SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2019, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán

Impreso y hecho en México.
Mayo de 2019.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2019, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Víctor Hugo Almendra Hernández quien ahora se integra al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Isabel Cristina Martínez Alvarado, quien participó en el número 1 de este 2019.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Un breve recorrido por los polinomios*, de nuestro amigo Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se aborda a los polinomios de una variable y se demuestran algunos de los resultados más importantes sobre estos, haciendo énfasis en la solución de problemas de olimpiada.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2019, incluimos los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2018. También hemos inclido los exámenes con soluciones de la XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la 8^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas, ambos certámenes donde México participó en el primer cuatrimestre de este año 2019.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2000. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2019-2020 y, para el 1° de julio de 2020, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 10 al 15 de noviembre de 2019 en la Ciudad de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2019 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rusia, julio de 2020) y a la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Perú, septiembre de 2020).

De entre los concursantes nacidos en 2003 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2020).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la IX Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2020.

3ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2019, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Tercera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2019.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de 2019.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2019.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 3^a OMMEB se realizará en Oaxtepec, Morelos, del 14 al 17 de junio de 2019. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2020.

Un breve recorrido por los polinomios

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

Definiciones básicas

Un *polinomio* en x es una expresión de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero mayor o igual que cero y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números que pueden ser enteros, racionales, reales o complejos y son llamados los *coeficientes* de $p(x)$. Si $a_n \neq 0$, se dice que $p(x)$ es de *grado* n y se denota $\operatorname{gr} p(x) = n$; en este caso, a_n es llamado *coeficiente principal*. En particular, los polinomios de grado 1, 2 y 3 son llamados *lineal*, *cuadrático* y *cúbico*, respectivamente. Un polinomio constante distinto de cero tiene grado 0, mientras que el polinomio cero se conviene que tiene grado $-\infty$ por razones que pronto quedarán claras.
Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^3(x+1) + (1-x^2)^2 = 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$ es un polinomio con coeficientes enteros de grado 4.

Los polinomios se pueden sumar, restar o multiplicar y, el resultado, seguirá siendo un polinomio. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$, entonces

$$p(x) \pm q(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + \cdots,$$

$$p(x)q(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots + a_n b_m x^{m+n}.$$

El coeficiente de x^ℓ en el producto $p(x)q(x)$ es

$$\sum_{i=0}^{\ell} a_i b_{\ell-i} = a_0 b_\ell + a_1 b_{\ell-1} + \cdots + a_\ell b_0.$$

Un resultado muy obvio sobre la multiplicación de polinomios es que para cualesquiera polinomios $p(x)$ y $q(x)$,

$$\operatorname{gr} p(x)q(x) = \operatorname{gr} p(x) + \operatorname{gr} q(x).$$

La demostración es sencilla. Si el grado de $p(x)$ es n y el grado de $q(x)$ es m, entonces el producto $p(x)q(x)$ contendrá un término de la forma cx^{m+n} y no contiene términos de grado mayor que $m+n$.
La convención de que el grado del polinomio cero es $-\infty$ surge de esta propiedad, de otra forma tal propiedad no sería siempre cierta. ¿Puedes demostrar que si $\operatorname{gr} p(x) \geq \operatorname{gr} q(x)$, entonces $\operatorname{gr} p(x) + q(x) \leq \operatorname{gr} p(x)$?

Algoritmo de la división y Teorema del residuo

A diferencia de la suma, la resta y el producto, un cociente de dos polinomios no necesariamente es un polinomio. En lugar de esto, como en los números enteros, dos polinomios pueden dividirse dejando un residuo.

Teorema. [Algoritmo de la división] Dados los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, con $q(x) \neq 0$, existen únicos polinomios $s(x)$ (polinomio cociente) y $r(x)$ (polinomio residuo), tales que

$$p(x) = q(x)s(x) + r(x) \ \text{ donde } \ \operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} q(x).$$

Demostración. Demostraremos primero la existencia de los polinomios $s(x)$ y $r(x)$. Si $p(x) = 0$, sean $s(x) = r(x) = 0$. Como $q(x) \neq 0$, $\operatorname{gr} q(x)$ es un entero no negativo y $\operatorname{gr} r(x) = -\infty < \operatorname{gr} q(x)$. Supongamos entonces que $p(x) \neq 0$. Sea $m = \operatorname{gr} q(x)$. Si $m > \operatorname{gr} p(x)$, tomamos $s(x) = 0$ y $r(x) = p(x)$. Entonces $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ con $\operatorname{gr} r(x) = \operatorname{gr} p(x) < \operatorname{gr} q(x)$. Supongamos ahora que $\operatorname{gr} p(x) \geq m$. En este caso, la prueba la haremos por inducción en el grado de $p(x)$. Si $\operatorname{gr} p(x) = 0$, entonces $m = 0$ (pues $m \geq 0$ al ser $q(x) \neq 0$). Luego, $p(x), q(x)$ son constantes distintos de cero, de modo que si $s(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $r(x) = 0$, entonces $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$ con $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} q(x)$. Supongamos que el resultado es cierto para cualquier polinomio de grado menor que n (con $n > 0$) y sea $p(x)$ un polinomio de grado n. Consideremos el polinomio

$$p_1(x) = p(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x),$$

donde a_n y b_m son los coeficientes líderes de $p(x)$ y $q(x)$, respectivamente. Observemos que el grado de $p_1(x)$ es estrictamente menor que el grado de $p(x)$, pues el término principal de $p(x)$ se cancela con el término principal de $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)$ en la diferencia $p(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)$. Aplicando la hipótesis de inducción al polinomio $p_1(x)$ se sigue que existen polinomios $s_1(x)$ y $r(x)$ tales que $p_1(x) = s_1(x)q(x) + r(x)$ con $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} q(x)$. Entonces

$$p(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x) + p_1(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x) + s_1(x)q(x) + r(x) = s(x)q(x) + r(x),$$

donde $s(x) = \frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + s_1(x)$. Esto completa el paso inductivo.

Para la unicidad, supongamos que $s_1(x)$ y $r_1(x)$ son polinomios que satisfacen las mismas condiciones que $s(x)$ y $r(x)$. Entonces $p(x) = q(x)s(x)+r(x) = q(x)s_1(x)+r_1(x)$ con $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr} q(x)$ y $\operatorname{gr} r_1(x) < \operatorname{gr} q(x)$. Tenemos entonces que $q(x)(s(x) - s_1(x)) = r_1(x) - r(x)$. Si $s(x) - s_1(x) \neq 0$, entonces $\operatorname{gr}(s(x) - s_1(x)) \geq 0$. Luego,

$$\begin{aligned}\operatorname{gr} q(x) &\leq \operatorname{gr} q(x) + \operatorname{gr}(s(x) - s_1(x)) = \operatorname{gr}(q(x)(s(x) - s_1(x)) = \operatorname{gr}(r_1(x) - r(x)) \\ &\leq \text{máx}\{\operatorname{gr} r_1(x), \operatorname{gr} r(x)\} < \operatorname{gr} q(x),\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. Entonces, $s(x)-s_1(x) = 0$ y, por lo tanto, $r_1(x)-r(x) = 0$. Así, $s(x) = s_1(x)$ y $r(x) = r_1(x)$. □

Por ejemplo, el cociente de la división de $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = x^2 - x - 3$ es $x + 2$ y el residuo es $5x + 5$, esto es,

$$\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x - 3} = x + 2 + \frac{5x + 5}{x^2 - x - 3}.$$

Decimos que el polinomio $p(x)$ es *divisible* por el polinomio $q(x)$ si el residuo $r(x)$ cuando $p(x)$ es dividido por $q(x)$ es igual a 0, esto es, si existe un polinomio $s(x)$ tal que $p(x) = q(x)s(x)$. Como en los números enteros, escribimos $q(x) \mid p(x)$ para indicar que $p(x)$ es divisible por $q(x)$.

Teorema del residuo. El residuo de la división del polinomio $p(x)$ por el binomio $x-a$ es $p(a)$. En particular, el polinomio $p(x)$ es divisible por el binomio $x - a$ si y solo si $p(a) = 0$.

Demostración. Por el teorema anterior, podemos escribir $p(x) = (x - a)s(x) + r(x)$ donde $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr}(x-a) = 1$. Luego, necesariamente $r(x)$ es una constante, digamos $r(x) = r$. Sustituyendo $x = a$ en la primera igualdad, obtenemos que $p(a) = r(a) = r$, esto es, el residuo de la división de $p(x)$ por $x - a$ es $p(a)$.
Si $p(x)$ es divisible por $x - a$, entonces existe un polinomio $s(x)$ tal que $p(x) = (x-a)s(x)$ y, por la unicidad del cociente y del residuo en el teorema anterior, se sigue que el residuo de la división de $p(x)$ entre $x-a$ es 0. Luego, $p(a) = 0$. Recíprocamente, si $p(a) = 0$, entonces el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - a$ es 0. □

Ejemplo 1. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Cuando $p(x)$ es dividido por $x-1$, el residuo es 3. Cuando $p(x)$ es dividido por $x-2$, el residuo es 5. Determinar el residuo cuando $p(x)$ es dividido por el polinomio $x^2 - 3x + 2$.

Solución. Escribamos $p(x) = (x^2 - 3x + 2)s(x) + r(x)$, donde $r(x)$ es el residuo que buscamos. Como $\operatorname{gr} r(x) < \operatorname{gr}(x^2 - 3x + 2) = 2$, podemos escribir $r(x) = ax + b$ para algunos números reales a y b. Por otra parte, por el Teorema del residuo, tenemos que $p(1) = 3$ y $p(2) = 5$. Como $x^2 - 3x + 2 = 0$ para $x = 2$ y $x = 1$, sustituyendo estos valores en la primera igualdad, obtenemos que $p(1) = 0 \cdot s(1) + r(1) = r(1) = a + b$ y $p(2) = 0 \cdot s(2) + r(2) = r(2) = 2a + b$. Como $p(1) = 3$ y $p(2) = 5$, obtenemos que $a + b = 3$ y $2a + b = 5$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, encontramos que $a = 2$ y $b = 1$. Por lo tanto, el residuo buscado es $2x + 1$. □

Raíces de polinomios

Un número a es un *cero* o *raíz* de un polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$, de manera equivalente, si $(x-a) \mid p(x)$. Determinar los ceros de un polinomio $p(x)$ significa resolver la ecuación $p(x) = 0$, lo cual no siempre es posible. Por ejemplo, es conocido que determinar los ceros de un polinomio $p(x)$ es imposible en general cuando el grado de $p(x)$ es mayor o igual que 5. Sin embargo, los ceros de un polinomio siempre pueden ser calculados con una precisión arbitraria. Más precisamente, si $p(a) < 0 < p(b)$, entonces $p(x)$ tiene un cero entre a y b.

Polinomios cuadráticos

No todos los polinomios cuadráticos se pueden factorizar fácilmente. Por ejemplo, si tratamos de determinar los ceros del polinomio $x^2 + x - 1$ mediante una factorización, pronto nos daremos cuenta que no podremos. Necesitamos una forma general para determinar los ceros de polinomios cuadráticos, que evite las limitaciones de la factorización.

Consideremos el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$. Si α y β son las raíces (reales o complejas) de $p(x)$, tenemos que $a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2 + bx + c$, esto es, $ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta = ax^2 + bx + c$. De aquí, $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ y $\alpha\beta = \frac{c}{a}$. Estas relaciones son conocidas como fórmulas de Vieta.

Completando el cuadrado, podemos escribir al polinomio $p(x)$ en la forma

$$p(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Luego, $p(x) = 0$ si y solo si $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$, de donde obtenemos la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

La expresión $D = b^2 - 4ac$ es el *discriminante* de $p(x)$ porque separa las raíces: Si $D > 0$, $p(x)$ tiene dos raíces reales distintas; si $D = 0$, $p(x)$ tiene una raíz real doble; si $D < 0$, $p(x)$ no tiene raíces reales.

Ejemplo 2. Hallar una condición necesaria y suficiente en términos de los coeficientes del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, para que una de sus raíces sea igual al cuadrado de la otra.

Solución. Sean r y r^2 las raíces de $p(x)$. Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos que $r^2 + r = -\frac{b}{a}$ y $r^3 = \frac{c}{a}$. Por otro lado, tenemos que

$$(r^2 + r)^3 = r^3(r+1)^3 = r^3[r^3 + 3(r^2 + r) + 1],$$

de donde tenemos la condición necesaria $\left(-\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{c}{a}\left(\frac{c}{a} - 3\frac{b}{a} + 1\right)$, la cual es equivalente a la relación $b^3 + ca(c+a) = 3abc$.

Esta condición también es suficiente. En efecto, sean r y s las raíces de $p(x)$ y supongamos que $(-\frac{b}{a})^3 = \frac{c}{a}\left(\frac{c}{a} - 3\frac{b}{a} + 1\right)$. Nuevamente, por las fórmulas de Vieta, tenemos que $r+s=-\frac{b}{a}$ y $rs=\frac{c}{a}$. Sustituyendo en la relación de la hipótesis, obtenemos que $(r+s)^3 = rs(rs+3(r+s)+1)$, esto es, $(r^2-s)(r-s^2)=0$, lo que prueba que una de las raíces de $p(x)$ es el cuadrado de la otra. □

Ejemplo 3. Sean a y b enteros. Determinar todas las soluciones de la ecuación

$$(ax-b)^2+(bx-a)^2=x,$$

si se sabe que tiene una solución entera.

Solución. Si $a=b=0$, la ecuación es de primer grado, con única solución $x=0$. Supongamos que $a\neq 0$ o $b\neq 0$. La ecuación se puede reescribir en la forma $(a^2+b^2)x^2-(4ab+1)x+a^2+b^2=0$. Supongamos que c y d son las soluciones de esta ecuación, con c número entero. Como $c=(ac-b)^2+(bc-a)^2$, tenemos que c, además de ser entero, es positivo. Además, como las raíces son reales (¿por qué?), el discriminante de la ecuación es mayor o igual que cero, esto es,

$$(4ab+1)^2-4(a^2+b^2)^2\geq 0.$$

De manera equivalente, tenemos que $(1-2(a-b)^2)(1+2(a-b)^2)\geq 0$ y esto exige que $1-2(a-b)^2\geq 0$. Puesto que $(a-b)^2$ es un entero no negativo (pues a y b son enteros), resulta necesariamente que $(a-b)^2=0$, esto es, $a=b$. Por lo tanto, la ecuación se convierte en $2a^2-(4a^2+1)x+2a^2=0$. De acuerdo con las fórmulas de Vieta, tenemos que $c+d=2+\frac{1}{2a^2}$ y $cd=1$. Como c es un entero, $c=0$ no puede ser raíz (pues $cd=1$), ni tampoco $c=1$ puede serlo (pues $c=1$ y $cd=1$ implican que $d=1$ y $2=c+d=2+\frac{1}{2a^2}$, lo cual es un absurdo). Por lo tanto, $c\geq 2$. Como $d=\frac{1}{c}>0$, se sigue que $c<c+d=2+\frac{1}{2a^2}<3$ y, en consecuencia, $2\leq c<3$. Como c es entero, la única posibilidad es $c=2$ y, de aquí, $d=\frac{1}{2}$. Sustituyendo los valores resulta que $a^2=1$, de donde $a\in\{-1,1\}$. En conclusión, la única posibilidad es $a=b=\pm 1$, en cuyo caso las soluciones son 2 y $\frac{1}{2}$. □

El siguiente resultado es simple pero muy útil. La demostración es fácil y se deja de ejercicio al lector.

Teorema. Si un polinomio $p(x)$ es divisible por un polinomio $q(x)$, entonces cada cero de $q(x)$ también es un cero de $p(x)$.

Ejemplo 4. Determinar todos los enteros positivos n tales que el polinomio x^n+x-1 sea divisible por el polinomio x^2-x+1.

Solución. Usando la fórmula general, encontramos que los ceros de x^2-x+1 son $a=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ y $b=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$. Si x^n+x-1 es divisible por x^2-x+1, entonces los ceros de x^2-x+1 son ceros de x^n+x-1, esto es, $a^n+a-1=0$ y $b^n+b-1=0$. De manera equivalente, tenemos que $a^n=1-a$ y $b^n=1-b$. Por otra parte, como a y b son raíces de x^2-x+1, tenemos que $1=a-a^2=a(1-a)$ y $1=b-b^2=b(1-b)$, esto es, $1-a=\frac{1}{a}$ y $1-b=\frac{1}{b}$. Luego, $a^n=\frac{1}{a}$ y $b^n=\frac{1}{b}$, de donde $a^{n+1}=1$ y $b^{n+1}=1$. Como $a^k=b^k=1$ si y solo si $6\mid k$ (ejercicio), se sigue que $6\mid(n+1)$, esto es, $n=6m-1$ con m entero positivo. □

El Teorema Fundamental del Álgebra

El Teorema Fundamental del Álgebra afirma que todo polinomio no constante tiene al menos un cero complejo. Desafortunadamente, la prueba es un poco complicada para nuestro texto. Sin embargo, usaremos este teorema para demostrar que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene exactamente n raíces. Esto significa que podemos escribir cualquier polinomio $p(x)$ en la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

donde los números $r_1, \ldots, r_n$ son reales o complejos. Debería ser claro por qué $f(r_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$.

Para demostrar que todo polinomio no constante se puede escribir de tal forma, usaremos el Teorema Fundamental del Álgebra. La prueba la haremos por inducción en el grado del polinomio. Si el polinomio es de grado 1, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para polinomios de grado $n - 1$ y consideremos un polinomio $p(x)$ de grado n. De acuerdo con el Teorema Fundamental del Álgebra, $p(x)$ tiene una raíz r_1, esto es, $(x - r_1) \mid p(x)$. Luego, existe un polinomio $q_1(x)$ tal que $p(x) = (x-r_1)q_1(x)$. Como $\text{gr}\, p(x) = n = \text{gr}\,(x-r_1)q_1(x) = \text{gr}\,(x-r_1)+\text{gr}\, q_1(x)$, tenemos que $\text{gr}\, q_1(x) = n-1$. Luego, por la hipótesis de inducción, el polinomio $q_1(x)$ tiene exactamente $n - 1$ raíces, esto es, $q_1(x) = c(x - r_2)(x - r_3)\cdots(x - r_n)$. Por lo tanto, $p(x) = c(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$.
El resultado que acabamos de demostrar, solo muestra la existencia de las raíces; encontrarlas es otro problema.

Ejemplo 5. Sea $p(x)$ un polinomio cuadrático. Demostrar que existen polinomios cuadráticos $g(x)$ y $h(x)$ tales que $p(x)p(x + 1) = g(h(x))$.

Solución. Podríamos comenzar escribiendo $p(x) = ax^2 + bx + c$ y trabajar con los coeficientes de $p(x)p(x+1)$. Es factible, pero muy enmarañado. Mejor trabajemos con las raíces. Escribamos $p(x) = a(x - r)(x - s)$. Entonces,

$$\begin{aligned} p(x)p(x+1) &= a^2 \cdot (x - r)(x - s + 1) \cdot (x - s)(x - r + 1) \\ &= a^2[(x^2 - (r + s - 1)x + rs) - r][(x^2 - (r + s - 1)x + rs) - s]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, basta poner $g(x) = a^2(x - r)(x - s)$ y $h(x) = x^2 - (r + s - 1)x + rs$.□

Polinomios con coeficientes enteros

Consideremos un polinomio $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros. La diferencia $p(x) - p(y)$ se puede escribir en la forma

$$a_n(x^n - y^n) + \cdots + a_2(x^2 - y^2) + a_1(x - y),$$

en donde cada sumando $a_i(x^i - y^i)$ es divisible por el polinomio $x - y$. Esto nos lleva a la siguiente importante propiedad aritmética de los polinomios con coeficientes enteros.

Teorema de las raíces enteras. Si $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, entonces $p(a) - p(b)$ es divisible por $a - b$ para cualesquiera enteros distintos a y b. En particular, todas las raíces enteras de $p(x)$ dividen a $p(0)$.

Existe un resultado análogo acerca de raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

Teorema de las raíces racionales. Sea $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si un número racional $\frac{r}{s}$ (con r, s enteros, $s \neq 0$ y r, s primos relativos) es una raíz de $p(x)$, entonces $r \mid a_0$ y $s \mid a_n$.

Demostración. Tenemos que

$$s^n p\left(\frac{r}{s}\right) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_0 s^n.$$

Todos los sumandos, excepto posiblemente el primero, son múltiplos de s y todos, excepto posiblemente el último, son múltiplos de r. Luego, $s \mid a_n r^n$ y $r \mid a_0 s^n$. Como r y s son primos relativos, se sigue que $s \mid a_n$ y $r \mid a_0$. $\square$

Ejemplo 6. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros que toma los valores ± 1 en tres diferentes enteros. Demostrar que $p(x)$ no tiene raíces enteras.

Solución. Sean a, b, c enteros distintos tales que $p(a), p(b), p(c) \in \{-1, 1\}$. Supongamos, por contradicción, que existe un entero d tal que $p(d) = 0$. Por el Teorema de las raíces enteras, tenemos que $a - d$ divide a $p(a) - p(d) = p(a)$, $b - d$ divide a $p(b) - p(d) = p(b)$ y $c - d$ divide a $p(c) - p(d) = p(c)$. Esto implica que $a - d$, $b - d$ y $c - d$ dividen todos a 1. Luego, $a - d, b - d, c - d \in \{1, -1\}$. Esto implica que al menos dos de las diferencias $a - d$, $b - d$, $c - d$ son iguales a 1 o a -1 y, esto a su vez implica que al menos dos de los números a, b, c son iguales, lo que es una contradicción. $\square$

Ejemplo 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números enteros distintos con $n > 1$. Demostrar que el polinomio $p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) - 1$ no puede ser escrito en la forma $g(x)h(x)$ donde $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios no constantes con coeficientes enteros.

Solución. Supongamos, por contradicción, que $p(x) = g(x)h(x)$ para ciertos polinomios no constantes $g(x)$ y $h(x)$ con coeficientes enteros. Luego, tenemos que $g(a_i)h(a_i) = p(a_i) = -1$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $g(a_i)$ y $h(a_i)$ son enteros (pues $g(x)$ y $h(x)$ son polinomios con coeficientes enteros), uno debe ser 1 y el otro debe ser -1. Por lo tanto, $g(a_i) + h(a_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, lo cual implica que el polinomio $q(x) = g(x) + h(x)$ tiene n raíces distintas.
Por otro lado, como $g(x)h(x) = p(x)$, tenemos que $\operatorname{gr} g(x)h(x) = \operatorname{gr} p(x) = n$. Como $g(x)$ y $h(x)$ no son constantes, ni $g(x)$ ni $h(x)$ tiene grado mayor que $n - 1$. Por lo tanto, el grado de $q(x) = g(x) + h(x)$ es menor que n, lo cual implica que $q(x)$ tiene menos de n raíces, lo que es una contradicción. $\square$

Ejemplo 8. [Olimpiada Internacional, 1993] Sea $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, donde $n > 1$ es un entero. Demostrar que $f(x)$ no puede escribirse como el producto de dos polinomios no constantes con coeficientes enteros.

Solución. Supongamos, por contradicción, que $f(x) = p(x)q(x)$ donde $p(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0$ son polinomios no constantes con coeficientes enteros. Luego, $k > 0$ y $m > 0$. Como $\operatorname{gr} f(x) = \operatorname{gr} p(x) + \operatorname{gr} q(x)$, tenemos que $k + m = n$ con $k < n$ y $m < n$. De la igualdad $f(x) = p(x)q(x)$, se sigue que $a_0b_0 = 3$ y $a_kb_m = 1$. Como los coeficientes de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ son enteros, tenemos que $a_0 = \pm 1$ y $b_0 = \pm 3$ (o al revés) y $a_k = b_m = \pm 1$.
Sea ℓ el menor índice con la propiedad de que $3 \nmid b_\ell$. Como $3 \mid b_0$ y $3 \nmid b_m$, necesariamente $0 < \ell \leq m$. Además, por la definición de ℓ, tenemos que $a_\ell b_0 + a_{\ell-1}b_1 + \cdots + a_1b_{\ell-1}$ es divisible por 3. Como $a_\ell b_0 + a_{\ell-1}b_1 + \cdots + a_1b_{\ell-1} + a_0b_\ell$ es el coeficiente de x^ℓ en el producto $p(x)q(x)$ y $3 \nmid a_0b_\ell$, se sigue que dicho coeficiente no es divisible por 3. Por lo tanto, el coeficiente de x^ℓ en $f(x)$ no es divisible por 3, lo cual implica que $\ell \geq n - 1$. Así, $n - 1 \leq \ell \leq m < n$, esto es, $\ell = m = n - 1$. En consecuencia, $n = k + m = k + n - 1$ de donde $k = 1$. De esta manera, $p(x) = a_1x + a_0 = \pm x \pm 1$ (pues $a_0 = \pm 1$ y $a_1 = a_k = \pm 1$). Es fácil ver que las posibles raíces de $p(x)$ son 1 y -1. Como toda raíz de $p(x)$ es raíz de $f(x)$, se sigue que $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$. Sin embargo, tenemos que $f(1) = 1 + 5 + 3 = 9$ y $f(-1) = (-1)^n + 5(-1)^{n-1} + 3 = 4(-1)^{n-1} + 3 = 7$ o -1, lo que es una contradicción. $\square$

Polinomios simétricos elementales y fórmulas de Vieta

¿Hay alguna relación entre las raíces de un polinomio y sus coeficientes? En el caso de los polinomios cuadráticos ya vimos que sí la hay. Consideremos un polinomio de grado $n > 0$ de la forma

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n).$$

Comparando los coeficientes de x^{n-1} en cada lado de la igualdad, obtenemos que $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -a_1/a_0$. De manera análoga, si ahora comparamos los términos constantes obtenemos que $r_1r_2\cdots r_n = (-1)^n a_n/a_0$. Las relaciones generales entre las raíces de $p(x)$ y sus coeficientes, están dadas por las fórmulas de Vieta, como veremos a continuación. Antes necesitamos una definición.
Sea $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. El k-ésimo *polinomio simétrico elemental* en las variables $x_1, \ldots, x_n$, es el polinomio σ_k definido por

$$\sigma_k = \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k},$$

donde la suma se realiza sobre los subconjuntos $\{i_1, \ldots, i_k\}$ de tamaño k del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. En particular, $\sigma_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $\sigma_n = x_1x_2\cdots x_n$.

Teorema. [Fórmulas de Vieta] Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son las raíces del polinomio $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$, entonces

$$a_k = (-1)^k \sigma_k(r_1, \ldots, r_n)a_0$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que $n > 1$ y escribamos $p(x) = (x - r_n)q(x)$, donde $q(x) = (x - r_1)\cdots(x - r_{n-1})$. Determinemos el coeficiente a_k de x^k en el polinomio $p(x)$. Como los coeficientes de x^{k-1} y x^k en $q(x)$ son $b_{k-1} = (-1)^{k-1}\sigma_{k-1}(r_1, \ldots, r_{n-1})a_0$ y $b_k = (-1)^k\sigma_k(r_1, \ldots, r_{n-1})a_0$, respectivamente, tenemos que

$$a_k = -r_n b_{k-1} + b_k = (-1)^k \sigma_k(r_1, \ldots, r_n)a_0,$$

lo que completa la inducción. $\square$

Ejemplo 9. Encontrar todos los polinomios con coeficientes racionales

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tales que a, b y c sean raíces de $p(x)$.

Solución. Aplicando las fórmulas de Vieta, tenemos que $a+b+c = -a$, $ab+bc+ca = b$ y $abc = -c$. La tercera ecuación se puede escribir como $(ab+1)c = 0$, lo cual implica que $ab = -1$ o $c = 0$.
Si $c = 0$, sustituyendo en la primera y en la segunda ecuación del sistema anterior obtenemos que $a + b = -a$ y $ab = b$. Resolviendo este sistema de dos ecuaciones, obtenemos las soluciones $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, $(1, -2, 0)$.
De la primera ecuación del sistema de tres ecuaciones, tenemos que $c = -2a - b$. Luego, si $ab = -1$, la segunda ecuación del sistema es $-1 + b(-2a - b) + (-2a - b)a = b$, esto es, $2a^2 - 2 + b + b^2 = 0$. Multiplicando por a^2 y usando que $ab = -1$, obtenemos que $2a^4 - 2a^2 - a + 1 = 0$. Así, a es una raíz racional del polinomio $2x^4 - 2x^2 - x + 1$. Aplicando el Teorema de las raíces racionales, los valores posibles de a son ± 1 y $\pm\frac{1}{2}$. Verificando cada posibilidad, es fácil ver que la única solución es $a = 1$, de donde $(a, b, c) = (1, -1, -1)$.
Por lo tanto, los polinomios que satisfacen las condiciones del problema son el polinomio cero, $x^3 + x^2 - 2x$ y $x^3 + x^2 - x - 1$. $\square$

Ejemplo 10. Encontrar todos los polinomios de la forma $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ con $a_j \in \{-1, 1\}$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, cuyas raíces sean números reales.

Solución. Observemos que para cualesquiera números reales $r_1, \ldots, r_n$ se satisface que

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j.$$

Luego, si $r_1, \ldots, r_n$ son las raíces del polinomio dado, de las fórmulas de Vieta tenemos que $\sum_{i=1}^{n} r_i = -a_{n-1}$, $\sum_{i<j} r_i r_j = a_{n-2}$ y $r_1 r_2 \cdots r_n = a_0 = \pm 1$. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} \leq 3$ y $r_1^2 r_2^2 \cdots r_n^2 = 1$. Por otro lado, por la desigualdad MA-MG aplicada a los números no negativos $r_1^2, \ldots, r_n^2$, tenemos que $(r_1^2 r_2^2 \cdots r_n^2)^{1/n} \leq \frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n}$, esto es, $1 \leq \frac{r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2}{n} \leq \frac{3}{n}$, de donde se sigue que $n \leq 3$.
Si $n = 1$, los polinomios son $x + 1$ y $x - 1$. Si $n = 2$, los polinomios son $x^2 + x - 1$ y $x^2 - x - 1$. Si $n = 3$, tenemos la igualdad en la desigualdad MA-MG anterior, lo que significa que $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2$, esto es, $|r_1| = |r_2| = |r_3|$. Como $r_1 r_2 r_3 = \pm 1$, se sigue que $|r_1||r_2||r_3| = 1$. Por lo tanto, $|r_1|^3 = |r_2|^3 = |r_3|^3 = 1$. Así, $|r_1| = |r_2| = |r_3| = 1$ y, en consecuencia, $r_1 = \pm 1$, $r_2 = \pm 1$ y $r_3 = \pm 1$. Ahora es fácil determinar los polinomios de grado 3: $(x^2 - 1)(x - 1) = x^3 - x^2 - x + 1$ y $(x^2 - 1)(x + 1) = x^3 + x^2 - x - 1$.
$\square$

A continuación dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1) Demuestra que el polinomio $p(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$ no tiene raíces reales. (Sugerencia: Demuestra que $p(r) > 0$ para todo número real r).

2) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y sean a, b números enteros distintos tales que $p(a)p(b) = -(a - b)^2$. Demuestra que $p(a) + p(b) = 0$.
(Sugerencia: Considera los números $A = \frac{p(a)}{a-b}$ y $B = \frac{-p(b)}{a-b}$).

3) Considera el polinomio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + 1$ con coeficientes reales no negativos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Si $p(x)$ tiene n raíces reales, demuestra que $p(2) \geq 3^n$. (Sugerencia: Usa las fórmulas de Vieta y la desigualdad MA-MG).

4) Determina el residuo de la división del polinomio $x^{2019} + 1$ entre el binomio $x - 1$.

5) Sean a, b y c números reales positivos. ¿Es posible que cada uno de los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$, $q(x) = cx^2 + ax + b$ y $r(x) = bx^2 + cx + a$ tenga dos raíces reales? (Sugerencia: ¿Qué condiciones debe satisfacer un polinomio cuadrático para tener dos raíces reales?)

6) Sea $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ un polinomio con coeficientes enteros distintos de cero. Si $p(x)$ tiene n ceros enteros distintos y son primos relativos dos a dos, demuestra que a_{n-1} y a_n también son primos relativos. (Sugerencia: Procede por contradicción y usa las fórmulas de Vieta).

7) Demuestra que no existe un polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ con coeficientes enteros y de grado positivo con la propiedad de que cada uno de los números $p(0), p(1), p(2), \ldots$ sea primo. (Sugerencia: Si existiera tal polinomio, entonces a_0 sería primo. Prueba que el polinomio $q(x) = p(a_0 x) - a_0$ tiene una infinidad de raíces).

8) Demuestra que no es posible escribir el polinomio $p(x) = x^{105} - 9$ como el producto de dos polinomios con coeficientes enteros y cada uno de grado menor que 105. (Sugerencia: Supón que $p(x) = q(x)r(x)$ donde $q(x)$ y $r(x)$ son polinomios con coeficientes enteros y de grados menores que 105. Considera el producto de las raíces de $q(x)$).

9) Un polinomio *mónico* es un polinomio cuyo coeficiente líder es igual a 1. Si $p(x)$ es un polinomio mónico de grado 4 tal que $p(1) = 10$, $p(2) = 20$ y $p(3) = 30$, determina el valor de $p(12) + p(-8)$. (Sugerencia: Muestra que el polinomio $p(x) - 10x$ es divisible por el polinomio $(x-1)(x-2)(x-3)$).

10) Sea $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ un polinomio con coeficientes complejos con raíces $r_1, \ldots, r_n$ y sea $q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ un polinomio con coeficientes complejos con raíces $r_1^2, \ldots, r_n^2$. Demuestra que si $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ y $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$ son números reales, entonces $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ también es un número real. (Sugerencia: Observa que $q(x^2) = (-1)^n p(x)p(-x)$).

Bibliografía

1) R. Gelca, T. Andreescu. *Putnam and Beyond.* Springer, 2007.

2) T. Andreescu, R. Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser, 2009.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2019. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Supongamos que $x\sqrt{2}$ es un número racional para algún número x racional. Encuentra el valor de x.

Problema 2. El largo de un rectángulo es tres veces su alto. Si el perímetro y el área son ambos iguales a k, ¿cuál es el valor de k?

Problema 3. Alex quiere construir una palabra de 6 letras usando las letras A, C, G y N, de tal manera que

- Las primeras tres letras sean distintas por parejas, así como también las últimas tres.
- La primera, segunda, cuarta y quinta letras sean distintas por parejas.

¿Cuantas palabras distintas puede construir?

Problema 4. Consideremos la sucesión de números enteros $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de manera que $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (a_n)! + 1$ para cada $n > 1$. Encuentra el menor entero n tal que $a_n > 10^{10}$.

Problema 5. Lunasa, Merlin y Lyrica tienen un sombrero cada uno. Cada día, dos de ellos son tomados aleatoriamente e intercambian sus sombreros. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 2017 días cada persona tenga su propio sombrero de vuelta?

Problema 6. Calcula el valor de la suma

$$100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + \cdots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2.$$

Problema 7. Un trapecio $ABCD$ con bases AB y CD, tiene longitudes de sus lados $AB = 28$ cm, $BC = 13$ cm, $CD = 14$ cm y $DA = 15$ cm. Las diagonales AC y BD se intersecan en P. Si E y F son los puntos medios de AP y BP, respectivamente, encuentra el área del cuadrilátero $CDEF$.

Problema 8. Un reloj averiado muestra las 9:57 a.m. Sin embargo, la hora correcta es 10:10 a.m. Hay dos botones en el reloj, uno de ellos aumenta la hora en 9 minutos y el otro disminuye la hora en 20 minutos. ¿Cuál es la menor cantidad de veces necesarias que se tiene que presionar los botones para configurar la hora correcta?

Problema 9. Calcula el valor de $\frac{x}{w}$ si $w \neq 0$ y $\frac{x+6y-3z}{-3x+4w} = \frac{-2y+z}{x-w} = \frac{2}{3}$.

Problema 10. Los puntos A, B, C y D están sobre una línea recta en ese orden de manera que $\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{CD}$. Si $AC = 3$ cm y $BD = 4$ cm, ¿cuál es el valor de AD?

Problema 11. Sean a y b enteros mayores que 1. Denotemos por (a, b) al máximo común divisor de a y b, y por $[a, b]$ a su mínimo común múltiplo.
Si $((a, b) + 1)([a, b] + 1) = 2018$, demuestra que $|a - b|$ es un número primo.

Problema 12. Considera un tablero de 2018×2018. En cada casilla hay un foco prendido o apagado. Los siguientes dos movimientos están permitidos:

1) Tomar 1009 focos consecutivos en una misma fila o columna y cambiar el estado de cada uno de ellos.

2) Tomar 1008 focos consecutivos en una misma fila o columna y cambiar el estado de cada uno de ellos.

Muestra que no importa cómo están los focos inicialmente, es posible hacer que solo los focos de los bordes estén prendidos mediante una cantidad finita de movimientos permitidos. (Nota: Cambiar de estado un foco es pasarlo de prendido a apagado o viceversa).

Problema 13. Sea ABC un triángulo con $\angle ABC = 90°$ y $AB > BC$. Sea D un punto sobre el lado AB tal que $BD = BC$. Sean E el pie de la perpendicular desde D hacia AC y F un punto tal que CD es la mediatriz de BF. Demuestra que EC es la bisectriz del ángulo $\angle BEF$.

Problema 14. Un número entero N, múltiplo de 83, es tal que su cuadrado tiene 63 divisores positivos. Determina el menor valor de N.

Problema 15. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar los números enteros del 2009 al 2018 en una lista, de manera que el primero no sea múltiplo de 3, ni la suma de los dos primeros sea múltiplo de 3, ni la suma de los tres primeros sea múltiplo de 3, etcétera, hasta la suma de todos los números tampoco sea múltiplo de 3?

Problema 16. Demuestra que para todo entero $n \geq 2$, se cumple que

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3}.$$

Problema 17. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $AB = AD$ y $AB + BC = CD$. Determina la medida del ángulo $\angle CDA$.

Problema 18. Determina todos los enteros positivos $n > 1$ tales que $n + D(n)$ es una potencia de 10, donde $D(n)$ denota el mayor divisor de n que es menor que n.

Problema 19. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con $c > a$ y $c > b$. Demuestra que

$$3 < \frac{c^3 - a^3 - b^3}{c(c-a)(c-b)} \leq \sqrt{2} + 2.$$

Problema 20. Sea $n > 1$ un entero y sea $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ un polinomio con n raíces reales (no necesariamente distintas). Considera el polinomio

$$q(x) = p(x+1)p(x+2)\cdots p(x+2019).$$

Si $p(2019) = 2019$, demuestra que $q(x)$ tiene al menos 1974 raíces distintas $r_1, \ldots, r_{1974}$, tales que $|r_j| < 2019$ para $j = 1, \ldots, 1974$.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Veamos que la única posibilidad es $x = 0$. Supngamos que $x \neq 0$, entonces el número racional $\sqrt{2}x = a$ es diferente de cero. Dividiendo entre x, obtenemos que $\sqrt{2} = \frac{a}{x}$ la cual es una división de números racionales, lo que es un absurdo puesto que es bien conocido que $\sqrt{2}$ no es racional. Por lo tanto, la única posibilidad es $x = 0$.

Solución del problema 2. Supongamos que la altura del rectángulo es a. Entonces, las condiciones del problema dicen que $3a$ es el largo y que $8a = 3a^2$ (el perímetro y el área son iguales). Entonces, $a(3a - 8) = 0$. Como a es una distancia positiva, se debe de cumplir que $3a - 8 = 0$, esto es, $a = \frac{8}{3}$, de donde $k = \frac{64}{3}$.

Solución del problema 3. Notemos que hay $4!$ formas de escoger las letras en el primero, segundo, cuarto y quinto lugar, pues tienen que ser una permutación de las cuatro letras A, C, G y N. Habiendo escogido las letras de estos lugares, la tercera y sexta tienen 2 posibilidades cada una, pues se debe cumplir que sean distintas a las de las posiciones uno, dos y, cuatro, cinco, respectivamente. Por lo tanto, Alex puede construir $2^2 \cdot 4! = 4 \cdot 24 = 96$ palabras distintas.

Solución del problema 4. Notemos que $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 7$, $a_5 = 7! + 1 = 5041$ y $a_6 = 5041! + 1 > 5004 \cdot 5003 \cdot 5002 \cdot 5001 > 5000^4 = 5^4 \cdot 10^{12} > 10^{10}$, de donde la respuesta es $n = 6$.

Solución del problema 5. Veamos que es imposible que en el día 2017 tengan todos sus sombreros de vuelta. Supongamos que los sombreros son colores de los vértices de un triángulo equilátero. Cada día lo que ocurre es que se intercambian un par de colores de vértices que se puede pensar como que se reflejó por el eje de simetría que pasa por el tercer vértice. Luego, cada día se intercambia la orientación de los colores con respecto a las manecillas del reloj. Por lo tanto, si se quiere que al final se tenga la misma orentación, es necesario una cantidad par de reflexiones, lo cual es imposible ya que 2017 es impar. Por lo tanto, es imposible obtener la misma orientación (y en particular la misma posición original) al cabo de 2017 días.

Solución del problema 6. Veamos que para cualquier número n se cumple que $n^2 - (n-1)^2 - (n-2)^2 + (n-3)^2 = 4$. Luego, si agreamos 0^2 a la suma, obtenemos que el resultado es igual a $100^2 + 25 \cdot 4 = 10100$.

Solución del problema 7. Notemos que la recta EF es igual a la mitad de AB por ser el segmento que une puntos medios. Entonces, $EF = CD = 14$ cm y, además, se cumple que los segmentos EF y CD son paralelos. Por lo tanto, el cuadrilátero $CDEF$ es un paralelogramo, de donde se deduce que $EP = PC$ y $\frac{CE}{CA} = \frac{2}{3}$. Se sigue que la altura desde C sobre EF es $\frac{2}{3}$ de la altura desde C sobre AB. Para determinar la altura desde C sobre AB, sea M el punto medio de AB. Tenemos que el cuadrilátero $DAMC$ es un paralelogramo, por lo que $CM = 15$ cm. Luego, si H es el pie de la altura desde C sobre AB, por el teorema de Pitágoras tenemos que $13^2 - HB^2 = 15^2 - (14 - HB)^2$, de donde obtenemos que $HB = 5$ cm y, por lo tanto, la altura buscada es 12 cm. Entonces, la altura desde C sobre EF es 8 cm. Luego, el cuadrilátero $CDEF$ es un paralelogramo con base 14 cm y altura 8 cm, de donde se sigue que su área es $14 \cdot 8 = 112$ cm^2.

Solución del problema 8. Se necesita aumentar la hora en 13 minutos. Si apretamos el botón de los 9 minutos a veces y apretamos el botón de los 20 minutos b veces, necesitaríamos que $9a - 20b = 13$. También podemos notar que si se satisface esta ecuación, b crece cuando a crece, por lo tanto es suficiente minimizar a. Por la condición del problema, el dígito de las unidades de a debe ser 7. Sin embargo, $63 - 20b = 13$ no tiene soluciones enteras, luego el siguiente candidato es $a = 17$, el cual nos da la solución $b = 7$, de donde obtenemos que la mínima cantidad de veces que se necesita presionar los botones para configurar la hora correcta es 24.

Solución del problema 9. Tenemos que $x + 6y - 3z = \frac{2}{3}(-3x + 4w)$ y $-2y + z = \frac{2}{3}(x - w)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{w} &= \frac{(x + 6y - 3z) + 3(-2y + z)}{(-3x + 4w) + 3(x - w)} = \frac{\frac{2}{3}(-3x + 4w) + 3 \cdot \frac{2}{3}(x - w)}{(-3x + 4w) + 3(x - w)} \\
&= \frac{\frac{2}{3}[(-3x + 4w) + 3(x - w)]}{(-3x + 4w) + 3(x - w)} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Solución del problema 10. Si denotamos la longitud BC por x, la ecuación se traduce a $\frac{3-x}{x} = \frac{7-x}{4-x}$, esto es, $x^2 - 7x + 6 = 0$, cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = 6$. Puesto que $x < 3$, la única posibilidad es $x = 1$, de donde $AD = 7 - x = 6$ cm.

Solución del problema 11. La factorización en primos de 2018 es 2×1009. Como cada uno de los factores $(a, b) + 1$ y $[a, b] + 1$ es mayor que 1, debe ocurrir que alguno es 2 y el otro es 1009. Luego, $(a, b) = 1$ y $[a, b] = 1008$, pues $(a, b) \leq [a, b]$. Por lo tanto, a y b son primos relativos y su producto es igual a $1008 = 2^4 \times 3^2 \times 7$. Las parejas posibles son $(16, 63)$, $(144, 7)$, $(112, 9)$ y $(1008, 1)$. En cada caso, los valores de $|a - b|$ son 47, 137, 103, 1007 y es fácil verificar que todos son primos.

Solución del problema 12. Demostraremos que el estado de cada foco se puede cambiar sin alterar el estado de los demás. Si el foco está en alguna de las primeras 1009 filas, entonces hacemos un movimiento 1) con él y los 1008 focos debajo; luego, hacemos un movimiento 2) solo con los 1008 focos debajo. Como cada foco debajo cambió de estado dos veces, vuelve a su estado original, mientras que el foco señalado cambió solo una vez. Si el foco que queremos cambiar está en las últimas 1009 filas, hacemos un par de movimientos análogos pero con focos encima de él. Como esto nos permite cambiar el estado de cualquier foco sin alterar los demás, podemos asegurar que cada foco en el borde quede prendido y todos los demás queden apagados.

Solución del problema 13. Como DBC es un triángulo isósceles por construcción y $\angle ABC = 90°$, tenemos que $\angle BDC = \angle BCD = 45°$. Como CD es mediatriz de BF, si P es su intersección, entonces $BP = PF$ y $\angle BPC = \angle FPC$. Por el criterio LAL, los triángulos BPC y FPC son congruentes y, en particular, $\angle PCF = 45°$. De la misma manera, del otro lado de la mediatriz, llegamos a que $\angle PDF = 45°$ y, por lo tanto, $\angle CFD = 90°$. Ahora bien, como $\angle DEC = 90° = \angle DBC$, entonces $DBCE$ es cíclico, pues tiene dos ángulos opuestos que suman $180°$. Se sigue que $\angle BEC = \angle BDC = 45°$. Además, $DEFC$ es cíclico, pues $\angle DEC = 90° = \angle DFC$, que son dos ángulos que abren el mismo arco. Entonces, $\angle CEF = \angle CDF = 45°$. Por todo lo anterior, tenemos que $\angle BEC = \angle CEF = 45°$, esto es, CE es bisectriz del ángulo $\angle BEF$.

Solución del problema 14. Tenemos que 83 es un número primo y $63 = 9 \times 7$. Luego, si $N = 83^{\alpha_1} \cdot p_1^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ es la factorización de N como producto de potencias de primos distintos, entonces $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_k + 1) = 63$. Es fácil ver que tomar α_1 lo menor posible, minimiza el valor de N. Con esta observación, consideraremos tres casos:

a) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$. En este caso, $N = 83 \cdot 3 \cdot 2^3 = 1992$.

b) $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4$. En este caso, $N = 83^3 \cdot 2^4 > 83 \cdot 24$.

c) $\alpha_1 = 31$. En este caso, $N = 83^{31}$ que claramente es mucho mayor que $83 \cdot 24$.

Por lo tanto, el menor valor posible de N es 1992.

Solución del problema 15. Los residuos que dejan los números del 2009 al 2018 al dividirse entre 3 son $2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1$ y 2, respectivamente. Los números que dejan residuo 0 no pueden ir al inicio. Analizamos los otros dos casos:

a) Empieza con 1. El siguiente residuo debe ser 1 y, para no sumar un múltiplo de 3, la lista se construye como $1, 1, 2, 1, 2$, donde se rompe pues solo quedan disponibles 2's o 0's.

b) Empieza con 2. El siguiente residuo es 2 y, para no sumar un múltiplo de 3, la lista se construye como $2, 2, 1, 2, 1, 2, 1$. Solo falta acomodar los 0's que pueden ir en cualquier lugar excepto el primero. Usando los otros seis números como separadores, tenemos $\binom{9}{3}$ maneras de colocarlos. Falta simplemente ordenar los elementos de cada conjunto: Hay $4!$ para los de residuo 2; $3!$ para los de residuo 1 y $3!$ para los de residuo 0.

Por lo tanto, la cantidad total de maneras es $\binom{9}{3}4!3!3! = 84 \times 24 \times 6 \times 6 = 72576$.

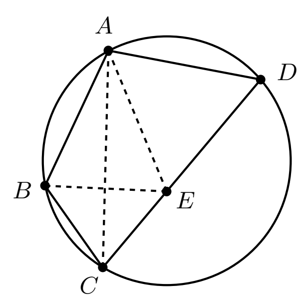
Solución del problema 16. Observemos que $\frac{1}{j^2} < \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}$ para todo entero $j > 1$. Sean n y k enteros mayores que 1. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j^2} &< \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\\ &= \frac{1}{k-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{k-1}.\end{aligned}$$

En particular, para $k = 6$ obtenemos que $\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{5}$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{5} = \frac{2389}{3600} < \frac{2}{3}.$$

Solución del problema 17. Elijamos el punto E sobre el segmento CD tal que $DE = AD$. Entonces, $CE = CD - AD = CD - AB = BC$ y, por lo tanto, el triángulo CEB es isósceles.



Ahora, como $AB = AD$, tenemos que $\angle BCA = \angle ACD$. Esto muestra que CA es la bisectriz del ángulo $\angle BCD = \angle BCE$. Por lo tanto, A está sobre la mediatriz de BE

(ya que el triángulo CEB es isósceles) y, en consecuencia, $AE = AB = AD = DE$. Así, el triángulo AED es equilátero, de donde se sigue que $\angle CDA = 60^\circ$.

Solución del problema 18. Sea p el menor divisor primo de n. Observemos que $D(n) = \frac{n}{p}$. Entonces, $n + D(n) = pD(n) + D(n) = (p+1)D(n)$. Luego, $(p+1)D(n) = 10^k$ para algún entero $k \geq 0$. Como 10^k no es múltiplo de 3, $p \neq 2$ y $p \neq 5$. Como $\frac{n}{p}$ es un entero y $p \neq 2$, necesariamente n es impar. De aquí, $D(n) = \frac{n}{p}$ es impar y, como divide a una potencia de 10, $D(n)$ necesariamente es una potencia de 5. Si $D(n) = 5^0 = 1$, entonces $p = \frac{10^k}{D(n)} - 1 = 10^k - 1$ es múltiplo de 9, lo cual no puede ser ya que p es primo. Esto implica que $5 \mid D(n)$ y, como $pD(n) = n$, se sigue que $5 \mid n$. Por lo tanto, $p \leq 5$ ya que p es el menor divisor primo de n. Como p es distinto de 2 y de 5, la única posibilidad es $p = 3$. En este caso, tenemos que $4D(n) = 10^k$. Si 10^k fuera múltiplo de 8, entonces $D(n)$ sería par, lo cual no es posible. Por lo tanto, 10^k es múltiplo de 4 pero no es múltiplo de 8. Como 10 no es múltiplo de 4 y 10^k es múltiplo de 8 para todo entero $k \geq 3$, la única posibilidad es $k = 2$, de donde $D(n) = \frac{10^2}{4} = 25$ y, por lo tanto, $n = pD(n) = 3 \cdot 25 = 75$ es la única solución.

Solución del problema 19. Como $c > a$ y $c > b$, necesariamente c es la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo. Luego, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $c^2 = a^2 + b^2$. Entonces,

$$\begin{aligned} c^3 - a^3 - b^3 &= c \cdot c^2 - a^3 - b^3 = c(a^2 + b^2) - a^3 - b^3 = ca^2 + cb^2 - a^3 - b^3 \\ &= a^2(c-a) + b^2(c-b) = (c^2 - b^2)(c-a) + (c^2 - a^2)(c-b) \\ &= (c-a)(c-b)(c+a+c+b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las desigualdades a demostrar son equivalentes a las desigualdades $c < a + b \leq \sqrt{2}c$. La desigualdad izquierda es la desigualdad del triángulo. La desigualdad derecha se sigue de las siguientes desigualdades equivalentes

$$a + b \leq \sqrt{2}c \iff (a+b)^2 \leq 2c^2 = 2a^2 + 2b^2 \iff 0 \leq (a-b)^2.$$

Solución del problema 20. Para cada $j = 1, \ldots, 2019$, sea $h_j(x) = p(x+j)$. Consideremos el polinomio $h_{2019}(x)$. Así como el polinomio $p(x)$, $h_{2019}(x)$ tiene n raíces reales $s_1, \ldots, s_n$ y $h_{2019}(0) = p(2019) = 2019$. De acuerdo con las fórmulas de Vieta,[2] el producto $|s_1 \cdots s_n|$ es igual a 2019. Como $n \geq 2$, existe al menos un s_j tal que $|s_j| \leq \sqrt{2019} < \sqrt{2025} = 45$. Denotemos tal s_j por m. Ahora, para $j = 0, 1, \ldots, 2018$,

$$h_{2019-j}(m+j) = p(m+j+2019-j) = p(m+2019) = h_{2019}(m) = 0.$$

Luego, $m, m+1, \ldots, m+2018$ son todas raíces de $q(x)$. Como $0 \leq |m| < 45$, la condición $|m+j| < 2019$ es satisfecha por al menos $2019 - 45 = 1974$ distintos j, $0 \leq j \leq 2018$, como se quería demostrar.

[2] Ver el artículo de este número.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2019 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P el pie de la altura desde B sobre AC. Se prolonga BP hasta intersecar a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en D. Sea E un punto en la prolongación de CD por D tal que el cuadrilátero $APDE$ es cíclico. Sea M la intersección de EP con BC. Demuestra que M es el punto medio de BC.

Problema 2. Sea a, b, c, d una permutación de los dígitos de 2017 y sea

$$A = abcdabcd \ldots abcd$$

un número de $4n$ dígitos.
Determina el menor entero positivo n para el cual existe un número A que sea divisible entre todos los enteros del 1 al 12.

Problema 3. ¿Cuántas parejas (a, b) de números enteros consecutivos entre 1000 y

2000 tienen la propiedad de que en la suma $a+b$ hay acarreo? Por ejemplo, en la suma $9+15$ hay acarreo, pues al sumar las unidades se lleva un 1 a sumar con las decenas.

Problema 4. Calcula la suma de todos los números reales x tales que

$$\lfloor\lfloor\cdots\lfloor\lfloor\lfloor x\rfloor+x\rfloor\cdots\rfloor+x\rfloor=2017 \text{ y } \{\{\cdots\{\{x\}+x\}\cdots\}+x\}=\frac{1}{2017},$$

donde x aparece 2017 veces en cada expresión.
(Nota: $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$, donde $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 5. Determina el número de funciones $f:\{1,2,\ldots,9\}\to\{1,2,\ldots,9\}$ que satisfacen $f(f(f(f(f(x)))))=x$ para cada x en $\{1,2,3,\ldots,9\}$.

Problema 6. Sean a y b enteros positivos tales que $\lfloor\sqrt{ab}\rfloor=\lfloor\sqrt{a}\rfloor\cdot\lfloor\sqrt{b}\rfloor$. Demuestra que por lo menos uno de los dos enteros debe ser un cuadrado.
(Nota: $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 7. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los números enteros positivos. Determina todas las funciones $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ tales que $m^2+f(n)$ divide a $mf(m)+n$ para todos los enteros positivos m y n.

Problema 8. El triángulo ABC tiene longitudes de sus lados $AB=15$ cm, $BC=18$ cm y $CA=20$ cm. Considera las prolongaciones de los lados CA (por A) y CB (por B) hasta D y E, respectivamente, tales que $DA=AB=BE$. La recta AB interseca el circuncírculo del triángulo CDE en P y Q. Determina la longitud de PQ.

Problema 9. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(0)+P(90)=2018$. Determina el valor mínimo de $|P(20)+P(70)|$.

Problema 10. Determina todas las parejas (a,b) de enteros positivos tales que $a^{2017}+b$ es múltiplo de ab.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2018 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2018. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2018, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean x, y, z números reales tales que $x^2+y^2+z^2=1$. Demuestra que $(x-y)(y-z)(x-z)\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución. Observemos que para cualquier permutación de las variables x, y, z el lado izquierdo de la desigualdad no cambia o cambia de signo. Así que es suficiente verificar la desigualdad para cualquier permutación de los números x, y, z para los cuales el lado izquierdo de la desigualdad es no negativo. Por lo tanto, podemos suponer que $x \geq y \geq z$. Aplicando la desigualdad MA-MG, tenemos que $(x-y)(y-z) \leq \left(\frac{(x-y)+(y-z)}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-z}{2}\right)^2$. Por lo tanto, $(x-y)(y-z)(x-z) \leq \frac{(x-z)^3}{4}$ y es suficiente probar que $x-z \leq \sqrt{2}$, o de manera equivalente, $(x-z)^2 \leq 2$. Esta última desigualdad es fácil de probar ya que $(x-z)^2 = 2x^2+2z^2-(x+z)^2 \leq 2x^2+2z^2 = 2-2y^2 \leq 2$.

Problema 2. Para un entero positivo a, se obtiene el entero a' de la siguiente manera: la escritura decimal de a' es la inversa de la escritura decimal de a (es posible que a' empiece con un 0, pero no es posible para a). Por ejemplo, si $a = 2370$, entonces $a' = 0732 = 732$. Sea a_1 un entero positivo y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ la secuencia definida por a_1 y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + a'_n$. ¿Es posible que a_7 sea primo?

Solución. Demostraremos que a_7 siempre es múltiplo de 11. Para ello, demostraremos que si a_i tiene una cantidad par de dígitos, entonces a_{i+1} es múltiplo de 11. Veamos que si los dígitos de a_i son $d_1, d_2, \ldots, d_k$, con k par, entonces los dígitos de a_{i+1} son $d_1+d_k, d_2+d_{k-1}, \ldots, d_k+d_1$ con $j, k-j+1$ de distinta paridad. Luego, por el criterio de divisibilidad del 11, los dígitos $d_j + d_{k-j+1}$ y $d_{k-j+1} + d_j$ queda uno positivo y uno negativo, de modo que el resultado es 0 y el número es un múltiplo de 11. Por lo tanto, si alguno es múltiplo de 11, todos los siguientes también lo son.
Ahora, falta demostrar que alguno de $a_1, a_2, \ldots, a_6$ tiene, necesariamente, una cantidad par de dígitos. Para que no sea así, todos tienen la misma cantidad de dígitos, pues al pasar de k a $k+1$ dígitos, alguno de los dos es par. Sean p y q el primero y último dígito de a_1, respectivamente. Entonces, suponiendo siempre que la cantidad de dígitos no aumenta, el primer y último dígito de a_2 es $p+q$ y $q+p$, respectivamente. Luego, el primer y último dígito de a_3, a_4, a_5, a_6 es $2(p+q), 4(p+q), 8(p+q), 16(p+q)$, respectivamente. Puesto que $16(p+q) > 10(p+q)$, no es posible que todos tengan la misma cantidad de dígitos. Por lo tanto, alguno de ellos es par. Luego, alguno de $a_2, a_3, \ldots, a_7$, y cada uno de los siguientes, es múltiplo de 11, de donde a_7 no es primo.

Problema 3. Un rectángulo $\mathcal{R}$ con lados enteros impares es dividido en pequeños rectángulos con lados enteros. Prueba que existe al menos un rectángulo, de entre estos rectángulos mas pequeños, tal que la distancia de cada uno de sus lados al rectángulo $\mathcal{R}$ son todos enteros impares o son todos enteros pares.

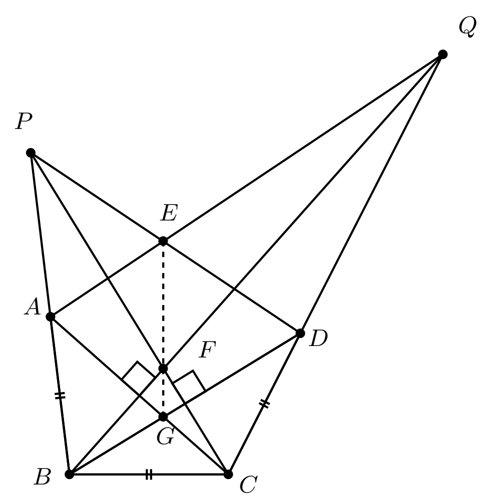
Solución. Dividamos el rectángulo en cuadritos de 1×1 y lo coloreamos como tablero de ajedrez (de blanco y negro). Como las dimensiones del rectángulo son enteros impares, las esquinas del rectángulo son de un mismo color, sin pérdida de generalidad, supongamos que son de color negro. Del conjunto de rectángulos pequeños en los que está dividido $\mathcal{R}$ diremos que un rectángulo es monocromático si todas sus esquinas son del mismo color y mixto de lo contrario. Claramente si un rectángulo es mixto debe de cubrir la misma cantidad de cuadraditos negros que de blancos (pues un rectángulo mixto debe tener alguna de sus dimensiones de longitud par). Sin embargo, como el área del rectángulo original es un número impar, debe haber más cuadritos negros que blancos. Luego, al menos debe existir un rectángulo monocromático con sus esquinas negras. Consideremos este rectángulo, puesto que las esquinas del rectángulo $\mathcal{R}$ son también negras, entonces la distancia de horizontal y la vertical de cada par de esquinas correspondientes deben tener la misma paridad (de lo contrario no serían del mismo color estos cuadritos), esto quiere decir que cada una de las distancias a los cuatro lados, deben tener la misma paridad.

Problema 4. Demuestra que el número $7^{(2^{20})} + 7^{(2^{19})} + 1$ tiene al menos 21 divisores primos distintos.

Solución. Demostraremos por inducción en n que el número $7^{2^n} + 7^{2^{n-1}} + 1$ tiene al menos $n + 1$ divisores primos distintos.
Veamos que para $n = 1$ la expresión es igual a 57, que es divisible por los números primos 3 y 19. Para el paso inductivo, basta ver que $7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1 = (7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1)(7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1)$ y que $\text{mcd}(7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1, 7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1) = 1$. Luego, como $7^{2^k} - 7^{2^{k-1}} + 1 > 1$ y tiene al menos un factor primo que $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ no tiene, si suponemos que $7^{2^k} + 7^{2^{k-1}} + 1$ tiene al menos k factores primos distintos, se cumple por inducción que $7^{2^{k+1}} + 7^{2^k} + 1$ tiene al menos $k + 1$ factores primos distintos, que es lo que queríamos demostrar.
El problema es un caso particular con $n = 20$.

Problema 5. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $AB = BC = CD$, $\angle EAB = \angle BCD$ y $\angle EDC = \angle CBA$. Demuestra que la perpendicular por E a BC y los segmentos AC y BD concurren.

Solución. Sean P la intersección de AB con ED y Q la intersección de CD con EA.



Por ser isósceles los triángulos ABC y BCD, se tiene que $\angle BAC = \angle ACB$ y $\angle CBD = \angle BDC$, lo cual implica, con la hipótesis inicial de los ángulos, que $\angle CAQ = \angle QCA$ y $\angle DBP = \angle PDB$. Lo anterior implica que los triángulos AQC y BPD son isósceles también, de donde las rectas BQ y CP son mediatrices de los segmentos AC y BD, respectivamente. En particular, tenemos que BQ y AC son perpendiculares, así como también son perpendiculares CP y BD.

Sean F la intersección de las rectas BQ y CP, y G la intersección de las diagonales AC y BD. Por las perpendicularidades anteriores, tenemos que G es el ortocentro del triángulo BCF; luego, basta probar que E, F y G son colineales. Sin embargo, esto se sigue de aplicar el teorema de Pappus al hexágono $ACPDBQ$ con las ternas de puntos colineales (P, A, B) y (Q, C, D).

Problema 6. Sean n un número compuesto y sean $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k < n$ todos sus divisores positivos. Se sabe que $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1$ son todos los divisores positivos de algún entero positivo m, excepto 1 y m. Encuentra todos los enteros n que cumplen esto.

Solución. Para $k \geq 3$, veamos que los divisores positivos de m se pueden emparejar de modo que $(a_1+1)(a_k+1) = (a_2+1)(a_{k-1}+1) = \cdots = m$, incluso en el caso en que k es impar, pues $(a_{\frac{k-1}{2}} + 1)(a_{\frac{k-1}{2}} + 1) = m$. Luego, si $R = a_1 + a_k = a_2 + a_{k-1} = \cdots = a_{\frac{k-1}{2}} + a_{\frac{k-1}{2}}$, entonces todas las parejas $(a_1, a_k), (a_2, a_{k-1}), \ldots$ son soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - Rx + n = 0$, lo que es imposible pues todas las parejas son distintas.

Luego, $k = 1, 2$. Si $k = 1$, entonces n tiene 3 divisores positivos y $n = p^2$ con p primo. Luego, los divisores positivos de m son 1, $p + 1$ y m. Como $p + 1$ es el menor divisor mayor que 1 de m, resulta que es primo y, por lo tanto, $p = 2$. Luego, $n = 4$ y $m = 9$. Si $k = 2$, entonces n tiene 4 divisores positivos y $n = p^3$ o pq con p y q primos distintos. En el primer caso, los divisores positivos de m son 1, $p + 1$, $p^2 + 1$ y m. De nuevo, $p + 1$ es primo de donde $p = 2$, $n = 8$ y $m = 15$. En el segundo caso, los divisores positivos de m son 1, $p + 1$, $q + 1$ y m. De nuevo, $p + 1$ es primo, de done $p = 2$; como $q + 1$ no puede ser primo, debería suceder que $q + 1 = (p + 1)^2 = 9$, pero $q = 8$ no es primo.

Por lo tanto, los únicos valores de n que satisfacen el problema son 4 y 8.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sean D, E puntos en los lados AB y AC, respectivamente, tales que BC es paralela a DE. Sean ℓ_1 y ℓ_2 las mediatrices de AD y AE, respectivamente y llámese a su intersección O. Denotemos con M a la intersección de ℓ_1 con DE y con N a la de ℓ_2 con DE. Prueba que AO, BM y CN concurren.

Solución de Isaac Botello. Sea A' el punto en el circuncírculo del triángulo ABC que es diametralmente opuesto a A. Como OM y $A'B$ ambas forman un ángulo recto con AB, son paralelas. Análogamente, ON y $A'C$ son paralelas entre sí. Como DE y BC son paralelas por construcción, se concluye que los triángulos $A'BC$ y OMN son homotéticos, de donde OA', BM y CN concurren. Notemos que AO y AA' son la misma recta. En efecto, los triángulos ABC y ADE son semejantes por ser BC

paralela a DE; así, la recta que pasa por A y el circuncírculo del triángulo ABC, es la misma que la que pasa por A y el circuncírculo del triángulo ADE (ambas forman los mismos ángulos con AD y con AC). Pero, O es el circuncírculo del triángulo ADE, entonces AO y AA' son la misma recta. Por tanto, AO, BM y CN concurren.

Problema 8. Sea $p \geq 2$ un número primo. Eduardo y Fernando juegan el siguiente juego haciendo movimientos alternadamente: en cada movimiento el jugador en turno escoge un índice i del conjunto $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ que no ha sido escogido por ninguno de los dos jugadores con anterioridad y después escoge un elemento a_i del conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eduardo juega primero. El juego termina después de que todos los índices $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ han sido escogidos. Después se calcula el valor de la suma

$$\sum_{i=0}^{p-1} 10^i a_i.$$

El objetivo de Eduardo es que la suma anterior sea divisible por p y el objetivo de Fernando es lo contrario. Demuestra que Eduardo tiene estrategia ganadora.

Solución. Si $p = 2, 5$ Eduardo escoge en su primer turno el índice 0 y escoge el dígito 0 lo cual dejará un número divisible por 10 independientemente de las elecciones posteriores. Supongamos ahora que $p \neq 2, 5$, luego p y 10 son primos relativos. Por el teorema pequeño de Fermat se tiene que $10^{p-1} - 1 = (10^{\frac{p-1}{2}} + 1)(10^{\frac{p-1}{2}} - 1)$ es divisible por p. La estrategia de Eduardo será en su primer turno escoger el índice $p-1$ y el dígito 0, después continuará dependiendo de los casos siguientes:

a) $p \mid (10^{\frac{p-1}{2}} + 1)$. Cada vez que Fernando escoja un par de índice y dígito (i, a_i), Eduardo escoge $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, a_i)$ si $0 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ o $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, a_i)$ en otro caso. Esta elección hace que $10^i \equiv -10^j \pmod{p}$, de donde la suma la parejas de dígitos (i, j) aportarán a la suma $10^i a_i + 10^j a_j \equiv 0 \pmod{p}$.

b) $p \mid (10^{\frac{p-1}{2}} - 1)$. Cada vez que Fernando escoja un par de índice y dígito (i, a_i), Eduardo escoge $(j, a_j) = (i + \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ si $0 \leq i \leq \frac{p-3}{2}$ o $(j, a_j) = (i - \frac{p-1}{2}, 9 - a_i)$ en otro caso. Esta elección hace que $10^i \equiv 10^j \pmod{p}$, de donde la suma de la parejas de dígitos (i, j) aportarán $10^i a_i + 10^j a_j \equiv 10^i(9) \pmod{p}$. Entonces, la suma será congruente a

$$\sum_{r=0}^{p-2} 9 \cdot 10^r = 10^{p-1} - 1$$

el cual es divisible por p de nuevo por el teorema pequeño de Fermat.

Problema 9. Sea ABC un triángulo que satisface que $3AB = BC + CA$. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sea I el incentro de ABC. Además, P y Q son los puntos de tangencia del A-excírculo con BC y del B-excírculo con AC, respectivamente[3]. Sean

[3]Para la definición de A-excírculo se puede consultar el artículo “Del incírculo al incírculo mixtilíneo: Un recorrido por algunas circunferencias tangentes a dos lados de un triángulo” de Tzaloa No. 3, 2018.

X, Y y Z las intersecciones de AP con BQ, AI con FD y EF con BI, respectivamente. Demuestra que X, Y y Z son colineales.

Solución. Sean a, b y c las longitudes de los segmentos DB, AF y CE, respectivamente. Por ser AF, AE, EC, CD, BD y BF tangentes, tenemos que $AF = AE$, $CD = CE$ y $BD = BF$. Además, como $3AB = BC + CA$, tenemos que $c = a + b$. Por ser P y Q puntos de tangencia de los excírculos, tenemos que $CQ = AE = b$, $CP = BD = a$ y $AQ = a + b = AB = BP$. Lo anterior implica que los triángulos BAQ y PBA son isósceles, entonces AI es perpendicular a BQ y BI es perpendicular a AP; por lo tanto, I es el ortocentro del triángulo AXB. Sean R y S los puntos diametralmente opuestos a D y a E, respectivamente, en el incírculo. Observemos que R cae sobre AP, pues P es el punto de tangencia con el A-excírculo. De manera análoga, tenemos que S cae sobre AP. Sea T la intersección de la tangente del incírculo en R con AB. De igual forma, U es la intersección de la tangente del incírculo en S con AB. En el triángulo ARF, vemos que T equidista de A, R y F; en efecto, $TF = TR = TA$ por ser ATR isósceles. Por lo tanto, T es el circuncentro de ARF, así es fácil ver que $\angle ARF = 90^\circ$. De igual manera, en el triángulo FBS, tenemos que $\angle BSF = 90^\circ$. Entonces, $\angle XRF + \angle XSF = 180^\circ$; por lo tanto, $RFSX$ es cíclico y X pertenece al incírculo.
Ahora, veamos que Z, Y y X son colineales, para ello demostremos que ZY es tangente al incírculo en X, esto quiere decir que ZY es la polar de X respecto al incírculo. Para ver esto, observemos que BQ tiene polo igual a la intersección de FD con la polar de Q, esta última pasa por E y es la reflexión de FD sobre AI (pues D y F son simétricos respecto de AI). Así, las polares se intersecan en el eje de simetría AI, el cual es justo el punto Y. De igual manera Z es el polo de la recta AP. Por lo tanto, ZY es la polar de la intersección de AP y BQ, es decir, es la polar de X. Concluimos que X, Y y Z son colineales.

Problema 10. Sea n un entero positivo y sea k el mayor entero tal que para cada primo p que divide a $2^n + 1$, 2^k divide a $p - 1$. Demuestra que 2^k no divide a n.

Solución. Sea $n = 2^s m$, con m impar y sea p un divisor primo de $2^n + 1$. Claramente, p es impar. Sea $r = \text{ord}_p 2$, esto es, r es el menor entero positivo tal que p divide a $2^r - 1$. Como p divide a $2^n + 1$, tenemos que p divide a $(2^n + 1)(2^n - 1) = 2^{2n} - 1$. Es conocido[4] que por ser r el orden, tenemos que r divide a $2n = 2^{s+1}m$. Si r divide a $n = 2^s m$, entonces p divide a $2^n - 1$. Pero, p divide a $2^n + 1$, entonces p debe dividir a 2, lo cual es imposible. Así, r no divide a $n = 2^s m$, pero sí divide a $2^{s+1}m$; por tanto, $r = 2^{s+1}b$ con b divisor de m. Notemos que por la igualdad anterior, r siempre es múltiplo de 2^{s+1}, sin importar el valor de p.
Ahora, por el teorema pequeño de Fermat, p divide a $2^{p-1} - 1$ y, como r es el orden de 2 módulo p, se sigue que r divide a $p - 1$. Luego, 2^{s+1} divide a r y r divide a $p - 1$, lo cual implica que 2^{s+1} divide a $p - 1$. Si $s \geq k$, se tendría que 2^{k+1} divide a $p - 1$ para cada primo p que divide a $2^n + 1$, lo cual no puede pasar por la definición de k (recuerde que k es el mayor entero tal que para cada primo p que divide a $2^n + 1$, 2^k divide a $p - 1$). Así, $k \geq s + 1$ y 2^k no divide a $n = 2^s m$ (pues $k > s$ y m es impar).

[4] Ver el artículo "Orden de un número" de Tzaloa No. 3, 2016.

Competencia Internacional de Matemáticas 2018 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2018 (BIMC 2018), se celebró en Burgas, Bulgaria, del 1 al 6 de julio de 2018. En esa ocasión, México participó con un equipo de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo 4 medallas de bronce y 5 menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. Es decir, solo el 6 % recibe una medalla de oro, por lo que no es extraño que se necesiten al menos 13 respuestas correctas para

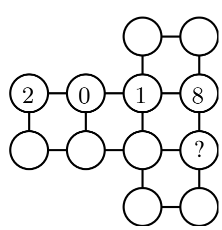
conseguirla. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso nacional que se toma muy en serio el concurso, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años: el proceso Nacional empieza en junio con el Concurso Nacional de la OMMEB y concluye en agosto del siguiente año con el viaje a la IMC: 14 meses de proceso selectivo.
En esa ocasión, el equipo de Primaria estuvo integrado por Javier Mena Chávez (Zacatecas), Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México), Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México) y María Fernanda López Tuyub (Yucatán). Mateo Iván y María Fernanda obtuvieron mención honorífica.
A continuación presentamos los enunciados y las soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2018.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. Mark fue al cine a ver una película que empezó a las 19:00 horas. Salió al baño luego de ver un tercio de la película. Cuando regresó, el resto de la película duró siete veces el tiempo que pasó en el baño. A las 21:12 horas, el tiempo que había pasado desde que volvió del baño era igual a seis veces el resto de la película. ¿A qué hora terminó la película?

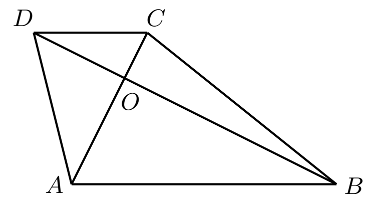
Problema 2. Peter, Anna y Andria compraron tres coches idénticos al mismo precio. Peter pagó inicialmente 1300 euros, Anna pagó 1000 euros y Andria pagó 600 euros. Cada mes siguiente, Peter pagó 180 euros, Anna pagó 240 euros y Andria pagó 280 euros hasta pagar, exactamente, el precio del coche por completo. ¿Cuál es el menor precio posible, en euros, del coche?

Problema 3. Los ocho círculos vacíos del diagrama, deben llenarse usando uno de los enteros $3, 4, 5, 6, 7, 9, 10$ y 11, cada uno exactamente una vez, de manera que las sumas de los cuatro números en las esquinas de cada cuadrado sea la misma. Encuentra el número que va dentro del círculo marcado con "?"



Problema 4. Usando los mismos dos dígitos, Andre y Natalie escriben números distintos de seis dígitos. Para cada uno de estos números, los tres dígitos en posiciones impares son los mismos y los tres dígitos en posiciones pares son también los mismos. Si 5 veces el número de Andrei es igual a 6 veces el número de Natalie, ¿cuál es el número de Andrei?

Problema 5. En el cuadrilátero $ABCD$, el lado AB es paralelo al lado CD y las diagonales AC y BD son perpendiculares y se cortan en el punto O.



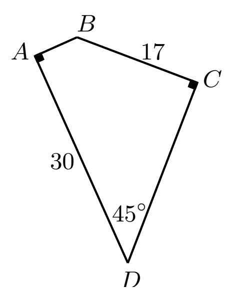
Si $AO = p$ cm, $CO = q$ cm, $BO = r$ cm, $DO = s$ cm, $AB = 7$ cm y $CD = 3$ cm, ¿cuál es el valor de $pq + rs$?

Problema 6. La suma de tres números de tres dígitos es 2418. Los nueve dígitos de los tres números son todos distintos y dos de los números son múltiplos de 9. ¿Cuál es el menor valor posible para el tercer número?

Problema 7. Dado que $BIMC + BI + MC + B + I + M + C - 1 = 2018$, donde B, I, M, C son dígitos distintos, ¿cuál es el mayor valor posible del número de cuatro dígitos $BIMC$?

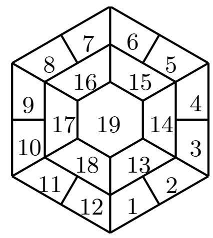
Problema 8. Tenemos cuatro dígitos distintos entre sí y distintos de cero y, los usamos para construir 24 números de 4 dígitos distintos. El segundo más pequeño de los números es un múltiplo de 5. El segundo más grande es par, pero no es divisible entre 4. La diferencia positiva entre el quinto más pequeño y el quinto más grande está entre 3000 y 4000. ¿Cuál es el máximo valor posible del mayor de los 24 números?

Problema 9. En el cuadrilátero $ABCD$, tenemos que $AD = 30$ cm, $BC = 17$ cm, $\angle ADC = 45°$ y $\angle BAD = \angle BCD = 90°$. ¿Cuál es el área, en centímetros cuadrados, del cuadrilátero $ABCD$?



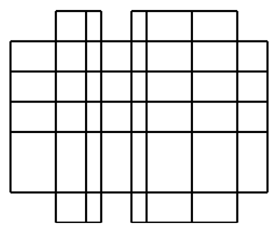
Problema 10. La suma de las edades de los tres niños en una familia es 25 y el producto de las tres edades es 360. Esto también es cierto sobre las edades de las tres niñas en la misma familia. El niño de en medio es mayor que la niña de en medio. ¿Cuántos años más grande es el niño de en medio que la niña de en medio?

Problema 11. La figura muestra una habitación hexagonal. El piso está cubierto con 19 tapetes numerados de cuatro colores distintos. Dos tapetes con un segmento en común sobre sus bordes deben tener colores distintos. Solo se usaron dos colores en la capa de en medio y a lo más un tapete en la capa exterior tiene el mismo color que el tapete del centro.

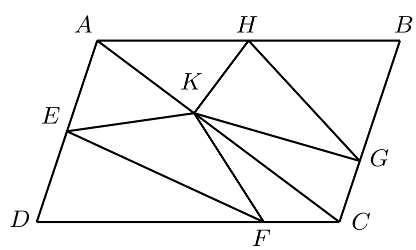


Dos coloraciones son distintas si cambia el color de al menos uno de los tapetes. ¿Cuántas coloraciones distintas hay?

Problema 12. ¿Cuántos rectángulos hay en la siguiente figura?



Problema 13. En el paralelogramo $ABCD$, E es el punto medio de AD y H es el punto medio de AB. Los puntos G, F y K están sobre BC, CD y CA, respectivamente, tales que $BG = 2GC$, $DF = 3FC$ y $2CK = 3KA$. El área del paralelogramo $ABCD$ es de 240 cm^2. ¿Cuál es la diferencia, en cm^2, de las áreas de los triángulos EFK y HKG?



Problema 14. Los cuadritos unitarios de un tablero de 8×8 van a llenarse con algunos de los enteros del 1 al 64, usando cada uno exactamente una vez. Puedes elegir dónde colocar el número 1. Luego, el número 2 debe estar en un cuadrado adyacente en la misma fila o columna que el cuadrito con el número 1; el cuadrito con el número 3 debe estar en un cuadrito adyacente al 2; y así sucesivamente. ¿Cuál es la mayor cantidad de números primos que puedes colocar en una misma fila?

Problema 15. ¿Cuántas regiones rectangulares (incluyendo regiones cuadradas) del siguiente tablero tienen la propiedad de que la suma de los números en ellas es un múltiplo de 64?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

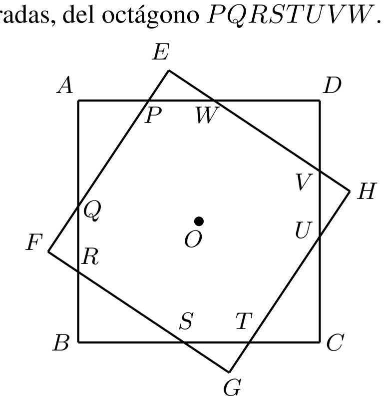
Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. Hay cuatro concursantes y 25 preguntas en un programa de concursos de televisión. Cada pregunta la intenta solo un concursante y se le asignan puntos de 0 a 150, dependiendo de cómo conteste. Los resultados de las 25 preguntas se muestran en la siguiente tabla, sin indicar cuál concursante recibió los puntos.

80	0	40	0	35
50	40	90	60	25
100	30	10	100	0
50	75	150	15	30
30	0	35	0	10

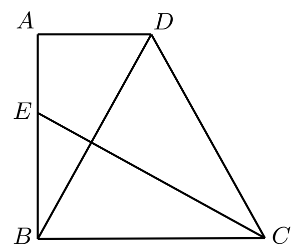
El primer concursante recibió el doble de puntos que el tercero, mientras que el segundo concursante recibió el triple de puntos que el tercero. El cuarto concursante intentó únicamente una pregunta. ¿Cuántos puntos recibió el cuarto concursante?

Problema 2. En la figura, $ABCD$ y $EFGH$ son ambos cuadrados unitarios, con un centro común en O. Si la longitud del segmento PW es igual a $\frac{45}{101}$ unidades, encuentra el área, en unidades cuadradas, del octágono $PQRSTUVW$.

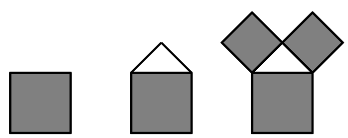


Problema 3. Cuatro enteros positivo se acomodan para formar una tabla de 2×2. Se calcula el producto de los dos números en cada fila y en cada columna. Estos cuatro productos se suman a los cuatro números de la tabla y el resultado es 2018. ¿Cuál es la suma de los cuatro números de la tabla?

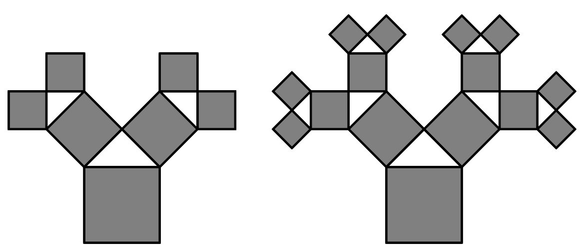
Problema 4. En el cuadrilátero $ABCD$ tenemos que $\angle ABC = \angle BAD = 90°$. El punto E está sobre AB de manera que $BE \times (BC - AD) = AE \times BC$. Si $BC - AD = 1$ cm y $\angle ADB = 2\angle BCE$, encuentra la longitud de BD en centímetros.



Problema 5. Un cristal mágico tiene la forma de un cuadrado sombreado. En el primer día le crece una cabeza blanca en forma de triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es igual al lado del cuadrado y dos orejas sombreadas en forma de cuadrados con un cateto del triángulo como lado.



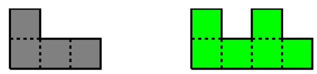
El diagrama de arriba muestra cómo se ve el cristal después del primer día. En el segundo día, cada oreja crece una cabeza y dos orejas como en el primer día. El diagrama de abajo muestra cómo se ve el cristal después del segundo día y el tercer día. Observa que la nueva cabeza siempre crece en el lado de la oreja opuesto a la cabeza que creció el día anterior.



El cristal explota si dos de sus orejas se tocan. ¿Después de cuántos días sucederá?

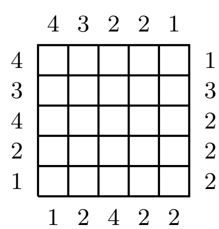
Problema 6. Cuatro diferentes números de tres dígitos tienen el mismo dígito de las centenas. Su suma es divisible entre tres de ellos. Encuentra el residuo cuando la suma se divide entre el cuarto número.

Problema 7. Usa cada una de las siguientes dos piezas exactamente una vez para formar una figura que puede ser dividida en dos partes por una recta, de manera que las dos partes sean reflejos una de la otra sobre la recta. Las piezas pueden girarse o reflejarse varias veces, pero no pueden sobreponerse. Encuentra dos soluciones distintas.



Problema 8. Justo a medio día, Donny y Ronny salieron de Burgas con dirección a Varna, mientras que Lonny salió de Varna con dirección a Burgas. Los tres niños van sobre sus bicicletas a velocidades constantes y distintas. A las 13:00 horas, Ronny estaba justo a la mitad entre Donny y Lonny y, a las 13:20 horas, Lonny estaba justo a la mitad entre Donny y Ronny. ¿A qué hora estará Donny justo a la mitad entre Ronny y Lonny?

Problema 9. Una ciudad tiene 25 edificios en un acomodo de 5×5. Cada edificio tiene una altura de 1 a 5. Hay un edificio de cada altura en cada fila y en cada columna. Veinte observadores ven desde afuera y anotan la cantidad de edificios que pueden ver, que son aquellos que no quedan ocultos por un edificio más alto. Determina la altura de cada edificio en el acomodo.



Problema 10. El máximo común divisor de cuatro enteros positivos, no necesariamente distintos, es igual a 1. Su mínimo común múltiplo es igual a su suma. Encuentra el número de posibles valores de la suma de estos cuatro números.

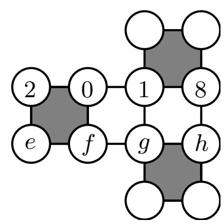
Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. Mark estuvo en el baño por $(1-\frac{1}{3})\times\frac{1}{1+7}=\frac{1}{12}$ de la película. Cuando regresó, a la película le faltaban todavía $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$. A las $21:12$ horas, a la película todavía le quedaban $\frac{7}{12}\times\frac{1}{1+6}=\frac{1}{12}$. En total pasaron $2\times 60+12=132$ minutos, que representan $1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$ de la película. Por lo tanto, la duración total de la película es $132\div\frac{11}{12}=144$ minutos. Por lo tanto, a las $21:12$

horas le quedaba $144 \times \frac{1}{12} = 12$ minutos a la película, de modo que la película terminó a las $21:24$ horas.

Solución del Problema 2. Pedro puede reducir su pago inicial de $1300 = 7 \times 180 + 40$ euros a 40 euros si paga por 7 meses más. De manera similar, Anna y Andria pueden reducir sus pagos iniciales a 40 euros, pues $1000 = 4 \times 240 + 40$ y $600 = 2 \times 280 + 40$. Por lo tanto, el menor precio para el auto en euros es igual a 40 más el mínimo común múltiplo de 180, 240 y 280, que es 5040. Por lo tanto, el menor precio del carro es 5080 euros.

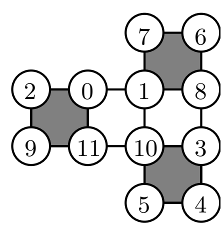
Solución del Problema 3. Sean e, f, g y h, los cuatro números inmediatamente debajo de 2, 0, 1 y 8, respectivamente. Además, llamaremos S a la suma constante.



En los tres cuadrados sombreados tenemos que

$$3S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66,$$

de modo que $S = 22$. Como $2 + 0 + e + f = 22$, tenemos que $e + f = 20$. Si $e = 9$ y $f = 11$, entonces $g = 22 - 1 - 0 - f = 12$, que es imposible pues $g \leq 11$. Luego, debemos tener $e = 9$ y $f = 11$. Se sigue que $g = 22 - 1 - 0 - f = 10$, lo cual implica que $h = 22 - 1 - 8 - g = 3$. La siguiente figura muestra la única solución, salvo el intercambio entre 6 y 7 y el intercambio entre 4 y 5. Por lo tanto, la respuesta es 3.



Solución del Problema 4. Observemos que cada número de seis dígitos es 10101 veces el número formado por los primeros dos dígitos. Como $5 \times 6 = 30 = 6 \times 5$ y $5 \times 60 = 300 = 6 \times 50$, el número de dos dígitos de Andrei es $60 - 6 = 54$, mientras que el número de dos dígitos de Natalie es $50 - 5 = 45$. Por lo tanto, los dos dígitos son 5 y 4, de donde el número de Andrei es 545454.

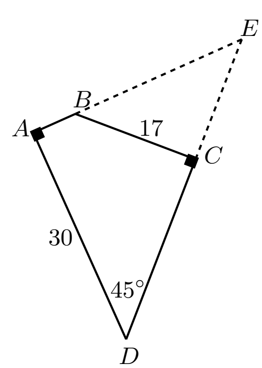
Solución del Problema 5. Como los triángulos OAB y OCD son semejantes, tenemos que $\frac{q}{p} = \frac{s}{r} = \frac{3}{7}$, esto es, $q = \frac{3}{7}p$ y $s = \frac{3}{7}r$. Luego, $pq + rs = p \cdot \frac{3}{7}p + r \cdot \frac{3}{7}r = \frac{3}{7}(p^2 + r^2)$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo AOB, tenemos que $p^2 + r^2 = 7^2$, de donde se sigue que $pq + rs = \frac{3}{7} \cdot 7^2 = 21$.

Solución del Problema 6. El residuo de la división de 2418 entre 9 es 6. Dado que dos de los números son múltiplos de 9, el tercero no lo es. Además, como la suma $0 + 1 + 2 + \cdots + 9$ es múltiplo de 9 y la suma de los dígitos de los tres números es congruente con 6 módulo 9, el dígito que no aparece en ninguno de los tres números debe ser 3. Luego, los dígitos que pueden ir con 9 o son 7 y 2 o son 5 y 4 y, los dígitos que pueden ir con 8, son 1 y 0. Hacemos los casos para el 9:
Caso 1. Con 9, 7 y 2, tenemos $972 + 801 + 645$.
Caso 2. Con 9, 5 y 4, tenemos $945 + 801 + 672$.
Luego, el menor valor posible para el tercer número es 645.

Solución del Problema 7. Tenemos que $1011B+102I+21M+3C = 2019$. El único valor posible para B es 1. Luego, $102I + 21M + 3C = 1008$ o bien $34I + 7M + C = 336$. Si $I = 7$, entonces $7M + C = 98$, pero $7 \times 9 + 8 = 71$. Luego, $I \geq 8$. Si $I = 8$, entonces $7M + C = 64$, de donde $M = 9$ o $M = 8$. En el primer caso, obtenemos que $C = 1 = B$. En el segundo caso, obtenemos que $C = 8 = M = 1$. Se sigue que $I = 9$. Por lo tanto, $7M + C = 30$. Entonces $M = 4$ o $M = 3$. En el primer caso, $C = 2$ y $BIMC = 1942$. En el segundo caso, $C = 9 = I$. Por lo tanto, el único valor posible es 1942.

Solución del Problema 8. Sean a, b, c y d los cuatro dígitos, con $a > b > c > d > 0$. Entonces, el segundo menor número es $dcab$, de donde $b = 5$. El quinto mayor número es $adbc$ y el quinto menor es $dacb$. Su diferencia está entre 3000 y 4000, de donde $a - d = 4$.
El segundo mayor número $abdc$ es par, pero no es divisible entre 4, por lo que $c = 4$ o 2. Si $c = 2$, entonces $d = 1$, que es una contradicción (pues sería divisible entre 4). Luego, $c = 4$ y $d = 3$ o 1. Si $d = 1$, entonces $a = 5$, que es imposible pues son distintos. Por lo tanto, $abcd = 7543$. Verificamos que efectivamente 3475 es múltiplo de 5; 7534 es par pero no múltiplo de 4 y, $7345 - 3745 = 3609$.

Solución del Problema 9. Sea E el punto de intersección de las prolongaciones de AB y DC. Entonces, $\angle AED = 180° - (90° + 45°) = 45°$ y $AD = AE = 30$ cm.



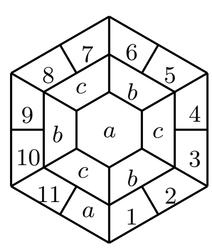
Además, tenemos que $\angle CEB = 180° - (90° + 45°) = 45°$, lo cual implica que

$CE = BC = 17$ cm. Por lo tanto,

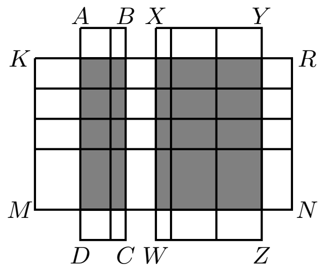
$$\text{Área}(ABCD) = \text{Área}(ADE) - \text{Área}(BCE) = \frac{30 \times 30}{2} - \frac{17 \times 17}{2} = \frac{611}{2}\ \text{cm}^2.$$

Solución del Problema 10. Como $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$, tenemos que una de las edades debe ser múltiplo de 5.
Caso 1. Si es 5, las otras dos edades suman 20 y su producto es 72, que no es posible.
Caso 2. Si es 10, las otras dos edades suman 15 y su producto es 36, de donde se sigue que las edades son 12 y 3.
Caso 3. Si es 15, las otras dos edades suman 10 y su producto es 24, de donde se sigue que las edades son 6 y 4.
Caso 4. Si es 20, las otras dos edades suman 5 y su producto es 18, que no es posible.
Por lo tanto, el niño de en medio tiene 10 años y la niña de en medio tiene 6, esto es, el niño de en medio es 4 años mayor que la niña de en medio.

Solución del Problema 11. El color de la alfombra central puede ser elegido de 4 maneras distintas. Los dos colores escogidos en la capa de en medio pueden ser elegidos de 3 maneras y usados de 2 maneras. Luego, la porción de en medio tiene 24 maneras distintas de colorear. Por claridad, supongamos que 19 es a; 13, 15 y 17 son b y, 14, 16 y 18 son c. Sea d el cuarto color.
Si la capa exterior no tiene a, entonces 1 es c o d. Si es c, entonces 2 es d, 3 es b, 4 es d, y el ciclo $cdbd$ se repite. Si 1 es d, entonces 2 es c. Si 3 es d, entonces 4 es b, y continuamos con un ciclo $dcdb$. Si 3 es b, entonces 4 es d y esto obliga a que 12 sea d. Sin embargo, 12 es adyacente a 1, que es d. Esto pasa siempre que sigamos el ciclo. Se sigue que si la capa exterior no tiene a, entonces se introduce un factor 2 en la cuenta. El resultado es $24 \times 2 = 48$ para este caso.
Supongamos que hay a en la capa exterior. Entonces podría ser cualquiera de 1 a 12, introduciendo un factor 12 en el resultado. Supongamos que a es 12. La figura de abajo muestra que hay 7 maneras de completar la capa exterior. La cuenta total en este caso es $24 \times 12 \times 7 = 2016$. El gran total es $48 + 2016 = 2064$.



Solución del Problema 12. Nombramos A, B, C, D, X, Y, Z, W, M, N, K, R, a los distintos vértices como se muestra en la figura.



Vamos a empezar contando el número de rectángulos en el interior de $KMNR$. Los lados horizontales pueden elegirse de $\binom{5}{2} = 10$ maneras distintas y los lados verticales pueden elegirse de $\binom{9}{2} = 36$ maneras distintas, para un total de $10 \times 36 = 360$ rectángulos. Calculamos de manera similar el número de rectángulos en el interior de $ABCD$ y de $WXYZ$, de los cuales hay $\binom{7}{2}\binom{3}{2} = 63$ y $\binom{7}{2}\binom{4}{2} = 126$, respectivamente. Del total de $360 + 63 + 126 = 549$ debemos restar la cantidad de rectángulos en las dos áreas sombreadas, pues han sido contados dos veces. En total son $\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 30$ y $\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 60$, respectivamente y, por lo tanto, la respuesta es $549 - 30 - 60 = 459$.

Solución del Problema 13. Como AC es diagonal del paralelogramo $ABCD$, el área del triángulo ACD es $240 \times \frac{1}{2} = 120$ cm^2. Por el teorema del ángulo común, tenemos que el área del triángulo AKE es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 24$ cm^2, el área del triángulo DEF es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 45$ cm^2 y el área del triángulo CFK es $120 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = 18$ cm^2. Luego, el área del triángulo EFK es $120 - 24 - 45 - 18 = 33$ cm^2. El área del triángulo ACB es también $240 \times \frac{1}{2} = 120$ cm^2. Luego, por el teorema del ángulo común, tenemos que el área del triángulo AKH es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = 24$ cm^2, el área del triángulo BGH es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 40$ cm^2 y el área del triángulo CGK es $120 \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = 24$ cm^2. Por lo tanto, el área del triángulo HKG es igual a $120 - 24 - 40 - 24 = 32$ cm^2. Luego, Área(EFK) − Área$(HKG) = 33 - 32 = 1$ cm^2.

Solución del Problema 14. Pintemos el tablero como tablero de ajedrez de la manera usual. Luego, números consecutivos ocupan casillas de colores distintos, mientras que números con la misma paridad ocupan casillas del mismo color. Fuera del 2, todos los números primos son impares y hay 4 espacios para números impares en cualquier fila o columna. Luego, la máxima cantidad de números primos que podemos tener en la misma fila es 5. Los siguientes acomodos muestran que es posible.

2	3	6	7	10	11	16	17
1	4	5	8	9	12	15	18
64	53	52	41	40	13	14	19
63	54	51	42	39	30	29	20
62	55	50	43	38	31	28	21
61	56	49	44	37	32	27	22
60	57	48	45	36	33	26	23
59	58	47	46	35	34	25	24

2	3	6	7	10	11	28	29
1	4	5	8	9	12	27	30
18	17	16	15	14	13	26	31
19	20	21	22	23	24	25	32
40	39	38	37	36	35	34	33
41	42	43	44	45	46	47	48
56	55	54	53	52	51	50	49
57	58	59	60	61	62	63	64

2	3	6	7	10	11	12	13
1	4	5	8	9	28	27	14
64	53	52	41	40	29	26	15
63	54	51	42	39	30	25	16
62	55	50	43	38	31	24	17
61	56	49	44	37	32	23	18
60	57	48	45	36	33	22	19
59	58	47	46	35	34	21	20

Solución del Problema 15. La suma de todos los números en cualquier subtablero rectangular es el promedio del número A en la esquina superior izquierda y el número B en la esquina inferior derecha, multiplicado por la cantidad de filas y columnas en el subtablero. Si ambas dimensiones son 7, es decir, si tenemos el tablero completo, la suma es claramente múltiplo de 49. Si solo la dimensión horizontal es 7, entonces debemos tener $A + B \equiv 0 \pmod 7$. Sin embargo, $A \equiv 1 \pmod 7$ y $B \equiv 0 \pmod 7$, de donde $A + B \equiv 1 \pmod 7$, lo que es una contradicción.
Supongamos ahora que solo la dimensión vertical es 7. Nuevamente, debemos tener $A + B \equiv 0 \pmod 7$. Sin embargo, ahora podemos tener $A = 1, 2, 3$ o 7. Finalmente, si ninguna de las dimensiones es 7, debemos tener $A + B = 49$ (exceptuando el caso $A = B = 49$). En este caso, los valores posibles de A son 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23 o 24. El total de subtableros posibles es entonces $1+0+4+(12+1) = 18$.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. La cantidad total de puntos entregados fue 1055. La cantidad total de puntos asignados a los primeros tres competidores debe ser un múltiplo de 6. Como $1055 = 175 \times 6 + 5$, el número de puntos asignados al cuarto competidor debe dejar residuo 5 al dividirse entre 6. El único número así en la tabla es 35. Podemos verificar que esto es posible si el primer competidor obtiene $150 + 100 + 90 = 340$ puntos, el segundo competidor obtiene $100+80+75+60+50+50+40+30+25 = 510$ puntos y el tercer competidor obtiene $40 + 35 + 30 + 30 + 15 + 10 + 10 = 170$ puntos.

Solución del Problema 2. Sean $PE = x$ y $EW = y$. Por simetría, tenemos que $AP = x$ y $WD = y$. Usando el teorema de Pitágoras, obtenemos que $x^2 + y^2 = PW^2 = (\frac{45}{101})^2$. Dado que $AD = 1$, tenemos que $AP+WD = x+y = 1-\frac{45}{101} = \frac{56}{101}$. Luego, $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2) = \left(\frac{56}{101}\right)^2 - \left(\frac{45}{101}\right)^2 = \frac{11}{101}$. Entonces, el área del triángulo EPW es igual a $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{11}{404}$. Por lo tanto,

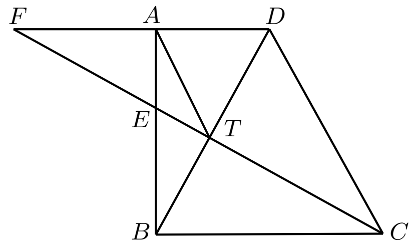
$$\text{Área}(PQRSTUVW) = \text{Área}(EFGH) - 4 \cdot \text{Área}(EPW) = 1 - 4 \times \frac{11}{404} = \frac{90}{101}.$$

Solución del Problema 3. Consideremos la siguiente tabla de 2×2 con los números a, b, c y d.

a	b
c	d

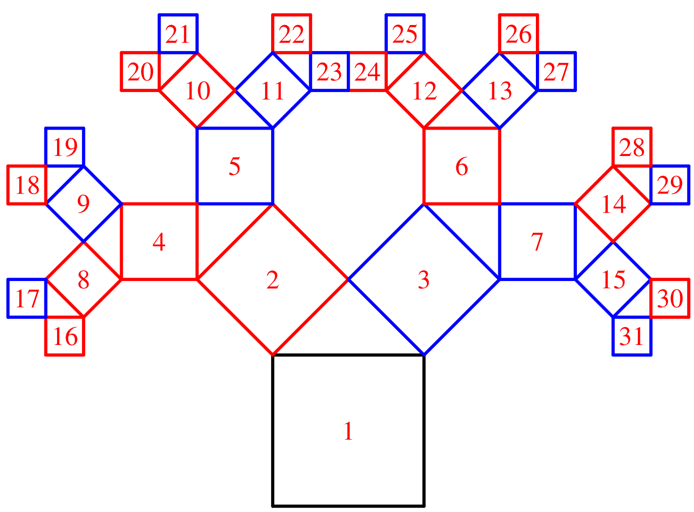
Luego, tenemos que $ab + cd + ac + bd + a + b + c + d = 2018$, esto es, $(a + d)(b + c) + a + b + c + d = 2018$, de donde $(a + d)(b + c + 1) + b + c = 2018$. Luego, $(a+d)(b+c+1)+b+c+1 = 2019$, esto es, $(a+d+1)(b+c+1) = 2019 = 3\times 673$. Dado que a, b, c y d son enteros positivos, alguno de $a + d + 1$ o $b + c + 1$ es 3 y el otro es 673. Luego, $a + b + c + d = (3 - 1) + (673 - 1) = 674$.

Solución del Problema 4. Sean T y F las intersecciones de CE con BD y con DA, respectivamente.



Dado que AF y BC son paralelas, tenemos que $\frac{AF}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{AE}{AE \times BC} = \frac{1}{BC}$, lo cual implica que $AF = 1$ cm. Por lo tanto, $BC = 1 + AD = AF + AD = FD$ y $FDCB$ es un paralelogramo. Esto implica que T es el punto medio de BD y $DT = AT = BT$. Dado que $\angle TAD = \angle TDA$ y $\angle TFA = \angle TCB$, tenemos que $\angle ATF = \angle TAD - \angle TFA = 2\angle TFA - \angle TFA = \angle TFA$. Luego, el triángulo AFT es isósceles y, por lo tanto, $BD = 2AT = 2AF = 2$ cm.

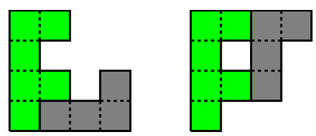
Solución del Problema 5. En la siguiente figura se muestra el crecimiento del cristal mágico. Comenzamos con el cuadrado 1. En el primer día, obtenemos el cuadrado 3. En el segundo día, obtenemos el cuadrado 7. En el tercer día, obtenemos el cuadrado 15. En el cuarto día obtenemos el cuadrado 31. Ahora, los cuadrados 23 y 24 se tocan. Por lo tanto, el cristal explota en el cuarto día.



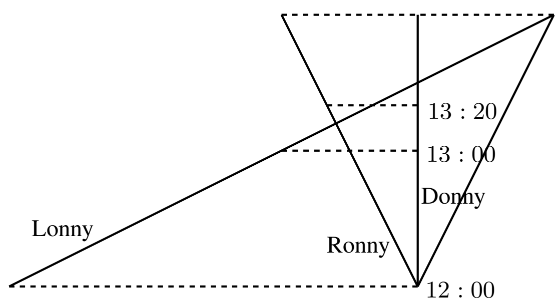
Solución del Problema 6. Dado que los cuatro números son números de tres dígitos y tienen el mismo dígito de las centenas, el mayor es menor que el doble del más

pequeño. Luego, la suma de los cuatro es menor que 7 veces el más pequeño, pero mayor que el doble del más grande. Se sigue que los tres de ellos, que son divisores de su suma, deben ser algunos entre la tercera parte, la cuarta parte, la quinta parte o la sexta parte de la suma. Dado que el número más grande es menor que el doble del más pequeño, no podemos tener el número que es un tercio de la suma junto con el número que es un sexto en la suma. Supongamos que los tres divisores son $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$ de la suma, respectivamente. Entonces, el cuarto número es $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=23/60$ de la suma, lo cual es imposible, ya que este número es mayor que el doble del más pequeño.
Luego, los tres divisores son $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ de la suma, respectivamente. Entonces, el cuarto número es $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=13/60$ de la suma. Por lo tanto, el número más pequeño es $\frac{1}{5}$ de la suma, el cual debe ser un múltiplo de 60. Como el número más pequeño tiene tres dígitos, la suma es al menos 500 y el menor número múltiplo de 60 que es mayor a 500 es 540. Los cuatro números son 180, 135, 117 y 108. Tenemos que $540 = 117 \times 4 + 72$. Si la suma es 600 o más, los cuatro números no tendrían el mismo dígito de las centenas. Por lo tanto, el residuo debe ser 72.

Solución del Problema 7. A continuación mostramos dos soluciones.



Solución del Problema 8.



En el diagrama de arriba, las líneas punteadas representan tiempo. La línea punteada de hasta abajo es medio día. La siguiente hacia arriba es $13:00$ horas y la siguiente es $13:20$ horas. Las líneas continuas representan el movimiento de los tres niños. Al fondo, Lonny empieza de la izquierda mientras que Donny y Ronny empiezan juntos de en medio. Observa que el camino de Donny está dibujado verticalmente por facilidad. Los caminos se dibujan de manera que las condiciones de punto medio de las dos líneas punteadas se cumplan.
Para encontrar el tercer tiempo donde se cumplen las condiciones de punto medio,

reflejamos el camino de Ronny sobre el camino de Donny para convertirse en la línea discontinua a la izquierda del diagrama. El punto de la intersección de esta línea con el camino de Lonny determina la línea punteada superior. Observa que la distancia entre las dos líneas punteadas más abajo es el triple de la distancia entre el siguiente par de líneas, que observamos como la distancia entre las $12:00$ horas y las $13:00$ horas en el primer par, y las $13:00$ horas y $13:20$ horas en el segundo par. Podemos tomar los dos segmentos en que se parte la línea de las $13:20$ horas de 2 cm cada uno, de modo que los dos segmentos en que se parte la línea de las $13:00$ horas sería de 3 cm cada uno. Luego, el segmento del fondo mide 18 cm. Podemos afirmar que el camino de Lonny aumenta una hora por cada movimiento horizontal de 12 cm, mientras que el camino de Ronny aumenta una hora por cada movimiento horizontal de 3 cm. Se sigue que la línea discontinua cruza el camino de Lonny luego de un aumento de $18 \div (12-3) = 2$ horas, de modo que el tiempo que representa la línea punteada superior es $14:00$ horas.

Solución del Problema 9.

		a	b	c	d	e	
		4	3	2	2	1	
A	4	2	1	3	4	5	1
B	3	3	4	5	2	1	3
C	4	1	3	4	5	2	2
D	2	4	5	2	1	3	2
E	1	5	2	1	3	4	2
		1	2	4	2	2	

Solución del Problema 10. Supongamos que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ son los enteros. Sea $S = a+b+c+d$. Como S es el mínimo común múltiplo de los cuatro enteros, existen enteros positivos w, x, y, z, con $w \leq x \leq y \leq z$, tales que $S = aw = bx = cy = dz$. Luego, S también es el mínimo común múltiplo de w, x, y y z. Más aún, tenemos que $\frac{1}{w} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, ya que $S = a+b+c+d = \frac{S}{w} + \frac{S}{x} + \frac{S}{y} + \frac{S}{z}$. Esto implica que $2 \leq w \leq 4$.

Si $w = 4$, entonces $x = y = z = 4$ y, por lo tanto, $a = b = c = d = 1$, lo cual no es posible ya que $S = 4$ no es el mínimo común múltiplo de $1, 1, 1$ y 1.

Si $w = 3$, entonces $x = 3$ o 4.

- Si $x = 4$, entonces $4 \leq y \leq 5$. Si $y = 5$, entonces z no es un entero. Ahora, si $y = 4$, entonces $z = 6$ y, por lo tanto, $a = 4$, $b = c = 3$ y $d = 2$. En este caso, $S = 12$ es el mínimo común múltiplo de $4, 3, 3$ y 2.

- Si $x = 3$, entonces $4 \leq y \leq 6$. Si $y = 6$, entonces $z = 6$, de donde $a = b = 2$ y $c = d = 1$. Sin embargo, $S = 6$ no es el mínimo común múltiplo de $2, 2, 1$ y 1. Si $y = 5$, entonces z no es un entero. Ahora, si $y = 4$, entonces $z = 12$, de donde $a = b = 4$, $c = 3$ y $d = 1$. En este caso, $S = 12$ es el mínimo común múltiplo de $4, 4, 3$ y 1.

Si $w = 2$, entonces $3 \leq x \leq 6$. Haciendo un análisis similar al caso anterior, obtenemos lo siguiente.

(x,y,z)	S	(a,b,c,d)	
$(6,6,6)$	6	$(3,1,1,1)$	S no es m.c.m.
$(5,5,10)$	10	$(5,2,2,1)$	
$(4,8,8)$	8	$(4,2,1,1)$	S no es m.c.m.
$(4,6,12)$	12	$(6,3,2,1)$	S no es m.c.m.
$(4,5,20)$	20	$(10,5,4,1)$	
$(3,12,12)$	12	$(6,4,1,1)$	
$(3,10,15)$	30	$(15,10,3,2)$	
$(3,9,18)$	18	$(9,6,2,1)$	
$(3,8,24)$	24	$(12,8,3,1)$	
$(3,7,42)$	42	$(21,14,6,1)$	

Por lo tanto, en total hay 7 valores posibles para $a+b+c+d$ y son $10, 12, 18, 20, 24, 30$ y 42.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

Durante el mes de marzo de 2019 se aplicó el examen de la XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los alumnos preseleccionados para las competencias internacionales y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador fue México.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 3 de plata y 4 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 139 puntos quedando en el lugar número 15 de 41 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México): Medalla de plata.
- Carlos Alberto Paéz de la Cruz (Querétaro): Medalla de plata.
- Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León): Medalla de bronce.
- Bruno Gutiérrez Chávez (Colima): Medalla de bronce.
- Diego Hinojosa Téllez (Jalisco): Medalla de bronce.

- Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México): Medalla de bronce.
- Jacobo de Juan Millón (Yucatán): Medalla de bronce.
- Crisanto Salazar Verástica (Sinaloa): Mención honorífica.
- Jonatan Alejandro González Cázares (Jalisco): Mención honorífica.
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los números enteros positivos. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ tales que $a^2 + f(a)f(b)$ es divisible entre $f(a) + b$ para todos los enteros positivos a y b.

Problema 2. Sea m un entero positivo fijo. La sucesión infinita $\{a_n\}_{n\geq 1}$ está definida de la siguiente manera: a_1 es un entero positivo y para cada entero $n \geq 1$ se tiene que

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 + 2^m & \text{si } a_n < 2^m, \\ \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \geq 2^m. \end{cases}$$

Para cada entero positivo m, determina todos los posibles valores de a_1 tal que cada elemento de la sucesión es entero.

Problema 3. Sea ABC un triángulo escaleno con circuncírculo Γ. Sea M el punto medio de BC. Un punto variable P se elige en el segmento AM. Los circuncírculos de los triángulos BPM y CPM intersectan a Γ nuevamente en los puntos D y E, respectivamente. Las líneas DP y EP intersectan (por segunda vez) a los circuncírculos de los triángulos CPM y BPM en X y Y, respectivamente. Demuestra que cuando P varía, el circuncírculo del triángulo AXY pasa por un punto fijo T distinto de A.

Problema 4. Considera un tablero de 2018×2019 con con un número entero en cada cuadrado unitario. Dos cuadrados unitarios son vecinos si comparten un lado. En cada turno eliges algunos cuadrados unitarios. Luego, para cada uno de estos cuadrados unitarios elegidos se calcula el promedio de todos sus vecinos. Finalmente, después de estos cálculos, los números en cada uno de los cuadrados unitarios elegidos son reemplazados por el promedio correspondiente. ¿Será siempre posible que después de una cantidad finita de turnos, todos los números del tablero sean iguales?

Problema 5. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 + f(y)) = f(f(x)) + f(y^2) + 2f(xy)$$

para todos los números reales x, y.

8ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Del 7 al 13 de abril de 2019, se llevó a cabo la octava edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO), en la Ciudad de Kyiv, Ucrania. El equipo mexicano estuvo integrado por: Ana Paula Jiménez Díaz (de la Ciudad de México), Nuria Sydykova Méndez (de la Ciudad de México), Karla Rebeca Munguía Romero (de Sinaloa) y Nathalia del Carmen Jasso Vera (de Guanajuato). Se obtuvieron excelentes resultados: Ana Paula obtuvo medalla de oro; Nuria y Karla Rebeca obtuvieron medalla de plata y Nathalia del Carmen obtuvo mención honorífica. México obtuvo el décimo lugar de 50 equipos participantes provenientes de 49 países (el país sede participó con dos equipos). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron: Isabel Hubard Escalera (líder) y Enrique Treviño (tutor).

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la sexta ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la 8^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Encuentre todas las ternas (a, b, c) de números reales tales que $ab + bc + ca = 1$ y

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Sea n un entero positivo. En un tablero de $2n \times 2n$ casillas se colocan dominós de manera que cada casilla del tablero sea adyacente a exactamente una casilla cubierta por un dominó. Para cada n, determine la mayor cantidad de dominós que se pueden poner de esa manera.
Nota: Un dominó es una ficha de 1×2 o de 2×1 cuadrados unitarios. Los dominós son colocados en el tablero de manera que cada dominó cubre exactamente dos casillas del tablero y los dominós no se superponen (no se traslapan). Decimos que dos casillas son *adyacentes* si son diferentes y tienen un lado en común.

Problema 3. Sea ABC un triángulo tal que $\angle CAB > \angle ABC$ y sea I su incentro. Sea D el punto en el segmento BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Sea ω la circunferencia que pasa por I y es tangente a la recta AC en el punto A. Sea X el segundo punto de intersección de ω con la circunferencia circunscrita de ABC. Muestre que las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CXB$ se intersecan en un punto de la recta BC.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I. La circunferencia que pasa por B y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AB por segunda vez en P. La circunferencia que pasa por C y es tangente a la recta AI en el punto I corta al lado AC por segunda vez en Q. Muestre que PQ es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo ABC.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un número entero y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ enteros positivos. Muestre que existen enteros positivos $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que cumplen las siguientes tres condiciones:

A) $a_i \leq b_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

B) Los residuos (o restos) de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ al dividirlos entre n son todos diferentes.

C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

Nota: Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ a la parte entera del número real x, es decir, al mayor entero que es menor o igual que x.

Problema 6. Alina traza 2019 cuerdas en una circunferencia. Los puntos extremos de estas son todos diferentes. Un punto se considera *marcado* si es de uno de los siguientes tipos:

1) uno de los 4038 puntos extremos de las cuerdas; o

2) un punto de intersección de al menos dos de las cuerdas.

Alina etiqueta con un número cada punto marcado. De los 4038 puntos del tipo 1), 2019 son etiquetados con un 0 y los otros 2019 puntos con un 1. Ella etiqueta cada punto del tipo 2) con un entero arbitrario, no necesariamente positivo.
En cada cuerda, Alina considera todos los segmentos entre puntos marcados consecutivos (si una cuerda tiene k puntos marcados, entonces tiene $k-1$ de estos segmentos). Sobre cada uno de estos segmentos, Alina escribe dos números: en amarillo escribe la suma de las etiquetas de los puntos extremos del segmento, mientras que en azul escribe el valor absoluto de su diferencia.
Alina se da cuenta que los $N+1$ números amarillos son exactamente los números $0, 1, \ldots, N$. Muestre que al menos uno de los números azules es múltiplo de tres.
Nota: Una *cuerda* es el segmento de recta que une dos puntos distintos en una circunferencia.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXI Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Jacobo de Juan Millón). La respuesta es $f(n) = n$ para todo entero positivo n.
Claramente, $f(n) = n$ para todo entero positivo n, satisface la condición del problema. Consideremos las siguientes sustituciones en la condición del problema.

1) Si $a = b = 1$, tenemos que $f(1) + 1$ divide a $f(1)^2 + 1$. Como $\frac{f(1)^2+1}{f(1)+1} = f(1) - 1 + \frac{2}{f(1)+1}$, debemos tener que $f(1) + 1 = 1$ o 2, de donde la única posibilidad es que $f(1) = 1$.

2) Si $a = 1$, tenemos que $b + 1$ divide a $f(b) + 1$ para todo entero positivo b. Luego, $b + 1 \leq f(b) + 1$, esto es, $b \leq f(b)$ para todo entero positivo b.

3) Si $b = 1$, tenemos que $f(a) + 1$ divide a $a^2 + f(a)$ para todo entero positivo a. Luego, $f(a) + 1$ divide a $a^2 + f(a) - (f(a) + 1) = a^2 - 1$. De aquí, se sigue que $f(a) \leq a^2 - 2$ para todo entero $a \geq 2$.

Consideremos un número primo p. Sustituyendo $a = p$ y $b = f(p)$ en la condición del problema, obtenemos que $2f(p)$ divide a $p^2 + f(p)f(f(p))$, lo cual implica que $f(p)$ divide a p^2. Como p es primo, las posibilidades para $f(p)$ son $1, p$ o p^2. Sin embargo, de acuerdo con 2) tenemos que $f(p) \geq p$ y, de acuerdo con 3), tenemos que $f(p) \leq p^2 - 2$. Por lo tanto, $f(p) = p$ para todo primo p. Sustituyendo $a = p$ en la condición del problema, tenemos que $b+p$ divide a $p^2+pf(b)$ para todo entero positivo b y todo número primo p. Como $(b + p)(f(b) + p - b) = p^2 - b^2 + bf(b) + pf(b)$, se sigue que $b + p$ divide a $bf(b) - b^2$ para todo entero positivo b y todo número primo

p. Por lo tanto, si b es un entero positivo cualquiera fijo, tenemos que $b+p$ divide a $bf(b)-b^2$ para todo número primo p, lo cual es posible solo si $bf(b)-b^2=0$, esto es, $f(b)=b$.

Segunda solución. La prueba la haremos por inducción en n. Como en la solución anterior, tenemos que $f(1)=1$. Supongamos que $f(n-1)=n-1$ para algún entero $n\geq 2$. Sustituyendo $a=n$ y $b=n-1$ en la condición del problema, tenemos que $f(n)+n-1$ divide a $n^2+f(n)(n-1)$. Como $f(n)+n-1$ divide a $(n-1)(f(n)+n-1)$, se sigue que $f(n)+n-1$ divide a $2n-1$.
Sustituyendo $a=n-1$ y $b=n$ en la condición del problema, obtenemos que $2n-1$ divide a $(n-1)^2+(n-1)f(n)=(n-1)(n-1+f(n))$. Como $2n-1$ y $n-1$ son primos relativos, se sigue que $2n-1$ divide a $f(n)+n-1$.
Por lo tanto, $f(n)+n-1=2n-1$, lo cual implica que $f(n)=n$.

Solución del problema 2. (Solución de Nuria Sydykova Méndez). El único valor de m para los cuales los valores válidos de a_1 existen, es $m=2$. En este caso las únicas soluciones son $a_1=2^\ell$ para $\ell\geq 1$.
Supongamos que para enteros m y a_1, todos los términos de la sucesión son enteros. Para cada $i\geq 1$, escribamos el i-ésimo término de la sucesión como $a_i=b_i 2^{c_i}$ donde b_i es el mayor divisor impar de a_i (la "parte impar" de a_i) y c_i es un entero no negativo.

Lema 1. La sucesión $b_1, b_2, \ldots$ está acotada inferiormente por 2^m.
Demostración. Supongamos lo contrario y consideremos un índice i tal que $b_i>2^m$ y para el cual c_i es mínimo. Como $a_i\geq b_i>2^m$, estamos en el segundo caso de la recursión. Por lo tanto, $a_{i+1}=a_i/2$, lo cual implica que $b_{i+1}=b_i>2^m$ y $c_{i+1}=c_i-1<c_i$. Esto contradice la minimalidad de c_i. $\square$

Lema 2. La sucesión $b_1, b_2, \ldots$ es no decreciente.
Demostración. Si $a_i\geq 2^m$, entonces $a_{i+1}=a_i/2$ y $b_{i+1}=b_i$. Por otro lado, si $a_i<2^m$, entonces $a_{i+1}=a_i^2+2^m=b_i^2 2^{2c_i}+2^m$ y tenemos los siguientes casos.

1) Si $2c_i>m$, entonces $a_{i+1}=2^m(b_i^2 2^{2c_i-m}+1)$ y $b_{i+1}=b_i^2 2^{2c_i-m}+1>b_i$.

2) Si $2c_i<m$, entonces $a_{i+1}=2^{2c_i}(b_i^2+2^{m-2c_i})$ y $b_{i+1}=b_i^2+2^{m-2c_i}>b_i$.

3) Si $2c_i=m$, entonces $a_{i+1}=2^{m+1}\cdot\frac{b_i^2+1}{2}$ y $b_{i+1}=\frac{b_i^2+1}{2}\geq b_i$, ya que $b_i^2+1\equiv 2 \pmod 4$.

$\square$

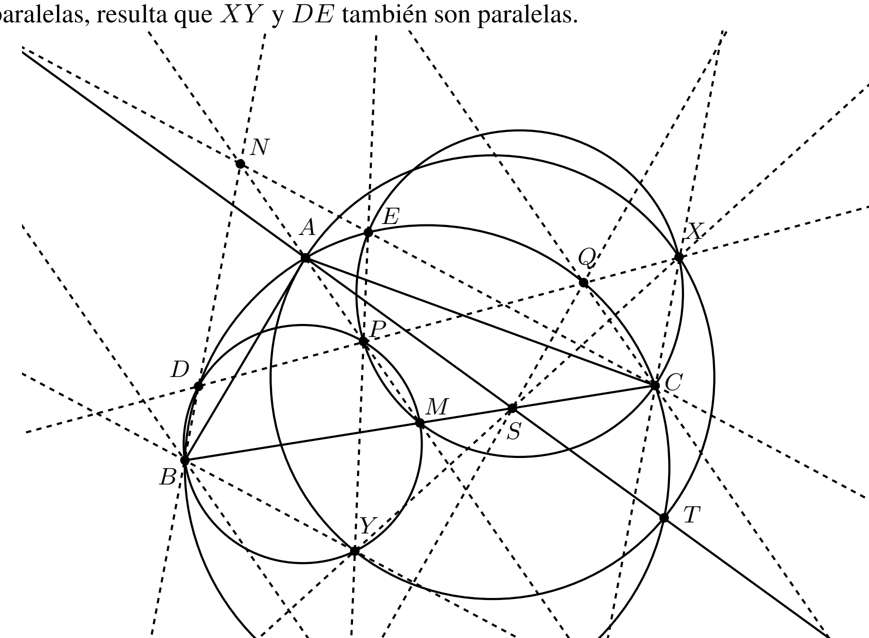
Combinando estos dos lemas, obtenemos que la sucesión $b_1, b_2, \ldots$ es eventualmente constante. Fijemos un índice j tal que $b_k=b_j$ para todo $k\geq j$. Como a_n desciende a $a_n/2$ siempre que $a_n\geq 2^m$, hay infinitos términos que son menores que 2^m. Luego, podemos elegir $i>j$ tal que $a_i<2^m$. De la demostración del Lema 2, tenemos que $a_i<2^m$ y $b_{i+1}=b_i$ se satisfacen simultáneamente cuando $2c_i=m$ y $b_{i+1}=b_i=1$. Por el Lema 2, la sucesión $b_1, b_2, \ldots$ es constante igual a 1 y, por lo tanto, $a_1, a_2, \ldots$

son todos potencias de dos. Comenzando con $a_i = 2^{c_i} = 2^{m/2} < 2^m$, la sucesión es

$$2^{m/2} \to 2^{m+1} \to 2^m \to 2^{m-1} \to 2^{2m-2} + 2^m.$$

Notemos que este último término es una potencia de dos si y solo si $2m - 2 = m$. Esto implica que m debe ser igual a 2. Cuando $m = 2$ y $a_1 = 2^\ell$ con $\ell \geq 1$, la sucesión eventualmente se cicla como $2, 8, 4, 2, \ldots$. Cuando $m = 2$ y $a_1 = 1$, la sucesión falla debido a que sus primeros términos son $1, 5, 5/2$.

Solución del problema 3. Sea N el centro radical de los circuncírculos de los triángulos ABC, BMP y CMP. Los ejes radicales por pares de estos círculos son BD, CE y PM y, por lo tanto, concurren en N. Ahora, por ángulos dirigidos tenemos que $\angle MCE = \angle MPE = \angle MPY = \angle MBY$. Se sigue que BY es paralela a CE y, análogamente, que CX es paralela a BD. Luego, si L es la intersección de BY y CX, entonces $BNCL$ es un paralelogramo. Como $BM = MC$, concluimos que L es la reflexíon de N con respecto a M y, por lo tanto, L está en la recta AM. Usando la potencia del punto L con los circuncírculos de los triángulos BPM y CPM, tenemos que $LY \cdot LB = LP \cdot LM = LX \cdot LC$. Esto significa que el cuadrilátero $BYXC$ es cíclico. Luego, $\angle LXY = \angle LBC = \angle BCN = \angle NDE$. Como CX y BN son paralelas, resulta que XY y DE también son paralelas.



Sean Q y R dos puntos en Γ tales que CQ, BR y AM son paralelas. Usando ángulos dirigidos tenemos que $\angle QDB = \angle QCB = \angle AMB = \angle PMB = \angle PDB$. Por lo tanto, los puntos D, P y Q son colineales. De manera análoga, obtenemos que los puntos E, P y R son colineales. De aquí que $\angle PRQ = \angle PDE = \angle PXY$, ya que

XY y DE son paralelas. Luego, el cuadrilátero $QRYX$ es cíclico. Sea S el centro radical del circuncírculo del triángulo ABC y los círculos $BCYX$ y $QRYX$. Este punto está en las rectas BC, QR y XY puestos que estas son los ejes radicales de los círculos. Sea T el segundo punto de intersección de AS con Γ. Usando la potencia de S con el circuncírculo del triángulo ABC y el círculo $BCXY$, obtenemos que $SX \cdot SY = SB \cdot SC = ST \cdot SA$. Por lo tanto, T está en el circuncírculo del triángulo AXY. Como Q y R son fijos sin importar la elección de P, resulta que S también está fijo, ya que es la intersección de QR y BC. Esto implica que T también está fijo y, por lo tanto, el circuncírculo del triángulo AXY pasa por $T \neq A$ para cualquier elección de P.

Solución del problema 4. La respuesta es no. Sea n un entero positivo primo relativo con 2 y 3. Podemos estudiar el proceso completo módulo n reemplazando divisiones por $2, 3, 4$ con multiplicaciones por los correspondientes inversos módulo n. Si en algún momento el proceso original hace que todos los números sean iguales, entonces el proceso módulo n también tendrá todos los números iguales. Nuestro objetivo es elegir n y una configuración inicial módulo n para la cual ningún proceso módulo n alcanza un tablero con todos los números iguales módulo n. Desarrollaremos este objetivo en dos lemas.

Lema 1. *Existe un tablero de 2×3 que permanece constante módulo 5 y cuyas entradas no son todas iguales.*

Demostración. El siguiente tablero satisface las condiciones del lema.

3	1	3
0	2	0

El hecho de que el tablero permanezca constante sin importar la elección de los cuadrados, puede verificarse cuadrado por cuadrado. □

Lema 2. *Si existe un tablero de $r \times s$ con $r \geq 2$, $s \geq 2$, que permanece constante módulo 5, entonces también hay un tablero de $kr \times ls$ con la misma propiedad.*

Demostración. Demostraremos, con un análisis caso por caso, que repetidamente reflejar el tablero de $r \times s$ respecto a una arista, preserva la propiedad.

- Si una casilla tuviera 4 vecinos, después de las reflexiones seguiría teniendo los mismos vecinos.

- Si una casilla con a tuviera 3 vecinos b, c, d, tenemos por hipótesis que $a \equiv 3^{-1}(b+c+d) \equiv 2(b+c+d) \pmod 5$. Una reflexión puede agregar a como un vecino de la casilla y así

$$4^{-1}(a+b+c+d) \equiv 4(a+b+c+d) \equiv 4a+2a \equiv a \pmod 5.$$

- Si una casilla con a tuviera 2 vecinos b, c, tenemos por hipótesis que $a \equiv 2^{-1}(b+c) \equiv 3(b+c) \pmod 5$. Si las reflexiones agregan una a como vecino, entonces

$$3^{-1}(a+b+c) \equiv 2(3(b+c)+b+c) \equiv 8(b+c) \equiv 3(b+c) \equiv a \pmod 5.$$

- Si una casilla con a tuviera 2 vecinos b, c, tenemos por hipótesis que $a \equiv 2^{-1}(b+c) \pmod 5$. Si las reflexiones agregan dos a's como vecinos, entonces

$$4^{-1}(2a+b+c) \equiv (2^{-1}a + 2^{-1}a) \equiv a \pmod 5.$$

En los tres casos, cualquier casilla se preserva módulo 5 después de una operación. Por lo tanto, podemos rellenar el tablero de $kr \times ls$ con $k \times l$ copias por reflexión. □

Como $2 \mid 2018$ y $3 \mid 2019$, podemos llegar mediante reflexiones al siguiente tablero.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 3 \\
\hline
\end{array} \cdots$$
$$\vdots$$

Aplicando los Lemas 1 y 2, el tablero es invariante módulo 5, así que la respuesta es no.

Solución del problema 5. Demostraremos que las funciones que satisfacen el problema son $f(x) = 0$ para todo x y $f(x) = x^2$ para todo x.
Sustituyendo $x = y = 0$ en la ecuación del problema, obtenemos que $f(0) = 0$. También, sustituyendo $y = 0$, obtenemos que $f(x^2) = f(f(x))$ para cualquier x. Más aún, sustituyendo $y = 1$ en la ecuación original y simplificando, obtenemos que

$$2f(x) = f(x^2 + f(1)) - f(x^2) - f(1),$$

de donde se sigue que $f(-x) = f(x)$ se debe satisfacer para todo x.
Supongamos ahora que $f(a) = f(b)$ para algún par de números a y b. Sustituyendo $y = a$ y $y = b$ en la ecuación original, comparando las dos identidades resultantes y usando el hecho de que $f(a^2) = f(f(a)) = f(f(b)) = f(b^2)$, obtenemos que $f(ax) = f(bx)$ para todo número real x. Con esto hemos demostrado el siguiente hecho:

$$\text{Si } \ f(a) = f(b), \ \text{ entonces } \ f(ax) = f(bx) \ \text{ para todo número real } \ x. \qquad (1)$$

En consecuencia, si para algún $a \neq 0$, $f(a) = 0$, entonces, para todo x, $f(x) = f(a \cdot \frac{x}{a}) = f(0 \cdot \frac{x}{a}) = f(0) = 0$, lo cual da la solución trivial al problema.
En lo que sigue, trataremos de determinar una solución no trivial. Supongamos, a partir

de ahora, que si $a \neq 0$, entonces $f(a) \neq 0$. Como $f(f(x)) = f(x^2)$ para todo x, el lado derecho de la ecuación original es $f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy)$, el cual es invariante si intercambiamos x y y. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x^2) + f(y^2) + 2f(xy) = f(x^2 + f(y)) = f(y^2 + f(x)) \tag{2}$$

para cualesquiera números reales x, y.
Demostraremos ahora que $f(x) \geq 0$ para todo x. Supongamos lo contrario, esto es, $f(s) = -t^2$ para ciertos números reales no cero s, t. Sustituyendo $x = s$, $y = t$ en el lado derecho de la relación (2), obtenemos que $f(s^2 + f(t)) = f(t^2 + f(s)) = f(0) = 0$, de donde se sigue que $f(t) = -s^2$. También tenemos que $f(t^2) = f(-t^2) = f(f(s)) = f(s^2)$. Usando la relación (2) con $x = \sqrt{s^2 + t^2}$ y $y = s$, obtenemos que $f(s^2 + t^2) + 2f(s \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = 0$. De manera análoga, usando la relación (2) con $x = \sqrt{s^2 + t^2}$ y $y = t$, obtenemos que $f(s^2 + t^2) + 2f(t \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = 0$. Por lo tanto, obtenemos que $f(s \cdot \sqrt{s^2 + t^2}) = f(t \cdot \sqrt{s^2 + t^2})$.
Aplicando la condición (1) con $a = s\sqrt{s^2 + t^2}$, $b = t\sqrt{s^2 + t^2}$ y $x = 1/\sqrt{s^2 + t^2}$, obtenemos que $f(s) = f(t) = -s^2$, de donde se sigue que

$$0 = f(s^2 + f(s)) = f(s^2) + f(s^2) + 2f(s^2) = 4f(s^2),$$

lo que es una contradicción, ya que $s^2 > 0$. Por lo tanto, concluimos que para todo $x \neq 0$, $f(x) > 0$.
A continuación demostraremos que

$$\text{Si } \; k > 0, \; \text{ entonces } \; f(k) = 1 \; \text{ si y solo si } \; k = 1. \tag{3}$$

En efecto, sea $k > 0$ tal que $f(k) = 1$. Tenemos que $f(k^2) = f(f(k)) = f(1)$, así que por (1), $f(1/k) = f(k) = 1$. Luego, podemos suponer que $k \geq 1$. Aplicando la relación (2) con $x = \sqrt{k^2 - 1}$, $y = k$ y usando que $f(x) \geq 0$, obtenemos que

$$f(k^2 - 1 + f(k)) = f(k^2 - 1) + f(k^2) + 2f(k\sqrt{k^2 - 1}) \geq f(k^2 - 1) + f(k^2),$$

lo cual se simplifica a $0 \geq f(k^2 - 1) \geq 0$. De aquí que $k^2 - 1 = 0$ y, por lo tanto, $k = 1$. Para el recíproco, basta demostrar que $f(1) = 1$. Si $f(1) = m \leq 1$, podemos proceder como antes haciendo $x = \sqrt{1 - m}$ y $y = 1$ para obtener que $m = 1$. Si $f(1) = m \geq 1$, notemos que $f(m) = f(f(1)) = f(1^2) = f(1) = m \leq m^2$. Podemos proceder entonces como antes con $x = \sqrt{m^2 - m}$ y $y = 1$ para mostrar que $m^2 = m$ y así $m = 1$. Esto concluye la prueba de la condición (3).
Estamos listos para concluir la solución del problema. Sea $x > 0$ y sea $m = f(x)$. Como $f(f(x)) = f(x^2)$, tenemos que $f(x^2) = f(m)$. Pero, por la condición (1), $f(m/x^2) = 1$. Por lo tanto, $m = x^2$. Si $x < 0$, entonces $f(x) = f(-x) = f(x^2)$. Luego, $f(x) = x^2$ para todo x.

8ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 8^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Nuria Sydykova Méndez). Sabiendo que $ab+bc+ca=1$, podemos reescribir las igualdades $a^2b+c(1)=b^2c+a(1)=c^2a+b(1)$ en la forma $a^2b+c(ab+bc+ca)=b^2c+a(ab+bc+ca)=c^2a+b(ab+bc+ca)$, esto es, $a^2b+bc^2+c^2a=b^2c+a^2b+ca^2=c^2a+ab^2+b^2c$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
b^2c+ca^2&=bc^2+c^2a=c(1-ab),\\
c^2a+ab^2&=ca^2+a^2b=a(1-bc),\\
a^2b+bc^2&=ab^2+b^2c=b(1-ca).
\end{aligned}$$

Si alguno de a, b o c es cero, digamos c, entonces $ab=1$ y $a^2b=a=b$. Luego, $a^2=a$, de donde $a=1$ y $b=\frac{1}{a}=1$ ya que a y b son distintos de cero, pues $ab=1$. Por lo tanto, si alguno de a, b o c es 0, los demás son iguales a 1 y las ternas que satisfacen el problema son $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$.
Si ninguno de a, b o c es cero, entonces

$$\begin{aligned}
1&=a^2+b^2+ab,\\
1&=b^2+c^2+bc,\\
1&=c^2+a^2+ca.
\end{aligned}$$

Si entre a, b y c hay dos iguales, digamos a y b, entonces $a^2+2ac=1$ y, por lo tanto, $a^3+c=a^2c+a=c^2a+a$. De esta última igualdad obtenemos que $a^2c=c^2a$, de donde $a=c$, pues ninguno de a, b, c es 0. Por lo tanto, $a=b=c$, esto es, si dos son iguales entonces los tres son iguales. Luego, $3a^2=1$ de donde $a=b=c=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ y las ternas que satisfacen el problema son $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Supongamos que entre a, b y c no hay dos iguales. Sumando las tres ecuaciones centradas anteriores obtenemos que $3=2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=2(a^2+b^2+c^2)+1$, lo cual implica que $a^2+b^2+c^2=1$. Luego, $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+ab$, esto es, $c^2=ab$. Análogamente, obtenemos que $b^2=ca$ y $a^2=bc$. Por lo tanto, $abc=a^3=b^3=c^3$, de donde $a=b=c$, lo que es una contradicción, pues a, b y c son distintos entre sí. Luego, en este caso no hay soluciones.
Por lo tanto, las soluciones son las ternas $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Solución del problema 2. (Solución de Karla Rebeca Munguía Romero). Empecemos por ver que es posible acomodar $\frac{n(n+1)}{2}$ dominós. Empezamos poniendo una en una esquina del perímetro y colocamos un dominó que quede exactamente dentro del perímetro cada dos casillas, hasta que estén todas las posibles. Luego nos fijamos en la cuadrícula de $(2n-1)\times(2n-2)$ centrada en el tablero y repetimos el proceso cuidando que la paridad de los dominós se haya recorrido un lugar. Hacemos esto sucesivamente hasta terminar.
Si pusimos una ficha de dominó en el perímetro, se deben dejar al menos 2 casillas

vacías hacia cada sentido antes de poner otra. Esto es porque las adyacentes a la que pusimos no se pueden usar y las adyacentes de esas (no las cubiertas) si tuvieran dominó, habría casillas con 2 adyacentes cubiertas.

Cada dominó que está dentro del perímetro usando una esquina ocupa 5 casillas en total. Cada dominó que está completamente en el perímetro sin usar esquinas ocupa 6 casillas en total. Un dominó que tiene una ficha en el interior y una en el perímetro ocupa 7 casillas en total y los dominós en el interior ocupan 8 casillas en total.

En el perímetro, por cada casilla cubierta deben dejarse al menos otros 2 espacios antes de la siguiente casilla cubierta (en caso de que no sea un dominó).

En el perímetro hay $8n - 4$ casillas. Solo los dominós involucrados con el perímetro "gastan" menos de 8 casillas. (Gastar es que tales casillas cumplan la cuota de una adyacente cubierta. Ahorrar es cuando gastamos menos casillas que un dominó en el interior).

Como en el perímetro cada casilla necesita espacio de 2 casillas antes de haber otra cubierta y un dominó que lo involucra cubre a lo más 2 casillas, entonces a lo más la mitad del perímetro está cubierto.

Como hay $4n^2$ casillas y hay $4n+2$ que ahorramos, solo hace falta ver que $\left\lfloor \frac{4n^2+4n+2}{8} \right\rfloor \leq \frac{4n^2+4n+2}{8} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4}$, de donde $\left\lfloor \frac{4n^2+4n+2}{8} \right\rfloor \leq \frac{n(n+1)}{2}$.

Por lo tanto, la cantidad de fichas es menor o igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. Como ya mostramos cómo colocar esa cantidad de fichas, hemos encontrado la mayor posible.

Solución del problema 3. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz). Como $\angle CAD = \angle ABC$ y $\angle BCA = \angle DCA$, tenemos que los triángulos CDA y CBA son semejantes, entonces $\frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CA}$, de donde $CA^2 = CD \cdot CB$. Veamos que ω es tangente a AC, entonces si Y es el otro punto de intersección de CX con ω, por potencia tenemos que $CA^2 = CY \cdot CX$. Como $CA^2 = CY \cdot CX = CD \cdot CB$, el cuadriláero $YXBD$ es cíclico. Por otro lado, como X está en el circuncírculo del triángulo ABC, $\angle AXC = \angle ABC$, por el cíclico $AXIY$, se tiene $\angle AXY = \angle AIY$.

La bisectriz del ángulo $\angle DAB$ interseca a BC en E y $\angle DAE = \angle EAB$. Notemos que por ser tangente AC a ω se tiene que por ángulos seminscritos $\angle CAY = \angle AXY = \angle ABC$, pero por construcción, $\angle CAD = \angle ABC$, esto quiere decir que A, Y y D están alineados.

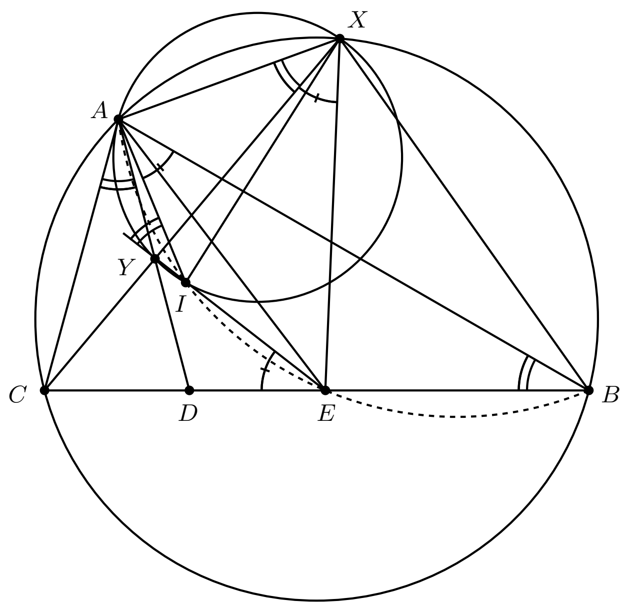
Para finalizar, necesitamos que XE sea bisectriz del ángulo $\angle CXB$. Utlizando las bisectrices, se satisfacen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\angle IAE = \angle IAB - \angle EAB = \frac{\angle CAB}{2} - \frac{\angle DAB}{2} = \frac{\angle CAB - \angle DAB}{2} \\ = \frac{\angle CAD}{2} = \frac{\angle ABC}{2} = \angle IBE.\end{aligned}$$

Esto implica que el cuadrilátero $AIEB$ es cíclico y, como BI es bisectriz del ángulo $\angle ABE$, las cuerdas AI y EI son iguales. Por otro cálculo de ángulos tenemos que,

$$\angle AEC = \angle EAB + \angle ABE = \angle DAE + \angle CAD = \angle CAE,$$

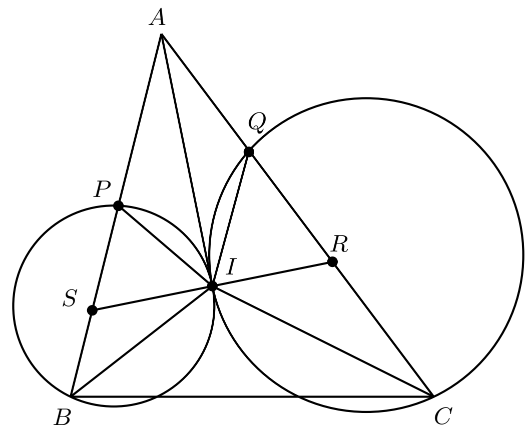
de donde se sigue que el triángulo ACE es isósceles y $CA = CE$. Utilizando las potencias calculadas al inicio, obtenemos que $CE^2 = CA^2 = CX \cdot CY$. Luego, los triángulos CYE y CEX son semejantes y se cumple que $\angle CXE = \angle YEC$.



Para conclir veamos que Y, I y E están alineados, esto ocurre pues del cíclico $AIEB$ se tiene que $\angle EIA = 180^\circ - \angle ABC$ y por el cíclico $AXIY$ se tiene que $\angle AIY = \angle AXY = \angle ABC$, entonces los ángulos $\angle AIY$ y $\angle EIA$ suman 180° que implica la colinealidad. Luego manipulando la igualdad del párrafo anterior, tenemos que $\angle CXE = \angle YEC = \angle IEC = \angle IAB$, donde la última igualdad se sigue del cíclico $AIEB$. Con esto se concluye pues $\angle IAE = \frac{\angle CAB}{2} = \frac{\angle CXB}{2}$ como se quería.

Solución del problema 4. (Solución de Nathalia del Carmen Jasso Vera). Llamemos R y S a las intersecciones de la perpendicular a AI por I con los lados AC y AB, respectivamente. Como AI es bisectriz del ángulo $\angle RAS$ y $RS \perp AI$, tenemos que AI es altura del triángulo RAS y bisectriz del ángulo $\angle RAS$. Luego, el triángulo RAS es isósceles con $AR = AS$ y $SI = IR$. Llamemos ω_1 a la circunferencia que pasa por B, I y es tangente a AI en I; ω_2 a la circunferencia que pasa por C, I y es tangente a AI en I.

Como AI es tangente a ω_1 en I, tenemos que $\angle PIA = \angle PBI = \beta$. Análogamente, AI tangente a ω_2 en I implica que $\angle QIA = \angle ACI = \theta$. Entonces, tenemos que $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCA = 2\theta$ y diremos que $\angle CAB = 2\alpha$. Por suma de ángulos internos en el triángulo ABC, tenemos que $2\alpha+2\beta+2\theta = 180^\circ$, de donde $\alpha+\beta+\theta = 90^\circ$. Como $AI \perp RS$ y $\angle AIS = 90^\circ = \angle PIA + \angle PIS = \beta + \angle PIS = \alpha + \beta + \theta$, se sigue que $\angle PIS = \alpha + \theta$. Análogamente, tenemos que$\angle AIR = 90^\circ = \angle QIA + \angle QIR = \theta + \angle QIR = \alpha + \beta + \theta$, de donde $\angle QIR = \alpha + \beta$.



En el triángulo ARS, tenemos que

$$\angle ARS = \angle RSA = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \frac{2\beta + 2\theta}{2} = \beta + \theta = \angle QRI = \angle PSI.$$

Por suma de ángulos internos en los triángulos RIQ y SIP, tenemos que $\angle RQI = \alpha + \theta$ y $\angle SPI = \alpha + \beta$. Por lo tanto, los triángulos RQI y SIP son semejantes, lo cual implica que $\frac{QI}{RQ} = \frac{PI}{SI}$.

Como $SI = RI$, tenemos que $\frac{QI}{RQ} = \frac{PI}{RI}$, lo cual implica que $\frac{QI}{PI} = \frac{RQ}{RI}$. Como $\angle QIP = \angle QRI = \beta + \theta$, se sigue que los triángulos QRI y QIP son semejantes, por el criterio LAL. Luego, $\angle RQI = \angle IQP = \alpha + \theta$ y $\angle IPQ = \angle RIQ = \angle SPI = \alpha + \beta$. Con esto obtenemos que $\angle PQR = \angle PQC = 2\alpha + 2\theta = 180^\circ - 2\beta$, lo cual implica que $\angle PQA = 2\beta$ y $\angle APQ = 2\theta$. Por lo tanto, I es el punto de intersección de las bisectrices externas QI y PI y de la bisectriz interna AI del triángulo AQP y, el exradio del excírculo con centro I, es el inradio del triángulo ABC. Como hay una única circunferencia con centro I tangente a los lados AB y AC, el excírculo del triángulo AQP con centro I, debe ser el incírculo del triángulo ABC, de donde PQ es tangente a este círculo.

Solución del problema 5. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos b_i de manera recursiva como el menor entero tal que $b_i \geq a_i$ y tal que b_i no es congruente módulo n con ninguno de los enteros $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Entonces, $b_i - a_i \leq i - 1$ ya que de los i enteros consecutivos $a_i, a_i + 1, \ldots, a_i + i - 1$, a lo más $i - 1$ son congruentes módulo n con uno de los enteros $b_1, \ldots, b_{i-1}$. Como todos los b_i son distintos módulo n, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \equiv \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{2} n(n-1) \pmod{n},$$

esto es, n divide a $\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2}n(n-1)$. Más aún, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$. Luego, $\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2}n(n-1) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i$. Como el lado izquierdo de esta desigualdad es divisible por n, tenemos que

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i - \frac{1}{2}n(n-1)\right) \leq \left\lfloor \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \right\rfloor,$$

de donde se sigue el resultado.

Solución del problema 6. Demostraremos primero el siguiente resultado.
Lema. *Si pintamos todos los puntos de blanco o negro, entonces el número de aristas con un extremo blanco y un extremo negro, que denotaremos por E_{bn}, es igual, módulo 2, al número de puntos blancos (o negros) sobre la circunferencia, el cual denotaremos por C_b (respectivamente, C_n).*

Demostración. Observemos que intercambiar el color de cualquier punto interior, no cambia la paridad de E_{bn}, puesto que cada punto interior tiene grado par. Luego, es suficiente demostrar el resultado cuando todos los puntos interiores son negros. Pero entonces, $E_{bn} = C_b$ y ciertamente las paridades son iguales. $\square$

Continuando con la solución del problema, supongamos que no hay dos vértices adyacentes etiquetados que difieren por un múltiplo de 3 y pintemos con 3 colores a los vértices de acuerdo con el residuo de su etiqueta módulo 3. Sean E_{01} el número de aristas entre 0-vértices y 1-vértices; C_0 el número de 0-vértices en la frontera y así sucesivamente.
Entonces, consideremos la 2-coloración obtenida combinando 1-vértices y 2-vértices. Por el lema anterior, tenemos que $E_{01} + E_{02} \equiv C_0 \pmod 2$. De manera análoga, obtenemos que $E_{01} + E_{12} \equiv C_1 \pmod 2$ y $E_{02} + E_{12} \equiv C_2 \pmod 2$.
Usando el hecho de que $C_0 = C_1 = 2019$ y $C_2 = 0$, deducimos que o bien E_{02} y E_{12} son pares y E_{01} es impar; o E_{02} y E_{12} son impares y E_{01} es par. Pero si las etiquetas de las aristas son los primeros N enteros no negativos, entonces $E_{01} = E_{12}$ a menos que $N \equiv 0 \pmod 3$, en cuyo caso $E_{01} = E_{02}$. Luego, si Alina elige los vértices etiquetados, no es posible que el multiconjunto de aristas etiquetadas sea $\{0, \ldots, N\}$.
Por lo tanto, dos vértices etiquetados difieren por un múltiplo de 3.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 10 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 11 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 12 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 13 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 14 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 17 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.