16}{2}$ es el número de formas de escoger dos cuadritos de los 16 posibles, en el caso b) hay $\binom{16}{2} - 4 = \frac{16 \cdot 15}{2} - 4 = 116$ coloraciones posibles. Además, en el caso b) cada coloración genera otras cuatro coloraciones, de modo que hay $\frac{116}{4} = 29$ coloraciones no equivalentes. En conclusión, hay $2 + 29 = 31$ coloraciones no equivalentes.

Solución del problema 14. La respuesta es (d).
Veamos la descomposición en factores primos de 2016: $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Como buscamos los divisores positivos que no son divisibles entre 6 podemos dividir los casos

entre los divisores que son divisibles entre 2, los que son divisibles entre 3 y los que no son divisibles entre ninguno de los dos. En el primer caso tenemos a los divisores 2, 2^2, 2^3, 2^4 y 2^5, además de los otros cinco divisores que resultan de multiplicar por 7 cada una de estas potencias de 2. Los que son divisbles entre 3 son 3, 9, $3 \cdot 7$ y $9 \cdot 7$. Por último, los que no son divisbles entre 2 y 3 son 1 y 7. Por lo tanto, existen $16 = 10 + 4 + 2$ divisores positivos de 2016 que no son divisibles entre 6.

Solución del problema 15. La respuesta es (c).
Como el triángulo AEB es isósceles, tenemos que $\angle EAB = \angle ABE$ y $AE = EB$. Además, por ser $ABCD$ un cuadrado, tenemos que $\angle DAB = \angle ABC = 90°$, de donde $DA = BC$.



Así, $\angle DAE = \angle EBC$. Por lo tanto, por el criterio de semejanza LAL tenemos que el triángulo DAE es semejante al triángulo EBC, lo que significa que $CE = ED$. Entonces el triángulo DEC es isósceles y $\angle ECD = \angle CDE$. Como $\angle BCD = 90°$ y $\angle ECB = 35°$, concluimos que $\angle ECD = 55° = \angle CDE$. Pero la suma de los ángulos interiores de un triángulo es $180°$, entonces $\angle DEC = 70°$.

Solución del problema 16. La respuesta es (d).
Observamos que se debe salir de la recta que une los puntos A y B con un paso y regresar con otro, los pasos restantes quedarán determinados por una recta. Hay 11 opciones en las que se puede salir o regresar a la recta AB, que son cada uno de los puntos $(0, x)$ con $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. De esas 11 opciones debemos escoger 2, una en la que salimos de la recta (la que tenga el menor valor de x) y otra en la que regresamos. Esto es posible hacerlo de $\binom{11}{2} = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ maneras. Además, por cada pareja de puntos se puede escoger entre salir hacia arriba o hacia abajo. Por la regla del producto concluimos que hay $55 \cdot 2 = 110$ caminos distintos posibles.

Solución del problema 17. La respuesta es (c).
Denotemos por x e y a los lados del rectángulo, con $x < y$. Como la diferencia entre los lados del rectángulo es a lo más 4, tenemos que $y \leq x + 4$. Así, la condición $xy \geq 2016 \cdot 2015$ implica que $x(x+4) \geq 2016 \cdot 2015$. Pero $x(x+4) \geq 2016 \cdot 2015 \Leftrightarrow x^2 +$

$4x+4 \geq 2016\cdot 2015+4 \Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 2016\cdot 2015+4 \Leftrightarrow x+2 \geq \sqrt{2016\cdot 2015+4}$. Si consideramos que $\sqrt{2016\cdot 2015+4} > 2015$, entonces $x+2 > 2015$. Por tanto, $x > 2013$, es decir, $x \geq 2014$. Si $x = 2014$ y $y = 2014+4 = 2018$, entonces el área del rectángulo será $xy = 2014\cdot 2018 = 2014\cdot 2014 + 2014\cdot 2 + 1 + 2014\cdot 2 - 1 = (2014+1)^2 + 2014\cdot 2 - 1 > 2015^2 + 2015 = 2016\cdot 2015\,\mathrm{m}^2$. Con lo que demostramos que la longitud mínima de uno de sus lados es 2014 m.

Solución del problema 18. La respuesta es (d).
La igualdad $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{b+c}$ es equivalente a la igualdad $a(b+c) = (a+b)c$. Al simplificar, obtenemos que $ab = bc$, de donde $a = c$, pues $b > 0$. Sustituyendo $a = c$ en la igualdad $\frac{a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b+c}$ obtenemos que $\frac{c}{c+b} = \frac{c+b}{2c+b}$ lo cual implica que $(b+c)^2 = c(2c+b)$. Después de simplificar obtenemos que $c^2 - cb - b^2 = 0$. Si consideramos esta ecuación cuadrática en c, obtenemos que $c = \frac{b\pm\sqrt{b^2+4b^2}}{2} = \frac{b\pm\sqrt{5}b}{2} = \frac{b(1\pm\sqrt{5})}{2}$, de donde se sigue que $\frac{a}{b} = \frac{c}{b} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, la respuesta es $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Solución del problema 19. La respuesta es (e).
Como $x+y = 9-z$, tenemos que $xy = 24 - z(x+y) = 24 - z(9-z) = z^2 - 9z + 24$. Notemos ahora que x e y son raíces de la ecuación cuadrática $t^2 + (z-9)t + (z^2 - 9z + 24) = 0$. Como x e y son números reales, el discriminante de esta ecuación cuadrática debe ser mayor o igual que cero, esto es, $(z-9)^2 - 4(z^2 - 9z + 24) \geq 0$. Después de simplificar, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $(z-1)(z-5) \leq 0$. Resolviendo esta desigualdad obtenemos que $1 \leq z \leq 5$. Cuando $x = y = 2$, obtenemos que $z = 5$. Por lo tanto, el valor máximo de z es 5.

Solución del problema 20. La respuesta es (b).
Como m y n son positivos, tenemos que $5mn + 43 > 0$, lo cual implica que $m > n$. Luego, $k = m - n$ es un entero positivo. Entonces, la ecuación dada es equivalente a la ecuación $(k+n)^3 - n^3 - 5(k+n)n = 43$, que al simplificar se reduce a la ecuación

$$(3k-5)n^2 + k(3k-5)n + k^3 = 43. \qquad (8)$$

Si $k = 1$, tenemos la ecuación $n^2 + n + 21 = 0$ que no tiene soluciones reales. Por lo tanto, $k \geq 2$, de donde se sigue que $3k - 5 > 0$. De la ecuación (8), podemos ver que $k^3 < 43$, de modo que $k \leq 3$. De aquí que los valores posibles de k son 2 y 3.
Si $k = 2$, la ecuación (8) se simplifica a $n^2 + 2n - 35 = 0$. Esto es, $(n-5)(n+7) = 0$, cuya única solución positiva es $n = 5$. Luego, $m = k + n = 2 + 5 = 7$.
Si $k = 3$, la ecuación (8) se simplifica a $n^2 + 3n - 4 = 0$. Esto es, $(n-1)(n+4) = 0$, cuya única solución positiva es $n = 1$. Luego, $m = k + n = 3 + 1 = 4$.
Por lo tanto, las soluciones enteras positivas de la ecuación original son las parejas $(m,n) = (7,5)$ y $(4,1)$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2016 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que los problemas en esta sección no tienen solución, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. ¿Cuál es el número entero más grande que tiene todos sus dígitos diferentes y además no es múltiplo de 9?

Problema 2. Sea ABC un triángulo con $\angle B = 90°$. Sobre el lado AB se considera un punto D y sea M el punto medio de AD. Sea E la intersección de CM con la mediatriz del lado AB. Demuestra que AE es paralela a BD.

Problema 3. Sean p y q números reales tales que la ecuación $x^3 + px + q = 0$ tiene tres raíces distintas. Demuestra que $p < 0$.

Problema 4. En una fiesta se sabe que cada mujer bailó con al menos un hombre y no hay un hombre que bailara con cada mujer. Demuestra que existen dos hombres H y

H', y dos mujeres M y M', tales que H bailó con M, H' bailó con M', H no bailó con M' y H' no bailó con M.

Problema 5. Determina todas las soluciones enteras positivas del siguiente sistema de ecuaciones.

$$x = \frac{y^3(z-1)+2z}{z+1}, \quad y = \frac{z^3(x-1)+2x}{x+1}, \quad z = \frac{x^3(y-1)+2y}{y+1}.$$

Problema 6. ¿Cuántos triángulos (no degenerados) se pueden formar tales que sus lados tengan longitudes enteras y menores o iguales que 2016?

Problema 7. Pablo se encuentra en el punto $X = (3,0)$ del plano coordenado y quiere visitar a sus cuatro amigos que se localizan en los puntos $A = (0,10)$, $B = (0,0)$, $C = (8,0)$ y $D = (8,4)$. Existen 5 carreteras que van en ambas direcciones: de A a B, de A a C, de B a C, de B a D y de D a C. Pablo quiere ir de un punto a otro por las carreteras que hay entre ellos. ¿Cuál es la distancia mínima que debe recorrer Pablo para visitar exactamente una vez a cada uno de sus cuatro amigos?

Problema 8. Si a, b, c y d son enteros positivos, determina el valor mínimo de la expresión

$$\left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c+d+a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{d+a+b}{c} \right\rfloor.$$

(Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 9. Sean a, b y c enteros positivos distintos. Demuestra que,

$$\text{mcd}(ab+1, ac+1, bc+1) \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

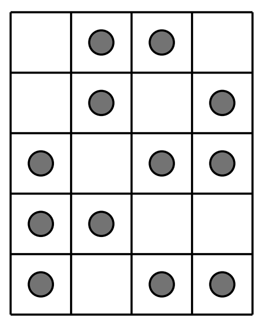
Problema 10. Encuentra todas las cuartetas (a, b, c, d) de números reales positivos tales que $abcd = 1$, $a^{2016} + 2016b = 2016c + d^{2016}$ y $2016a + b^{2016} = c^{2016} + 2016d$.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2015 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 2, año 2015. En esta ocasión queremos agradecer y felicitar de una manera muy especial a Adalberto Isaac Aguirre González por habernos enviado sus soluciones a los problemas 3 y 4, así como también a Luis Eduardo Flores Zapotitla por su solución al problema 9, y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus trabajos para que puedan salir publicados en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa 3, año 2015, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. En un edificio con pisos numerados desde 1 hasta k hay cuatro elevadores. Cada elevador hace 3 paradas las cuales no necesariamente son en pisos consecutivos ni necesariamente incluyen al piso 1. Se sabe que para cualesquiera dos pisos, hay al menos un elevador que hace parada en ambos pisos. ¿Cuál es el máximo valor posible de k?

Solución. Si en el edificio hay n pisos entonces todas las posibles parejas de pisos son $\binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ el cual es mayor o igual a 15 si $n \geq 6$. Como cada elevador cubre 3 parejas de pisos, a lo más hay 12 combinaciones posibles entre los 4 elvadores. Entonces el número de pisos no puede ser 6 o más. Para un edificio con 5 pisos el siguiente dibujo muestra cómo es posible que los elevadores hagan sus paradas.



Problema 2. Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. Los pies de las perpendiculares desde P a los lados BC, CA y AB son D, E y F, respectivamente. Encuentra los puntos P tales que se minimiza

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

Solución. Denotemos por $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $x = PD$, $y = PE$ y $z = PF$. Justamente $\frac{ax+by+cz}{2}$ es el área del triángulo que es constante, entonces minimizar la expresión del problema equivale a minimizar

$$(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) = a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ca\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)$$

pero para cualesquiera números positivos α y β, la desigualdad media aritmética-media geométrica implica que $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$. Entonces, el mínimo de la expresión es $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$ y la igualdad se alcanza cuando $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$, $\frac{y}{z} = \frac{z}{y}$ y $\frac{z}{x} = \frac{x}{z}$, esto es, cuando $x = y = z$, lo cual sucede cuando P es el incentro.

Problema 3. Muestra que para cualquier entero positivo n el número

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$$

es un entero.

Solución de Adalberto Isaac Aguirre González. Si multiplicamos la expresión por 30 obtenemos $6n^5+15n^4+10n^3-n$. Si este número fuera múltiplo de 30, tendríamos que

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

es un entero.

Para analizar módulo 30, notemos que $30=2\cdot 3\cdot 5$. Entonces, basta probar los siguientes 3 casos:

- Es fácil ver que si n es par, entonces $6n^5+15n^4+10n^3-n$ es par. Por otro lado, si n es impar, se tiene que $15n^4$ es impar. Por lo tanto $15n^4-n$ es par. Luego, $6n^5+15n^4+10n^3-n=2(3n^5+5n^3)+(15n^4-n)$ es par. En ambos casos se tiene que $6n^5+15n^4+10n^3-n\equiv 0 \pmod 2$.

- Puesto que $6n^5$ y $15n^4$ son múltiplos de 3, la expresión se reduce módulo 3 a $10n^3-n$. Pero, $10\equiv 1 \pmod 3$, por lo que se tiene que analizar n^3-n. Si $n\equiv 0 \pmod 3$, entonces $n^3-n\equiv 0 \pmod 3$. Si $n\equiv 1 \pmod 3$, entonces $n^3-n\equiv 1-1\equiv 0 \pmod 3$. También si $n\equiv 2 \pmod 3$ se tiene que $n^3-n\equiv 6\equiv 0 \pmod 3$. Luego, en este caso $6n^5+15n^4+10n^3-n\equiv 0 \pmod 3$.

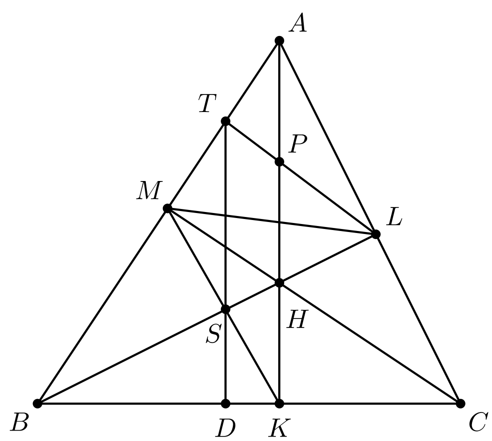
- Puesto que $15n^4$ y $10n^3$ son múltiplos de 5, la expresión se reduce módulo 5 a $6n^5-n$. Pero, $6\equiv 1 \pmod 5$, por lo tanto, se tiene que analizar n^5-n. Como en el caso anterior, si analizamos las posibilidades $n\equiv 0,1,2,3$ o $4 \pmod 5$, obtenemos en cada caso que $n^5-n\equiv 0 \pmod 5$. De donde $6n^5+15n^4+10n^3-n\equiv 0 \pmod 5$.

Por lo tanto, se concluye que $6n^5+15n^4+10n^3-n\equiv 0 \pmod{30}$ para todo entero positivo n.

Problema 4. En un triángulo ABC con alturas AK, BL y CM y ortocentro H, sea P el punto medio de AH. Si BH y MK se intersecan en S y LP y AM se intersecan en T. Demuestra que ST es perpendicular a BC.

Solución de Adalberto Isaac Aguirre González. Sea D la intersección de ST con BC. Como P es el punto medio de la hipotenusa del triángulo ALH, tenemos que $AP=LP=PH$. Por lo que $\angle PAL=\angle PLA$. Ahora, tenemos que el cuadrilátero $LKBA$ es cíclico (por abrir el mismo arco $\widehat{AB}$ de 90°), luego $\angle PLA=\angle PAL=\angle PAC=\angle LBC$. Como $MBKH$ también es cíclico, $\angle LBC=\angle HMK$. Así que $\angle HMK=\angle PLA$. Ahora, como $ALHM$ es cíclico, tenemos que $\angle MHS=\angle LAT$. Lo que convierte a los triángulos ALT y HMS en triángulos semejantes por el criterio

AA. Entonces, $\angle HSM = \angle ATL = 180° - \angle LTM$. Luego, $LTMS$ es cíclico. Así, por abrir el mismo arco (o por ángulos inscritos) tenemos que $\angle HLM = \angle STM$. Pero, como $ALHM$ es cíclico, $\angle HAM = \angle HLM = \angle STM$. Así, por ángulos correspondientes, tenemos que PK es paralela a TD. Entonces, $\angle PKB = \angle TDB = 90°$. Esto significa que ST es perpendicular a BC.



Problema 5. Encuentra el número de soluciones reales de la ecuación

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = x.$$

(Si x es un número real, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.)

Solución. Supongamos que a es una solución de la ecuación. Como $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor$ y $\lfloor \frac{a}{5} \rfloor$ son enteros, también lo es a. Por el algoritmo de la división, existen enteros q y r tales que $a = 30q + r$ y $0 \leq r < 30$.
Tenemos que $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor = \lfloor \frac{30q+r}{2} \rfloor = 15q + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{a}{3} \rfloor = \lfloor \frac{30q+r}{3} \rfloor = 10q + \lfloor \frac{r}{3} \rfloor$ y $\lfloor \frac{a}{5} \rfloor = \lfloor \frac{30q+r}{5} \rfloor = 6q + \lfloor \frac{r}{5} \rfloor$. Sustituyendo estos valores en la ecuación original tenemos que la ecuación es equivalente a

$$31q + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor = 30q + r,$$

la cual a su vez es equivalente a

$$q = r - \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor.$$

Para cada valor de r, esta última ecuación nos dará un único valor para q tal que $a = 30q + r$ cumple la ecuación original. Por lo tanto, como hay 30 posibles valores para r, hay 30 soluciones enteras de la ecuación.

Problema 6. Se tienen escritos los números $2^0, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{19}$ en un pizarrón. Dos personas juegan alternadamente. En su turno, eligen 5 de los números y les restan 1. El primer jugador que haga que uno de los números sea negativo, pierde. ¿Cuál de los dos jugadores puede asegurar su victoria y cómo?

Solución. Digamos que los jugadores son Al y Ben. Veamos que Al puede asegurar su victoria. Para ello, en su primer turno, le restará 1 a los números 2^0, 2^{16}, 2^{17}, 2^{18} y 2^{19}. En los siguientes turnos le restará 1 a los mismos 5 números a los cuales Ben les acababa de restar 1.

Notemos que en cada turno fue elegido al menos uno de los primeros 16 números. Como la suma de ellos es $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{15} = 2^{16} - 1$, tenemos que en a lo más 2^{16} turnos el juego terminará. Como los otros cuatro números son mayores o iguales que 2^{16}, cuando el juego termine, ninguno de los últimos 4 números será negativo.

Por otro lado, después de su primer turno, Al hizo que cada uno de los primeros 16 números sean pares. Si Ben elige uno de esos números, lo dejará en un número impar, por lo que Al podrá restarle 1 sin hacerlo negativo. Por lo tanto, Al ganará siguiendo esta estrategia.

Problema 7. Comenzando desde arriba en el siguiente arreglo triangular, empiezas a hacer un recorrido moviéndote en cada paso a cualquiera de las dos posiciones que están directamente debajo de tu posición actual. Por ejemplo, desde el 3 de arriba te puedes mover al 7 o al 4 de la segunda fila; desde ese 7 sólo puedes pasar al 2 o al 5 de la tercera fila, pero no al 6 porque el 6 no está debajo del 7.
De todos los caminos posibles, el que tiene la mayor suma es el indicado por las casillas encerradas y la suma es igual a $3 + 7 + 5 + 9 = 24$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \boxed{3} & & & \\ & & \boxed{7} & & 4 & & \\ & 2 & & \boxed{5} & & 6 & \\ 8 & & 5 & & \boxed{9} & & 3 \end{array}$$

¿Cuál es la mayor suma que puedes lograr si haces el mismo proceso en la siguiente figura?

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 42 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 70 & & 71 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 30 & & 35 & & 31 & & & & & & & \\
 & & & & & & 40 & & 28 & & 49 & & 61 & & & & & & \\
 & & & & & 35 & & 38 & & 62 & & 24 & & 39 & & & & & \\
 & & & & 49 & & 81 & & 57 & & 63 & & 56 & & 49 & & & & \\
 & & & 32 & & 55 & & 28 & & 06 & & 16 & & 20 & & 12 & & & \\
 & & 43 & & 41 & & 26 & & 56 & & 55 & & 40 & & 70 & & 33 & & \\
 & 71 & & 44 & & 65 & & 25 & & 43 & & 51 & & 52 & & 63 & & 42 & \\
33 & & 28 & & 47 & & 43 & & 17 & & 51 & & 39 & & 48 & & 53 & & 35
\end{array}$$

Solución. Construyamos un segundo triángulo, al que llamaremos "triángulo sumas" con las mismas posiciones que el original, pero en cada posición indicaremos la máxima suma de los caminos que llegan a esa posición.
Por ejemplo, las tres primeras filas del triángulo sumas serían:

$$\begin{array}{lll}
42 & & \\
112 & 113 & \\
142 & 148 & 144 \\
\ldots & &
\end{array}$$

Esto porque sólo hay un camino que se queda en la posición inicial, con suma 42.
Sólo hay un camino que llega a la posición $(2,1)$ (segunda fila, primera posición) y su suma máxima es $42+70=112$; sólo hay un camino que llega a la posición $(2,2)$ y su suma máxima es $42+71=113$.
Hay sólo un camino que llega a la posición $(3,1)$ cuya suma es $42+70+30=142$.
Hay sólo un camino que llega a la posición $(3,3)$ cuya suma es $42+71+31=144$.
Pero para la posición $(3,2)$ la máxima suma se obtiene como $35+\text{máx}(112,113)=148$.
En general, las entradas en el triángulo sumas se obtienen sumando la entrada del triángulo original al máximo de las posiciones en el triángulo sumas directamente sobre la que se está construyendo.
Por ejemplo, la cuarta fila sería: $182 \;\; 176 \;\; 197 \;\; 205$.
Continuamos este proceso hasta llegar a la fila inferior, y el máximo valor así obtenido será la mayor suma en los caminos del triángulo original, y dicho valor resulta ser 509.

Problema 8. Determina el mayor número capicúa que no excede a 54321 y que puede escribirse como suma de 3 enteros consecutivos. (Un número "capicúa" es un número que se lee igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda).

Solución. Notemos que si un número es suma de tres enteros consecutivos necesariamente es múltiplo de 3:

$$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1).$$

Más aún, cualquier número que es múltiplo de 3 es suma de tres enteros consecutivos.

$$n=3k=(k-1)+k+(k+1).$$

Por lo tanto, el problema se reduce a encontrar el mayor número capicúa que no excede 54321 y que sea múltiplo de 3.
Para maximizar los números capicúa, es necesario que las posiciones más a la derecha sean lo más grande posibles.
Si a la derecha está 5, entonces el número tiene la forma $5\_\_\_5$. Las posiciones 2 y 4 entonces no pueden ser $9, 8, 7, 6, 5$ porque excederían a 54321.
Por tanto intentamos con 4 y obtenemos 54_45. Para que no exceda a 54321 es necesario que la posición central sea $0, 1$ o 2. Pero por el criterio de divisibilidad del 3 podemos descartar los números 1 y 2 para el centro, obteniendo así el número 54045.

Problema 9. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestra que

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geq 6.$$

Solución de Luis Eduardo Flores Zapotitla. Notemos que

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}=\frac{(1-a)(1+a)}{a+bc}+\frac{(1-b)(1+b)}{b+ca}+\frac{(1-c)(1+c)}{c+ab}.$$

Si utilizamos la hipótesis de que $a+b+c=1$ y desarrollamos la expresión anterior obtenemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{(b+c)(1+a)}{a+bc}+\frac{(c+a)(1+b)}{b+ca}+\frac{(a+b)(1+c)}{c+ab}\\
= & \frac{b+c+ab+ac}{a+bc}+\frac{c+a+cb+ab}{b+ca}+\frac{a+b+ca+cb}{c+ab}\\
= & \frac{b+ac}{a+bc}+\frac{c+ab}{a+bc}+\frac{c+ab}{b+ca}+\frac{a+cb}{b+ca}+\frac{a+cb}{c+ab}+\frac{b+ca}{c+ab}.
\end{aligned}$$

Ahora, por la desigualdad media aritmética-media geométrica, obtenemos que,

$$\frac{b+ac}{a+bc}+\frac{c+ab}{b+ca}+\frac{a+cb}{c+ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b+ac}{a+bc}\cdot\frac{c+ab}{b+ca}\cdot\frac{a+cb}{c+ab}}=3,$$

$$\frac{c+ab}{a+bc}+\frac{a+cb}{b+ca}+\frac{b+ca}{c+ab}\geq 3\sqrt[3]{\frac{c+ab}{a+bc}\cdot\frac{a+cb}{b+ca}\cdot\frac{b+ca}{c+ab}}=3.$$

Si sumamos estas desigualdades obtenemos que

$$\frac{1-a^2}{a+bc}+\frac{1-b^2}{b+ca}+\frac{1-c^2}{c+ab}\geq 6.$$

Problema 10. Determina todas las soluciones en enteros no negativos (a, b, c, d) que satisfacen la ecuación $2^a\cdot 3^b-5^c\cdot 7^d=1$.

Solución. Si $a=0$, el lado izquierdo de la ecuación es un número par, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $a\geq 1$. Consideremos los siguientes casos.

- Supongamos que $b = 0$. En este caso la ecuación es $2^a - 5^c \cdot 7^d = 1$.

  - Si $c \geq 1$, entonces $2^a \equiv 1 \pmod 5$ de donde se sigue que $4 \mid a$. Por lo tanto, $-5^c \cdot 7^d \equiv 0$ (mod 3), lo cual es una contradicción.

  - Si $c = 0$, entonces la ecuación es $2^a - 7^d = 1$. Esto implica que $1 + 7^d \equiv 2^a \pmod{16}$. Como toda potencia de 7 es congruente con 1 o 7 módulo 16, tenemos que $1 + 7^d \equiv 2$ u $8 \pmod{16}$. Luego, $2^a \equiv 2$ u $8 \pmod{16}$ y por lo tanto $a \leq 3$. Examinando los valores posibles de $a = 0, 1, 2, 3$ encontramos que $(3, 0, 0, 1)$ y $(1, 0, 0, 0)$ son soluciones.

- Supongamos que $b > 0$. Módulo 3 la ecuación implica que $5^c \equiv -1 \pmod 3$, de donde se sigue que c debe ser impar y en particular no igual a cero. Entonces, considerando la ecuación módulo 5 encontramos que

$$1 \equiv 2^a \cdot 3^b \equiv 2^{a-b} \pmod 5.$$

  Esto implica que $a \equiv b \pmod 4$. Consideraremos varios casos.

  - Primero, supongamos que $d = 0$. Entonces, tenemos que $2^a \cdot 3^b = 5^c + 1$. Como $5^c + 1 \equiv 2 \pmod 4$ y $2^a \cdot 3^b \equiv 0 \pmod 4$ si $a > 1$, necesariamente $a = 1$ y por lo tanto, $b \equiv 1 \pmod 4$ (pues $a \equiv b \pmod 4$). Claramente, una solución de la ecuación es $(1, 1, 1, 0)$. Si $b \geq 2$, entonces $5^c \equiv -1 \pmod 9$, lo cual sucede solo si $c \equiv 0 \pmod 3$. Pero entonces, $5^3 + 1 = 126$ divide a $5^c + 1 = 2^a \cdot 3^b$, lo cual es imposible.
  - Supongamos ahora que $d \neq 0$ y que a y b son impares. Entonces, $6m^2 \equiv 1 \pmod 7$ donde $m = 2^{(a-1)/2} \cdot 3^{(b-1)/2}$ es un entero. Luego, $m^2 \equiv -1 \pmod 7$ lo cual no es cierto para todo entero m.
  - Finalmente, supongamos que $b, c, d \neq 0$, y $a = 2x$, $b = 2y$ son enteros pares con $x \equiv y \pmod 2$, y c es impar. Sea $m = 2^x \cdot 3^y$. Tenemos que $(m-1)(m+1) = 5^c \cdot 7^d$. Como el máximo común divisor de $m - 1$ y $m+1$ es 1 o 2, y 2 no divide a $5^c \cdot 7^d$, la igualdad anterior solo puede ocurrir en dos situaciones.
    - En un caso, $m-1 = 5^c$ y $m+1 = 7^d$. Entonces, $5^c + 1 = 2^x \cdot 3^y$. Esta ecuación ya la habíamos discutido antes, la cual es válida solo cuando $x = y = 1$ y $c = 1$. Por lo tanto, tenemos la solución $(a, b, c, d) = (2, 2, 1, 1)$.
    - En el otro caso, $m + 1 = 5^c$ y $m - 1 = 7^d$. Considerando la primera igualdad módulo 3, obtenemos que $m \equiv 2^c - 1 \equiv 1 \pmod 3$. Luego, $y = 0$ y x es par. Entonces, $2^x + 1 = 5^c$ y $2^x - 1 = 7^d$. Pero si x es par, entonces $3 = 2^2 - 1 \mid 2^x - 1 \mid 7^d$, lo cual es imposible. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

En resumen, las soluciones son

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 1).$$

Concursos Estatales

Olimpiada de Matemáticas en Nuevo León, 2015

La Olimpiada de Matemáticas en Nuevo León es una competencia que se organiza desde 1990 y tiene como objetivo seleccionar al equipo que representará al estado en el concurso nacional. Tradicionalmente el primer examen se aplica el último sábado de mayo cada año. Este examen es abierto, es decir, cualquier interesado puede presentarlo. De este examen se seleccionan alrededor de 20 alumnos por cada grado escolar (desde sexto grado de primaria hasta bachillerato). Estos alumnos se invitan a un entrenamiento intensivo y tienen la oportunidad de presentar un segundo examen que se denomina "Examen Selectivo". Luego, aproximadamente 30 alumnos son seleccionados para presentar el "Examen Semi-Final" de donde 16 de ellos se ganan el derecho a presentar el "Examen Final" del cual se selecciona a los 6 representantes del estado.

En resumen, en Nuevo León la Olimpiada de Matemáticas consta de 4 etapas:

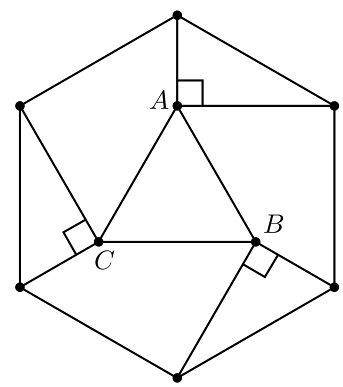
- Examen Abierto (donde participan aproximadamente 1,500 estudiantes).
- Examen Selectivo (100 seleccionados).
- Examen Semi-Final (30 seleccionados).
- Examen Final (16 finalistas).

A continuación presentamos el Examen Abierto en el nivel Secundarias de la 29^a Olimpiada de Matemáticas en Nuevo León, el cual se aplicó el último sabado de mayo de 2015. Los alumnos tuvieron 90 minutos para resolverlo.

Problema 1. Randy tiene 13 años más que Víctor. Francisco es 5 años mayor que Víctor. Si Randy tiene el doble de la edad de Francisco, ¿cuántos años tiene Víctor?

Problema 2. Nayeli compra plátanos cada 2 días, manzanas cada 3 días, naranjas cada 13 días y kiwis cada 12 días. ¿Cuál es la mayor cantidad de días al año en que compra todas las frutas en un mismo día?

Problema 3. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular cuya área es 16. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?



Problema 4. Dos números enteros positivos forman una pareja ganadora si al multiplicarlos el resultado es 2015. ¿Cuántas parejas ganadoras existen?

Problema 5. En una fiesta hay 9 niños, los cuales se sientan en sillas colocadas en 3 filas, cada una con 3 sillas. Si cada niño le da un regalo a los niños que están más cerca: a su derecha, izquierda, al frente y atrás. ¿Cuántos regalos se dieron?

Problema 6. A Carmen se le perdió su cadenita. La cadenita estaba formada por bolitas de oro. Encontró la mitad de las bolitas en el piso del baño, la cuarta parte en la bolsa de su pantalón, la sexta parte se le perdió. Si sabe que su perro se comió 9 bolitas, ¿cuántas bolitas tenía el collar?

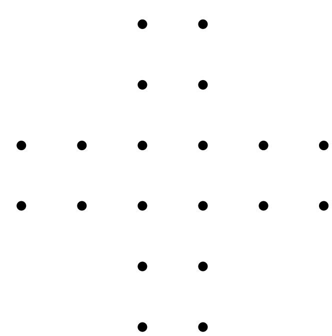
Problema 7. En una isla había 2015 hombres, algunos eran caballeros y siempre decían la verdad, el resto eran mentirosos y siempre mentían. Cada día uno de los hombres dejaba la isla y decía "En cuanto yo me vaya, el número de caballeros en la isla será el mismo que mentirosos". Después de 2014 días sólo quedó un caballero en la isla. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

Problema 8. En el salón de Gerardo hay menos de 100 personas. Todos tienen la misma edad excepto Saraí, que es un año mayor que los demás. Si la suma de todas las edades es 122, ¿cuántas personas hay en el salón de Gerardo?

Problema 9. En una lista se escribieron todos los números que se pueden formar revolviendo los dígitos $2, 0, 1, 5$ sin repetirlos. Los números quedaron escritos de mayor a menor. Luego se calcularon las diferencias entre cada dos números consecutivos de la lista, siempre restando a cada número el que le sigue en la lista. ¿Cuál es la mayor de estas diferencias?

Problema 10. Vivi tiene un collar que cambia de color según su estado de ánimo, cuando se pone triste se vuelve azul, cuando está feliz se vuelve rojo y cuando está asombrada se pone amarillo. Decidiste descubrir cuántas veces se ha puesto triste para ayudarle. El collar de Vivi se ha vuelto de color rojo 12 veces, la cantidad de veces que se ha vuelto azul es igual a la mitad de las veces que Vivi ha estado asombrada y el collar ha cambiado de color 45 veces. ¿Cuántas veces se ha puesto triste Vivi?

Problema 11. ¿Cuántos rectángulos pueden formarse en la figura con la condición que los vértices sean puntos de esta? (Los cuadrados también son rectángulos).



Problema 12. Un polígono regular tiene 27 diagonales. ¿Cuál es su número de lados?

Problema 13. La suma de dos números enteros es 100. Encuentra el mayor número que se pueda generar al multiplicar dichos números.

Problema 14. En la red social "feisbuk" hay 8 miembros, cada miembro manda una solicitud de amistad a otros 4 miembros, 2 personas se vuelven amigos cuando ambas se envían solicitudes de amistad. ¿Cuál es la menor cantidad de parejas de amigos que hay en esta red social?

Concurso Nacional 2015
29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Del 22 al 27 de noviembre de 2015 se llevó a cabo en Guadalajara, Jalisco, el Concurso Nacional de la 29ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados de la República.

Los 16 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Gustavo Meza García (Aguascalientes).
Axel Barba Razo (Baja California).
Arturo Arenas Esparza (Chihuahua).
Alonso Granados Baca (Chihuahua).
Antonio López Guzmán (Chihuahua).
Karol José Gutiérrez Suárez (Colima).
Victor Hugo Almendra Hernández (Distrito Federal).
Alfredo Alef Pineda Reyes (Estado de México).
Israel Bonal Rodríguez (Guanajuato).
José Ramón Tuirán Rangel (Hidalgo).
Leonardo Ariel García Morán (Jalisco).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Juan Carlos Castro Fernández (Morelos).
Alka Xavier Earathu (Morelos).
Kevin William Beuchot Castellanos (Nuevo León).
Juan Eduardo Castanedo Hernández (Zacatecas).

Los 9 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Marcela Cruz Larios (Campeche).
José Eduardo Payán Sosa (Chihuahua).
Ana Paula Jiménez Díaz (Distrito Federal).
Oriol Andreu Solé Pi (Distrito Federal).
Diego Hinojosa Téllez (Jalisco).
Víctor Antonio Domínguez Silva (Nuevo León).
José Ángel Rodríguez Leija (San Luis Potosí).
Ricardo de Jesús Balam Ek (Yucatán).
Manuel Guillermo Flota López (Yucatán).

Los 3 alumnos preseleccionados para la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) fueron:

Bruno Gutiérrez Chávez (Colima).
Fermín Méndez García (Durango).
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato).

Las 7 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil fueron:

Myriam Hernández Ketchul (Baja California Sur).
Marcela Cruz Larios (Campeche).
Ana Paula Jiménez Díaz (Distrito Federal).
Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco).
Alka Xavier Earathu (Morelos).
Jacqueline Lira Chávez (Morelos).
Violeta Alitzel Martínez Escamilla (Morelos).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 29^a OMM.

1. Chihuahua.
2. Distrito Federal.
3. Morelos.
4. Jalisco.
5. Nuevo León.
6. Guanajuato.
7. Yucatán.
8. Zacatecas.
9. Sinaloa.
10. San Luis Potosí.

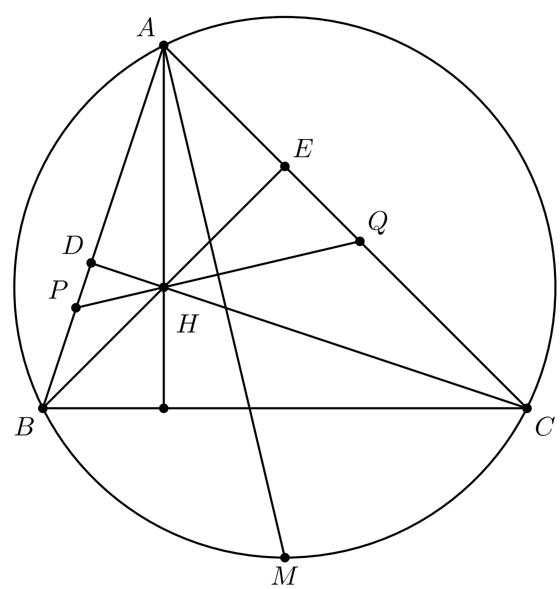
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó Copa "**Tlaquepaque**", y fue ganado por Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Tlaxcala y Zacatecas, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional 2015. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo y sea H su ortocentro. Sea PQ un segmento que pasa por H con P en AB, Q en AC y tal que $\angle PHB = \angle CHQ$. Finalmente en el circuncírculo del triángulo ABC, considera M el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Muestra que $MP = MQ$.

(Problema sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

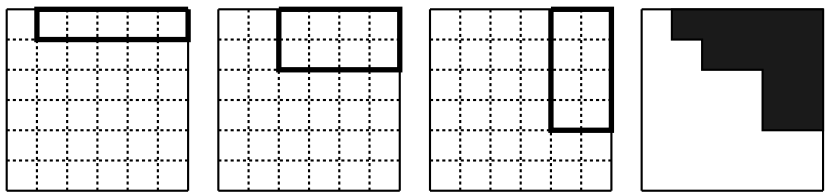
Solución de Diego Hinojosa Téllez. Denotemos por D y E a los pies de las alturas del triángulo ABC desde C y B, respectivamente. Los ángulos $\angle DHP$ y $\angle CHQ$, son opuestos por el vértice y $\angle CHQ = \angle PHB$, de modo que $\angle DHP = \angle PHB$. Denotaremos por α al valor de este ángulo. En el triángulo DHP observamos que $\angle DPQ = 90^\circ - \alpha$. De manera análoga, usando el triángulo HEQ observamos que $\angle EQP = 90^\circ - \alpha$.



Como $\angle AQP = \angle APQ$, se sigue que $AP = AQ$ y $\angle PAQ = 2\alpha$. Es un hecho conocido que la bisectriz de un ángulo corta al arco que abarca en su punto medio, de modo que la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ pasa por M. Sin embargo, esta bisectriz es mediatriz de PQ puesto que el triángulo PAQ es isósceles con $PA = AQ$. Como M está en la mediatriz de PQ, concluimos que $MP = MQ$.

Problema 2. Sea n un entero positivo y k un entero entre 1 y n. Se tiene un tablero de $n \times n$ color blanco. Se hace el siguiente proceso. Se dibujan k rectángulos con lados de longitud entera, con lados paralelos a los lados del tablero y tales que su esquina superior derecha coincide con la del tablero. Luego, estos k rectángulos se rellenan de negro. Esto deja una figura blanca en el tablero. ¿Cuántas figuras blancas diferentes podemos obtener, que no se puedan obtener haciendo el proceso con menos de k rectángulos?

Nota. A continuación se muestra un ejemplo para un tablero de 6×6. *Se dibujan* 3 *rectángulos, uno de* 1×5, *uno de* 2×4 *y uno de* 4×2, *para obtener la figura blanca indicada en el tablero de la derecha.*



(Problema sugerido por David Guadalupe Torres Flores)

Solución de Marcela Cruz Larios. Demostraremos que la cantidad de figuras distintas blancas que se pueden hacer para cierto k y no para valores menores es igual a $\binom{n}{k}^2$.
Llamemos "picos" a los vértices de los rectángulos que no quedan sobre los lados del cuadrado de $n \times n$. Ya que cada rectángulo tiene 4 vértices y 3 de ellos coinciden con los lados del cuadrado, cada rectángulo tiene solo un pico. Por tanto, si una figura negra tiene z picos, es imposible construirla con menos de z rectángulos.
Por otro lado, si una figura negra tiene menos de z picos, sí es posible construirla con menos de z rectángulos. Para ello, tomamos cada uno de los picos y usamos el rectángulo determinado por este y la esquina superior de la cuadrícula. Así, las figuras negras construidas con k rectángulos que son imposibles de construir con menos de k rectángulos son aquellas que tienen precisamente k picos.
Si dibujamos k rectángulos, la única forma en que la figura negra no tendrá k picos es cuando al menos un pico "opaca" a otro, es decir, el rectángulo determinado por uno de los picos contiene completamente al rectángulo determinado por el otro. Por lo tanto, los k rectángulos deben ser de manera que ninguno quede completamente contenido dentro de otro. Esto lo podemos hacer al escoger k diferentes bases y k diferentes alturas, las cuales pueden ser desde 1 hasta n.
Sin embargo, hay que tener cuidado al decidir qué altura corresponde a cada una de las bases, para evitar que un rectángulo pueda quedar contenido dentro de otro. Si a_1, a_2 son las alturas y b_1, b_2 las bases, tendremos respectivamente: $a_1 = a_2$ y $b_1 < b_2$, $a_1 < a_2$ y $b_1 = b_2$, o $a_1 < a_2$ y $b_1 < b_2$. Lo anterior se puede resumir en dos desigualdades: $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$.
Por tanto, una vez seleccionadas las k alturas diferentes y las k bases diferentes, emparejamos la mayor altura con la menor base y así sucesivamente. Es decir, si las alturas son: $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ y las bases $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$, entonces los rectángulos tendrán dimensiones:

$$(a_1, b_k), (a_2, b_{k-1}), (a_3, b_{k-2}), \ldots, (a_k, b_1),$$

que es lo mismo que dibujar todas las alturas de menor a mayor y las bases de mayor a

menor. De esta manera nos aseguramos que cada rectángulo no queda contenido dentro de ninguno de los otros.
Dado que seleccionamos k alturas entre n valores posibles y k bases entre n valores posibles, el número total de elecciones será $\binom{n}{k}^2$.

Problema 3. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función la cual asigna a cada número entero positivo, un número entero positivo. Supón que f satisface las siguientes dos condiciones:
a) $f(1) = 1$.
b) Para todos a, b enteros positivos, se cumple que

$$f(a + b + ab) = a + b + f(ab).$$

Encuentra el valor de $f(2015)$.

(Problema sugerido por José Antonio Gómez Ortega)

Solución de Arturo Arenas Esparza. Sea f una función que cumple con las condiciones del problema. Sustituyendo $(a, 1)$, $(a, 2)$ y $(a, 3)$, con a un número natural, en la ecuación de la condición b), obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(a \cdot 1 + a + 1) &= f(2a + 1) = f(a) + a + 1, && (9)\\ f(a \cdot 2 + a + 2) &= f(3a + 2) = f(2a) + a + 2, && (10)\\ f(a \cdot 3 + a + 3) &= f(4a + 3) = f(3a) + a + 3, && (11) \end{aligned}$$

respectivamente.

Por (9), $f(4a + 3) = f(2(2a + 1) + 1) = f(2a + 1) + (2a + 1) + 1$. Igualamos la ecuación anterior con (11) y nos queda $f(3a) + a + 3 = f(2a + 1) + (2a + 1) + 1$.
Al despejar el último resultado, tenemos que $f(3a) = f(2a + 1) + a - 1$. Por (9) podemos reemplazar $f(2a + 1)$ para obtener que $f(3a) = (f(a) + a + 1) + a - 1$. Entonces,

$$f(3a) = f(a) + 2a. \tag{12}$$

Ahora, si sustituimos $(6a + 4, 1)$, con a un número natural, en la ecuación de la condición b), tenemos $f((6a+4)(1)+(6a+4)+1) = f(12a+9) = f(6a+4)+(6a+4)+1$.
Luego por (12) tenemos que $f(12a + 9) = f(3(4a + 3)) = f(4a + 3) + 2(4a + 3)$.
Entonces, si igualamos $f(12a + 9)$ en las dos últimas ecuaciones, obtenemos que $f(12a + 9) = f(4a + 3) + 8a + 6 = f(6a + 4) + 6a + 5$. Al despejar, resulta que

$$f(6a + 4) = f(4a + 3) + 2a + 1. \tag{13}$$

Notemos que si $f(a + b) = f(a) + b$ entonces $f(a + b) = a + b \Leftrightarrow f(a) = a$. Si aplicamos esta observación a las ecuaciones (9), (10), (12) y (13), obtenemos que para cada número natural a,

$$f(2a+1)=2a+1 \quad \Leftrightarrow \quad f(a)=a. \tag{14}$$
$$f(3a+2)=3a+2 \quad \Leftrightarrow \quad f(2a)=2a. \tag{15}$$
$$f(3a)=3a \quad \Leftrightarrow \quad f(a)=a. \tag{16}$$
$$f(6a+4)=6a+4 \quad \Leftrightarrow \quad f(4a+3)=4a+3. \tag{17}$$

Veamos que los números $2a+1$, $3a+2$, $3a$, $6a+4$, con a un número natural, cubren todas las congruencias módulo 6 de los números naturales, excepto por 1, 2 y 4 (que implicarían que $a=0$, que no es natural). Si aplicamos las respectivas relaciones (14), (15), (16) y (17), tenemos que $f(2)=2 \Leftrightarrow f(2\cdot 2+1)=5 \Leftrightarrow f(5\cdot 3)=15 \Leftrightarrow f(7\cdot 2+1)=15 \Leftrightarrow f(7)=7 \Leftrightarrow f(2\cdot 3+1)=7 \Leftrightarrow f(3)=3 \Leftrightarrow f(2\cdot 1+1)=3 \Leftrightarrow f(1)=1$, que sí se cumple. Además, si repetimos un procedimiento similar obtenemos que $f(4)=4 \Leftrightarrow f(2\cdot 4+1)=9 \Leftrightarrow f(3\cdot 3)=9 \Leftrightarrow f(3)=3 \Leftrightarrow f(1)=1$. Por lo tanto, sabemos que para cualquier número $b>1$, existe otro número natural $c<b$ tal que $f(b)=b \Leftrightarrow f(c)=c$. Es decir, para cualquier número natural n eventualmente llegamos por (14), (15), (16) y (17), o por los casos especiales para 2 y 4, a que $f(n)=n \Leftrightarrow f(1)=1$, lo cual es cierto. Por lo tanto, $f(n)=n$ para todo número natural n. En particular, $f(2015)=2015$.

Problema 4. Sea n un entero positivo. María escribe en un pizarrón las n^3 ternas que se pueden formar tomando tres enteros, no necesariamente distintos, entre 1 y n, incluyéndolos. Después, para cada una de las ternas, María determina el mayor (o los mayores, en caso de que haya más de uno) y borra los demás. Por ejemplo, en la terna $(1,3,4)$ borrará los números 1 y 3, mientras que en la terna $(1,2,2)$ borrará solo el número 1.
Muestra que, al terminar este proceso, la cantidad de números que quedan escritos en el pizarrón no puede ser igual al cuadrado de un número entero.

(Problema sugerido por Daniel Perales Anaya)

Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes. Primero vamos a encontrar la cantidad de números escritos en el pizarrón en términos de n. Para ello, se dividirán las ternas en 4 tipos distintos.

1). (a,b,c) *con* a*,* b *y* c *todos distintos*. Por la regla del producto, hay $n(n-1)(n-2)$ ternas posibles de esta forma por el principio del producto. Después de hacer el proceso vamos a dejar exactamente uno de estos tres números. Por lo que las ternas de esta forma contribuyen con $n(n-1)(n-2)$ de los números que aparecen en el pizarrón al final.

2). (a,a,b), (a,b,a) *o* (b,a,a) *con* $a>b$. Dados a y b con $a>b$, hay $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ formas de escoger a y b, y tres formas de ordenar los elementos en la terna. Entonces, por la regla del producto hay $\frac{3n(n-1)}{2}$ ternas posibles de esta forma. Cuando se realiza el proceso en cada una de estas ternas quedan dos números. Por lo tanto, las ternas de este caso contribuyen con $3n(n-1)$ números al final, pues cada terna contribuye con dos números.

3). (b, b, a), (b, a, b) *o* (a, b, b) *con* $a > b$. Al igual que en el caso anterior hay $\frac{n(n-1)}{2}$ ternas posibles de esta forma. Cada una contribuye con exactamente un número después del proceso. Entonces, las ternas de este caso contribuyen con $\frac{3n(n-1)}{2}$ números al final.

4). (a, a, a). Hay n ternas de esta forma y de cada una dejamos 3 números después del proceso. Por lo tanto, las ternas de esta forma contribuyen con $3n$ números al final.

Por lo tanto, juntando lo obtenido en los cuatro casos anteriores, hay exactamente,

$$\begin{aligned} & n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + \frac{3n(n-1)}{2} + 3n \\ = \quad & n\left[(n-1)(n-2) + 3(n-1) + \frac{3(n-1)}{2} + 3\right] \\ = \quad & n\left[n^2 + 2 + \frac{3(n-1)}{2}\right] = n\left(\frac{2n^2+3n+1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

números escritos en el pizarrón después del proceso.

Supongamos, por contradicción, que la expresión anterior es un cuadrado perfecto para alguna n. Dividimos la demostración en dos casos de acuerdo a la paridad de n.
Si n es par, podemos escribir este número n como $2k$ para un entero positivo k. Entonces, asumimos que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)(4k+1)}{2} = k(2k+1)(4k+1)$$

es un cuadrado perfecto.
En lo que sigue, denotaremos por (a, b) al máximo común divisor de los enteros positivos a y b. Observamos que $(k, 2k+1) = (k, 1) = 1$, $(k, 4k+1) = (k, 4k+1-4k) = (k, 1) = 1$ y $(2k+1, 4k+1) = (2k+1, 4k+1-4k-2) = (2k+1, -1) = 1$. Por lo tanto, los números k, $2k+1$ y $4k+1$ son primos relativos dos a dos. Además, como su producto es un cuadrado perfecto, cada uno de ellos es un cuadrado perfecto.
Como k es un cuadrado perfecto, $4k$ también es un cuadrado perfecto. Pero $4k+1$ es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, $4k$ y $4k+1$ son enteros consecutivos y ambos son cuadrados perfectos. Esto es una contradicción porque los únicos cuadrados perfectos consecutivos son 0 y 1. [3]
Si n es impar lo podemos escribir como $2k+1$ para algún entero no negativo k. Tenemos que

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)(4k+3)}{2} = (k+1)(2k+1)(4k+3)$$

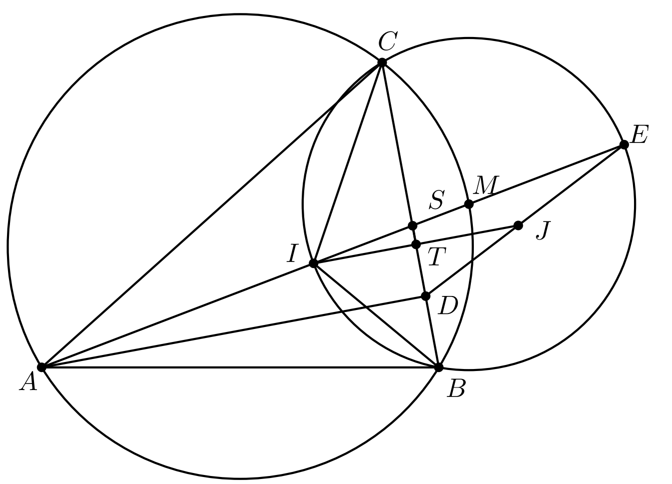
[3] Si a y b son enteros no negativos y a^2 y b^2 son cuadrados perfectos y enteros consecutivos, entonces $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 1$. Por tanto, $a - b = a + b = 1$. Es decir, $a = 1$ y $b = 0$.

es un cuadrado perfecto.
Observamos que $(k+1, 2k+1) = (k+1, 2k+1-2(k+1)) = (k+1, -1) = 1$, $(k+1, 4k+3) = (k+1, 4k+3-4(k+1)) = (k+1, -1) = 1$ y $(2k+1, 4k+3) = (2k+1, 4k+3-2(2k+1)) = (2k+1, 1) = 1$. Por lo que los números $k+1$, $2k+1$ y $4k+1$ son primos relativos dos a dos. Además, como su producto es un cuadrado perfecto, cada uno de ellos es un cuadrado perfecto.
Como $k+1$ es un cuadrado perfecto, entonces $4(k+1) = 4k+4$ también es un cuadrado perfecto. Pero $4k+3$ es un cuadrado perfecto, de modo que $4k+3$ y $4k+4$ son enteros consecutivos y ambos son cuadrados perfectos. Esto es una contradicción porque los únicos cuadrados perfectos consecutivos son 0 y 1. Concluimos que $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ nunca es un cuadrado perfecto para cualquier entero positivo n.

Problema 5. Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Muestra que los puntos D, J y E son colineales.

(Problema sugerido por Eduardo Velasco Barreras)

Solución de Alfredo Alef Pineda Reyes. Sea M la intersección de AI con el circuncírculo del triángulo ABC, sea S la intersección de AI con BC, y sea T la intersección de IJ con BC.



Como J es la reflexión de I sobre BC, tenemos que IT es perpendicular a BC y $TJ = IT$, es decir T es el punto medio de IJ. Dado que $\angle BAM = \angle MAC = \frac{\angle BAC}{2}$ tenemos que M es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A. Además, tenemos que

$$\angle MCI = \angle MCB + \angle BCI = \angle MAB + \angle BCI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BCA}{2},$$

donde la penúltima igualdad se tiene porque $\angle MCB$ y $\angle MAB$ subtienden el mismo arco.
Por otro lado, por ángulos externos en el triángulo AIC se tiene que

$$\angle MIC = \angle IAC + \angle ACI = \frac{\angle BAC}{2} + \frac{\angle BCA}{2}.$$

Por lo tanto, $\angle MCI = \angle MIC$. Luego, $MI = MC$. Puesto que M es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ se tiene que $MB = MC$. Entonces, M equidista de I, B y C, de donde se sigue que M es el circuncentro del triángulo BIC.
Con esto se tiene que IE es un diámetro y $ME = IM$. Esto quiere decir que M es el punto medio de IE. Como ya vimos que T es el punto medio de IJ y M el punto medio de IE, por el teorema de Tales, TM es paralela a JE.
Ahora notemos que por el cíclico $ABMC$ se tiene que $\angle ABS = \angle CMS$. Y por ángulos opuestos por el vértice, $\angle ASB = \angle MSC$. Entonces, los triángulos ABS y CMS son semejantes, de donde se sigue que $\frac{BS}{BA} = \frac{MS}{MC}$.
Recordemos que M es el centro de la circunferencia por B, C, I y E, entonces $MC = ME$. Si sustituimos esto en la igualdad anterior y utilizamos que $\frac{IS}{AI} = \frac{BS}{BA}$ (por el teorema de la bisectriz en el triángulo ABS), se concluye que

$$\frac{IS}{AI} = \frac{MS}{ME}.$$

Finalmente, notemos que como AD es perpendicular a BC por definición y JI también es perpendicular a BC, entonces, AD y JI son paralelas. Luego, por el teorema de Tales se tiene que $\frac{IS}{AI} = \frac{TS}{TD}$. Utilizando esta igualdad y la demostrada en el párrafo anterior se concluye que

$$\frac{MS}{ME} = \frac{TS}{TD},$$

que por el teorema de Tales implica que TM es paralela a DE. Entonces, tanto D como J están sobre una paralela a TM que pasa por E. Esto quiere decir que D, J y E son colineales, como se quería probar.

Problema 6. Sea n un entero positivo y sean $d_1, d_2, \ldots, d_k$ todos sus divisores positivos ordenados de menor a mayor. Considera el número

$$f(n) = (-1)^{d_1} d_1 + (-1)^{d_2} d_2 + \cdots + (-1)^{d_k} d_k.$$

Por ejemplo, los divisores positivos de 10 son $1, 2, 5$ y 10, así que

$$f(10) = (-1)^1 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 2 + (-1)^5 \cdot 5 + (-1)^{10} \cdot 10 = 6.$$

Supón que $f(n)$ es una potenciaa de 2. Muestra que si m es un entero mayor que 1, entonces m^2 no divide a n.

(Problema sugerido por Irving Daniel Calderón Camacho)

Solución de Leonardo Ariel García Morán. Notemos que si n es impar, todos sus divisores son impares, luego el coeficiente $(-1)^{d_i} = -1$ para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$.

Esto implica que

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{d_i} d_i = -\sum_{i=1}^{k} d_i < 0. \tag{18}$$

En particular si n es impar, $f(n)$ no es potencia de 2. Ahora veamos el siguiente lema.
Lema 1. Si $n = 2^a b$ con b impar, entonces

$$f(n) = (2^{a+1} - 3)g(b)$$

donde $g(b)$ es la suma de los divisores positivos de b.
Probemos esto por indución sobre a. El caso base, $a = 0$, es que $f(b) = f(2^0 b) = (2^1 - 3)g(b) = -g(b)$, lo cual es la identidad (18).
Ahora mostraremos que para $n = 2^{k+1}b$ se cumple la identidad dado que es válida para $2^k b$. Por la definición de f y la hipótesis de inducción tenemos que,

$$\begin{aligned} f(n) &= \sum_{d|n} (-1)^d d = \sum_{d|2^k b} (-1)^d d + \sum_{\substack{d'|2^{k+1}b \\ d' \nmid 2^k b}} (-1)^{d'} d' = f(2^k b) + \sum_{\substack{d|2^{k+1}b \\ d \nmid 2^k b}} (-1)^d d \\ &= (2^{k+1} - 3)g(b) + \sum_{\substack{d|2^{k+1}b \\ d \nmid 2^k b}} (-1)^d d \end{aligned}$$

Veamos que todo divisor de n es de la forma $2^r b'$ donde $0 \leq r \leq k+1$ y b' es un divisor de b. Si $r \leq k$, entonces $2^r b' \mid 2^k b$. Luego, $\sum_{d|2^{k+1}bd\nmid 2^k b} (-1)^d d$ es una suma sobre todos los divisores de n que cumplen $r = k+1$. En particular, todos estos diviosres son pares, pues la potencia de 2 que los divide es al menos 1. De aquí se sigue que $(-1)^d = 1$ para cada uno de los divisores involucrados en la suma.
Con esto se tiene que

$$\sum_{\substack{d|2^{k+1}b \\ d \nmid 2^k b}} (-1)^d d = \sum_{b'|b} 2^{k+1} b' = 2^{k+1} \sum_{b'|b} b = 2^{k+1} g(b)$$

lo cual al sustituir en la ecuación anterior produce que

$$f(n) = (2^{k+1} - 3)g(b) + 2^{k+1}g(b) = (2 \cdot 2^{k+1} - 3)g(b) = (2^{k+2} - 3)g(b),$$

con lo cual queda establecido el lema.
Ahora supongamos que $f(n) = (2^{a+1} - 3)g(b)$ es potencia de 2. En particular, $2^{k+1} - 3$ debe ser potencia de 2. Luego, $2^{k+1} - 3 = 2^j$ de donde se tiene que $2^{k+1} - 2^j = 3$. Si $j \geq 1$ el lado izquierdo sería par, lo cual es imposible puesto que 3 es impar. Por lo tanto, $j = 0$, de donde se tiene que $2^{k+1} - 1 = 3$. Esto implica que $k = 1$. Por lo tanto, $n = 2b$ con b impar. Por el Lema 1 tenemos que $f(n) = (2^2 - 3)g(b) = g(b)$. Esto implica que $g(b)$ es potencia de 2.
Sea $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ la factorización en primos de b. Entonces, los divisores de b son todos los productos de la forma $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$, con $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, para $i = 1, 2, \ldots, m$. La suma de todos estos productos está dada por

$$\begin{aligned} g(b) &= \sum_{b'|b} b' = (1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots \\ &\quad \cdots(1+p_m+p_m^2+\cdots+p_m^{\alpha_m}) \end{aligned}$$

pues del lado derecho aparece cada producto de la forma $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\cdots p_m^{\beta_m}$, con $0\leq\beta_i\leq\alpha_i$ para $i=1,2,\ldots,m$ exactamente una vez. Por lo tanto $g(b)$ es potencia de 2 si y solo si $1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}=\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_1-1}$ es potencia de 2, para cada $i=1,2,\ldots,m$. Para analizar estas expresiones demostremos el siguiente lema.

Lema 2. Sean a, p y q enteros positivos con p y q primos, $a\geq 2$ y tales que p divide a $1+a+a^2+\cdots+a^{q-1}=\frac{a^q-1}{a-1}$. Entonces $p=q$ o $q\mid p-1$.

Como $p\mid\frac{a^q-1}{a-1}$, tenemos que $p\mid\frac{a^q-1}{a-1}\cdot(a-1)$, esto es $p\mid a^q-1$. Entonces $a^q\equiv 1 \pmod p$. Luego, a es primo relativo con p. Sea g el menor entero que cumple que $a^g\equiv 1\pmod p$. Por ser g minímo se tiene que $g\mid q$, de donde $g=1$ o $g=q$ (pues q es primo). Si $g=1$ se tiene que $a\equiv 1\pmod p$. Luego,

$$0\equiv 1+a+a^2+\cdots+a^{q-1}\equiv\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{q}=q \pmod p,$$

es decir, $p\mid q$.

Por otro lado si $g=q$, entonces $q\mid p$. Como p es primo, esto implica que $p=q$. Con lo cual queda establecido el lema.

Ahora supongamos que $a>1$ y $c>1$ son tales que $\frac{a^c-1}{a-1}$ es potencia de 2. Si $c=qc'$ con q un primo, entonces

$$\frac{a^c-1}{a-1}=\frac{(a^q-1)((a^q)^{c'-1}+(a^q)^{c'-2}+\cdots+(a^q)^1+1)}{a-1}.$$

Luego, $\frac{a^q-1}{a-1}$ tiene que ser una potencia de 2. En particular, $2\mid\frac{a^q-1}{a-1}$. Por el Lema 2, se concluye que $q=2$ o $q\mid 2-1=1$. Sin embargo, el segundo caso es imposible pues q es primo. Luego, $q=2$. Puesto que esto fue para cualquier q divisor primo de c, se debe tener que $c=2^r$ para algún entero $r\geq 1$. Luego, la expresión

$$\frac{a^c-1}{a-1}=\frac{a^{2^r}-1}{a-1}=(a^{2^{r-1}}+1)(a^{2^{r-2}}+1)\cdots(a^2+1)(a+1)$$

es una potencia de 2, donde la última igualdad es una expresión conocida. Si $r\geq 2$, en particular, $a+1=2^x$ y $a^2+1=2^y$ para algunos x,y enteros. Por lo tanto, $a^2+1=(2^x-1)^2+1=2^{2x}-2^{x+1}+2=2(2^{2x-1}-2^x+1)$. Si x es mayor o igual que 2, se tendría que $2^{2x-1}-2^x$ es par. Luego, $(2^{2x-1}-2^x+1)$ es impar mayor que 1 y a^2+1 no puede ser potencia de 2. Luego, el único caso es que $a+1=2$ (pues $a\geq 2$). Es decir, $a=1$. Sin embargo, esto es una contradicción (pues $a\geq 2$). Por lo tanto, $r=1$ de donde $c=2$.

Si aplicamos este análisis a $1+p_i+p_i^2+\cdots+p_i^{\alpha_i}=\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$ para cada $i=1,2,\ldots,m$, se deduce que $\alpha_i+1=2$, de donde $\alpha_i=1$ para $i=1,2,\ldots,m$. Por lo tanto,

$$n=2p_1p_2p_3\cdots p_m$$

con p_i primos impares distintos, el cual es un número libre de cuadrados.

Problemas y Soluciones de Concursos Internacionales

Competencia Internacional de Matemáticas 2015

Del 26 de julio al 2 de agosto de 2015 se llevó a cabo la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) en Changchun, China. Esta competencia mayormente asiática pero con representantes de los cinco continentes llegó a su décimo sexta edición con un total de 308 participantes provenientes de 29 países.

Este concurso tiene como principales objetivos: el apoyo a la juventud, la búsqueda de nuevos talentos, la cooperación matemática internacional y el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas.

Los participantes de esta competencia son alumnos de secundaria menores de 16 años y participan por equipos de 4 integrantes. En la competencia hay 2 exámenes, uno individual que consiste de 15 problemas y de un examen por equipo que consiste de 10 problemas que resuelven entre los 4 integrantes del equipo. Las duraciones de esos exámenes son de 2 horas y una hora, respectivamente.

A esta competencia se asiste por invitación. Cada país puede llevar a lo más cuatro equipos si han sido sede de la competencia, y a lo más dos equipos si no han sido sede, como es el caso de México. En el año 2015, México participó por sexta ocasión y por quinto año consecutivo participó con dos equipos.

Uno de los equipos estuvo conformado por Maximiliano Sánchez Garza (Nuevo León), Oriol Andreu Solé Pi (Distrito Federal), Rodrigo Jesús Pantoja Vázquez y Manuel Guillermo Flota López (ambos de Yucatán). Los profesores responsables de este equipo fueron Fernando Campos García (líder) y Pedro Sánchez Salazar (tutor). Maximiliano y Oriol obtuvieron medalla de bronce en el examen individual y los 4 obtuvieron una medalla de bronce en el examen por equipo.

El otro equipo estuvo conformado por Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa), Diego Hinojosa Téllez (Jalisco), Miguel Yair Márquez Reyes (Yucatán) y Víctor Antonio Domínguez

Silva (Nuevo León). Los profesores responsables del equipo fueron Hugo Villanueva Méndez (líder) y Julio Rodríguez Hernández (tutor). En el examen individual, Isaac obtuvo medalla de bronce y Diego, Yair y Víctor obtuvieron mención honorífica.

Ambos equipos quedaron por encima de equipos representantes de China, Rumania, Corea, Irán, India, Tailandia, Australia, Malasia y Holanda, entre otros.

La competencia se hace cada vez más difícil, pero esta generación de dignos representantes mexicanos ha puesto el nombre de nuestro país en alto y su participación motivará a futuras generaciones de estudiantes deseosos de profundizar en el mundo de las matemáticas.

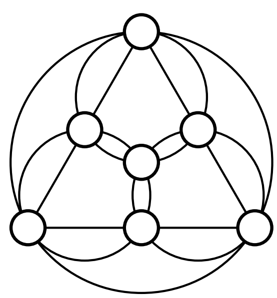
A continuación presentamos los problemas y las soluciones de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2015 en la que participó México.

Examen individual

Sección A

En esta sección hay 12 preguntas. Cada respuesta correcta vale 5 puntos.

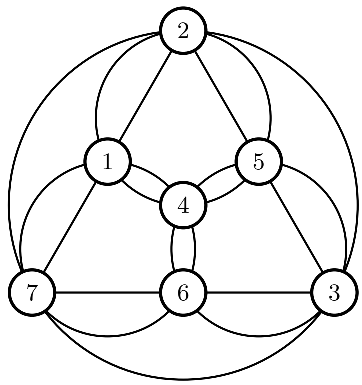
Problema 1. En el diagrama de abajo se desea colocar los enteros del 1 al 7, sin repetir, en los 7 círculos pequeños, de tal manera que la suma de los números escritos en cada una de las 4 circunferencias sea un múltiplo de 6. ¿Cuál es el número que debe ser colocado en el círculo pequeño del centro del diagrama?



Solución. Sea x el número buscado. Cada círculo pequeño está sobre dos círculos, excepto el círculo central pequeño que está sobre 3 círculos. Entonces, la suma de los números en los círculos pequeños que están sobre los círculos medianos y el círculo grande es

$$2(1+2+\cdots+7)+x=56+x.$$

Como este número es múltiplo de 6, la única posibilidad es $x=4$. El siguiente diagrama muestra que es posible un acomodo con $x=4$.



Problema 2. Todos los dígitos del entero positivo a son distintos. Los dígitos del número a son reacomodados para formar el número b. Si todos los dígitos del número $a-b$ son 1, ¿cuál es el máximo valor posible de $a-b$?

Solución. Denotemos por $S(x)$ a la suma de los dígitos del número x. Entonces, $S(a)-S(b)=0$. Por el criterio de divisibilidad del 9, sabemos que $a \equiv S(a) \pmod 9$ y $b \equiv S(b) \pmod 9$. Se sigue que $a-b \equiv S(a)-S(b) \pmod 9$, esto es, la diferencia $a-b$ es múltiplo de 9. Como todos los dígitos son unos, el número de dígitos también es múltiplo de 9. No puede ser mayor que 9 ya que los dígitos de a son distintos. Por lo tanto, la diferencia es 111111111. Esta diferencia se puede obtener con los números $a=987654320$ y $b=876543209$.

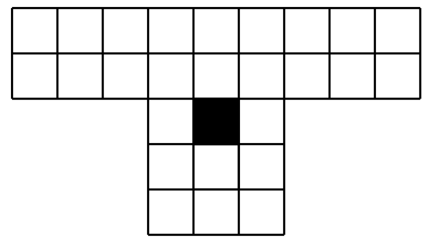
Problema 3. Se tiene un conjunto de 21 enteros distintos, 2015 es el mayor número del conjunto y 101 es otro de los números del conjunto. La suma de cualesquiera 11 números en el conjunto es mayor que la suma de los 10 restantes. Encontrar la mediana del conjunto, es decir, el número del conjunto que es mayor que 10 números del conjunto y menor que 10 números del conjunto.

Solución. Supongamos que los números son $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{21}$. De acuerdo con el problema, tenemos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{21}.$$

Luego, $a_1 > (a_{12}-a_2)+(a_{13}-a_3)+\cdots+(a_{21}-a_{11}) \geq 10+10+\cdots+10 = 100$, de donde se sigue que $a_1 \geq 101$. Como 101 es uno de los números, debemos tener que $a_1 = 101$. Más aún, $a_{12}-a_2 = a_{13}-a_3 = \cdots = a_{21}-a_{11} = 10$. Esto significa que los números $a_2, \ldots, a_{21}$ son 20 enteros consecutivos y el mayor de ellos es el número 2015. Por lo tanto, los números del conjunto son $101, 1996, 1997, 1998, \ldots, 2014, 2015$, y la mediana es 2005.

Problema 4. La cuadrícula de abajo consiste de 26 cuadrados alrededor de un hoyo negro. ¿Cuántos rectángulos diferentes hay en la cuadrícula si el hoyo negro no puede formar parte de ningún rectángulo?



Solución. Consideremos primero el rectángulo de 2×9 de arriba. Cualquier rectángulo contenido en él se forma al elegir 2 de las 3 líneas horizontales y 2 de las 10 líneas verticales para formar sus lados. Luego, de estos rectángulos hay $\binom{3}{2}\binom{10}{2} = 3\cdot 45 = 135$. De manera análoga, hay $\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2} = 3\cdot 6 = 18$ rectángulos contenidos en el rectángulo de 2×3 de abajo. Los rectángulos restantes provienen de las dos columnas verticales adyacentes al hoyo, y deben contener un cuadrado junto al hoyo. Podemos agregar $0, 1$ o 2 cuadrados abajo del hoyo, y 0, 1 o 2 cuadrados arriba de él. Esto nos da $3\times 3 = 9$ rectángulos adicionales por columna. Por lo tanto, en total hay $135+18+2\cdot 9 = 171$ rectángulos que no contienen al hoyo.

Problema 5. Se transportan papas desde una granja hacia la ciudad utilizando una camioneta que viaja a 65 km/h y un burro que viaja a 5 km/h. En cierto punto del camino, la camioneta se encuentra con una carreta que viaja hacia la ciudad a 13 km/h y le transfiere las papas, lo que le permite regresar por el camino y recoger las papas que transporta el burro para posteriormente llevarlas a la ciudad. Si la carreta y la camioneta se encuentran nuevamente en la ciudad, que está a 100 km de la granja, ¿cuánto tiempo estuvieron viajando las papas? (*Nota:* Las transferencias de papas son instantáneas).

Solución. Supongamos que el burro cubre x kilómetros y la carreta cubre y kilómetros. Entonces, la camioneta cubre un tramo de $100-x-y$ km dos veces, una de ida y otra de vuelta. Cuando la camioneta se encuentra con el burro, tenemos que $\frac{x+2(100-x-y)}{65} = \frac{x}{5}$, esto es, $7x+y = 100$. Cuando la camioneta regresa a la ciudad, al mismo tiempo que la carreta, tenemos que $\frac{y+2(100-x-y)}{65} = \frac{y}{13}$. Esto es, $x+3y = 100$. Si resolvemos el sistema de ecuaciones $7x+y = 100$ y $x+3y = 100$, obtenemos que $x = 10$ e $y = 30$. Luego, $100-x-y = 60$. Por lo tanto, las papas estuvieron viajando $\frac{100+2\cdot 60}{65} = \frac{44}{13}$ horas.

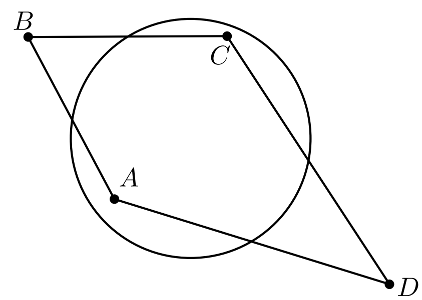
Problema 6. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (x, y) cumplen la ecuación $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{(x+1)y} = \frac{1}{2015}$?

Solución. Si desarrollamos la suma y simplificamos, la ecuación anterior es equivalente a la ecuación $2015(y+x+1+1) = y(x+1)$. Esto es, $xy-2015x-2014y = 2015\cdot 2$. Al sumar de ambos lados $2015\cdot 2014$ obtenemos,

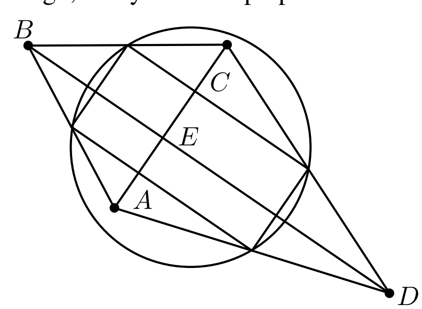
$$(x-2014)(y-2015) = 2015\cdot 2+2015\cdot 2014 = 2015\cdot 2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 31.$$

La cantidad de divisores positivos del número del lado derecho de la ecuación anterior es igual a $(5+1)(2+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 288$. Por lo tanto, el número de soluciones en los enteros positivos de la ecuación original es 288.

Problema 7. Los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA del cuadrilátero convexo $ABCD$ están en una circunferencia. Si $AB = 10$ cm, $BC = 11$ cm y $CD = 12$ cm, determinar la longitud del lado DA.



Solución. El cuadrilátero cuyos vértices son los puntos medios de los cuatro lados del cuadrilátero $ABCD$ siempre es un paralelogramo, ya que cada par de sus lados opuestos es paralelo a una de las diagonales de $ABCD$. Como la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico es $180°$, un paralelogramo inscrito en un círculo debe ser un rectángulo. Luego, AC y BD son perpendiculares.



Sea E el punto de intersección de AC y BD. Por el teorema de Pitágoras tenemos que,

$$AB^2 + CD^2 = EA^2 + EB^2 + EC^2 + ED^2 = BC^2 + DA^2.$$

Luego, $DA^2 = 10^2 + 12^2 - 11^2 = 123$ cm^2 y por lo tanto $DA = \sqrt{123}$ cm.

Problema 8. Los números de dos dígitos $\overline{ab}, \overline{cd}$ y $\overline{ad}$ cumplen que $(\overline{ab})^2 + (\overline{cd})^2 = (\overline{ad})^2$. Encontrar el mínimo valor posible para el número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$.

Solución. Tenemos que $(10a + b)^2 + (10c + d)^2 = (10a + d)^2$ es una ecuación equivalente a $20ab + b^2 + 100c^2 + 20cd = 20ad$. De aquí que b^2 es divisible por 10, lo que significa que $b = 0$. Luego, $5c^2 + cd = ad$. Como $5c^2 > 0$, se sigue que $d > 0$ y $a > c$. Por otra parte, $d(a - c)$ es divisible por 5. Si $d \neq 5$, entonces $a - c$ debe ser 5 y $c^2 = d$. Luego, $c = 1, 2$ o 3 y $(c, d, a) = (1, 1, 6), (2, 4, 7)$ y $(3, 9, 8)$. Si $d = 5$, entonces $a = c^2 + c$. Esto implica que $c = 1$ o 2 y, por lo tanto, $(c, a) = (1, 2)$ y $(2, 6)$. Por lo tanto, el valor mínimo buscado es 2015.

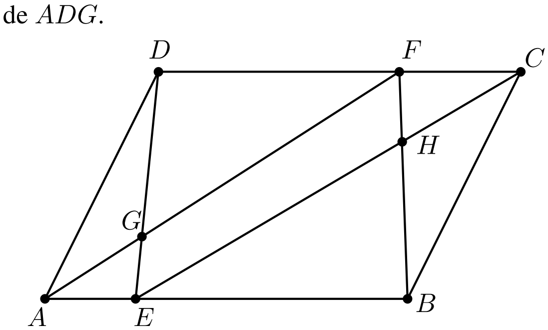
Problema 9. Se tienen fichas de 1×1 con lados de distinto color. El lado rojo es el opuesto al lado amarillo y el lado azul es el opuesto al lado verde. Se desea formar un tablero de 8×8 con 64 fichas, de tal manera que las fichas se toquen en lados que tienen el mismo color (las fichas se pueden rotar y voltear). ¿Cuántos tableros diferentes se pueden formar? (*Nota:* Rotaciones y reflexiones del tablero son considerados como tableros diferentes).

Solución. Hay 8 maneras de colocar una ficha sobre el cuadrado de la esquina superior izquierda. El cuadrado inmediatamente a su derecha, puede ser cubierto ahora de 2 maneras. Lo mismo sucede con los restantes cuadrados del primer renglón (el de más arriba) del tablero. El cuadrado inmediatamente abajo de la primera ficha puede ser cubierto de 2 maneras. Lo mismo sucede con los cuadrados restantes en la columna de más a la izquierda del tablero. El acomodo de las restantes fichas queda determinado ahora de manera única. Por lo tanto, hay $8 \cdot 2^7 \cdot 2^7 = 2^{17} = 131072$ tableros distintos.

Problema 10. Encontrar la suma de todos los enteros positivos que pueden ser expresados como $\sqrt{7p^n + 9}$ para algún entero positivo n y algún número primo p.

Solución. Sea a un entero de la forma buscada. Tenemos que $7p^n = a^2 - 9 = (a + 3)(a - 3)$. Luego, alguno de $a - 3$ o $a + 3$ debe ser múltiplo de 7. Entonces, podemos escribir $a = 7b \pm 3$ para algún entero positivo b. Entonces, $p^n = b(7b \pm 6)$. Si $b = 1$, entonces $p^n = 7 \pm 6$. De aquí que la única posibilidad es $n = 1$, $p = 13$ y $a = 10$. Si $b \neq 1$, entonces $b = p^m$ para algún entero positivo $m \leq n$. De aquí que p debe dividir a 6. Si $p = 2$, entonces $2^{n-m-1} = 7 \cdot 2^{m-1} \pm 3$. Por divisibilidad entre 2, $m = 1$. Luego, $n = 4$ y $a = 11$. Si $p = 3$, entonces $3^{n-m-1} = 7 \cdot 3^{m-1} \pm 2$. Luego, $m = 1$, $n = 4$ y $a = 24$. Por lo tanto, la suma buscada es $10 + 11 + 24 = 45$.

Problema 11. $ABCD$ es un paralelogramo, E es un punto en el segmento AB tal que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{4}$. F es un punto en el segmento DC; AF y DE se intersecan en G; CE y BF se intersecan en H. Si el área de $ABCD$ es 1 cm^2 y el área de BHC es $\frac{1}{8}$ cm^2, calcular el área de ADG.



Solución. Usaremos la notación [ ] para denotar área. Los triángulos HCF y HEB son semejantes, también lo son los triángulos GDF y GEA. Sean $k = \frac{BE}{CF}$ y $h = \frac{DF}{EA}$. Supongamos que $[HCF] = a$ cm^2 y $[GEA] = b$ cm^2. Como comparten alturas los triángulos, $[BCH]/[HCF] = HB/FH = BE/CF = k$. La penúltima igualdad es por la semejanza de los triángulos. Entonces, $[BCH] = ka$ cm^2. De manera análoga se obtiene que $[GEA] = hb$ cm^2. Ahora, por ser semejantes, $[HEB]/[HCF] = FC^2/EB^2$. Entonces, $[HEB] = k^2a$ cm^2 y $[ADG] = hb$ cm^2. Como $\frac{BE}{AB} = \frac{4}{5}$, tenemos que $(k+1)ka = [BCH] + [HEB] = [CBE] = \frac{4}{5}[ABC] = \frac{2}{5}$ cm^2. Como $ka = [BCH] = \frac{1}{8}$ cm^2, tenemos que $k + 1 = \frac{16}{5}$. Luego, $k = \frac{11}{5}$. De modo que $CF = \frac{1}{k}BE = \frac{5}{11}(\frac{4}{5}AB) = \frac{4}{11}AB$. Tenemos que $AE = \frac{1}{5}AB$ y $DF = CD - CF = \frac{7}{11}AB$. Se sigue que $h = \frac{35}{11}$ cm. Sabemos que $b(h+1) = [GEA] + [ADG] = [ADE] = \frac{1}{5}[ABC] = \frac{1}{10}$ cm^2. Luego, $b = \frac{11}{460}$ cm. Es decir, $[ADG] = bh = \frac{7}{92}$ cm^2.

Problema 12. Se tienen cinco enteros positivos distintos que tienen la propiedad que al sumar dos de ellos, posiblemente el mismo número consigo mismo, se pueden obtener exactamente nueve valores distintos. Encontrar el mayor entero que divide a la suma de cualesquiera cinco números que cumplen la propiedad.

Solución. Supongamos que los enteros son a, b, c, d y e, con $a < b < c < d < e$. Entonces,

$$2a < a + b < 2b < b + c < 2c < c + d < 2d < d + e < 2e.$$

Estas son las 9 sumas distintas. Ahora, $a + c$ no está en esta lista. Como $a + b < a + c < b + c$, debemos tener $a + c = 2b$. De manera análoga, $b + d = 2c$ y $c + e = 2d$. Sea $k = b - a$. Entonces, $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$ y $e = a + 4k$. Luego, $a+b+c+d+e = 5a+10k$ siempre es divisible por 5. Si los cinco números son $1, 2, 3, 4$ y 5, su suma es 15. Si los números son $2, 3, 4, 5$ y 6, su suma es 20. Ambas colecciones de números cumplen las condiciones del problema, entonces, ningún número mayor que 5 puede dividir a la suma de los cinco números. En conclusión, la respuesta es 5.

Sección B

Responde a las siguientes 3 preguntas escribiendo tu solución detallada. Cada pregunta vale 20 puntos.

Problema 1. Hallar la cantidad de enteros positivos de cinco dígitos que son cuadrados perfectos y en los que el dígito de las unidades y el dígito de las decenas son iguales.

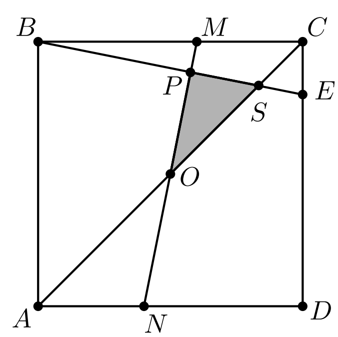
Solución. Si el número de cinco dígitos $\overline{abcdd}$ es un cuadrado perfecto, entonces $d \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Ahora $\overline{abcdd} = 100\overline{abc} + 11d$. Luego, cuando $\overline{abcdd}$ es divido entre 4, el residuo es el mismo que cuando $3d$ es dividido entre 4. Para cuadrados perfectos, este residuo es 0 o 1. Así, $d = 0$ o $d = 4$.
Si $d = 0$, entonces $100\overline{abc}$ es un cuadrado perfecto siempre que $\overline{abc}$ lo sea. Luego, $\overline{abc} \in \{10^2, 11^2, 12^2, \ldots, 31^2\}$ y en este caso hay 22 números.
Si $d = 4$, entonces $100\overline{abc} + 44 = (2p)^2$ para algún entero positivo p. De manera que

$\overline{abc} = \frac{p^2-11}{25}$. Se sigue que p deja residuo 1 o 4 al dividirse entre 5. Supongamos que $p = 5x + 1$ con $10 < x \leq 31$. Entonces, $\overline{abc} = x^2 + \frac{2(x-1)}{5}$. Se sigue que x es alguno de los números $11, 16, 21, 26$ y 31. Ahora, si $p = 5x + 4$, con $10 < x \leq 31$, entonces $\overline{abc} = x^2 + x + \frac{3x+1}{5}$. De aquí que x es uno de los números $13, 18, 23$ y 28.
Por lo tanto, el número total de tales cuadrados perfectos es $22 + 5 + 4 = 31$.

Problema 2. Un número consiste de tres dígitos distintos elegidos de manera aleatoria del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y acomodados en orden descendente. Un segundo número es construido de la misma manera con la restricción de que el dígito 9 no puede ser usado. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer número sea mayor que el segundo número?

Solución. El primer número puede ser elegido de $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84$ maneras, mientras que el segundo número puede ser elegido de $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56$ maneras. Los valores del primer número que no pueden ser obtenidos por el segundo número comienzan todos con 9, y son, por lo tanto, estrictamente mayores que cualquier valor obtenido del segundo número. Listemos los valores obtenidos del segundo número en orden creciente. Cada uno es mayor o igual que él mismo y que los números que le precenden en la lista. El número total de tales casos es $1 + 2 + \cdots + 56 = \frac{57\cdot 56}{2} = 1596$. Por lo tanto, la probabilidad buscada es igual a $1 - \frac{1596}{84\cdot 56} = \frac{37}{56}$.

Problema 3. E y N son puntos en los lados DC y DA del cuadrado $ABCD$ tales que $AN : ND : DE = 2 : 3 : 4$. La línea que pasa por N y es perpendicular a BE interseca a BE en P y a BC en M. AC interseca a MN en O y a BE en S. ¿Qué fracción del área de $ABCD$ representa el triángulo OPS?

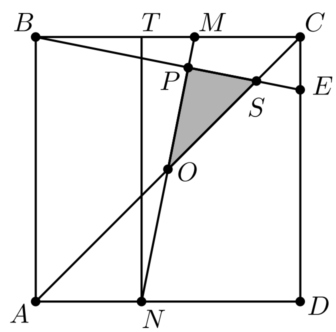


Solución. Podemos suponer que el lado del cuadrado mide 10 cm. Entonces, $AN = 4$ cm, $ND = 6$ cm, $DE = 8$ cm y $EC = 2$ cm. Tracemos la recta paralela a AB que pasa por N, y supongamos que interseca a BC en T.
Al ser cíclico el cuadrilátero $BTPN$, tenemos que $\angle TBE = \angle TNM$. Además, como los triángulos MTN y ECB tienen un ángulo recto y un lado con longitud igual a un lado del cuadrado, se sigue que son congruentes. Luego, $MT = 2$ cm y $CM = 4$ cm. Como $MC = AN$, tenemos que O es el centro del cuadrado $ABCD$. Por lo tanto, el área del triángulo OBC es 25 cm^2 y el área del triángulo OMC es 10 cm^2.

Como AB y CD son paralelas, tenemos que $\frac{CS}{SA} = \frac{CE}{AB} = \frac{1}{5}$. Luego,

$$\frac{CS}{SA} = \frac{CS}{OS+OA} = \frac{OC-OS}{OS+OC} = \frac{1}{5}.$$

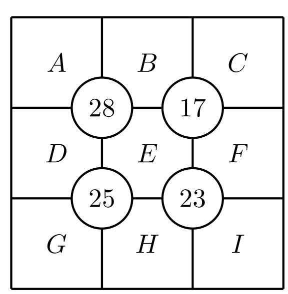
Esto es, $\frac{OS}{OC} = \frac{2}{3}$.



Por otra parte, $MO = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}\sqrt{NT^2+TM^2} = \sqrt{26}$ cm. Como comparten un ángulo y, además, tienen un ángulo de $90°$, los triángulos BMP y NMT son semejantes. De aquí que $\frac{MP}{MT} = \frac{BM}{MN}$. Por lo tanto, $MP = \frac{3\sqrt{26}}{13}$ cm. Entonces, $\frac{OP}{OM} = \frac{OM-MP}{OM} = \frac{10}{13}$. Luego, el área del triángulo OPS es igual a $(\frac{OP}{OM})(\frac{OS}{OC}) = (\frac{10}{13})(\frac{2}{3}) = \frac{20}{39}$ del área del triángulo OMC, y en consecuencia es igual a $\frac{20}{39} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{39}$ del área de $ABCD$.

Examen en equipo

Problema 1. En el siguiente diagrama, reemplazar cada letra por un número diferente de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9, de manera que la suma de los cuatro números alrededor de cada círculo sea igual al número dentro del círculo.



Solución. Tenemos que $A+B+C+D+E+F+G+H+I = 1+2+3+\cdots+9 = 45$. A partir del círculo de más arriba de la izquierda, tenemos que $A+B+D+E = 28$. De manera análoga tenemos que $E+F+H+I = 23$. Se sigue que $E-C-G = 6$. Esto significa que $E = 9$, mientras que C y G son 1 y 2 en algún orden. Ahora, $B+C+E+F = 17$. Como $E = 9$, tenemos que $B+C+F = 8$. Por lo tanto, debemos tener que $C = 1$ y $G = 2$, mientras que B y F son 3 y 4 en algún orden. Usando que $A + B + D + E = 28$, se sigue que $B = 4$ y $F = 3$, mientras que A y D son 7 y 8 en algún orden. A partir de la relación $D + E + G + H = 25$, tenemos que $D + H = 14$. Esto significa que $H = 6$, $D = 8$, $A = 7$ e $I = 5$.

7	4	1
8	9	3
2	6	5

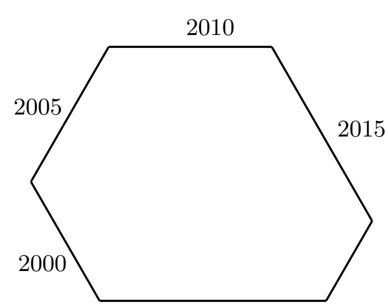
Problema 2. Encontrar la suma de todos los números cuadrados perfectos de cuatro dígitos tales que si cada uno de sus dígitos es reducido por una misma cantidad, el resultado es también un cuadrado perfecto de cuatro dígitos. (Cuadrados perfectos distintos pueden ser reducidos en distintas cantidades).

Solución. Sean $A = \overline{abcd} = x^2$ y $B = \overline{(a-k)(b-k)(c-k)(d-k)} = y^2$ cuadrados perfectos, con $32 \leq x \leq 99$ y $32 \leq y \leq 99$. Entonces,

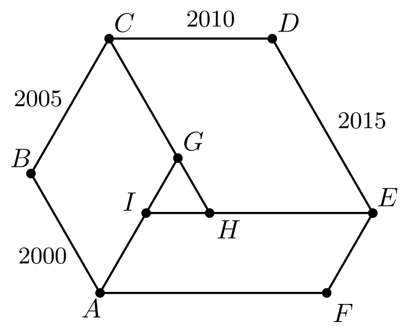
$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 \\ = \quad & 1000a + 100b + 10c + d - 1000a + 1000k - 100b + 100k - 10c + 10k - d + k \\ = \quad & 1111 \cdot k = 11 \cdot 101 \cdot k. \end{aligned}$$

Como $y < x$ y ambos números son mayores o iguales que 32 y menores o iguales que 99, tenemos que $0 < x - y < 67$ y $64 \leq x + y \leq 198$. Como $198 < 2 \cdot 101$, $9 \cdot 11 < 101$, y 11 y 101 son números primos, la única forma de repartir los factores en el producto $(x + y)(x - y) = 11 \cdot 101 \cdot k$ es $x + y = 101$ y $x - y = 11 \cdot k$. Además, $x + y$ y $x - y$ tienen la misma paridad. Luego, k es impar, esto es, $k \in \{1, 3, 5\}$. Si $k = 1$, entonces $x - y = 11$ y $x + y = 101$. Por lo tanto, $x = 56$ e $y = 45$. Si $k = 3$, entonces $x - y = 33$ y $x + y = 101$. Por lo tanto, $x = 67$ e $y = 34$. Si $k = 5$, entonces $x - y = 55$ y $x + y = 101$. Por lo tanto, $x = 78$ e $y = 23$, y en consecuencia, B no es un número de 4 dígitos. En los otros dos casos A y B satisfacen las condiciones del problema. Por lo tanto, la suma buscada es igual a $56^2 + 67^2 = 3136 + 4489 = 7625$.

Problema 3. Un hexágono tiene seis ángulos de $120°$. Las longitudes de cuatro lados consecutivos son 2000 cm, 2005 cm, 2010 cm y 2015 cm. Calcular el perímetro, en cm, del hexágono.

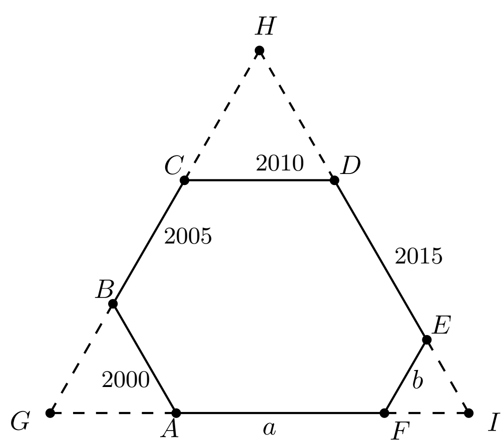


Solución. Sea $ABCDEF$ el hexágono con $AB = 2000$ cm, $BC = 2005$ cm, $CD = 2010$ cm y $DE = 2015$ cm. Completemos el paralelogramo $ABCG$. Prolonguemos CG hasta H, de manera que $CDEH$ sea un paralelogramo. Sea I el punto de intersección de EH y AG. Como $\angle ABC = 120°$ y $ABCG$ es un paralelogramo, tenemos que $\angle GAB = 180° - \angle ABC = 60°$. Pero, $\angle FAB = 120°$, de modo que $\angle FAI = 60°$. Así, $\angle FAI = 60° = 180° - 120° = 180° - \angle EFA$. Por lo tanto, EF es paralela a AI. De manera análoga, se demuestra que FA y EI son paralelas. Luego, $EFAI$ es un paralelogramo.



Ahora, $GH = CH - CG = DE - AB = 15$ cm, $HI = EI - EH = FA - CD = FA - 2010$ e $IG = AG - AI = BC - EF = 2005 - EF$. Notemos que el triángulo GHI es equilátero, pues sus ángulos externos son de 120°. Como $GH = HI$, tenemos que $FA = 2025$ cm. Como $IG = GH$, tenemos que $EF = 1990$ cm. Por lo tanto, el perímetro del hexágono es $2000 + 2005 + 2010 + 2015 + 1990 + 2025 = 12045$ cm.

Solución alternativa. Supongamos que AF mide a cm y EF mide b cm. Prolonguemos los segmentos BC, DE y AF de tal manera que BC y DE se intersequen en el punto H; DE y AF se intersequen en el punto I; y AF y BC se intersequen en el punto G.



Como cada uno de los ángulos internos del hexágono $ABCDEF$ mide 120°, tenemos que los triángulos GHI, HCD, BGA y EFI son todos equiláteros. Luego, $HC = HD = CD = 2010$ cm, $BG = AG = BA = 2000$ cm, $EF = EI = IF = b$ cm y $HI = GI = HG$. Como $HI = GI = HG = 2010 + 2005 + 2000 = 6015$, tenemos que

$$2000 + a + b = b + 2015 + 2010 = 6015.$$

Luego, $b = 1990$ y $a = 2025$. Así, el perímetro del hexágono $ABCDEF$ es $2000 + 2005 + 2010 + 2015 + 1990 + 2025 = 12045$ cm.

Problema 4. Se tiene un tablero de 4×4 dibujado en un muro. Encontrar el número de formas de colocar dos fichas rojas idénticas y dos fichas azules idénticas sobre cuatro cuadrados distintos del tablero de manera que ninguna columna y ninguna fila tenga dos fichas del mismo color.

Solución. Podemos colocar una de las fichas rojas en cualquiera de los 16 cuadrados. Entonces, la otra ficha roja puede colocarse en cualquiera de los 9 cuadrados que no están en el mismo renglón o en la misma columna que la primera ficha roja. Como las fichas rojas son idénticas, el número de formas distintas de colocarlas es igual a $\frac{16 \cdot 9}{2} = 72$. De manera análoga, las fichas azules pueden colocarse de 72 maneras distintas. Debemos ahora eliminar los traslapes. De las $72 \cdot 72$ maneras de colocar las cuatro fichas, 72 de ellas tendrán a ambas fichas rojas en los mismos dos cuadrados como las fichas azules. Si suponemos que una sola ficha roja está en el mismo cuadrado que una ficha azul, este cuadrado puede ser elegido de 16 maneras. De los 9 cuadrados posibles para las restantes dos fichas, el número de formas de colocarlas es 9×8. Por lo tanto, el número total de formas es $72 \cdot 72 - 72 - 16 \cdot 72 = 3960$.

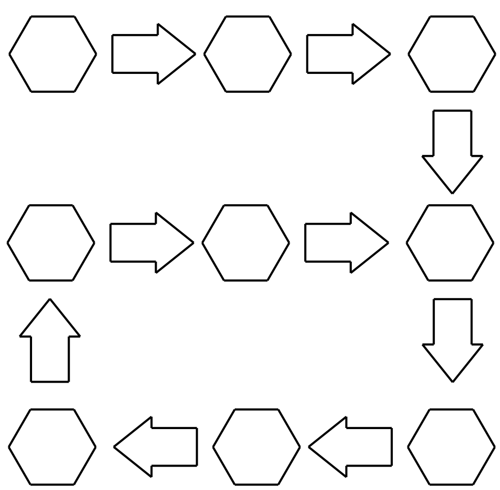
Problema 5. ¿Cuál es el menor número de elementos de una colección de cuadrados perfectos, que se pueden repetir, tal que cada entero positivo menor o igual que 100 se puede expresar como suma de algunos números de la colección?

Solución. Debemos tener al menos 3 unos para poder lograr los números $1, 2$ y 3. Pero como $4 + 1 + 1 + 1$ solo permite expresar hasta el 7, necesitamos otro 4 para poder continuar. Supongamos que tenemos un 9. Notemos que $16 < 9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 < 25$. Entonces, no necesitamos otro 9, pero necesitaríamos un 16. Hasta este momento tenemos que $25 < 16 + 9 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 = 36$. Como $3 \cdot 36 > 100$, la colección $\{1, 1, 1, 4, 4, 9, 16, 36, 36\}$ funciona. Demostraremos que ninguna colección de 8 cuadrados satisface las condiciones del problema. Debemos tener como antes a los números $1, 1, 1, 4, 4$. Si tenemos un 9, entonces estos seis cuadrados suman 20. Luego, los restantes dos cuadrados deben sumar al menos 80, y uno de ellos debe ser menor que 25 (ya que en caso contrario el número 21 no sería expresable). Como $1+1+1+4+4+9+16 = 36$ y debemos poder expresar 37, entonces el octavo número debe ser menor que 37. Luego, la suma de los restantes dos cuadrados es menor que $16 + 37 = 53 < 80$, lo que es una contradicción. Supongamos que no tenemos nueves. Entonces, a parte de $1, 1, 1, 4, 4$ debemos tener otro 4 antes de tener un 16 y la suma de estos siete cuadrados es 31 que es menor que 50. Luego, el octavo cuadrado debe ser mayor que $100 - 31 = 69$, en cuyo caso, el número 32 no sería expresable.
Por lo tanto, el mínimo buscado es 9.

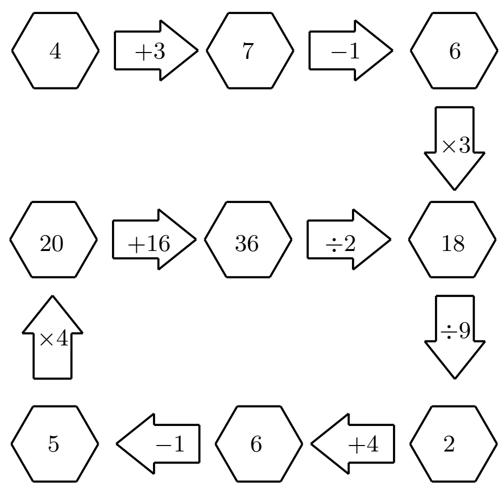
Problema 6. Kelly tiene menos de 100 años y Kerry tiene más de 9. La edad de Kelly se vuelve la edad de Kerry cuando es multiplicada por una fracción cuyo denominador es 999 y cuyo numerador es un número de tres dígitos que tiene a 5 como dígito de las decenas. ¿Cuántos valores posibles hay para la edad de Kerry?

Solución. Observemos que $999 = 37 \cdot 27$ y 37 es primo. Tenemos dos casos.
Caso 1. 37 divide a la edad de Kelly. En este caso la edad de Kelly es $1 \cdot 37 = 37$ o $2 \cdot 37 = 74$. Como 1 y 2 son ambos primos relativos con 27, el numerador de tres dígitos es múltiplo de 27. Los múltiplos de 27 que tienen tres dígitos cuyo dígito de las decenas es 5 son $13 \cdot 27 = 351$, $17 \cdot 27 = 459$ y $28 \cdot 27 = 756$. Por lo tanto, la edad de Kerry puede ser cualquiera de los números $13, 17, 28, 26, 34$ y 56.
Caso 2. 37 divide al numerador de tres dígitos. Los múltiplos de 37 que son de tres dígitos cuyo dígito de las decenas es 5 son $7 \cdot 37 = 259$, $15 \cdot 37 = 555$ y $23 \cdot 37 = 851$. Si el numerador es 555, entonces la edad de Kelly es divisible por 9. Luego, ella tiene $18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90$ o 99 años, y Kerry tiene $10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50$ o 55 años. Si el numerador es alguno de 259 u 851, entonces la edad de Kelly es divisible por 27. Luego, ella tiene $27, 54$ u 81 años, y Kerry tiene $7, 14, 21, 23, 46$ o 69 años. No obstante, debemos eliminar el 7 pues la edad de Kerry es mayor que 9.
Por lo tanto, hay $6 + 15 = 21$ valores posibles para la edad de Kerry.

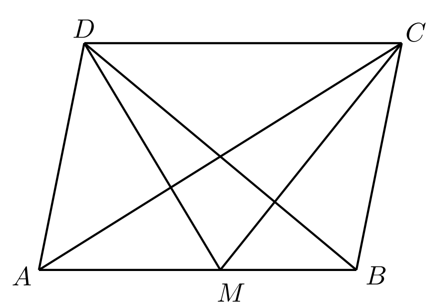
Problema 7. En el diagrama siguiente, cada hexágono contiene uno de los números $2, 4, 5, 6, 7, 18, 20$ y 36. Cada número aparece una vez excepto el 6 que aparece dos veces. Cada flecha contiene una de las operaciones -1, $\div 2$, $+3$, $+4$, $\times 4$, $\div 9$ y $+16$. Cada operación aparece una vez excepto -1 que aparece dos veces.
Completar el diagrama de manera que cada operación aplicada al número en el hexágono anterior dé como resultado el número del hexágono siguiente. Notar que uno de los hexágonos no es precedido por ninguna flecha mientras que otro de los hexágonos es precedido por dos flechas.



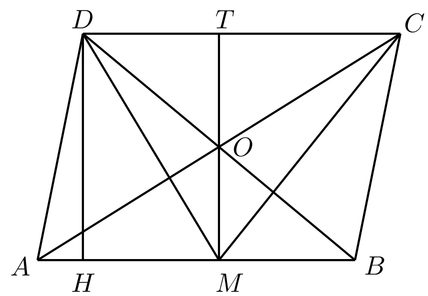
Solución. El número 7 puede estar seguido solo por el -1, por lo tanto, lo sucede un 6. La operación $+4$ solo puede suceder al 2, lo que da como resultado el otro 6. Como la operación $\times 3$ no puede suceder al 2, entonces debe estar después de uno de los 6, dando como resultado un 18. La operación $\times 4$ solo puede suceder al 5, dando como resultado un 20. Como el otro -1 no puede suceder a 5 o a 7, solo puede suceder al otro 6, lo cual da como resultado un 5. Como $+3$ no puede suceder al 2, entonces solo puede suceder al 4, lo que da como resultado un 7. Como la operación $+16$ no puede seguir a 4, entonces solo puede seguir a 20, lo que da como resultado un 36. Entonces, $\div 2$ solo puede suceder a 36, lo que da como resultado un 18. Pongamos a 18 en el hexágono que está sucedido por dos flechas. Finalmente, debemos tener que $18 \div 9 = 2$. El diagrama completo se muestra a continuación.



Problema 8. M es un punto sobre el lado AB del paralelogramo $ABCD$ tal que $AM : MB = 4 : 3$. DM y CM son perpendiculares a AC y a BD, respectivamente. Si $BC = 5$ cm, encontrar el área, en cm^2, de $ABCD$.



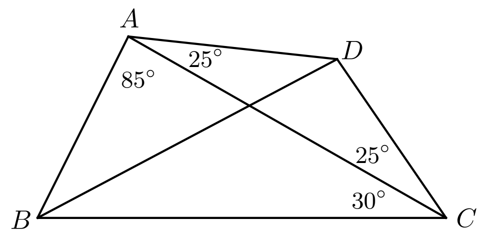
Solución. Sea O el punto de intersección de AC y BD, y sea T el punto de intersección de CD y la prolongación de MO. Sean $AM = 4x$ cm, $BM = 3x$ cm y $OM = y$ cm. Como $ABCD$ es un paralelogramo, tenemos que $AM = CT = 4x$ cm, $BM = DT = 3x$ cm y $MO = TO = y$ cm. Observemos que O es el ortocentro del triángulo DCM, dado que es el punto de intersección de las alturas desde C y D. Como H es ortocentro, tenemos que $\angle ODC = 90^\circ - \angle DCM = \angle OMC$. Luego, como los triángulos DOT y MCT comparten dos ángulos, entonces son semejantes. Se sigue que $\frac{2y}{4x} = \frac{MT}{CT} = \frac{DT}{OT} = \frac{3x}{y}$, de donde $y = x\sqrt{6}$. Dibujemos la perpendicular DH desde D sobre AB. Entonces, $DH = TM = 2y = 2\sqrt{6}x$ cm y $AH = AM - HM = AM - DT = x$ cm. Por el teorema de Pitágoras, $AD^2 = DH^2 + AH^2$, esto es, $25 = 24x^2 + x^2$. Por lo tanto, $x = 1$. Luego, el área del paralelogramo es $14\sqrt{6}$ cm^2.



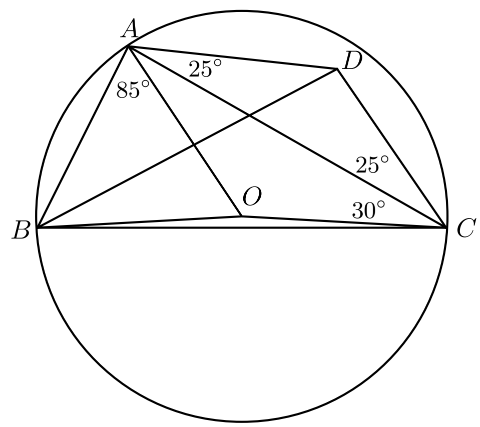
Problema 9. Encontrar el mayor número de seis dígitos distintos que es un cuadrado perfecto y que sus dígitos siguen un orden creciente de izquierda a derecha.

Solución. Cuando un cuadrado es dividido por 10, el residuo debe ser uno de $0, 1, 4, 5, 6$ y 9. Luego, un número del tipo que buscamos debe terminar en 6 o 9. Si termina en 6, solo puede ser 123456. Supongamos que termina en 9. Cuando un cuadrado impar es dividido por 4, el residuo debe ser 1. Luego, el segundo dígito debe ser par, de manera que es 6 o es 8. Cuando un cuadrado es dividido por 16, el residuo es $0, 1, 4$ o 9. Si el segundo dígito es 6, entonces el tercer dígito es 5, y el número es alguno de 123569, 124569, 134569 y 234569. Si el segundo dígito es 8, entonces el tercer dígito debe ser par, y puede ser 4 o 6. En el primer caso, el número debe ser 123489. En el segundo caso, el número es alguno de 123689, 124689, 125689, 134689, 135689, 145689, 234689, 235689, 245689 y 345689. Estos 16 números son todos los candidatos. Cuando un cuadrado es dividido por 9, el residuo es $0, 1, 4$ o 7. Esto elimina a 10 de los 16 candidatos (la suma de sus dígitos no es múltiplo de 9), lo que deja solo a los números 124569, 134569, 123489, 125689, 134689 y 245689. Cuando un cuadrado es dividido entre 7, el residuo es 0, 1, 2 o 4. Esto elimina al número 245689. Como $134689 = 367^2$, este es el número buscado.

Problema 10. En un cuadrilátero convexo $ABCD$, $\angle DAC = \angle DCA = 25^\circ$, $\angle BAC = 85^\circ$ y $\angle ACB = 30^\circ$. Encontrar la medida, en grados, de $\angle BDC$.



Solución. Sea O el centro del círculo que pasa por los puntos A, B y C. Entonces $\angle AOC = 2\angle ABC = 130°$. Se sigue que $\angle OAC = \angle ACO = 25°$. Entonces, los triángulos AOC y ADC son congruentes por el criterio de congruencia ALA. Luego, $AO = AD$. Notemos que $\angle AOB = 2\angle ACB = 60°$, esto significa que el triángulo AOB es equilátero. Entonces, $AB = AO = AD$. Además, $\angle BAD = 110°$. Así, $\angle ADB = \angle ABD = 35°$. Por lo tanto, $\angle BDC = 95°$.



XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 8 al 14 de noviembre de 2015 se celebró en Mayagüez, Puerto Rico, la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. La delegación mexicana estuvo integrada por los alumnos Antonio López Guzmán (Chihuahua), Leonardo Ariel García Morán (Jalisco), Olga Medrano Martín del Campo (Jalisco) y Pablo Meré Hidalgo (Querétaro). En total hubo 84 alumnos participantes. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Jorge Garza Vargas (tutor).

Antonio y Pablo obtuvieron medalla de oro con puntaje perfecto, mientras que Leonardo Ariel y Olga obtuvieron medalla de bronce. México ocupó el cuarto lugar de los 26 países participantes.

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la XXX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. El número 125 se puede representar como suma de varios números naturales que son mayores que 1 y coprimos dos a dos. Encuentre el máximo número de sumandos que puede tener tal representación.
Nota: Dos números naturales son coprimos si su máximo común divisor es igual a 1.

Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Supongamos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 125$, donde los sumandos son enteros coprimos entre sí y mayores a 1. Primero demostraremos que no es posible obtener la igualdad anterior para $k > 8$. La idea para lograr esto es encontrar una manera de utilizar la hipótesis de coprimalidad para dar una cota inferior a la suma $a_1 + \cdots + a_k$ en términos de k. Esto motiva el siguiente resultado.

Lema 3. *Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números enteros mayores que 1, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq x_1 + x_2 + \cdots x_n.$$

Procedamos por inducción sobre el número de términos. Cuando hay un solo término es trivial, pero para nuestro paso inductivo también necesitaremos el caso cuando hay dos términos. Sean a, b enteros mayores que 1, sin pérdida de generalidad $a \geq b$. Como $b \geq 2$, tenemos $ab \geq 2a \geq a + b$, con lo cual el caso $n = 2$ queda demostrado. Ahora supongamos que la proposición es cierta para cualesquiera k términos y sean $x_1, \ldots, x_{k+1}$ enteros mayores que 1. Si juntamos lo antes demostrado con la hipótesis de inducción se obtiene

$$x_1 x_2 \cdots x_{k+1} = (x_1 x_2 \cdots x_k) x_{k+1} \geq (x_1 \cdots x_k) + x_{k+1} \geq (x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1}.$$

Lo que concluye el paso inductivo y con ello la demostración del lema.

Ahora, sea $p_1, p_2, \ldots, p_m$ la lista de primos que dividen a al menos uno de los números $a_1, \ldots, a_k$, en donde si p_i^r es la máxima potencia de p_i que divide a a_j, entonces aparece r veces en la lista. Como los a_i son coprimos entre sí, los conjuntos de primos que dividen a cada número son disjuntos. Por lo tanto, en la lista de primos aparecen al menos k primos distintos. Además, el lema 3 implica que cualquier entero es mayor que la suma de los primos que lo dividen. Si juntamos estos dos últimos resultados se obtiene que

$$a_1 + \cdots + a_k \geq p_1 + \cdots + p_m.$$

Si $k \geq 10$, entonces en la lista de primos hay al menos 10 primos distintos. Por lo tanto, la suma de la derecha en la desigualdad es mayor o igual que la suma de los 10 primos más pequeños, es decir

$$p_1 + \cdots + p_m \geq 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129 > 125.$$

Entonces $k < 10$. Para el caso en el que $k = 9$, notemos que para que se cumpla que $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 125$, debe de haber una cantidad impar de sumandos impares. Como los sumandos son primos relativos, a lo más puede haber un sumando par. Si hubiera un sumando par, habría 8 impares, lo que contradice el resultado anterior. Por lo tanto, los 9 sumandos son impares. Entonces, todos los primos en la lista $p_1, \ldots, p_m$ son impares y hay al menos 9 de ellos distintos. Por lo tanto, su suma es mayor que la suma de los 9 primos impares más pequeños, con lo que se obtiene,

$$p_1 + \cdots + p_m \geq 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 127 > 125.$$

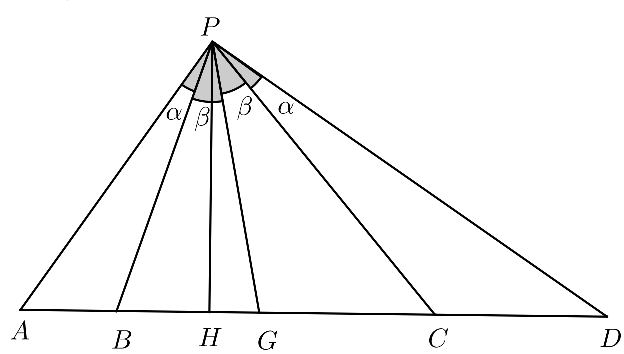
De donde se concluye que k no puede ser 9. Finalmente notemos que para $k = 8$ la igualdad se puede alcanzar y la hipótesis de coprimalidad se satisface con $125 = 8 + 27 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23$.

Nota. Observemos que la fuerza del lema 3 no fue requerida en su totalidad. Sin embargo, además de ser esclarecedor, provee una manera general de atacar el problema que se puede aplicar de manera efectiva para cuando se escoge un número distinto a 125.

Problema 2. Una recta r contiene los puntos A, B, C, D, en ese orden. Sea P un punto fuera de r tal que $\angle APB = \angle CPD$. Pruebe que la bisectriz de $\angle APD$ corta a r en un punto G tal que

$$\frac{1}{GA} + \frac{1}{GC} = \frac{1}{GB} + \frac{1}{GD}.$$

Solución de Leonardo Ariel García Morán. Dado un triángulo XYZ denotaremos su área por (XYZ). La idea será establecer relaciones entre razones de segmentos con razones de áreas usando fórmulas distintas para calcular el área de un triángulo.
Sea H la proyección de P a r. Veamos que como PG es bisectriz de $\angle APD$ y $\angle APB = \angle CPD$ entonces PG también es bisctriz de $\angle BPC$. Denotemos por $\alpha = \angle APB = \angle CPD$ y $\beta = \angle BPG = \angle GPC$.



Ahora utilizando la relación que hay en un triángulo entre su base, su altura y su área obtenemos

$$\frac{(APC)}{(BPD)} = \frac{\frac{1}{2}(PH \cdot AC)}{\frac{1}{2}(PH \cdot BD)} = \frac{AC}{BD}. \tag{19}$$

Por otro lado, utilizando la ecuación (19) y la relación que hay entre dos lados de un triángulo, el seno del ángulo entre ellos y el área del triángulo obtenemos

$$\frac{AC}{BD}=\frac{(APC)}{(BPD)}=\frac{\frac{1}{2}(AP\cdot CP\cdot \operatorname{sen}(\angle APC))}{\frac{1}{2}(BP\cdot DP\cdot \operatorname{sen}(\angle BPD))}=\frac{AP\cdot CP}{BP\cdot DP}. \tag{20}$$

En donde la última igualdad se sigue de la igualdad $\alpha+2\beta=\angle APC=\angle BPD$ que tiene como consecuencia $\operatorname{sen}(\angle BPD)=\operatorname{sen}(\angle BPD)$.
Ahora, aplicando el teorema de la bisectriz en los triángulos APD y BPC con respecto a la bisectriz PG, obtenemos que $\frac{AP}{DP}=\frac{AG}{GD}$ y $\frac{CP}{BP}=\frac{GC}{BG}$. Notemos que el producto de los lados izquierdos de las dos ecuaciones anteriores es precisamente el lado derecho de la ecuación (20), de donde se obtiene

$$\frac{AC}{BD}=\frac{AP\cdot CP}{BP\cdot DP}=\frac{AG\cdot GC}{GD\cdot BG}.$$

De lo anterior tenemos que $\frac{BD}{GD\cdot GB}=\frac{AC}{AG\cdot GC}$, utilizando que $BD=BG+GD$ y $AC=AG+GC$, tenemos $\frac{BG+GD}{GD\cdot GB}=\frac{AG+GC}{AG\cdot GC}$, con lo cual obtenemos la siguiente cadena de igualdades

$$\frac{1}{BG}+\frac{1}{GD}=\frac{GD}{GD\cdot BG}+\frac{BG}{BG\cdot GD}=\frac{AG+GC}{AG\cdot GC}=\frac{1}{AG}+\frac{1}{GC}. \tag{21}$$

Con lo cual se concluye la demostración.

Problema 3. Sean α y β las raíces del polinomio x^2-qx+1, donde q es un número racional mayor que 2. Se define $s_1=\alpha+\beta$, $t_1=1$ y para cada entero $n\geq 2$:

$$s_n=\alpha^n+\beta^n, \qquad t_n=s_{n-1}+2s_{n-2}+\cdots+(n-1)s_1+n$$

Demuestre que, para todo n impar, t_n es el cuadrado de un número racional.

Solución de Antonio López Guzmán. Comenzaremos probando por inducción que $s_n=\alpha^n+\beta^n$ es racional para todo entero no negativo n. Primero, $s_0=2$ que es racional. Por la fórmula de Vieta, como α y β son raíces de x^2-qx+1, tenemos que $s_1=\alpha+\beta=q$. Por lo tanto, s_1 también es racional.
Ahora supongamos que para $k\geq 1$ se cumple que s_k y s_{k-1} son racionales. Aplicando nuevamente la fórmula de Vieta, tenemos que $\alpha\beta=1$. Notemos que

$$s_1s_k=(\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k)=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}+\alpha\beta^k+\alpha^k\beta=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}+\alpha^{k-1}+\beta^{k-1},$$

en donde la última igualdad se sigue de la igualdad $\alpha\beta=1$. Entonces, $s_{k+1}=s_1s_k-s_{k-1}$. Por lo tanto, s_{k+1} también es racional, con lo cual se concluye el paso inductivo.
Ahora probaremos, nuevamente por inducción, que para todo entero no negativo n se tiene que $t_{2n+1}=(1+s_1+\cdots+s_n)^2$. Esto último concluirá la demostración, pues la suma $1+s_1+\cdots+s_n$ es racional por lo demostrado anteriormente.
El caso base se cumple de manera trivial pues $t_1=1$. Ahora supongamos que

$$t_{2k+1}=(1+s_1+\cdots+s_k)^2. \tag{22}$$

Si utilizamos la definición, es fácil ver que $t_{2k+3}-t_{2k+1}=s_{2k+2}+2(1+s_1+\cdots+s_{2k+1})$. Luego, si usamos la ecuación (22), bastará demostrar que

$$(s_1+\cdots+s_{k+1})^2=t_{2k+3}=s_{2k+2}+2(1+s_1+\cdots+s_{2k+1})+(1+s_1+\cdots+s_k)^2 \quad (23)$$

para concluir el paso inductivo.
Pero $(1+s_1+\cdots s_{k+1})^2=(s_1+\cdots+s_k)^2+2(1+\cdots+s_k)s_{k+1}+s_{k+1}^2$, por lo que para probar la igualdad (23) nos bastará ver que $2(1+s_1+\cdots+s_{2k+1})+s_{2k+2}=2(1+s_1+\cdots+s_k)s_{k+1}+s_{k+1}^2$. Si sustituimos cada s_j por $\alpha^j+\beta^j$, lo anterior se reduce a ver que

$$\begin{aligned} & 2(1+\alpha+\beta+\cdots+\alpha^{2k+1}+\beta^{2k+1})+\alpha^{2k+2}+\beta^{2k+2} \\ = \; & 2(1+\alpha+\beta+\cdots+\alpha^k+\beta^k)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})+(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Ahora, si aplicamos la igualdad $\alpha\beta=1$ obtenemos que

$$(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})^2=\alpha^{2k+2}+2\alpha^{k+1}\beta^{k+1}+\beta^{2k+2}=\alpha^{2k+2}+\beta^{2k+2}+2. \quad (25)$$

Aplicándola nuevamente tenemos que $(\beta+\cdots+\beta^k)\alpha^{k+1}=\alpha^k+\alpha^{k-1}+\cdots+1$. Análogamente, $(\alpha+\cdots+\alpha^{k+1})\beta^{k+1}=\beta^k+\cdots+\beta+1$, de donde

$$\begin{aligned} & 2(1+\alpha+\alpha^2+\cdots\alpha^k+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^k)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}) \\ = \; & 2(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{2k+1}+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{2k+1}). \end{aligned} \quad (26)$$

Si juntamos las ecuaciones (25) y (26), queda demostrada la ecuación (24). Con lo cual se obtiene que $t_{2k+3}=(1+s_1+\cdots+s_{k+1})^2$. Esto concluye la inducción y la demostración.

Ahora daremos una forma alternativa de concluir la demostración anterior.
(**Solución de Pablo Meré Hidalgo**). Para demostrar que $t_{2n+1}=(s_1+s_2+\cdots+s_n)^2$, sustituiremos $\beta=\alpha^{-1}$.
Desarrollemos la expresión $(s_1+s_2+\cdots+s_n)^2=(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n+\alpha^{-1}+\cdots+\alpha^{-n})^2$. Para esto notemos que para todo j con $-2n\leq j\leq 2n$, el coeficiente de α^j en la expresión final será igual a la cantidad de soluciones (a,b) de la ecuación $a+b=j$ con $-n\leq a,b\leq n$. Es fácil ver entonces que el coeficiente de α^j será $2n+1-|j|$ para todo j con $-2n\leq j\leq 2n$. Entonces, el coeficiente de α^j y α^{-j} es el mismo. De donde,

$$(s_1+s_2+\cdots+s_n)^2=(2n+1-2n)(\alpha^{2n}+\alpha^{-2n})+\cdots+(2n+1-1)(\alpha+\alpha^{-1})+2n+1.$$

Si sustituimos $\alpha^j+\alpha^{-j}$ por s_j en la ecuación anterior, se obtiene, precisamente, que $t_{2n+1}=(s_1+s_2+\cdots+s_n)^2$.

Problema 4. En el triángulo acutángulo ABC el punto D es el pie de perpendicular desde A sobre el lado BC. Sea P un punto en el segmento AD. Las rectas BP y CP cortan a los lados AC y AB en E y F respectivamente. Sean J y K los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AD respectivamente. Demuestre que

$$\frac{FK}{KD}=\frac{EJ}{JD}.$$

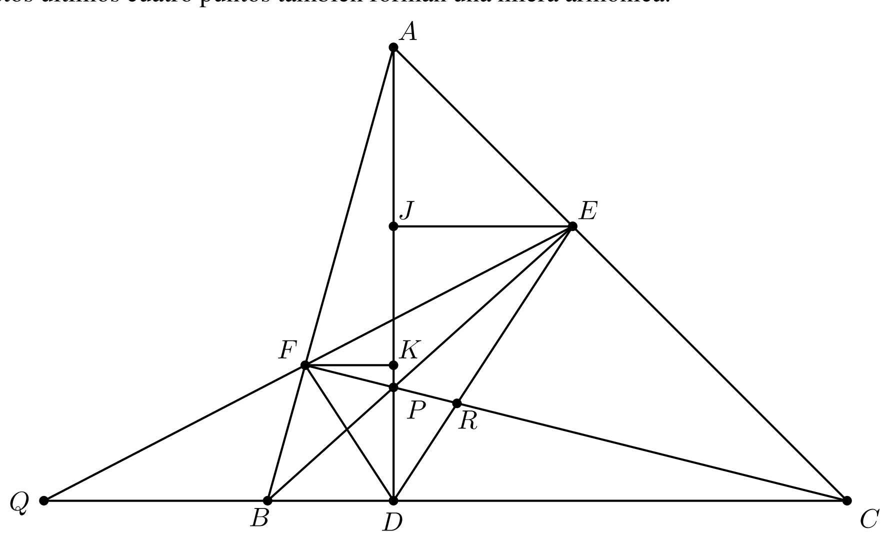
Solución de Olga Medrano Martín del Campo. Esta solución involucra varios resultados relacionados con el estudio de hileras armónicas. El lector puede recurrir a [17] para revisar estos temas (ver la Bibliografía). Palabras claves para una búsqueda en el tema incluyen: haz armónico, razón cruzada, círculo de Apolonio.
Dados cuatro puntos colineales A, B, C y D en ese orden, decimos que forman una hilera armónica si $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$. Para esta demostración se necesitarán los siguientes tres hechos conocidos sobre hileras armónicas.

Lema 4. *Sea ABC un triángulo y X, Y, Z puntos sobre los lados BC, CA y AB respectivamente, de manera que AX, BY y CZ son concurrentes. Sea W la intersección de YZ con BC. Entonces C, X, B y W forman una hilera armónica.*

Lema 5. *Sea A, B, C, D una hilera armónica y P un punto afuera de la recta que pasa por los cuatro puntos. Si $\angle APC = 90°$, entonces PC es bisectriz del ángulo $\angle BPD$.*

Lema 6. *Sean r y s dos rectas. Sea A, B, C, D una hilera armónica sobre r y P un punto afuera de ambas rectas. Sean A', B', C', D' las intersecciones de s con las rectas PA, PB, PC, PD respectivamente. Entonces A', B', C', D' es una hilera armónica.*

Regresando al problema, sea Q la intersección de BC con FE y sea R la intersección de DE con CF. Por el lema 4 aplicado al triángulo ABC tenemos que Q, B, D, C es una hilera armónica. Luego, por el lema 6 aplicado a las rectas CF y CB con punto exterior E tenemos que la hilera Q, B, D, C se proyecta en C, P, R, F y por lo tanto estos últimos cuatro puntos también forman una hilera armónica.



Ahora, ya sabemos que F, P, R, C es una hilera armónica, notemos que D es un punto afuera de la recta que cumple que $\angle CDP = 90°$ y por ende podemos aplicar el lema 5 para obtener que PD es bisectriz del ángulo $\angle RDF$.

De lo anterior se sigue que $\angle EDJ = \angle FDK$ y por lo tanto los triángulos FKD y EJD son semejantes (pues ambos triángulos son rectángulos), por lo tanto $\frac{FK}{KD} = \frac{EJ}{JD}$. Con lo cual se concluye la demostración.

Problema 5. Determine todos los pares (a, b) de números enteros que verifican

$$(b^2 + 7(a - b))^2 = a^3 b.$$

Solución de Pablo Meré Hidalgo. Primero observemos que si $a = 0$ entonces la igualdad se convierte en $(b^2 - 7b)^2 = 0$. De aquí que $b^2 - 7b = 0$, de donde $b(b-7) = 0$. Por lo tanto, $b = 0$ o $b = 7$. Es fácil verficar que ambas parejas $(0, 0)$ y $(0, 7)$ son soluciones de la ecuación.
Ahora, si $b = 0$, la ecuación se convierte en $49a^2 = 0$. Por lo tanto, $a = 0$, lo cual nos da una solución que ya teníamos. Como ya descartamos estos casos ahora podemos suponer que a y b son distintos de 0. Sea $d = \text{mcd}(a, b)$. Entonces, $x = \frac{a}{d}$, $y = \frac{b}{d}$ son primos relativos.
Si sustituimos en la ecuación original, obtenemos $(d^2y^2 + 7(dx - dy))^2 = (dx)^3 dy$. Entonces, $d^2(y^2 d + 7(x - y))^2 = d^4x^3y$, de donde

$$(dy^2 + 7(x - y))^2 = d^2x^3y. \tag{27}$$

Observemos que el lado derecho de la ecuación (27) es divisible por y. Analizando el lado izquierdo obtenemos que $y \mid (7x)^2 = 49x^2$. Como $\text{mcd}(x, y) = 1$, tenemos que $y \mid 49$. Por lo tanto, los posibles valores de y son $-49, -7, -1, 1, 7$ y 49. Analicemos cada caso por separado.

- Caso $y = 1$: La ecuación se reduce a $(d + 7(x - 1))^2 = d^2x^3$. Sea p un primo que divide a x, entonces $3v_p(x) = v_p(x^3) = v_p((d + 7(x - 1))^2) - v_p(d^2) = 2v_p(d + 7(x - 1)) - 2v_p(d)$. Por lo tanto, $v_p(x)$ es par. Con lo cual se concluye que x es un cuadrado y podemos tomar un entero positivo n tal que $x = n^2$. Si sustituimos queda $(d + 7(x - 1))^2 = d^2n^6$. Entonces, $d + 7(n^2 - 1) = dn^3$. Si restamos y factorizamos se obtiene

$$7(n + 1)(n - 1) = d(n - 1)(n^2 + n + 1). \tag{28}$$

  Si $n = 1$, entonces $x = 1$ y $a = b$, lo cual nos da otra solución.

  Si $n \neq 1$, podemos dividir la ecuación (28) por $n - 1$, y obtendremos $7(n+1) = d(n^2 + n + 1) \geq n^2 + n + 1$. De donde, $0 \geq n^2 - 6n - 6 = (n - 3)^2 - 15$. Entonces, $15 \geq (n - 3)^2$, lo que significa que $4 > |n - 3|$. Como n es positivo y mayor que 1, solo tenemos que considerar los casos del 2 al 6. Más aún, del hecho de que $n + 1$ y $n^2 + n + 1$ son primos relativos, podemos deducir que $n^2 + n + 1 \mid 7$. Por lo que n solo podría ser 2. El caso $n = 2$ nos da la solución $(12, 3)$.

- Caso $y=-1$: La ecuación se reduce a $(d+7(x+1))^2=d^2(-x)^3$. Con un argumento análogo al caso original, podemos tomar un entero positivo n tal que $-x=n^2$, tomando raíces obtenemos la ecuación $|d-7n^2+7|=dn^3$. Dividamos el problema en dos casos de acuerdo al signo de $d-7n^2+7$.

  Si $0<d-7n^2+7=dn^3$, análogamente al caso anterior obtenemos $-7(n+1)(n-1)=d(n-1)(n^2+n+1)$. Si $n=1$, obtenemos $x=-1$. Por lo tanto, $x=y$. Lo cual nos da la solución $a=b$. Si $n>1$, podemos dividir por $n-1$ para obtener $-7(n+1)=d(n^2+n+1)$. Lo cual no es posible pues el lado izquierdo es negativo y el derecho es positivo.

  Si $0<7n^2-7-d$, entonces $7n^2-7-d=dn^3$. De donde $7(n+1)(n-1)=d(n+1)(n^2-n+1)$. Como n es positivo, podemos dividir por $n+1$ y obtener $7(n-1)=d(n^2-n+1)$. Si utilizamos el hecho de que $n-1$ y n^2-n+1 son positivos, obtenemos que $n^2-n+1\mid 7$. El único entero mayor que 1 que satisface lo anterior es 3. Por lo tanto, $n=3$. Al sustituir se obtiene la solución $(-18,-2)$.

- Caso $y=7$: La ecuación se reduce a $(49d+7(x-7))^2=7x^3d^2$. Como $v_7((7^2d+7(x-7))^2)$ es par, entonces $v_7(7x^3d^2)=1+3v_7(x)+2v_7(d)$ es par. Por lo tanto, $v_7(x)$ es impar. En particular, es mayor que 0 y $7\mid x$. Esto es una contradicción pues sabemos que x e y son primos relativos.

- Caso $y=-7$: Tenemos la ecuación $(49d+7(x+7))^2=d^2x^3(-7)$. De manera análoga al caso anterior obtenemos que $7\mid x$, lo que contradice la coprimalidad de x e y.

- Caso $y=49$: Tenemos que $(7^4d+7(x-7^2))^2=d^2x^37^2$, esto es, $(7^3d+(x-7^2))^2=d^2x^3$. Análogamente al proceso anterior, podemos deducir que x es un cuadrado y tomar n entero positivo tal que $x=n^2$. Si sustituimos y sacamos raíz cuadrada tenemos que $|7^3d+n^2-7^2)|=dn^3$.

  Si $0<7^3d+n^2-7=dn^3$, entonces $(n-7)(n+7)=d(n-7)(n^2+7n+49)$. Si $n=7$, entonces tenemos nuevamente que $7\mid x$. Lo que contradice la coprimalidad de x e y. Por lo tanto, $n\neq 7$ y podemos dividir por $n-7$. Obtenemos $n+7=d(n^2+7n+49)\geq n^2+7n+49$. Luego, $0\geq n^2+6n+42>(n+3)^2>0$, con lo cual llegamos a una contradicción y no hay soluciones.

- Caso $y=-49$: Nuevamente podemos llegar a que hay un entero positivo n que cumple que $n^2=-x$. Si sustituimos y sacamos raíz cuadrada obtenemos que $|7^3d+x+7^2|=dn^3$. Si $7^3d-n^2+7^2<0$, entonces $7^3d-n^2+7^2=dn^3$. De donde, $(7-n)(7+n)=d(n-7)(n^2+7n+49)$. Nuevamente $n=7$ nos lleva a una contradicción, por lo que podemos dividir por $n-7$ y obtener que $-(7+n)=d(n^2+7n+49)\geq n^2+7n+49$. De aquí, $0\geq n^2+8n+56>(n+2)^2>0$, lo cual es una contradicción.

  Si $0<n^2-7^2-7^3d=dn^3$, entonces $(n-7)(n+7)=d(n+7)(n-7n+49)$, de donde $n-7=d(n^2-7n+49)\geq n^2-7n+49$ y por lo tanto $0\geq n^2-8n+56>(n-4)^2\geq 0$ lo cual es una contradición.

Con esto hemos revisado todos los casos, y por lo tanto podemos concluir que las soluciones son $(0,7)$, $(-18,-2)$, $(12,3)$ y (m,m) para todo entero m.

Problema 6. Beto Juega con su computadora al siguiente juego: inicialmente su computadora elige al azar 30 enteros del 1 al 2015, y Beto los escribe en un pizarrón (puede haber números repetidos); en cada paso, Beto elige un entero positivo k y algunos de los números escritos en el pizarrón, y le resta a cada uno de ellos el número k, con la condición de que los números resultantes sigan siendo no negativos. El objetivo del juego es lograr que en algún momento los 30 números resultantes sean iguales a 0, en cuyo caso el juego termina. Determine el menor número n tal que, independientemente de los números que incialmente eligió su computadora, Beto puede terminar el juego en a lo sumo n pasos.

Solución de Antonio López Guzmán. Probaremos que el mínimo número de turnos necesarios para que Beto pueda garantizar obtener solo ceros es 11. Primero veamos que en 11 turnos Beto siempre puede garantizar que todos los números en el pizarrón serán iguales a 0. Para esto Beto escribirá los 30 números en su expansión binaria. Como todos son menores que $2016 < 2^{11} = 2048$, todos los números iniciales tienen a lo más 11 dígitos en su representación binaria. Luego, en el turno j, Beto escogerá a todos los números que tengan un 1 en la posición j (de derecha a izquierda) y les restará 2^{j-1} a dichos números. De esta forma, después de 11 turnos, todos serán 0.
Ahora probemos por inducción que para todo entero no negativo n, la lista $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$ no se puede reducir en menos de n pasos. En particular, para $n = 11$, esto nos dará una lista de menos de 30 números entre 1 y 2015 que no se puede reducir en 10 pasos. Lo que concluye la demostración de que el mínimo necesario es 11.
La base de inducción es trivial pues los números $2^0, 2^1$ no se pueden reducir a cero en un solo turno. Ahora supongamos que los números $2^0, \ldots, 2^k$ no se pueden reducir a cero en menos de k turnos. Demostraremos que los números $2^0, \ldots, 2^{k+1}$ no se pueden reducir a cero en menos de $k+1$ turnos. Procedamos por contradicción, supongamos que en k turnos es posible reducir los números a cero al restar t_i en el turno i a algún subconjunto de los números para $i = 1, \ldots, k$. Como 2^{k+1} se redujo a cero, tenemos que $t_1 + \cdots + t_k \geq 2^{k+1}$. Por otro lado, para todo $1 \leq j \leq k$, tenemos que $2^j = t_{j_1} + \cdots + t_{j_{r_j}}$, donde $j_1, j_2, \cdots j_{r_j}$ son los turnos en los que se escogió al número derivado de 2^j para restarle algún valor. Si a cada 2^j, para $j = 1, \ldots, k$, lo sustituimos por su respectiva suma $t_{j_1} + \cdots + t_{j_{r_j}}$, se puede observar que todo t_i aparece en alguna suma. De lo contrario, podríamos ignorar dicho turno y tendríamos una manera de reducir los números $2^0, \ldots, 2^k$ en menos de k turnos, lo que reduce la hipótesis de inducción. De lo anterior se sigue que $2^{k+1} - 1 = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k \geq t_1 + \cdots + t_k$. Pero, por otro lado, habíamos demostrado que $t_1 + \cdots + t_k \geq 2^{k+1}$. Con lo cual llegamos a una contradicción y concluimos el paso inductivo.

Información Olímpica

A continuación presentamos las actividades programadas por el comité organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para el año 2016.

Febrero

Publicación del número 29 de la Revista Tzaloa.

24 al 29 de febrero, Bucarest, Rumania

VII Olimpiada Rumana de Campeones.

Marzo

Publicación del folleto introductorio de la OMM.

Primera quincena de marzo

Envío de material a los estados (convocatoria, tríptico y nombramiento de delegado).

5 al 15 de marzo, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamiento para los seleccionados nacionales y aplicación de dos exámenes de entrenamiento, del examen de la XXVIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico y del selectivo para la Olimpiadaa Europea Femenil de Matemáticas.

14 de marzo

Envío a los estados del examen eliminatorio propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

19 de marzo

Aplicación del examen eliminatorio en los estados registrados con este propósito (puede aplicarse después).

17 al 20 de marzo, Pachuca, Hidalgo

Curso de entrenadores.

3 al 9 de abril, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

10 al 16 de abril

V Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas, Busteni, Rumania.

3 al 13 de mayo, Villa Guerrero, Estado de México

Entrenamiento para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar la delegación que representará a México en la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (6 participantes), la delegación que representará a México en la XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y del Caribe (3 participantes) y la preselección que nos representará en la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Mayo

Publicación del número 30 de la Revista Tzaloa.

7 de junio

Envío a los estados del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

11 de junio

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen semifinal propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

13 al 17 de junio, Villa Guerrero, Estado de México

Entrenamiento previo a la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

15 al 21 de junio, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la XVII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

16 al 23 de junio, Kingston, Jamaica

XVIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe.

29 de junio al 7 de julio, Cuernavaca, Morelos

Entrenamiento previo a la 56^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

30 de junio al 8 de julio, Villa Guerrero, Estado de México

Entrenamiento previo a la 57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Julio

Publicación del número 31 de la Revista Tzaloa.

6 al 16 de julio, Hong Kong

57^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

31 de julio

Fecha límite de recepción de problemas para el octavo concurso de problemas.

14 al 20 de agosto, Chiang Mai, Tailandia

Competencia Internacional de Matemáticas.

20 al 28 de agosto, Guanajuato, Guanajuato

Entrenamientos para los seleccionados nacionales y aplicación de tres exámenes selectivos para determinar a la delegación para la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (4 alumnos).

5 de septiembre

Envío a los estados del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM.

10 y 11 de septiembre

Aplicación en los estados registrados con este propósito del examen final propuesto por el Comité Organizador de la OMM (puede aplicarse después).

13 al 17 de septiembre, Villa Guerrero, Estado de México

Entrenamiento previo a la XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

16 al 24 de septiembre, Antofagasta, Chile

XXXI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Septiembre

III Olimpiada Iraní de Geometría.

Octubre

Publicación del número 32 de la Revista Tzaloa.

6 al 11 de noviembre, Acapulco, Guerrero

Concurso Nacional de la 30^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Diciembre

Primer entrenamiento para alumnos preseleccionados del concurso nacional de la 30^a OMM.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Principio de las casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos. En particular, si $n+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene dos o más objetos.*

Teorema 7 (Desigualdad media aritmética - media geométrica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 12 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 13 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 14 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 15 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, es decir,*

$$\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°.$$

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] A. Rechtman Bulajich, C.J. Rubio Barrios. *Divisibilidad y congruencias*. Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, *Tzaloa* No. 2, 2009.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Directorio

Directorio de los delegados estatales

Aguascalientes–*Efraín Casillas Carrillo*
CONALEP Prof. J. Refugio Esparza Reyes
pay3@hotmail.com

Baja California–*Carlos Yee Romero*
Universidad Autónoma de Baja California, Facultad de Ciencias
carlos.yee@uabc.edu.mx, www.ommbc.org

Baja California Sur–*Jesús Eduardo Ríos Torres*
CBTIS #62,
eduardo.rios.73@gmail.com
www.institutomardecortes.edu.mx

Campeche–*Hernán Rafael Díaz Martín*
Coordinación de Intervención Académica, Dirección General CONALEP
herrdiaz@me.com

Chiapas–*María del Rosario Soler Zapata*
Centro de Estudios en Física y Matemáticas Básicas y Aplicadas, UNACH
msolerza@unach.mx

Chihuahua–*Héctor Daniel García Lara*
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
hector@ommch.org, www.ommch.org

Coahuila–*Silvia Carmen Morelos Escobar*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila
silvia.morelos@gmail.com

Colima–*Luis Angel Isaías Castellanos*
Facultad de Ciencias, Universidad de Colima
luanislaic@gmail.com, ommcol@ucol.mx

Distrito Federal–*Isabel Alicia Hubard Escalera*
Instituto de Matemáticas, UNAM, cubículo 214
omd@im.unam.mx

Durango–*Armando Mata Romero*
Universidad Juárez del Estado de Durango, Escuela de Matemáticas
armandomr@ujed.mx

Estado de México–*Saúl Díaz Alvarado*
Facultad de Ciencias, UAEMex
sda@uaemex.mx

Guanajuato–*Sofía Ortega Castillo*
Centro de Investigación en Matemáticas
sofia.ortega@cimat.mx, www.ommgto.wordpress.com

Guerrero–*Vicente Castro Salgado*
Universidad Autónoma de Guerrero, Unidad Académica de Matemáticas
grolimath@gmail.com

Hidalgo–*Federico Menéndez Conde Lara*
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, CIMA
fmclara@uaeh.edu.mx

Jalisco–*José Javier Gutiérrez Pineda*
Preparatoria 7, Universidad de Guadalajara
jjgtzp@hotmail.com

Michoacán–*Armando Sepúlveda López*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Universidad Michoacana
asepulve@live.com.mx

Morelos–*Ricardo Díaz Gutiérrez*
Universidad Autónoma del Estado de Morelos, Facultad de Ciencias
rdg@uaem.mx

Nayarit–*Francisco Javier Jara Ulloa*
Universidad Autónoma de Nayarit
jaraulloa@gmail.com

Nuevo León–*Alfredo Alanís Durán*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, UANL
aalanis56@hotmail.com, sites.google.com/site/eommnl

Oaxaca–*Marcelino Ramírez Ibañez*
Instituto de Agroingeniería, Universidad del Papaloapan
mramirez@unpa.edu.mx

Puebla–*María Araceli Juárez Ramírez*
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP
arjuarez@fcfm.buap.mx

Querétaro–*Jesús Jerónimo Castro*
Universidad Autónoma de Querétaro
jesusjero@hotmail.com, ommqro@gmail.com

Quintana Roo–*Sergio Iván Hernández Delgado*
Universidad de Quintana Roo
ommquintanaroo@hotmail.com

San Luis Potosí–*Eugenio Daniel Flores Alatorre*
Casa Olímpica, San Luis Potosí, San Luis Potosí
ugesaurio@gmail.com, ommslp.blogspot.com

Sinaloa–*Maria Guadalupe Russell Noriega*
Facultad de Ciencias Fis-Mat, Universidad Autónoma de Sinaloa
mgrussell@uas.edu.mx, mgrusselln@gmail.com

Sonora–*José María Bravo Tapia*
Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas
jmbravo@mat.uson.mx

Tabasco–*José Manuel López Cruz*
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco
manuel.lopez@ipicyt.edu.mx

Tamaulipas–*Orlando Ochoa Castillo*
Universidad Autónoma de Tamaulipas
orlandochoa@cimat.mx, www.matetam.com

Tlaxcala–*Mauro Cote Moreno*
Secretaría de Educación Pública de Tlaxcala
electroviso@hotmail.com

Veracruz–*Francisco Gabriel Hernández Zamora*
Universidad Veracruzana
pacozam@msn.com

Yucatán–*Pedro David Sánchez Salazar*
Universidad Autónoma de Yucatán, Facultad de Matemáticas
pdsanchez@gmail.com, www.matematicas.uady.mx

Zacatecas–*Nancy Janeth Calvillo Guevara*
Universidad Autónoma de Zacatecas, Unidad Académica de Matemáticas
ncalvill@mate.reduaz.mx, nautilus.uaz.edu.mx/olimpiada/

Directorio del Comité Organizador de la OMM

Rogelio Valdez Delgado (PRESIDENTE)
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
valdez@uaem.mx

Ignacio Barradas Bibriesca
Centro de Investigación en Matemáticas
barradas@cimat.mx

Víctor Manuel Barrero Calderón
Passport Health
barrero.victor@gmail.com

José Alfredo Cobián Campos
Facultad de Ciencias, UNAM
josealfredocobian@gmail.com

Julio César Díaz Calderón
Universidad Nacional Autónoma de México
julio_dc94@hotmail.com

Marco Antonio Figueroa Ibarra
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
fuerunt@gmail.com

Héctor Raymundo Flores Cantú
Universidad Autónoma de Nuevo León
serolfrotceh@gmail.com

Luis Eduardo García Hernández
Facultad de Ciencias, UNAM
microtarxcaty@ciencias.unam.mx

José Antonio Gómez Ortega
Facultad de Ciencias, UNAM
jago@ciencias.unam.mx

María Eugenia Guzmán Flores
CUCEI, Universidad de Guadalajara
marugeniag@gmail.com

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval
Facultad de Ciencias, UNAM
ssbmplayer@gmail.com

Daniel Perales Anaya
Facultad de Ciencias, UNAM
dperanaya@hotmail.com

Olga Rivera Bobadilla
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del
Estado de México
olgarb@yahoo.com

Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
carlos.rubio@correo.uady.mx

David Guadalupe Torres Flores
Metamorfosis del CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas
ddtorresf@gmail.com

Enrique Treviño López
Lake Forest College
enriquetrevi_o@hotmail.com

Rita Vázquez Padilla
Universidad Autónoma
de la Ciudad de México
ritavz14@gmail.com

Hugo Villanueva Méndez
Centro de Estudios en Física y Matemáticas
Básicas y Aplicadas
Universidad Autónoma de Chiapas
hugo.villanueva@unach.mx

Dirección Postal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

Cubículo 201, Departamento de Matemáticas.
Circuito Exterior, Facultad de Ciencias.
Universidad Nacional Autónoma de México.
Ciudad Universitaria.
Colonia Copilco, C.P. 04510.
Delegación Coyoacán.
México, Distrito Federal.
Teléfono: (55) 5622-4864.
Fax: (55) 5622-5410.
Email: `omm@ciencias.unam.mx`

Página oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas:

`http://ommenlinea.org/`

¡Síguenos en facebook y en twitter!

`http://facebook.com/OlimpiadaMatematicas`

`@ommtw`