SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Tzaloa

03
11

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2019, No. 3

Comité Editorial:

Víctor Hugo Almendra Hernández

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Alfredo Alef Pineda Reyes

Carlos Jacob Rubio Barrios

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

©Queda estrictamente prohibida la reproducción parcial o total por cualquier sistema
o método, mecánico o electrónico, sin autorización previa del autor.
Impreso y hecho en México.
Agosto de 2019.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2019, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Alfredo Alef Pineda Reyes quien ahora se integra al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Luis Eduardo García Hernández, quien participó en este comité desde el año 2014 y a quien le desamos mucho éxito en sus nuevos proyectos.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Vectores y Geometría*, de nuestros amigos Mauricio Adrián Che Moguel y Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se aborda a los vectores como herramienta para la solución de problemas de geometría, que pueden ser

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

difíciles de resolver usando técnicas más convencionales. Esperamos que este material sea de utilidad tanto para el lector principiante como para el lector avanzado.
De especial interés para todos, en este tercer número del año 2019, incluimos los exámenes de la Olimpiada Regional de Occidente 2019, así como los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos en el nivel Secundaria de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2018. También hemos incluido los exámenes con soluciones de la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe, así como de la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, ambos certámenes donde México participó en el segundo cuatrimestre de este año 2019.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2000. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2019-2020 y, para el 1° de julio de 2020, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 10 al 15 de noviembre de 2019 en la Ciudad de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2019 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rusia, julio de 2020) y a la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Perú, septiembre de 2020).

De entre los concursantes nacidos en 2003 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2020).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la IX Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2020.

Vectores y Geometría

Por Mauricio Adrián Che Moguel y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

En este escrito veremos cómo usar vectores para resolver problemas de geometría que pueden ser difíciles de resolver usando técnicas más convencionales. Empezaremos con un breve repaso de la definición de vector y algunas de sus propiedades básicas.

Vectores

Un *vector*, denotado por $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{A}$ o $\overrightarrow{AB}$, es un par ordenado de números reales, denominados sus *coordenadas*. Así, escribimos $\overrightarrow{v} = (a, b)$ donde las coordenadas a y b son números reales. Aunque en geometría tales parejas se usan para denotar puntos en el plano, preferimos no pensar en los vectores como puntos, sino como simples parejas de números reales. Si se trabaja en el espacio tridimensional, es conveniente usar vectores espaciales, que se definen como tripletas (a, b, c) de números reales. De hecho, a menudo conviene considerar vectores n-dimensionales de la forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde hay n coordenadas y n puede ser cualquier entero positivo. No obstante, nuestro objetivo al presentar los vectores es usarlos para resolver problemas de geometría plana y por ello nos limitaremos a trabajar con vectores que tienen solo dos coordenadas.

Los vectores pueden sumarse o restarse, sumando o restando las coordenadas correspondientes. Si $\overrightarrow{v} = (a, b)$ y $\overrightarrow{w} = (c, d)$, entonces $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (a + c, b + d)$ y $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = (a - c, b - d)$. También podemos multiplicar vectores por escalares, multiplicando simplemente cada coordenada por el escalar[2]. Si z es un escalar y $\overrightarrow{v} = (a, b)$ es un vector, escribimos $z\overrightarrow{v}$ para denotar al vector (za, zb).

Muchas de las reglas usuales de la artimética también se cumplen para los vectores. Por ejemplo, las leyes asociativa y conmutativa son válidas para la suma de vectores y

[2] Un *escalar* es simplemente un número real.

dos leyes distributivas se cumplen para la suma y multiplicación por un escalar. Estas dos leyes distributivas son $(y+z)\overrightarrow{v} = y\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{v}$ y $z(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = z\overrightarrow{v} + z\overrightarrow{w}$, donde y, z son escalares y $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ son vectores. También, el vector $\overrightarrow{0} = (0,0)$, llamado *vector cero*, se comporta de manera muy parecida a como lo hace el número 0 en aritmética: Si $\overrightarrow{v}$ es cualquier vector y z es cualquier escalar, entonces $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$ y $z\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

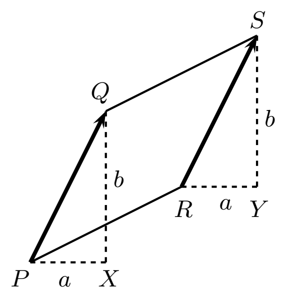
Para relacionar a los vectores con la geometría, representamos cada vector como una flecha en el plano. Para ser específicos, supongamos que el plano cuenta con un sistema de coordenadas de modo que cada punto P puede describirse como un par ordenado (x, y). Por supuesto, (x, y) se ve simplemente como un vector, pero nos rehusamos a considerarlo así; es solo una forma de denominar al punto P.

Ahora, supongamos que tenemos un vector $\overrightarrow{v} = (a, b)$ y sea P cualquier punto en el plano cuyas coordenadas son (x, y). Si Q es el punto cuyas coordenadas son $(x + a, y + b)$, entonces podemos pensar que el vector $\overrightarrow{v}$ proporciona instrucciones sobre cómo llegar del punto P al punto Q: Moverse a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. Por supuesto, si a es negativo, en realidad el desplazamiento es a la izquierda y, si b es negativo, es hacia abajo. Si trazamos una flecha desde P hasta Q con cola en P y punta en Q, esta flecha es una representación del vector $\overrightarrow{v}$ y escribimos $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v}$. A menudo es posible considerar que la flecha de P a Q es realmente el vector $\overrightarrow{v}$, pero esto puede ser peligroso porque es esencial recordar que el punto P se eligió arbitrariamente; en ningún sentido fue determinado por el vector $\overrightarrow{v}$. Pero, por supuesto, una vez que se elige P, entonces Q se determina sin ninguna ambigüedad. El vector $\overrightarrow{v}$ se representa por una infinidad de flechas distintas en el plano: una para cada elección de la cola de la flecha P. Cualquiera de estas flechas es una imagen o representación de $\overrightarrow{v}$; todas las flechas que representan a $\overrightarrow{v}$ son paralelas y tienen la misma longitud. Cada una de estas se obtiene a partir de cualquiera de las otras por medio de una traslación, que es un movimiento en el plano sin rotación.
Hay un ligero problema si $\overrightarrow{v}$ es el vector cero $\overrightarrow{0}$, ya que en este caso, los puntos P y Q son idénticos y no es posible trazar una flecha de P a Q. A pesar de ello, el vector $\overrightarrow{0}$ proporciona instrucciones sobre cómo ir de P a P y, por lo menos, podemos imaginar una flecha correspondiente de longitud cero y sin dirección particular.

Dados dos puntos P y Q y una flecha con cola en P y punta en Q, podemos reconstruir el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ al restar las coordenadas correspondientes de $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$. Así, $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ y podemos ver que toda flecha trazada representa algún vector. Observemos que requerimos la flecha de P a Q y no solo el segmento de recta PQ porque debemos saber qué punto es la punta y cuál es la cola, de modo que restemos las coordenadas de la cola de las de la punta y no al revés. De hecho, tenemos que $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

¿Cuál es el significado geométrico de la suma vectorial? Dados los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, representamos a $\overrightarrow{v}$ como una flecha de P a Q, donde P es arbitrario. Aunque podemos representar a $\overrightarrow{w}$ como una flecha con cualquier punto inicial (cola) que se quiera, elegimos trazar $\overrightarrow{w}$ empezando en Q y escribimos $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{QR}$. Así, hemos colocado las flechas que representan a v y w con la punta de $\overrightarrow{v}$ en la cola de $\overrightarrow{w}$. Es fácil ver que la flecha de P a R representa $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$. En otras palabras, tenemos la ecuación vectorial $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$. También podemos pensar lo anterior como sigue: Las instrucciones para ir de P a R son primero ir de P a Q y luego de Q a R.

Antes vimos que cualquier vector dado puede representarse por una infinidad de flechas distintas. Dados los cuatro puntos P, Q, R y S, supongamos que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$. Antes mencionamos que en este caso, los segmentos de recta PQ y RS deben ser iguales y paralelos. Para ver por qué es verdad esto, consideremos la siguiente figura donde se han trazado los triángulos rectángulos PQX y RSY cuyas hipotenusas son los vectores iguales dados. (En realidad debemos decir, por supuesto, que las flechas que representan los vectores son las hipotenusas, pero es conveniente hablar de las flechas como si en realidad fuesen los vectores).



Si escribimos $\overrightarrow{PQ} = (a, b) = \overrightarrow{RS}$, vemos que $PX = a = RY$ y $XQ = b = YS$ y así, los dos triángulos rectángulos son congruentes por el criterio LAL. Para facilitar las cosas, trabajamos en el caso en que las coordenadas de a y b son positivas, aunque esto en realidad no es esencial. Concluimos que las longitudes PQ y RS son iguales. Además, por el teorema de Pitágoras, tenemos que las longitudes de $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ son iguales a $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto demuestra que dos flechas que representan al mismo vector, deben tener la misma longitud. Pero todavía hay mas cosas que son ciertas. Tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RS}$$

y, si en ambos lados restamos los vectores iguales $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$, obtenemos que $\overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PR}$. A partir de lo que acabamos de demostrar, concluimos que las flechas correspondientes tienen la misma longitud. Así, escribimos $QS = PR$. Por lo tanto, concluimos que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo y, en consecuencia, $PQ \parallel RS$. Esto demuestra que todas las flechas que representan al mismo vector son iguales y paralelas, como se había afirmado. Recíprocamente, es fácil ver que dos flechas iguales, paralelas y que apuntan en la misma dirección y no en direcciones opuestas, corresponden a vectores iguales.

Finalmente, mencionamos que la importancia geométrica de la multiplicación de un

vector $\overrightarrow{v}$ por un escalar positivo z, es que una flecha que representa a $z\overrightarrow{v}$ apunta en la misma dirección que otra que representa a $\overrightarrow{v}$ pero es más corta, igual o más larga que la flecha original, dependiendo de si z es menor que, igual a o mayor que 1. Más precisamente, la longitud de $z\overrightarrow{v}$ es exactamente z veces la longitud de $\overrightarrow{v}$. Si el escalar z es negativo, la dirección del vector se invierte, pero fuera de ello obtenemos el mismo efecto de alargamiento o contracción que con un escalar positivo. Por ejemplo, una flecha que representa $-3\overrightarrow{v}$ tiene tres veces la longitud de otra que representa $\overrightarrow{v}$ pero apunta en dirección opuesta.
Por ejemplo, si P, Q, R y S son cuatro puntos que están en ese orden a lo largo de una recta separados por la misma distancia, de modo que $PQ = QR = RS$, entonces $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{RS}$ y $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$. Otras ecuaciones que podemos escribir en esta situación son $-\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{PS} = 3\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{SP}$.

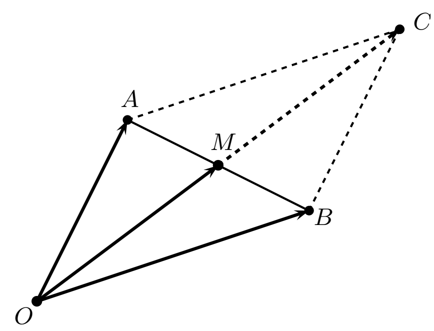
Vectores y Geometría

Por conveniencia, en la aplicación de técnicas vectoriales a la geometría, presentamos una abreviatura a la notación. Suponemos que en el plano se ha seleccionado algún punto O, denominado *origen* y que se mantiene fijo. Como veremos, no es necesario conocer la posición de este punto, aunque a veces es posible simplificar una demostración al elegir el origen O de alguna manera inteligente. La abreviatura a la que hicimos referencia es que un vector de la forma $\overrightarrow{OA}$ con cola en el punto O, simplemente se escribe como $\overrightarrow{A}$. En otras palabras, siempre que un vector se denote por un solo punto en vez de por un par de puntos, se supone que la cola de la flecha correspondiente está en el origen y la punta está en el punto en cuestión.

Dados dos puntos A y B en el plano, tenemos que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, de modo que usando la abreviatura anterior, es posible escribir la igualdad anterior como $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B}$. A partir de esto, obtenemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$ y, por lo tanto, cualquier vector identificado por dos puntos se describe como una diferencia de dos vectores, cada uno de los cuales está identificado por un solo punto. Observa que la forma correcta es restar la cola de la punta. El vector de P a Q, por ejemplo, es $\overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$. Mencionamos que una manera de demostrar que dos puntos P y Q son el mismo, es demostrar que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$. Pero $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{Q} - \overrightarrow{P}$ y este es el vector cero precisamente cuando $\overrightarrow{Q} = \overrightarrow{P}$. En otras palabras, para demostrar que P y Q son el mismo punto, basta demostrar que los vectores $\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{Q}$, que corresponden a estos puntos, son iguales.
El siguiente ejemplo es sencillo pero muy útil.

Ejemplo 1. Si M es el punto medio del segmento AB, demostrar que $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$.

Solución. Por la interpretación geométrica de la suma de vectores, sabemos que si C es el punto que corresponde al vector $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$, entonces el cuadrilátero $ACBO$ es un paralelogramo.



Luego, como las diagonales de un paralelogramo se bisecan mutuamente, M es también el punto medio del segmento OC. En particular, $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B})$. $\square$

El resultado del Ejemplo 1 es útil y fácil de recordar. Dice que el vector $\overrightarrow{M}$ correspondiente al punto medio M del segmento de recta AB es exactamente el promedio de los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{B}$, correspondientes a los puntos extremos del segmento. Observa que hacemos esta afirmación sin saber cuál punto se eligió como origen.

Teorema 1. Las medianas de todo triángulo ABC son concurrentes en un punto G que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de cada mediana. Además, $\overrightarrow{G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$.

Demostración. Calculemos el vector $\overrightarrow{G}$ correspondiente al punto G que está a $\frac{2}{3}$ de distancia a lo largo de la mediana AM, donde M es el punto medio de BC. Por el Ejemplo 1, sabemos que $\overrightarrow{M} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$. Luego, tenemos que

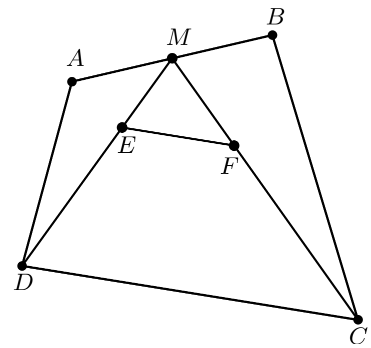
$$\overrightarrow{G} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{A}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) - \overrightarrow{A}\right).$$

Despejando, obtenemos que $\overrightarrow{G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$. En otras palabras, el vector correspondiente al punto que está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de la mediana AM es el promedio de los tres vectores correspondientes a los vértices del triángulo. De manera análoga, se demuestra que lo mismo sucede para las otras dos medianas del triángulo. Por lo tanto, los vectores correspondientes a los puntos a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de las tres medianas son iguales, lo que significa que estos tres puntos son el mismo punto. $\square$

Observación. En el teorema anterior fue necesario saber de antemano que el punto de concurrencia de las medianas de un triángulo está a $\frac{2}{3}$ de la distancia a lo largo de cada una.
El siguiente ejemplo es una aplicación del Teorema 1.

Ejemplo 2. Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo y M el punto medio de AB. Sean E y F los centroides de los triángulos DAB y ABC, respectivamente. Demuestra que EF y DC son paralelas y que $EF = \frac{1}{3}DC$.

Solución. Como E es el centroide del triángulo DAB, aplicando el Teorema 1, tenemos que $\overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{D})$. Aplicando nuevamente el Teorema 1 en el triángulo ABC, tenemos que $\overrightarrow{F} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$.



Luego,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{F} - \overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

Por lo tanto, EF y DC son paralelas y $EF = \frac{1}{3}DC$. $\square$

Ejemplo 3. (Leningrado, 1980). Dado un cuadrilátero cualquiera, una *línea media* es un segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos. Muestra que si la suma de las longitudes de las líneas medias de un cuadrilátero convexo es igual al semiperímetro, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

Solución. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y pongamos el origen en el vértice A. Entonces, la suma de las longitudes de las líneas medias de $ABCD$ es $\frac{|\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}|}{2} + \frac{|\overrightarrow{D}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}|}{2}$, mientras que el semiperímetro de $ABCD$ está dado por

$$\frac{|\overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D}|}{2}.$$

Si suponemos que estas dos cantidades son iguales, obtenemos que

$$|\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}| + |\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}| + |\overrightarrow{D}|. \quad (1)$$

Aplicando la desigualdad del triángulo[3] a las parejas de vectores $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{D}$, $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$, tenemos que $|\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}| \leq |\overrightarrow{B}|+|\overrightarrow{C}-\overrightarrow{D}|$ y $|\overrightarrow{D}+\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}| \leq |\overrightarrow{D}|+|\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B}|$, donde las igualdades se dan si y solo si $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D}$ son múltiplos escalares positivos de $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$, respectivamente, es decir, si y solo si $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$. Sin embargo, la ecuación (1) implica las igualdades anteriores, por lo que la única posibilidad es que $AB \parallel DC$ y $AD \parallel BC$, esto es, $ABCD$ es un paralelogramo. $\square$

[3]**Desigualdad del triángulo.** Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son vectores en el plano, entonces $|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}| \leq |\overrightarrow{v}| + |\overrightarrow{w}|$ con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$. En el Teorema 5 se dará una demostración de esta desigualdad.

El siguiente resultado nos da una manera de determinar el vector correspondiente al punto obtenido al mover una fracción γ de la distancia de A a B a lo largo de un segmento de recta dado AB.

Teorema 2. Sea γ un número real y sea X un punto en la recta AB tal que $\frac{AX}{AB} = \gamma$ como segmentos dirigidos. Esto es, si $\gamma < 0$, entonces X y B están en lados opuestos respecto de A; mientras que si $\gamma > 0$, entonces X y B están del mismo lado respecto de A. Entonces, $\overrightarrow{X} = (1-\gamma)\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{B}$.

Demostración. Tenemos que $\overrightarrow{AX} = \gamma\overrightarrow{AB}$, esto es, $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{A} = \gamma(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A})$. Despejando, obtenemos que $\overrightarrow{X} = \overrightarrow{A} + \gamma(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}) = (1-\gamma)\overrightarrow{A} + \gamma\overrightarrow{B}$. □

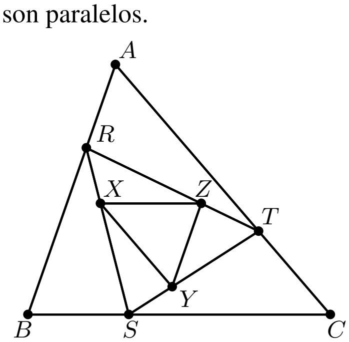
A manera de ejemplo, supongamos que $\gamma = \frac{1}{2}$. Entonces, el punto X está a la mitad de la distancia de A a B y así, X es el punto medio del segmento AB. En este caso, el Teorema 2 establece que $\overrightarrow{X} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B}$, que coincide con la fórmula del Ejemplo 1.

El siguiente resultado es una consecuencia muy útil del Teorema 2.

Corolario 1. Sean A y B dos puntos en el plano y P un punto en la recta AB tal que $\frac{AP}{PB} = \lambda$ como segmentos dirigidos. Entonces, $\overrightarrow{P} = \frac{\overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{B}}{1+\lambda}$.

Demostración. Tenemos que $\frac{AP}{AB} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Aplicando el Teorema 2, se sigue que $\overrightarrow{P} = \left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)\overrightarrow{A} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{A} + \lambda\overrightarrow{B}}{1+\lambda}$. □

Ejemplo 4. Dado un triángulo ABC, se construye el triángulo RST al tomar los puntos R, S y T en los lados del triángulo ABC como sigue: El punto R está a un tercio de la distancia de A a B a lo largo de AB, el punto S está a un tercio de la distancia de B a C a lo largo de BC y, el punto T, está a un tercio de la distancia de C a A a lo largo de CA. Luego, repetimos este proceso empezando con el triángulo RST, obteniendo el triángulo XYZ. Demostrar que los triángulos XYZ y CAB son semejantes y que sus lados correspondientes son paralelos.



Solución. Los datos son los puntos A, B y C, de modo que nuestra estrategia será expresar los vectores a lo largo de los lados del triángulo XYZ en términos de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$. Primero, como R está a $\frac{1}{3}$ de la distancia de A a B, por el Teorema 2 tenemos que $\overrightarrow{R} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B}$. De manera análoga, tenemos que $\overrightarrow{S} = \frac{2}{3}\overrightarrow{B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C}$. Como X está a $\frac{1}{3}$ de la distancia de R a S, el Teorema 2 implica que

$$\overrightarrow{X} = \frac{2}{3}\overrightarrow{R} + \frac{1}{3}\overrightarrow{S} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{B} + \frac{1}{3}\overrightarrow{C}\right),$$

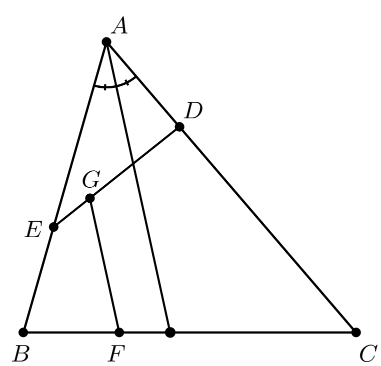
de donde se sigue que $\overrightarrow{X} = \frac{4}{9}\overrightarrow{A} + \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C}$.
De manera análoga, sustituyendo A por B, B por C y C por A, obtenemos que $\overrightarrow{Y} = \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C} + \frac{1}{9}\overrightarrow{A}$.
Luego,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{Y} - \overrightarrow{X} &= \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{4}{9}\overrightarrow{C} + \frac{1}{9}\overrightarrow{A}\right) - \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{A} + \frac{4}{9}\overrightarrow{B} + \frac{1}{9}\overrightarrow{C}\right)\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{C} - \frac{1}{3}\overrightarrow{A} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, XY y CA son paralelas y $XY = \frac{1}{3}CA$.
De manera análoga se demuestra que cada lado del triángulo XYZ es paralelo al lado correspondiente del triángulo CAB y cada lado del triángulo XYZ mide un tercio del lado correspondiente del triángulo CAB. $\square$

Ejemplo 5. Sean D y E puntos en los lados AC y AB del triángulo ABC, respectivamente, tales que DE y CB no son paralelas. Supongamos que F y G son puntos en BC y ED, respectivamente, tales que $\frac{BF}{FC} = \frac{EG}{GD} = \frac{BE}{CD}$. Demostrar que GF es paralela a la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Solución. Pongamos al origen en el vértice A. Entonces, $\overrightarrow{E} = p\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D} = q\overrightarrow{C}$ para algunos números reales p y q del intervalo $(0, 1)$. Sea $\gamma = \frac{BF}{FC}$.



Por el corolario 1, tenemos que $\overrightarrow{F} = \frac{\gamma\overrightarrow{C}+\overrightarrow{B}}{\gamma+1}$ y $\overrightarrow{G} = \frac{\gamma\overrightarrow{D}+\overrightarrow{E}}{\gamma+1} = \frac{\gamma q\overrightarrow{C}+p\overrightarrow{B}}{\gamma+1}$. Como $BE = \gamma CD$, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{E} - \overrightarrow{B} = (p-1)\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = (q-1)\overrightarrow{C}$, tenemos que $(1-p)|\overrightarrow{B}| = \gamma(1-q)|\overrightarrow{C}|$. Luego,

$$\overrightarrow{F} - \overrightarrow{G} = \frac{\gamma(1-q)}{\gamma+1}\overrightarrow{C} + \frac{1-p}{\gamma+1}\overrightarrow{B} = \frac{(1-p)|\overrightarrow{B}|}{\gamma+1}\left(\frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|} + \frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}\right).$$

Esto significa que $\overrightarrow{FG}$ es paralelo a $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|} + \frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}$. Ahora bien, los vectores $\frac{\overrightarrow{C}}{|\overrightarrow{C}|}$ y $\frac{\overrightarrow{B}}{|\overrightarrow{B}|}$ son unitarios y el vector $\overrightarrow{v}$ es la diagonal del paralelogramo determinado por los dos vectores anteriores, que a su vez es un rombo. Por lo tanto, $\overrightarrow{v}$ está en la dirección de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. $\square$

El producto punto de dos vectores

Si $\overrightarrow{v} = (a, b)$ y $\overrightarrow{w} = (c, d)$, el *producto punto* $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$ se define como el escalar $ac + bd$. El producto punto, también se define en tres o más dimensiones y la regla es la misma en todos los casos: Multiplicar las coordenadas correspondientes y luego sumar los resultados. Por ejemplo, en dimensión 3, si $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ y $\overrightarrow{w} = (a', b', c')$, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = aa' + bb' + cc'$. Es fácil comprobar que las leyes conmutativa y distributiva las satisface el producto punto. Esto es, si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son tres vectores cualesquiera, entonces $\overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{u} \bullet (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \bullet \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}$.

Volviendo a los vectores en el plano, si $\overrightarrow{v} = (a, b)$, es fácil ver que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = a^2 + b^2$, que es el cuadrado de la longitud de una flecha que representa a $\overrightarrow{v}$. Notemos además que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} \geq 0$. Para representar la longitud de un vector, se acostumbra usar la notación de valor absoluto y, así, escribimos $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2$. Observa que si P y Q son puntos y PQ denota la longitud del segmento de recta que determinan, escribimos $|\overrightarrow{PQ}| = PQ$.

Consideremos un triángulo ABC y sean a, b y c las longitudes de los lados BC, AC y AB, respectivamente. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB}$, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} = |\overrightarrow{v}|^2 = (AC)^2 = b^2$ y, análogamente, tenemos que $\overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{w} = c^2$. Por otra parte, como $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{w} + \overrightarrow{BC}$, tenemos que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}$ y así,

$$(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{BC}|^2 = (BC)^2 = a^2.$$

Desarrollando el lado izquierdo de las igualdades anteriores, usando las leyes conmutativa y distributiva del producto punto, obtenemos que

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) &= (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}) \bullet \overrightarrow{w} \\ &= \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} + \overrightarrow{w} \bullet \overrightarrow{w} \\ &= b^2 + c^2 - 2(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w}).\end{aligned}$$

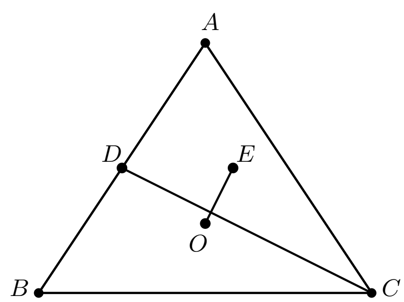
Por lo tanto, $a^2 = b^2 + c^2 - 2(\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w})$. Pero, por la ley de los cosenos, tenemos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cos(A)$. Esto implica que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = bc\cos(A) = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(A)$. La fórmula anterior, nos da una interpretación geométrica del producto punto de dos vectores en el plano: Es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo entre ellos.

Teorema 3. Dos vectores distintos de cero en el plano son perpendiculares si y solo si su producto punto es igual a cero.

Demostración. Sean $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ y $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ vectores en el plano. Si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es de $90°$ y $\cos 90° = 0$. Luego, $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}| \cdot 0 = 0$. Recíprocamente, supongamos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = 0$. Como $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ no son el vector cero, cada uno tiene longitud diferente de 0. Supongamos que $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ forman un ángulo α. Entonces, tenemos que $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(\alpha)$. Como el producto punto de $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ es cero, se sigue que $|\overrightarrow{v}| \cdot |\overrightarrow{w}|\cos(\alpha) = 0$, esto es, $\cos(\alpha) = 0$, pues $|\overrightarrow{v}| \neq 0 \neq |\overrightarrow{w}|$. Por lo tanto, $\alpha = 90°$. □

Ejemplo 6 (Olimpiada de los Balcanes, 1985). Sean ABC un triángulo, O su circuncentro y D el punto medio de AB. Sea E el centroide del triángulo ACD. Demostrar que CD es perpendicular a OE si y solo si $AB = AC$.

Solución. Pongamos el origen en el circuncentro O del triángulo ABC. Entonces, de acuerdo con el Ejemplo 1 y el Teorema 1, tenemos que $\overrightarrow{D} = \frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}}{2}$ y $\overrightarrow{E} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} + \overrightarrow{D}) = \frac{1}{6}(3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C})$. Además, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{C} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C})$.



Luego, según el Teorema 3, $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{E}$ son perpendiculares si y solo si

$$(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - 2\overrightarrow{C}) \bullet (3\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + 2\overrightarrow{C}) = 0. \quad (2)$$

Como $OA = OB = OC$ y el origen es O, tenemos que $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B} = \overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{C}$ (pues $\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{A} = |\overrightarrow{OA}|^2 = OA^2$, $\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{B} = |\overrightarrow{OB}|^2 = OB^2$ y $\overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{C} = |\overrightarrow{OC}|^2 = OC^2$). Usando estas relaciones y las leyes conmutativa y distributiva del producto punto, la igualdad (2) es equivalente a la igualdad $\overrightarrow{A} \bullet (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{C} = 0$ y, por el Teorema 3, esta última igualdad es equivalente a que $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares. Por lo tanto, los segmentos OA y CB son perpendiculares. En particular, dado que O está en la mediatriz de BC, se sigue que A también está en dicha mediatriz, esto es, $AB = AC$. $\square$

Ejemplo 7. (Estados Unidos, 1975). Sean A, B, C y D cuatro puntos cualesquiera en el plano. Demuestra que $AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 \geq AB^2 + CD^2$.

Solución. Pongamos el origen en el punto A. Observemos que la desigualdad a demostrar se puede escribir en la forma:

$$\overrightarrow{C}\bullet\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}\bullet\overrightarrow{D}+(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})\bullet(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{B})+(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B})\bullet(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B}) \geq \overrightarrow{B}\bullet\overrightarrow{B}+(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C})\bullet(\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C}).$$

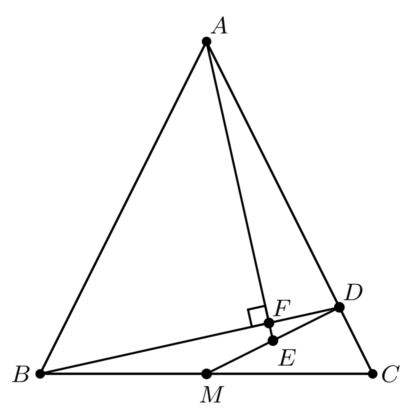
Explandiendo y simplificando, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \bullet (\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} - \overrightarrow{D}) \geq 0,$$

la cual es verdadera por propiedades del producto punto.
Más aún, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C} = \overrightarrow{D} = \overrightarrow{D} - \overrightarrow{A}$ (pues el origen es A), esto es, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$, lo cual es equivalente a que $ABCD$ sea un paralelogramo. $\square$

Ejemplo 8. (Arabia Saudita, 2013). Sean ABC un triángulo, M el punto medio de BC, D la proyección de M sobre AC y E el punto medio de MD. Demostrar que las rectas AE y BD son perpendiculares si y solo si $AB = AC$.

Solución. Pongamos el origen en el vértice C y al eje de las x sobre el segmento CA. Como M es el punto medio de BC, el Ejemplo 1 implica que $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$, o, de manera equivalente, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$. Análogamente, como E es el punto medio de MD, obtenemos que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD})$.



Por otro lado, como MD y AC son perpendiculares, por el Teorema 3 tenemos que $\overrightarrow{AD} \bullet \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{ME} \bullet \overrightarrow{DC} = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} &= 2\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{DC} \\
&= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD}) \bullet \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}) \bullet \overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{MC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BC}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AE} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ si y solo si $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$, esto es, AE y BD son perpendiculares si y solo si la mediana AM del triángulo ABC es una altura. De manera equivalente, AE y BD son perpendiculares si y solo si $AB = AC$. □

Teorema 4. Sea ABC un triángulo con circuncentro O, ortocentro H, incentro I y excentro I_A opuesto al ángulo en A. Si el origen está en O, entonces

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{H} &= \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}, \\
\overrightarrow{I} &= \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}, \\
\overrightarrow{I_A} &= \frac{a\overrightarrow{A} - b\overrightarrow{B} - c\overrightarrow{C}}{a-b-c},
\end{aligned}$$

donde $a = BC, b = AC$ y $c = AB$.

Demostración. Sea G el centroide del triángulo ABC. Usaremos el hecho de que los puntos O, G y H son colineales (están en la recta de Euler) y que el punto O está en el lado opuesto de G desde H con $HG = 2GO$. Entonces, $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$, esto es, $\overrightarrow{H} = 3\overrightarrow{G} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$, donde la segunda igualdad se sigue por el Teorema 1.
Por otro lado, sea D el punto de intersección de AI y BC. Por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{CD}} = \frac{c}{b}$. Por el Corolario 1, sabemos que $\overrightarrow{D} = \frac{b\overrightarrow{B}+c\overrightarrow{C}}{b+c}$. Además, nuevamente por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{AI}{ID} = \frac{c}{BD} = \frac{b}{CD} = \frac{b+c}{a}$. Luego, nuevamente por el Corolario 1,

$$\overrightarrow{I} = \frac{a\overrightarrow{A} + (b+c)\overrightarrow{D}}{a+b+c} = \frac{a\overrightarrow{A} + b\overrightarrow{B} + c\overrightarrow{C}}{a+b+c}.$$

Finalmente, también se puede ver que $\frac{AI_A}{I_AD} = -\frac{b+c}{a}$ usando el teorema de la bisectriz externa. Luego, por el Corolario 1, obtenemos que

$$\overrightarrow{I_A} = \frac{a\overrightarrow{A} - b\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}}{a-b-c}.$$ □

Teorema 5. Sean $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ vectores no nulos cualesquiera del plano. Entonces se satisface lo siguiente:

1) **(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** $|v \bullet w| \leq |v||w|$, con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún número real λ.

2) **(Desigualdad del triángulo)** $|v + w| \leq |v| + |w|$, con la igualdad si y solo si $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$.

Demostración. 1) Dado que $v \bullet w = |v||w|\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre v y w, y dado que $|\cos\theta| \leq 1$ para todo ángulo θ, se sigue que $|v \bullet w| = |v||w||\cos\theta| \leq |v||w|$. Más aún, es claro que la igualdad se da si y solo si $|\cos\theta| = 1$, lo cual equivale a que $\theta = 0°$ o $\theta = 180°$. Luego, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen la misma dirección, esto es, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún número real λ.

2) Tenemos que

$$\begin{aligned}|v+w|^2 &= (v+w)\bullet(v+w) = v\bullet v + 2(v\bullet w) + w\bullet w\\ &= |v|^2 + 2(v\bullet w) + |w|^2 \leq |v|^2 + 2|v\bullet w| + |w|^2\\ &\leq |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v|+|w|)^2,\end{aligned}$$

de donde se sigue la desigualdad deseada. Más aún, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{w} = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|\cos\theta = |\overrightarrow{v}||\overrightarrow{w}|$, lo cual es equivalente a que $\cos\theta = 1$, esto es, $\theta = 0°$. De esta manera, la igualdad se da si y solo si $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ tienen la misma dirección y sentido, esto es, $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$ para algún $\lambda > 0$. □

Ejemplo 9. (Lista Larga Olimpiada Internacional, 1990) Sea ABC un triángulo escaleno. Sean G, H, I su centroide, ortocentro e incentro, respectivamente. Demuestra que $\angle GIH > 90°$.

Solución. Pongamos el origen en el circuncentro del triángulo ABC. Dado que

$$(\overrightarrow{G} - \overrightarrow{I}) \bullet (\overrightarrow{H} - \overrightarrow{I}) = GI \cdot HI \cos\angle GIH,$$

basta demostrar que $(\overrightarrow{G} - \overrightarrow{I}) \bullet (\overrightarrow{H} - \overrightarrow{I}) = \overrightarrow{G} \bullet \overrightarrow{H} + |\overrightarrow{I}|^2 - \overrightarrow{I} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) < 0$. Si R denota el circunradio del triángulo ABC, dado que $|\overrightarrow{A}| = |\overrightarrow{B}| = |\overrightarrow{C}| = R$, tenemos que $2\overrightarrow{B} \bullet \overrightarrow{C} = |\overrightarrow{B}|^2 + |\overrightarrow{C}|^2 - |\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}|^2 = 2R^2 - a^2$. Se tienen fórmulas análogas para $2\overrightarrow{C} \bullet \overrightarrow{A}$ y $2\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}$, de donde se obtiene que

$$\overrightarrow{G} \bullet \overrightarrow{H} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}|^2 = 3R^2 - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$

donde $BC = a$, $CA = b$ y $AB = c$. Usando la fórmula para $\overrightarrow{I}$ del Teorema 4, obtenemos que

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{I}|^2 &= R^2 - \frac{abc}{a+b+c}\\ \overrightarrow{I} \bullet (\overrightarrow{G} + \overrightarrow{H}) &= 4R^2 - \frac{2[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)]}{3(a+b+c)}.\end{aligned}$$

Luego, sumando y simplificando, el problema es equivalente a probar que

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)>0.$$

Por la simetría de la expresión y dado que el triángulo ABC es escaleno, podemos suponer que $a>b>c$, de modo que $a(a-b)(a-c)>b(a-b)(b-c)$. Luego, $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)>0$ y como $c(c-b)(c-a)>0$, se sigue la desigualdad deseada. $\square$

Ejemplo 10. (Olimpiada Internacional, 2001). Sea ABC un triángulo con centroide G. Determina, con argumentos, la posición en el plano de ABC del punto P tal que $AP\cdot AG+BP\cdot BG+CP\cdot CG$ es mínimo y expresa dicho mínimo en términos de los lados de ABC.

Solución. Pongamos el origen en G. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned}
&AG\cdot AP+BG\cdot BP+CG\cdot CP\\
&=|\overrightarrow{A}||\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P}|+|\overrightarrow{B}||\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P}|+|\overrightarrow{C}||\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P}|\\
&\geq \overrightarrow{A}\bullet(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P})+\overrightarrow{B}\bullet(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P})+\overrightarrow{C}\bullet(\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P})\\
&=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2+|\overrightarrow{C}|^2-(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C})\bullet\overrightarrow{P}\\
&=|\overrightarrow{A}|^2+|\overrightarrow{B}|^2+|\overrightarrow{C}|^2,
\end{aligned}$$

donde la última iguldad se debe a que $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}=3\overrightarrow{G}=\overrightarrow{0}$.
Ahora bien, es evidente que la cota inferior se alcanza cuando $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$, esto es, cuando $P=G$. De hecho, si la igualdad se alcanza, entonces, por el caso de la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 5), $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ deben ser múltiplos escalares de $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{B}-\overrightarrow{P}$ y $\overrightarrow{C}-\overrightarrow{P}$, respectivamente. A su vez, esto implica que $\overrightarrow{P}$ es múltiplo escalar de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{C}$ al mismo tiempo. Esto únicamente es posible si $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{0}$, es decir, si $P=G$.
Si ahora consideramos A' como la intersección de la paralela a AB por C y la paralela a AC por B, denotamos $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ y M el punto medio de BC, entonces aplicando la ley del paralelogramo[4] en el paralelogramo $ABA'C$, obtenemos que $A'A^2+a^2=2b^2+2c^2$ y, dado que $A'A=2AM=3AG$, se sigue que

$$AG^2=\frac{4}{9}AM^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}.$$

Análogamente, obtenemos que $BG^2=\frac{2c^2+2a^2-b^2}{9}$ y $CG^2=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{9}$, de donde se sigue que $AG^2+BG^2+CG^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. $\square$

A continuación dejamos una lista de 10 problemas de geometría para que el lector resuelva usando métodos vectoriales.

[4]**Ley del paralelogramo:** Si $XYZW$ es un paralelogramo con lados x, y y diagonales d_1 y d_2, entonces $d_1^2+d_2^2=2(x^2+y^2)$.

Ejercicios

1) Demuestra que en todo paralelogramo, el segmento que une un vértice con el punto medio de alguno de los lados opuestos triseca una diagonal y es trisecado por ella.

2) Sea D el punto medio de la mediana AE del triángulo ABC. La recta BD corta a AC en el punto F. Determina la razón en que F divide a AC.

3) Demuestra que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera siempre forman un paralelogramo.

4) Sean ABC y PQR dos triángulos cualesquiera, y sean L, M y N los puntos medios de AP, BQ, CR, respectivamente. Demuestra que los centroides de los triángulos ABC, PQR y LMN son colineales.

5) Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos equiláteros (con los vértices etiquetados en el sentido de las manecillas del reloj). Sean P, Q y R los puntos medios de los segmentos AA', BB' y CC'. Demuestra que PQR es equilátero.

6) Sea ABC un triángulo con ortocentro H. Sea A_0 el punto medio del lado BC y sean A_1 y A_2 las intersecciones de BC con la circunferencia centrada en A_0 y de radio HA_0. De manera análoga se definen B_1, B_2 en CA y C_1, C_2 en AB. Prueba que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 son puntos concíclicos.

7) Sean $E,\ F,\ G,\ H$ los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Prueba que las rectas AB y CD son perpendiculares si y solo si $BC^2 + AD^2 = 2(EG^2 + FH^2)$.

8) Sea G el centroide del triángulo ABC y sean $A_1,\ B_1,\ C_1$ los puntos medios de los lados $BC,\ CA,\ AB$, respectivamente. Sea M un punto cualquiera. Muestra que

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + 9MG^2 = 4(MA_1^2 + MB_1^2 + MC_1^2).$$

9) Sean H, O y R el ortocentro, el circuncentro y el circunradio del triángulo ABC y sea Q el punto tal que O biseca QH. Sean G_1, G_2, G_3 los centroides de los triángulos QBC, QCA y QAB, respectivamente. Demuestra que

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = \frac{4}{3}R.$$

10) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico y sean H_A, H_B, H_C y H_D los ortocentros de los triángulos BCD, CDA, DAB y ABC, respectivamente. Demuestra que el cuadrilátero $H_AH_BH_BH_D$ también es cíclico.

Bibliografía

1) I. Martin Isaacs. *Geometría universitaria.* Thomson Learning, 2002.

2) Kin Y. Li. *Vector Geometry.* Mathematical Excalibur, Vol. 6, No. 5, 2002.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2019. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Los números del 1 al 8 se colocan en los vértices de un cubo de manera que la suma de los cuatro números en cada cara es la misma. ¿Cuál es la suma común de cada cara?

Problema 2. Encuentra el entero más cercano al número $\dfrac{10^{2019}+10^{2021}}{2\times 10^{2020}}$.

Problema 3. La suma de las edades de los tres hijos de Víctor es T, que también es la edad de Víctor. Hace N años, la edad de Víctor era el doble de la suma de las edades de sus hijos. ¿Cuál es el valor de $\frac{T}{N}$?

Problema 4. Hay 52 personas en un salón de clases. ¿Cuál es el mayor valor de n para el que se cumple que hay al menos n personas en el salón que cumplen años en el mismo mes?

Problema 5. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que a y b son primos reativos y $\frac{a}{b}+\frac{14b}{9a}$ es un entero.

Problema 6. En una fiesta, cada hombre bailó con exactamente tres mujeres y cada mujer bailó con exactamente dos hombres. Si asistieron 12 hombres a la fiesta, ¿cuántas mujeres asistieron a la fiesta?

Problema 7. La carretera que une la ciudad A con la ciudad B, mide 1999 kilómetros. A la orilla de la carretera hay colocados, cada kilómetro, un letrero que indica la distancia a la que se encuentra la ciudad A y la distancia a la que se encuentra la ciudad

B. Por ejemplo, el primer letrero tiene los números $(0, 1999)$ y el segundo $(1, 1998)$. ¿En cuántos de ellos se utilizaron exactamente 3 dígitos distintos?

Problema 8. El largo de un cubo se incrementa en 1 y el ancho se reduce en 1. Si el volumen de la nueva figura es 7 unidades menor que el volumen del cubo, ¿cuál es el volumen del cubo original?

Problema 9. Encuentra el múltiplo más pequeño de 2019 que sea de la forma

$$abcabcabc\ldots abc,$$

donde a, b y c son dígitos.

Problema 10. Un número entero n es **saltamontes** si un saltamontes que está parado en el 1 en la recta numérica puede llegar al n dando n saltos de longitudes $1, 2, 3, \ldots, n$, en orden, ya sea en la posición positiva o negativa. Por ejemplo, el 2 es un número saltamontes, pues $1 - 1 + 2 = 2$, dando el primer salto hacia “atrás” y el segundo salto hacia “adelante”. ¿Cuántos números entre 1 y 20 son saltamontes?

Problema 11. Encuentra el menor entero positivo que es divisible entre 4 y entre 9 y, además, cada uno de sus dígitos es 4 o 9 y tiene al menos un dígito 4 y al menos un dígito 9.

Problema 12. Sea ABC un triángulo isósceles tal que $BC = AC$ y $\angle ACB = 40^\circ$. La circunferencia de diámetro BC corta a los lados AC y AB en D y E, respectivamente. Sea F la intersección de CE con BD. Encuentra el valor del ángulo $\angle BFC$.

Problema 13. Encuentra todas las ternas de números primos (p, q, r) tales que

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

Problema 14. Las diagonales de un paralelogramo $ABCD$ se cortan en O. La tangente al circuncírculo del triángulo BOC por O, interseca a CB en F. El circuncírculo del triángulo FOD corta a BC por segunda vez en G. Demuestra que $AG = AB$.

Problema 15. Sean n un número natural y $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Demuestra que si se escogen $2n + 1$ elementos distintos del conjunto A, entonces hay entre ellos 3 números distintos a, b y c tales que $ac < 2b^2 < 4ac$.

Problema 16. Sean x, y números reales positivos. Determina el valor mínimo de la suma

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + \frac{2^6}{x+y} + \frac{3^4}{x^3}.$$

Problema 17. Sea p un número primo y sea $n \geq 2$ un entero, tales que p divide a $n^6 - 1$. Demuestra que $n > \sqrt{p} - 1$.

Problema 18. Sean ABC un triángulo con $AB < AC$, D el pie de la altura desde A, M el punto medio de BC y B' el simétrico de B con respecto a D. La perpendicular a BC por B' interseca a AC en P. Demuestra que si BP y AM son perpendiculares, entonces el triángulo ABC es rectángulo.

Problema 19. Determina todas las funciones $f : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ tales que $f(4) = 4$ y

$$\frac{1}{f(1)f(2)} + \frac{1}{f(2)f(3)} + \cdots + \frac{1}{f(n)f(n+1)} = \frac{f(n)}{f(n+1)}$$

para todo entero positivo n, donde $\mathbb{N}$ denota al conjunto de los enteros positivos.

Problema 20. Determina todos los enteros positivos n tales que

$$3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n = (n+3)^n.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Sea n la suma de los cuatro números de una cara. Tenemos que la suma de todos los vértices del cubo es $1+2+3+4+5+6+7+8 = \frac{8\cdot 9}{2} = 36$. La suma también se puede obtener sumando los 4 números en los vértices de la cara de arriba y los 4 números en los vértices de la cara de abajo. Por lo tanto, $2n = 36$, de donde $n = 18$.

Solución del problema 2. Dividiendo numerador y denominador entre 10^{2019}, tenemos que la fracción dada es igual a $\frac{1+100}{20} = \frac{101}{20}$ y el entero más cercano a dicha fracción es 5.

Solución del problema 3. Sean a, b y c las edades de los tres hijos. Tenemos que $T = a + b + c$ y $T - N = 2((a - N) + (b - N) + (c - N)) = 2(a + b + c - 3N)$. Como $a + b + c = T$, tenemos que $T - N = 2(T - 3N) = 2T - 6N$, de donde se sigue que $T = 5N$, esto es, $\frac{T}{N} = 5$.

Solución del problema 4. Tenemos que $52 = 12 \cdot 4 + 4$. Por el Principio de las Casillas[5], podemos asegurar que hay al menos 5 personas que cumplen años el mismo

[5] Ver en el Apéndice el Teorema 4.

mes. Por otra parte, podemos ver que es posible que en cada mes de Enero a Agosto haya 4 personas que cumplan años y, en cada mes de Septiembre a Diciembre, haya 5 personas que cumplan años, por lo que no es posible garantizarlo para $n = 6$ y la respuesta es 5.

Solución del problema 5. Supongamos que $\frac{a}{b} + \frac{14b}{9a} = n$ con n entero. Entonces $9a^2 + 14b^2 = 9abn$, de donde 9 divide a b^2, notemos que si 9 divide a b, como $(a, b) = 1$, el lado izquiero de la igualdad no será múltiplo de 81, mientras que el lado derecho sí. Entonces $b = 3k$ con k entero positivo tal que no es múltiplo de 3. Si sustituimos en la igualdad, k divide al lado derecho, y entonces k divide a $9a^2$, y como $(k, a) = 1 = (k, 3)$, se tiene que $k = 1$ y entonces $b = 3$. Sustituyendo con $b = 3$, se tiene que $\frac{a}{3} + \frac{42}{9a} = \frac{a^2+14}{3a}$ es entero, por lo que a divide a 14 y entonces a puede ser $1, 2, 7, 14$. Sustituyendo vemos que cada una sí es solución, por lo que las parejas buscadas son $(1, 3), (2, 3), (7, 3), (14, 3)$.

Solución del problema 6. Tenemos que hubo $12 \cdot 3 = 36$ bailes en total, porque cada hombre bailó con 3 mujeres. Como cada mujer participó en 2 bailes, debe haber $\frac{36}{2} = 18$ mujeres.

Solución del problema 7. Veamos que los letreros pasan de $(999, 1000)$ a $(1000, 999)$, de manera que uno de los dos números siempre empieza con el dígito 1 y ese es uno de los dígitos. Luego, para cada una de las parejas $(2, 7), (3, 6), (4, 5)$ es posible hacer $2 \cdot 2^3 = 16$ letreros distintos, es decir, 48 en total. Para la pareja $(0, 9)$, es necesario que el número que no empieza con 1 empiece con 9, de modo que son $2 \cdot 2^2$ números, es decir, 8 números más. Por último, es posible hacer letreros con los dígitos 9, 8 y 1. Si el número mayor es $19ab$, podemos completar con 8 y 1 de 4 maneras diferentes. Si el número mayor es $199a$, podemos completar de 2 maneras diferentes.
Por lo tanto, en total tenemos $48 + 8 + 4 + 2 = 62$ números.

Solución del problema 8. Sea n el lado del cubo original. El volumen del cubo original es n^3 y de la nueva figura es $n(n-1)(n+1) = n(n^2-1) = n^3 - n$. Luego, por la condición del problema, tenemos que $n^3 - n = n^3 - 7$, de donde $n = 7$ y el volumen del cubo original es $7^3 = 343$.

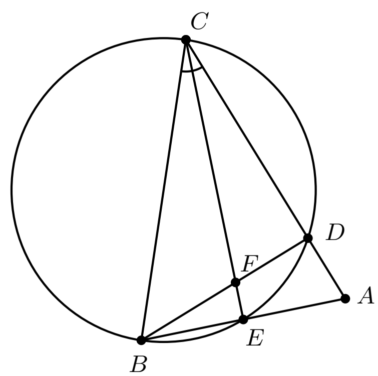
Solución del problema 9. Tenemos que $2019 = 3 \times 673$. Además, el número buscado se puede factorizar como $abc(1 + 10^3 + 10^6 + \cdots)$. Ahora, si $673 \mid abc$, entonces $abc = 673$ y el número $673673673 = 2019 \times 333667$ es el menor número que cumple. Si existiera un número menor, entonces 673 tendría que dividir a alguno de 1, 1001 o 1001001, lo cual es fácil ver que no ocurre.

Solución del problema 10. Observemos que un número es saltamontes si podemos elegir los signos para que se cumpla la igualdad $1 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm n = n$.
Como $1 \pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm n$ y $1 + 1 + 2 + \cdots + n$ tienen la misma paridad, una condición necesaria es que $1 + \frac{n(n+1)}{2}$ y n tengan la misma paridad. Esto ocurre cuando $n \equiv 2$ o 3 módulo 4. Ahora, veamos que esta condición es de hecho suficiente. En efecto, es fácil ver que $2 = 1 - 1 + 2$ y $3 = 1 + 1 - 2 + 3$ son ambos saltamontes.

Además, para cualesquiera 4 números consecutivos podemos elegir signos de manera que $-k-(k+1)+(k+2)+(k+3)=4$, de modo que también 6, 10, 14 y 18 son saltamontes, así como 7, 11, 15 y 19. En total, 10 de los 20 números del 1 al 20 son saltamontes.

Solución del problema 11. Sea n el número buscado, para que sea múltiplo de 9, la suma de sus dígitos debe ser múltiplo de 9, por lo que tiene al menos nueve dígitos 4 y un dígito 9. Notemos que cualquier número con estos dígitos será múltiplo de 9. Ahora, para que sea múltiplo de 4, sus dos últimas cifras deben formar un múltiplo de 4, como 49 y 94 no son múltiplos de 4, se sigue que n termina en 44. Con esto es fácil concluir que el número buscado es 4444444944.

Solución del problema 12. Como BC es un diámetro, tenemos por ángulos inscritos que $\angle CEB = \angle CDB = 90°$.

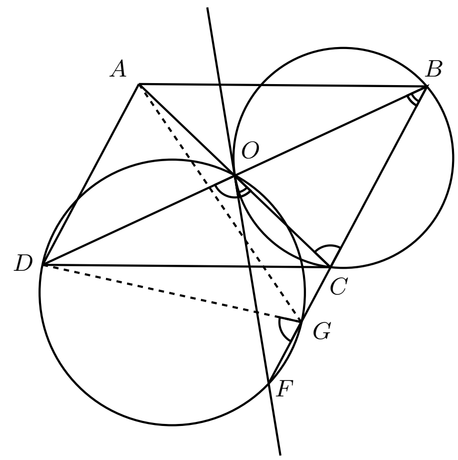


Como ABC es isósceles y $\angle ACB = 40°$, se sigue que $\angle ABC = \angle CAB = 70°$. Por suma de ángulos en el triángulo BCD, tenemos que $\angle DBC = 50°$, de donde $\angle ABD = 20°$. Concluimos que $\angle BFC = \angle CEB + \angle EBF = 90° + 20° = 110°$.

Solución del problema 13. Módulo 3, tenemos que $q^4 - r^2 \equiv -1 \pmod 3$. Como todo cuadrado deja residuo 0 o 1 al ser dividido por 3, se sigue que $q^4 \equiv 2 \pmod 3$ (si $r^2 \equiv 0 \pmod 3$) o $q^4 \equiv 0 \pmod 3$ (si $r^2 \equiv 1 \pmod 3$). El primer caso no es posible ya que q^4 es un cuadrado. Luego, $q^4 \equiv 0 \pmod 3$, de donde $q \equiv 0 \pmod 3$ y, como q es primo, la única posibilidad es $q = 3$. Sustituyendo en la ecuación inicial, tenemos que $3p^4 - 4r^2 = 431$. Considerando esta ecuación módulo 5, tenemos que $3p^4 + r^2 \equiv 1 \pmod 5$. Como todo cuadrado deja residuo 0, 1 o 4 al ser dividido por 5, tenemos que $p^4 \equiv 0$ o $1 \pmod 5$. Si $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, entonces $r^2 \equiv 3 \pmod 5$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $p^4 \equiv 0 \pmod 5$, de donde $p \equiv 0 \pmod 5$ y, como p es primo, la única posibilidad es $p = 5$. Luego, $4r^2 = 3p^4 - 431 = 3 \cdot 5^4 - 431 = 1444$, de donde $r^2 = 361 = 19^2$, esto es, $r = 19$ que es primo. Concluimos que $p = 5, q = 3, r = 19$, es la única terna de primos que satisface la ecuación.

Solución del problema 14. Como O es punto de tangencia, tenemos que $\angle OBC =$

$\angle FOC$. Además, como $DOGF$ es cíclico, tenemos que $\angle DOF = \angle DGF$. Ahora, tenemos que $\angle DOC$ es un ángulo externo al triángulo OCB, de donde $\angle DOC = \angle DOF + \angle FOC = \angle OCB + \angle OBC$.



Como $\angle FOC = \angle OBC$, concluimos que $\angle DOF = \angle OCB = \angle DGF$. Como AD y BG son paralelas y $\angle DGF = \angle ACB$, se sigue que $ADGC$ es un trapecio isósceles, lo cual implica que sus dos diagonales AG y DC son iguales. Por lo tanto, $AG = DC = AB$.

Solución del problema 15. Separemos el conjunto A en n subconjuntos disjuntos de la siguiente manera:

$$\{1, \ldots, 2^2 - 1\},\ \{2^2, \ldots, 2^3 - 1\},\ \{2^3, \ldots, 2^4 - 1\},\ \ldots,\ \{2^n, \ldots, 2^{n+1} - 1\}.$$

Luego, si escogemos $2n+1$ elementos de A, por el principio de las casillas[6] uno de los subconjuntos anteriores contiene 3 de los $2n+1$ elementos. Supongamos que son a, b y c, con $a < b < c$. Si a, b y c son los elementos del primer subconjunto, es fácil ver que se satisfacen las desigualdades $ac < 2b^2 < 4ac$. Si a, b y c no están en el primer subconjunto, entonces existe un entero k tal que $2^k \leq a < b < c \leq 2^{k+1} - 1$. Luego, $a < b$ y $c < 2^{k+1} \leq 2a < 2b$. De aquí que $ac < 2b^2$. Análogamente, tenemos que $b < c$ y $b < 2^{k+1} \leq 2a$, lo cual implica que $b^2 < 2ac$ y, en consecuencia, $2b^2 < 4ac$. Luego, en este caso, tenemos también que $ac < 2b^2 < 4ac$.

Solución del problema 16. Tenemos que

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + \frac{2^6}{x+y} + \frac{3^4}{x^3} = \frac{x^2}{2} + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{2^6}{x+y} + \frac{3^4}{x^3}.$$

Aplicando la desigualdad MA-MG[7], obtenemos que

$$\frac{x^2}{2} + \frac{3^4}{x^3} = \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{6} + \frac{3^4}{2x^3} + \frac{3^4}{2x^3} \geq 5\sqrt[5]{\left(\frac{x^2}{6}\right)^3 \left(\frac{3^4}{2x^3}\right)^2} = \frac{15}{2},$$

[6] Ver en el Apéndice el Teorema 4.

[7] Ver en el Apéndice el Teorema 7.

con la igualdad si y solo si $\frac{x^2}{6} = \frac{3^4}{2x^3}$, esto es, cuando $x = 3$.
Aplicando nuevamente la desigualdad MA-MG, obtenemos que

$$\frac{(x+y)^2}{2} + \frac{2^6}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{2^5}{x+y} + \frac{2^5}{x+y} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)^2}{2}\left(\frac{2^5}{x+y}\right)^2} = 24,$$

con la igualdad si y solo si $\frac{(x+y)^2}{2} = \frac{2^5}{x+y}$, esto es, cuando $x + y = 4$.
Por lo tanto, el valor mínimo de la suma $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} + \frac{2^6}{x+y} + \frac{3^4}{x^3}$ es $\frac{15}{2} + 24 = \frac{63}{2}$ que se alcanza con $x = 3$, $y = 1$.

Solución del problema 17. Como p es primo y divide a

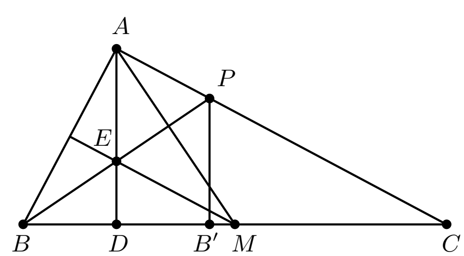
$$n^6 - 1 = (n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1),$$

se sigue que divide a al menos uno de estos factores positivos. Por lo tanto, el primo p es menor o igual que al menos uno de estos factores. Como

$$n - 1 < n + 1 \leq (n-1)n + 1 = n^2 - n + 1 < n^2 + n + 1 < (n+1)^2,$$

tenemos que $p < (n+1)^2$, esto es, $\sqrt{p} - 1 < n$.

Solución del problema 18. Sea E la intersección de AD y BP. Como AD es perpendicular a BM y BP es perpendicular a AM, el punto E es el ortocentro del triángulo ABM y, por lo tanto, ME es perpendicular a AB.



Como D es el punto medio de BB' y DE y $B'P$ son paralelas, tenemos que E es el punto medio de BP. Pero M es el punto medio de BC. Luego, ME y PC son paralelas. Se sigue que AB y AC son perpendiculares, esto es, el triángulo ABC es rectángulo.

Solución del problema 19. Tomando $n = 1$, obtenemos que $\frac{1}{f(1)} = f(1)$. Como $f(1) > 0$, se sigue que $f(1) = 1$. Tomando $n = 2$, obtenemos que $f(3) + 1 = f(2)^2$ y, tomando $n = 3$, obtenemos que $4f(3) + 4 + f(2) = f(2)f(3)^2$. Como $f(2) \neq 0$, la igualdad anterior es equivalente a la igualdad $4f(2) + 1 = f(3)^2$. Luego, $4f(2) + 1 = (f(2)^2 - 1)^2$ y, por lo tanto, $f(2)(f(2) - 2)(f(2)^2 + 2f(2) + 2) = 0$. Como $f(2) > 0$, se sigue que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$.

Supongamos ahora que para $1 \leq k \leq n$, se cumple que $f(k) = k$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= \frac{n}{f(n+1)} - \frac{1}{nf(n+1)} = \frac{n^2-1}{nf(n+1)},
\end{aligned}$$

y, por lo tanto, $f(n+1) = n+1$.
Esto muestra que $f(n) = n$ para todo entero positivo n.

Solución del problema 20. Claramente, $n = 1$ no es solución. Ahora, notemos que $3^2 + 4^2 = 5^2$ y que $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. Sin embargo, $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 = 2258 < 2401 = 7^4$. Supongamos que $3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n < (n+3)^n$ para algún $n \geq 4$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&3^{n+1} + 4^{n+1} + \cdots + (n+2)^{n+1} + (n+3)^{n+1} \\
&< (n+2)(3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n) + (n+3)^{n+1} \\
&< (n+2)(n+3)^n + (n+3)^{n+1} < 2(n+3)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si $n = 4$, tenemos que $(n+2)(n+3)^n + (n+3)^{n+1} = 31213 < 32768 = (n+4)^{n+1}$. Si $n \geq 5$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n+3} + \frac{n(n+1)}{2(n+3)^2} \\
&> 2 + \frac{(n-5)(n+2)+2}{2(n+3)^2} > 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $3^{n+1} + 4^{n+1} + \cdots + (n+2)^{n+1} + (n+3)^{n+1} < (n+4)^{n+1}$. Así, hemos demostrado por inducción que $3^n + 4^n + \cdots + (n+2)^n < (n+3)^n$ para todo entero $n \geq 4$. Luego, las únicas soluciones son $n = 2$ y $n = 3$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2019 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean a y b números reales no negativos y distintos tales que $a + \sqrt{b} = b + \sqrt{a}$. Determina el valor máximo de la suma $a + b$.

Problema 2. Demuestra que ningún número de la lista

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111, \ldots$$

es un cuadrado.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con incentro I. La bisectriz interna del ángulo $\angle ABC$ corta a AC en P. Demuestra que si $AP + AB = BC$, entonces el triángulo API es isósceles.

Problema 4. En un comité hay n miembros. Cada 2 miembros son amigos o enemigos y cada miembro tiene exactamente 3 enemigos. También se sabe que para cada miembro del comité, un enemigo de su amigo es su enemigo. Encuentra todos los valores posibles de n.

Problema 5. Para cada entero positivo n, determina la cantidad de triángulos (no degenerados) que se pueden formar con lados de longitudes enteros a, b y n con $a \leq b \leq n$.

Problema 6. Cinco enteros distintos a, b, c, d y e, no necesariamente positivos, satisfacen que

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12.$$

Determina el valor de la suma $a+b+c+d+e$.

Problema 7. Sea p un número primo impar. Decimos que una p-tupla de enteros $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ es **exótica** si se satisfacen las siguientes tres condiciones.

a) $0 \leq a_i \leq p-1$ para toda $i = 1, 2, \ldots, p$.

b) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ no es múltiplo de p.

c) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_pa_1$ es múltiplo de p.

Determina la cantidad de p-tuplas exóticas.

Problema 8. Se tienen $n \geq 1$ cuadrados tales que la suma de sus áreas es 4. Muestra que estos cuadrados se pueden acomodar dentro de un cuadrado de 1×1 de modo que lo cubran totalmente. (Los cuadrados se pueden traslapar al ser acomodados).

Problema 9. Sea p un número primo y sean $a_1, \ldots, a_p$ enteros. Demuestra que existe un entero k tal que los números $a_1+k, a_2+2k, \ldots, a_p+pk$ producen al menos $\frac{1}{2}(p+1)$ residuos distintos al ser divididos entre p.

Problema 10. Encuentra todos los enteros positivos n con la siguiente propiedad: los enteros del 1 al $2n$ se pueden dividir en dos grupos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tales que $2n$ divide a $a_1a_2 \cdots a_n + b_1b_2 \cdots b_n - 1$.

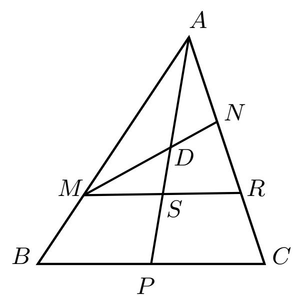
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2018 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2018. En esta ocasión, agradecemos a Rogelio Esaú Aguirre González, del Estado de Coahuila, por habernos enviado sus soluciones a los problemas 1, 4 y 5. De igual manera, agradecemos a Guillermo Courtade Morales, del Estado de Hidalgo, por habernos enviado sus soluciones a los problemas 3, 4. También agradecemos a Luis Francisco Medina Quintero, del Estado de Campeche, por habernos enviado su solución al Problema 7. Aprovechamos para invitar a todos los lectores

a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista.
Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2019, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean ABC un triángulo con área 1 y P el punto medio del lado BC. Sean M y N puntos en AB y AC, respectivamente, distintos de A, B y C, tales que $AM = 2MB$ y $CN = 2AN$. Las dos rectas AP y MN se intersecan en D. Encuentra el área del triángulo ADN.

Solución de Rogelio Esaú Aguirre González. Sea R el punto sobre el segmento AC tal que $AR = 2RC$, esto es, el punto medio de CN. Como $\frac{AM}{MB} = \frac{AR}{RC} = 2$ y $\angle MAR = \angle BAC$, tenemos que los triángulos MAR y BAC son semejantes. Sea S la intersección de MR con AP.



Como AP es una mediana del triánglo BAC y los triángulos MAR y BAC son semejantes, se sigue que AS es una mediana del triángulo MAR. Como R es el punto medio de NC, se sigue que $NR = NC$ y, puesto que $CN = 2AN$, obtenemos que $AN = NR$ y MN es una mediana del triángulo MAR. Por lo tanto, D es el centroide del triángulo MAR y $MD = 2DN$.
Luego, $(AMC) = \frac{2}{3}(ABC)$, $(AMN) = \frac{1}{3}(AMC)$ y $(ADN) = \frac{1}{3}(AMN)$, lo cual implica que $(ADN) = \frac{2}{27}(ABC) = \frac{2}{27}$, donde los paréntesis indican área.

Problema 2. Sea n un entero positivo. Encuentra, en términos de n, el número de parejas de enteros positivos (x, y) que son solución de la ecuación $x^2 - y^2 = 10^2 \cdot 30^{2n}$ y demuestra que tal número nunca es un cuadrado.

Solución. Reescribamos la ecuación como $(x + y)(x - y) = 2^{2n+2}3^{2n}5^{2n+2}$, donde $x - y < x + y$. Es fácil ver que $x + y$ y $x - y$ tienen la misma paridad, de modo que ambos deben ser pares ya que el lado derecho de la igualdad es par. Supongamos que queremos repartir $2n$ pelotas marcadas con el número 3 en dos cajas distintas. Esto se puede hacer como

$$(2n, 0), (2n - 1, 1), (2n - 2, 2), \ldots, (0, 2n),$$

esto es, podemos hacer la repartición de $2n + 1$ formas. Análogamente, los $2n + 2$ factores 5 se pueden repartir de $2n + 3$ formas.

Por otro lado, los $2n+2$ factores 2 se pueden repartir de $2n+3$ formas, pero estas formas incluyen a $(2n+2,0)$ y $(0,2n+2)$ que no son posibles, pues el par $(2n+2,0)$ significa que $x+y=2^{2n+2}k$ y $x-y=2^0j=j$, donde k y j son enteros impares (k y j son divisores de $3^{2n}\cdot 5^{2n+2}$), pero necesitamos que ambos factores $x+y$ y $x-y$ sean pares.
Observemos que cada repartición de factores, genera una solución (x,y), pues al ser pares $x+y$ y $x-y$, las soluciones (x,y) serán en efecto enteros.
En total, los factores se pueden repartir de $(2n+3)(2n+1)(2n+1)$ maneras, que se reducen a $\frac{(2n+3)(2n+1)(2n+1)-1}{2}=4n^3+10n^2+7n+1$ maneras si consideramos que $x+y>x-y$ (restamos 1 para eliminar el caso $x+y=x-y$).
Ahora, vamos a decidir si este número puede o no ser un cuadrado. Tenemos que $4n^3+10n^2+7n+1=(n+1)(4n^2+6n+1)$. Como los factores $n+1$ y $4n^2+6n+1$ son primos relativos y positivos (si p es un divisor primo de $n+1$ y $4n^2+6n+1$, entonces p divide también a $(4n^2+6n+1)-4n(n+1)=2n+1$; luego, p divide a $2(n+1)-(2n+1)=1$, que no es posible), es necesario que ambos sean cuadrados. Sin embargo, $(2n+1)^2<4n^2+6n+1<(2n+2)^2$, de modo que esto nunca es posible.

Problema 3. Determina todos los números enteros n tales que n^2+9n+9 sea múltiplo de 121.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Sea n un entero tal que $n^2+9n+9=121m$ para algún entero m, esto es, $n^2+9n+9-121m=0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en n, tenemos que

$$n=\frac{-9\pm\sqrt{81-4(9-121m)}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{45+484m}}{2}.$$

Como n es un entero, necesariamente $45+484m=k^2$ para algún entero k, esto es, $44(1+11m)=(k+1)(k-1)$. Como $k+1$ y $k-1$ tienen la misma paridad y el lado izquierdo de la ecuación anterior es par, ambos factores son pares. Además, uno de ellos es múltiplo de 11 ya que 44 es múltiplo de 11 y 11 es primo.
Caso 1. $k-1$ es par y múltiplo de 11, esto es, $k=22\ell+1$ para algún entero ℓ. Sustituyendo en la ecuación del párrafo anterior, obtenemos que $44(1+11m)=22\ell(22\ell+2)$, esto es, $1+11m=\ell(11\ell+1)$. De aquí se sigue que $\ell\equiv 1 \pmod{11}$, esto es, $\ell=11r+1$ para algún entero r. Luego, tenemos que

$$m=\frac{\ell(11\ell+1)-1}{11}=\frac{11\ell^2+\ell-1}{11}=\frac{11(11r+1)^2+11r+1-1}{11}=121r^2+23r+1,$$

de donde $n=\frac{-9\pm(242r+23)}{2}$, esto es, $n=121r+7$ o $n=-121r-16$.
Caso 2. $k+1$ es par y múltiplo de 11, esto es, $k=22\ell-1$ para algún entero ℓ. Luego, tenemos que $44(1+11m)=22\ell(22\ell-2)$, esto es, $1+11m=\ell(11\ell-1)$. Reduciendo esta ecuación módulo 11, obtenemos que $\ell\equiv -1 \pmod{11}$, esto es, $\ell=11r-1$ para algún entero r. Luego,

$$m=\frac{\ell(11\ell-1)-1}{11}=\frac{11\ell^2-\ell-1}{11}=\frac{11(11r-1)^2-(11r-1)-1}{11}=121r^2-23r+1,$$

de donde $n = \frac{-9\pm(242r-23)}{2}$, esto es, $n = 121r - 16$ o $n = -121r + 7$.
Por lo tanto, las soluciones son los enteros n congruentes con 7 módulo 121 y los enteros n congruentes con 105 módulo 121 (pues $-16 \equiv 105 \pmod{121}$).

Segunda solución. Notemos que $n^2+9n+9 = n^2+9n+20-11 = (n+4)(n+5)-11$. Como 11 divide a 121 y 121 debe dividir a $(n+4)(n+5)-11$, se sigue que 11 divide a $(n+4)(n+5)$. Como 11 es primo, se sigue que $n+4$ es múltiplo de 11 o $n+5$ es múltiplo de 11, esto es, $n = 11k+7$ o $n = 11k+6$ para algún entero k.
Si $n = 11k+7$, entonces $(n+4)(n+5) - 11 = 11(11k^2 + 23k + 11)$, de donde 11 debe dividir a $11k^2 + 23k + 11$ y, en consecuencia, 11 debe dividir a $23k$. Como 11 y 23 son primos relativos, necesariamente $11 \mid k$. Luego, $k = 11r$ para algún entero r y, por lo tanto, $n = 121r + 7$.
Ahora, si $n = 11k + 6$, entonces $(n + 4)(n + 5) - 11 = 11(11k^2 + 21k + 9)$, de donde 11 debe dividir a $11k^2 + 21k + 9$ y, en consecuencia, 11 debe dividir a $21k+9 = 22k+11-k-2$. Luego, 11 debe dividir a $k+2$, esto es, $k = 11s+9$ para algún entero s y, por lo tanto, $n = 121s + 105$.
En conclusión, las soluciones son los enteros de la forma $121r + 7$ y los de la forma $121s + 105$, con r y s enteros.

Problema 4. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 3. Demuestra que $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 3$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Por la desigualdad del triángulo, cada uno de los números $a+b-c$, $b+c-a$ y $c+a-b$ es positivo, ya que a, b y c son longitudes de los lados de un triángulo. Como $a + b + c = 3$, tenemos que $a + b - c = 3 - 2c$, $b + c - a = 3 - 2a$ y $c + a - b = 3 - 2b$. Luego,

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} = \sqrt{3-2c} + \sqrt{3-2a} + \sqrt{3-2b}.$$

Si $S = \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}$, entonces,

$$\begin{aligned} S^2 &= 3-2c+3-2a+3-2b+2\sqrt{(3-2c)(3-2a)}+2\sqrt{(3-2a)(3-2b)}+ \\ &\quad +2\sqrt{(3-2b)(3-2c)} \\ &= 9-2(a+b+c)+2\sqrt{(3-2c)(3-2a)}+2\sqrt{(3-2a)(3-2b)}+ \\ &\quad 2\sqrt{(3-2b)(3-2c)} \\ &= 3+2\left(\sqrt{(3-2c)(3-2a)}+\sqrt{(3-2a)(3-2b)}+\sqrt{(3-2b)(3-2c)}\right). \end{aligned}$$

Aplicando ahora la desigualdad MA-MG a los números positivos $3 - 2c$ y $3 - 2a$, obtenemos que $2\sqrt{(3-2c)(3-2a)} \leq 3-2c+3-2a = 6-2c-2a$, con la igualdad si y solo si $3 - 2c = 3 - 2a$, esto es, $a = c$. De manera análoga, obtenemos que $2\sqrt{(3-2a)(3-2b)} \leq 3 - 2a + 3 - 2b = 6 - 2a - 2b$ con la igualdad si y solo si $a = b$ y, $2\sqrt{(3-2b)(3-2c)} \leq 3 - 2b + 3 - 2c = 6 - 2b - 2c$, con la igualdad si y solo si $b = c$. Luego,

$$S^2 \leq 3+(6-2c-2a)+(6-2a-2b)+(6-2b-2c) = 21-4(a+b+c) = 21-4(3) = 9,$$

con la igualdad si y solo si $a = b = c = 1$. Por lo tanto, $S \leq 3$, que es lo que quería probar.

Solución de Rogelio Esaú Aguirre González. De acuerdo con la desigualdad del triángulo, tenemos que $a+b-c > 0$. Luego, por la desigualdad MA-MG, tenemos que $\sqrt{a+b-c} = \sqrt{(a+b-c)\cdot 1} \leq \frac{1}{2}(a+b-c+1)$. De manera análoga, obtenemos que $\sqrt{b+c-a} \leq \frac{1}{2}(b+c-a+1)$ y $\sqrt{c+a-b} \leq \frac{1}{2}(c+a-b+1)$. Sumando las tres desigualdades, obtenemos que $\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b} \leq \frac{1}{2}(a+b+c+3)$. Como $a+b+c = 3$, se sigue que $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq 3$.

Problema 5. Un entero positivo de cinco dígitos $abcde$, escrito en base 10 y con $a \neq 0$, se llama *coordillera* si sus dígitos satisfacen las desigualdades $a < b$, $b > c$, $c < d$ y $d > e$. Por ejemplo, 37452 es un número coordillera. ¿Cuántos números coordillera hay?

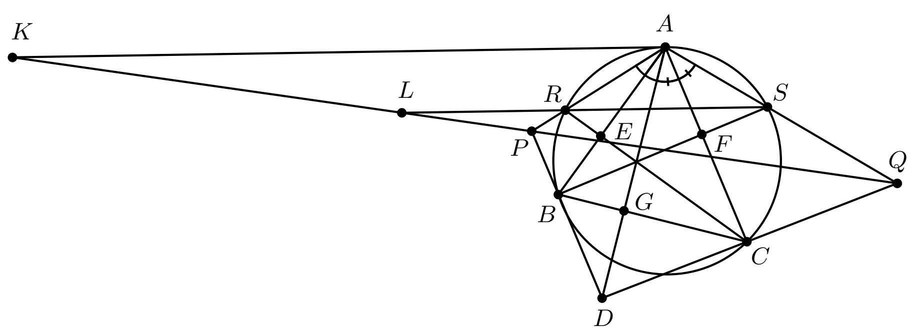
Solución de Rogelio Esaú Aguirre González. Observemos que la condición $a < b$ implica que $b > 1$. Si $b = 2$, solo hay una posibilidad para el dígito a ($a = 1$); si $b = 3$, hay dos posibilidades para a ($a = 1$ o 2). Continuando de esta forma, tenemos que para cada $2 \leq b \leq 9$ hay $b-1$ posibilidades para el dígito a. Análogamente, como $d > e$, para cada $1 \leq d \leq 9$, hay d posibilidades para el dígito e (observe que d no puede ser cero ya que $d > e$ y e es un dígito).
Como $b > c$ y $c < d$, tenemos que $0 \leq c \leq 8$.
Si $c = 0$, como b puede ser cualquier dígito mayor que 1, por el párrafo anterior tenemos $1+2+\cdots+8 = 36$ maneras de formar el número ab. De manera análoga, por el párrafo anterior, tenemos $1+2+\cdots+9 = 45$ maneras de formar el número de. Por lo tanto, hay $36 \cdot 45 = 1620$ números coordillera en este caso.
Si $c = 1$, como b puede ser cualquier dígito mayor que 1, tenemos como en el caso anterior 36 maneras de formar el número ab. Sin embargo, como $1 = c < d$, por el primer párrafo tenemos $2+3+\cdots+9 = 45-1 = 44$ maneras de formar el número de. Por lo tanto, hay $36 \cdot 44 = 1584$ números coordillera en este caso.
Si $c = 2$, entonces $b > 2 = c$ y $2 = c < d$ y, por lo del primer párrafo, tenemos $2+3+\cdots+8 = 36-1 = 35$ maneras de formar el número ab y $3+4+\cdots+9 = 44-2 = 42$ maneras de formar el número de. Por lo tanto, hay $35\cdot 42 = 1470$ números coordillera en este caso.
Si $c = 3$, entonces $b > 3 = c$ y $3 = c < d$ y, por lo del primer párrafo, tenemos $3+4+\cdots+8 = 35-2 = 33$ maneras de formar el número ab y $4+5+\cdots+9 = 42-3 = 39$ maneras de formar el número de. Por lo tanto, hay $33\cdot 39 = 1287$ números coordillera en este caso.
Análogamente, tenemos $(33-3)(39-4) = 30\cdot 35 = 1050$ números coordillera si $c = 4$; $(30-4)(35-5) = 26\cdot 30 = 780$ números coordillera si $c = 5$; $(26-5)(30-6) = 21\cdot 24 = 504$ números coordillera si $c = 6$; $(21-6)(24-7) = 15\cdot 17 = 255$ números coordillera si $c = 7$ y, $(15-7)(17-8) = 8\cdot 9 = 72$ números coordillera, si $c = 8$.
En total son $1620 + 1584 + 1470 + 1287 + 1050 + 780 + 504 + 255 + 72 = 8622$ números coordillera.

Problema 6. Sean a, b y c enteros positivos tales que $a > b > c$ y $12b > 13c > 11a$. Demuestra que $a + b + c \geq 56$.

Solución. Como a, b y c son enteros positivos y $a > b > c$, tenemos que $a \geq b + 1 \geq c + 2$, lo cual implica que $a - c \geq 2$.
Si $a - c \geq 4$, entonces $13c > 11a \geq 11(c + 4)$, lo cual implica que $c > 22$ y, por lo tanto, $a + b + c > c + c + c > 66 > 56$.
Si $a - c = 2$, entonces las desigualdades $a \geq b + 1 \geq c + 2$ implican que $a = b + 1 = c + 2$ y, por lo tanto, $12(c + 1) > 13c > 11(c + 2)$, esto es, $12 > c > 11$, lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $a - c \neq 2$.
Si $a - c = 3$, entonces $a = c + 3$ y $b = c + 1$ o $b = c + 2$. Si $b = c + 1$, entonces $12(c + 1) > 13c > 11(c + 3)$, esto es, $12 > c$ y $c > \frac{33}{2} > 16$, lo cual es un absurdo. Ahora, si $b = c + 2$, entonces $12(c + 2) > 13c > 11(c + 3)$, esto es, $24 > c$ y $c > \frac{33}{2}$. Luego, $c \geq 17$, $b \geq 19$ y $a \geq 20$, lo cual implica que $a + b + c \geq 17 + 19 + 20 = 56$.

Problema 7. Sea ABC un triángulo y sea D un punto en la altura trazada desde A, de tal manera que A y D se encuentran de distintos lados de la recta BC. El punto P en BD y el punto Q en CD, son tales que $\angle PAB = \angle BAD$ y $\angle DAC = \angle CAQ$. Demuestra que BC, PQ y la tangente al circuncírculo del triángulo ABC por A, concurren.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Sea K la intersección de la tangente por A al circuncírculo del triángulo ABC con la recta PQ. Demostraremos que los puntos K, B y C son colineales. Sean R y S las intersecciones de las alturas del triángulo ABC trazadas desde C y B con AP y AQ, respectivamente. Definamos E, F y G como las intersecciones de AB con RC, AC con BS y BC con AD, respectivamente. Así, $\angle AEC = \angle AGC$, por lo que el cuadrilátero $AEGC$ es cíclico y, por lo tanto, $\angle RCB = \angle BAD = \angle PAB = \angle RAB$. Luego, $RACB$ es cíclico. De manera análoga se prueba que el cuadrilátero $SABC$ es cíclico. Esto muestra que R y S pertenecen al circuncírculo del triángulo ABC.



Como AK es tangente al circuncírculo del triángulo ABC, tenemos que $\angle KAR = \angle ACR = \angle ASR$. Además, como $EFCB$ y $ARBCS$ son cíclicos, tenemos que $\angle ACR = \angle ASR = \angle ABS = \angle ARS$, de donde $AR = AS$. Como $\angle KAR = \angle ASR$, se sigue que $\angle KAR = \angle ARS$ y así, $AK \parallel RS$.
Para mostrar la colinealidad de los puntos K, B, C usaremos el teorema de Menelao

en el triángulo PQD, demostrando que $\frac{DC}{CQ} \cdot \frac{KQ}{KP} \cdot \frac{PB}{BD} = -1$.
Primero, por el teorema de la bisectriz en los triángulos PAD y QAD, tenemos que $\frac{PB}{BD} = \frac{AP}{AD}$ y $\frac{DC}{CQ} = \frac{AD}{AQ}$. Sea L la intersección de RS con KQ. Como $AK \parallel RS$, resulta que $\frac{KQ}{AQ} = \frac{LQ}{SQ}$ y $\frac{LP}{PR} = \frac{KP}{AP}$.
Como L, R y S son colineales, por el teorema de Menelao en el triángulo APQ, tenemos que $\frac{AS}{SQ} \cdot \frac{QL}{LP} \cdot \frac{PR}{AR} = -1$. Como $AS = AR$, se sigue que $\frac{QL}{SQ} = -\frac{LP}{PR}$. Juntando esto con las igualdades obtenidas con las paralelas, obtenemos que $\frac{KQ}{AQ} = -\frac{KP}{AP}$ y, por lo tanto, $\frac{KQ}{KP} = -\frac{AQ}{AP}$.
Finalmente, tenemos que $\frac{DC}{CQ} \cdot \frac{KQ}{KP} \cdot \frac{PB}{BD} = \frac{AD}{AQ} \cdot (-\frac{AQ}{AP}) \cdot \frac{AP}{AD} = -1$, que era lo que queríamos demostrar.

Problema 8. Sean a, b, c y d números reales del intervalo $[0, 1]$. Demuestra que

$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \leq 3.$$

Solución. Es fácil ver que si a, b, c, d son números del intervalo $[0, 1]$, entonces $abcd \leq a$, $abcd \leq b$, $abcd \leq c$ y $abcd \leq d$. Luego,

$$\begin{aligned} & \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+d} + \frac{d}{1+a} + abcd \\ \leq & \frac{a}{1+abcd} + \frac{b}{1+abcd} + \frac{c}{1+abcd} + \frac{d}{1+abcd} + abcd \\ = & \frac{a+b+c+d}{1+abcd} + abcd. \end{aligned}$$

Por otro lado, observemos que $x+y \leq 1+xy$ para cualesquiera números x, y del intervalo $[0, 1]$ (en efecto, esta desigualdad es equivalente a la desigualdad $(1-x)(1-y) \geq 0$, la cual es evidentemente verdadera). Utilizando sucesivamente esta desigualdad, obtenemos que $a+b+c+d \leq 1+ab+1+cd = ab+cd+2 \leq 1+abcd+2 = abcd+3$ (note que ab y cd también son números del intervalo $[0, 1]$). Como $x = abcd$ también es un número del intervalo $[0, 1]$, es suficiente demostrar que $1 + \frac{2}{1+x} + x \leq 3$, esto es, $2 + x^2 + x \leq 2x + 2$. Pero esa desigualdad es verdadera, puesto que $x^2 \leq x$.

Problema 9. Cada casilla de un tablero de $n \times n$ es coloreada con uno de n posibles colores, tal que hay exactamente n casillas coloreadas por cada posible color. Muestra que hay una fila o una columna que contiene al menos $\sqrt{n}$ colores distintos.

Solución. Para cada color $1 \leq i \leq n$ sea A_i el número de columnas que contienen al color i y sea B_i el número de filas que contienen al color i. Notemos que $\sum_{i=1}^{n} A_i$ es la cantidad de colores distintos contados sobre todas las columnas. Entonces si $\sum_{i=1}^{n} A_i \geq n\sqrt{n}$, alguna de las columnas debe contribuir en al menos $\sqrt{n}$ colores (de lo contrario esta suma no podria ser mayor o igual a $n\sqrt{n}$). De manera análoga, si $\sum_{i=1}^{n} B_i \geq n\sqrt{n}$, entonces alguna fila contribuye en al menos $\sqrt{n}$ colores distintos.

Veamos que como un color i está en A_i columnas y B_i filas, las casillas coloreadas del color i no puede exceder al número A_iB_i y, como hay exactamente n casillas coloreadas de cada color, debe ocurrir que $A_iB_i \geq n$. Aplicando la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} B_i = \sum_{i=1}^{n}(A_i + B_i) \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{A_iB_i} \geq \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{n} = 2n\sqrt{n},$$

lo cual implica que alguna de las sumas $\sum_{i=1}^{n} A_i$ o $\sum_{i=1}^{n} B_i$ es mayor o igual que $n\sqrt{n}$.

Problema 10. Demuestra que $\dfrac{\sqrt{2}}{2n} \leq \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4n}$ para todo entero positivo n.

Solución. Para cada entero positivo n, consideremos el número complejo

$$z = \cos\frac{\pi}{2n} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}.$$

Entonces, $|z| = 1$ y, por el Teorema de D'Moivre[8], $z^n = i$. Luego,

$$i - 1 = z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1),$$

de donde se sigue, por la desigualdad del triángulo, que

$$\begin{aligned}\sqrt{2} = |i-1| &= |z-1||z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1| \\ &\leq |z-1|(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + |z| + 1) \\ &= |z-1| \cdot n,\end{aligned}$$

esto es, $|z-1| \geq \frac{\sqrt{2}}{n}$.
Por otro lado, tenemos que

$$|z-1|^2 = \left(\cos\frac{\pi}{2n} - 1\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}\right)^2 = 2 - 2\cos\frac{\pi}{2n} = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2n}\right).$$

Como $\cos\frac{\pi}{2n} = \cos\frac{2\pi}{4n}$, usando la identidad $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, tenemos que

$$1 - \cos\frac{\pi}{2n} = 1 - \left(\cos^2\frac{\pi}{4n} - \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4n}\right) = \left(1 - \cos^2\frac{\pi}{4n}\right) + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4n}.$$

Finalmente, usando la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, obtenemos que

$$1 - \cos\frac{\pi}{2n} = 2\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4n}.$$

Por lo tanto, $|z-1|^2 = 4\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{4n}$, esto es, $|z-1| = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n}$.
En conclusión, tenemos que $2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4n} \geq \frac{\sqrt{2}}{n}$, de donde se sigue el resultado.

[8]**Teorema de D'Moivre.** Si $z = |z|(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$, entonces $z^n = |z|^n(\cos n\alpha + i\operatorname{sen} n\alpha)$ para todo entero n.

Concursos Estatales

Olimpiada Regional de Occidente 2019

Del 30 de agosto al 2 de septiembre de 2019, previo al concurso nacional de la XXXIII Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), se llevó a cabo la Olimpiada Regional de Occidente, en las instalaciones del Centro de Investigación en Matemáticas, A.C., en la ciudad de Guanajuato, Guanajuato, con la participación de 48 alumnos provenientes de Aguascalientes, Colima, Guanajuato, Jalisco, Sinaloa y Zacatecas. Cada estado tiene la opción de llevar entre 6 y 10 estudiantes. Aguascalientes participó con 9 estudiantes, Colima con 6, Guanajuato con 10, Jalisco con 7, Sinaloa con 10 y Zacatecas con 6. Se entregaron 4 medallas de oro, 8 medallas de plata, 13 medallas de bronce y 7 menciones honoríficas.

Los alumnos ganadores de medalla de oro fueron: Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa), Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa), Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato) y José de Jesús Liceaga Martínez (Guanajuato). Cabe mencionar que Karla Rebeca fue la única persona que obtuvo puntaje perfecto.

La olimpiada regional de occidente tiene dos propósitos: Ser parte del proceso selectivo en algunos estados y brindar a los participantes una experiencia similar al concurso nacional de la OMM.

A continuación presentamos los problemas de la Olimpiada Regional de Occidente. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Decimos que una tabla de tres filas e infinitas columnas es *chida* si fue llenada con enteros positivos y, además, siempre que un mismo número m aparece en dos o más lugares diferentes de la tabla, los números que aparecen en las celdas inmediatamente debajo de dichos lugares (cuando existen) son iguales. Por ejemplo, la siguiente tabla es chida.

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	n	$\cdots$
2	1	3	3	8	9	$\cdots$	$n+3$	$\cdots$
1	2	3	3	11	12	$\cdots$	$n+6$	$\cdots$

Para cada una de las siguientes dos tablas, decida si es posible llenar las celdas vacías de manera que las tablas resultantes sean chidas, explicando cómo hacer esto o por qué no es posible hacer esto. En ambas tablas, a partir de la quinta columna, el número del tercer renglón es dos unidades mayor que el número del primer renglón.

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	n	$\cdots$
						$\cdots$		$\cdots$
4	5	6	3	7	8	$\cdots$	$n+2$	$\cdots$

1	2	3	4	5	6	$\cdots$	n	$\cdots$
						$\cdots$		$\cdots$
5	6	4	3	7	8	$\cdots$	$n+2$	$\cdots$

Problema 2. Dado un cuadrado $ABCD$ se toman puntos E y F en el interior de los segmentos BC y CD, de manera que $\angle EAF = 45°$. Las rectas AE y AF cortan nuevamente a la circunferencia circunscrita al cuadrado en los puntos G y H, respectivamente. Muestra que las rectas EF y GH son paralelas.

Problema 3. Determina todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que el número $\frac{a^2(b-a)}{b+a}$ es el cuadrado de un número primo.

Problema 4. Sean ABC un triángulo, M el punto medio de AB y L el punto medio de BC. Denotamos por G a la intersección de AL con CM y tomamos un punto E tal que G es el punto medio del segmento AE. Demuestra que el cuadrilátero $MCEB$ es cíclico si y solamente si $MB = BG$.

Problema 5. Demuestra que para cada entero $n > 1$, existen enteros x y y tales que

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{1}{y(y+1)}.$$

Problema 6. En Occidentalia hay 20 empresas distintas, cada una buscando contratar a 15 nuevos empleados. Un grupo de 300 aspirantes se entrevista con cada una de las empresas. Cada empresa califica a cada aspirante como apropiado o no apropiado para trabajar en ella, de forma que cada una de ellas encuentra apropiados a exactamente p aspirantes, con $p > 15$, y cada aspirante es encontrado apropiado por al menos una empresa. ¿Cuál es el menor valor de p para el cual siempre es posible asignar 15 aspirantes a cada empresa, de manera que siempre que un aspirante fue asignado a una empresa, esta lo considera apropiado, y que cada uno de los 300 aspirantes es asignado a una empresa?

Competencia Internacional de Matemáticas 2018 (Nivel Secundaria)

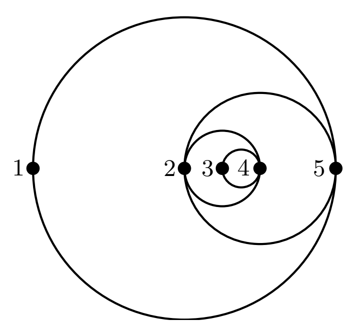
La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2018 (BIMC 2018), se celebró en Burgas, Bulgaria, del 1 al 6 de julio de 2018. En esa ocasión, México participó con un equipo de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo 4 medallas de bronce y 5 menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.
La prueba individual del nivel secundaria, consiste de 15 preguntas en total; las primeras 12 conforman la parte A del examen y son de respuesta cerrada, que quiere decir que se califican simplemente como bien o mal. Las últimas 3 preguntas que conforman la parte B del examen, son de respuesta construida y es necesario escribir una solución entera en la hoja que se entrega con el problema -y nada más. Cada respuesta correcta de la parte A vale 5 puntos, mientras que cada problema de la parte B se califica entre 0 y 20 puntos. Es decir, cada una de las dos partes vale máximo 60 puntos para un total de 120. Los participantes tienen 120 minutos para resolver el examen.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.
En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce

y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. Es decir, solo el 6 % recibe una medalla de oro, por lo que no es extraño que se necesiten al menos 13 respuestas correctas para conseguirla. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso nacional que se toma muy en serio el concurso, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años: el proceso Nacional empieza en junio con el Concurso Nacional de la OMMEB y concluye en agosto del siguiente año con el viaje a la IMC: 14 meses de proceso selectivo.
En esa ocasión, el equipo A de secundaria estuvo integrado por Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Jacobo de Juan Millón (Yucatán), Katia García Orozco (Chihuahua) y Mauricio Elías Navarrete Flores (Chihuahua). Tomás Francisco obtuvo medalla de bronce, mientras que Jacobo, Katia y Mauricio obtuvieron mención honorífica.
El equipo B de secundaria estuvo integrado por Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León), Darío Hinojosa Delgadillo (Nuevo León), Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa) y Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León). Pablo, Darío y Carlos obtuvieron medalla de bronce.
A continuación presentamos los enunciados y las soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel Secundaria de la IMC del año 2018.

Examen Individual, Nivel Secundaria

Parte A

Problema 1. El diagrama muestra cinco ciudades colineales conectadas por carreteras semicirculares. Un paseo se define como un viaje entre dos ciudades a través de un semicírculo. ¿De cuántas maneras posibles se puede comenzar y terminar en la Ciudad 5 luego de cuatro paseos, si los paseos se pueden repetir?

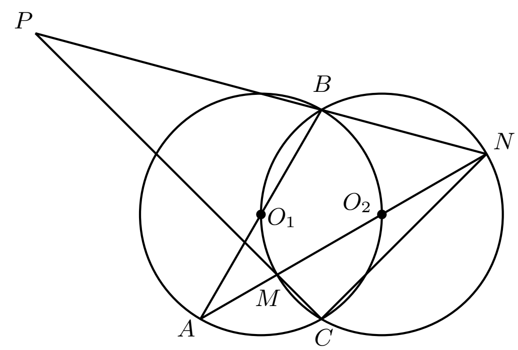


Problema 2. Sean m y n enteros positivos tales que $m(n-m) = -11n+8$. Encuentra la suma de todos los valores posibles de $m - n$.

Problema 3. Ana lanza una moneda común dos veces, mientras que Bob lanza la misma moneda tres veces. La probabilidad de que ellos obtengan el mismo número de águilas al final del juego es expresada como una fracción irreducible. ¿Cuál es la suma del numerador y el denominador de dicha fracción?

Problema 4. Sean p y q números primos tales que $p^2 + 3pq + q^2$ es el cuadrado de un entero. Encuentra el mayor valor posible de $p + q$.

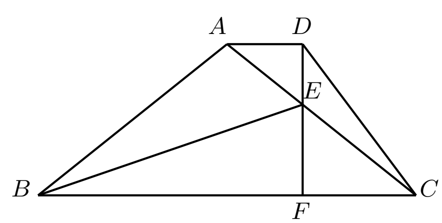
Problema 5. Dos círculos, k_1 y k_2, del mismo radio, se intersecan en los puntos B y C. El centro O_1 de k_1 está sobre k_2 y el centro O_2 de k_2 está sobre k_1. AB es un diámetro de k_1 y AO_2 interseca a k_2 en los puntos M y N, con M entre A y O_2. Las prolongaciones de CM y NB se intersecan en el punto P. Encuentra $CP : CN$.



Problema 6. Se hace el producto $1!2!3! \cdots 99!100!$ ¿Cuántos ceros consecutivos hay al final de dicho producto?

Problema 7. Sea $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, donde a, b, c y d son constantes reales. Supongamos que $P(1) = 7$, $P(2) = 52$ y $P(3) = 97$, encuentra el valor de $\frac{P(9)+P(-5)}{4}$.

Problema 8. En el cuadrilátero $ABCD$, AD es paralela a BC y $AB = AC$. F es un punto sobre BC tal que DF es perpendicular a BC. AC interseca a DF en E. Si $BE = 2DF$ y BE biseca al ángulo $\angle ABC$, encuentra la medida en grados, del ángulo $\angle BAD$.



Problema 9. Acomoda los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en una fila de manera que ninguno de los siguientes: el primer número, la suma de los dos primeros números, la suma de los tres primeros números, ..., la suma de los siete números, es divisible por 3. ¿De cuántas maneras distintas es posible hacer esto?

Problema 10. Un triángulo equilátero y un polígono regular de siete lados se inscriben en el mismo círculo, el cual tiene perímetro 84 cm y queda dividido por los vértices en diez arcos. ¿Cuál es la mayor longitud posible, en cm, del arco más pequeño?

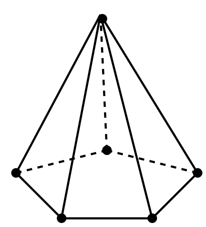
Problema 11. Si a y b son números reales tales que $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = 12$ y $ab = (\frac{a+b+8}{6})^3$, encuentra el valor de $a - b$.

Problema 12. ¿Cuántas ternas ordenadas (x, y, z) de números reales hay tales que $x + y^2 = z^3$, $x^2 + y^3 = z^4$ y $x^3 + y^4 = z^5$?

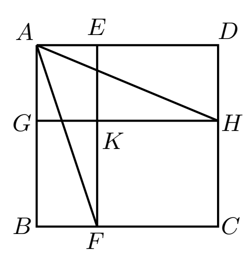
Parte B

Problema 13. Determina el valor de $a + b$ si la ecuación $|x^2 - 2ax + b| = 8$ tiene únicamente tres raíces reales, las cuales son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo.

Problema 14. ¿De cuántas maneras se pueden pintar los seis vértices de una pirámide pentagonal regular usando a lo más seis colores distintos, de manera que los vértices conectados por una arista tengan colores distintos? Si una coloración puede ser obtenida por una rotación de alguna otra coloración, solo una de ellas se toma en cuenta.



Problema 15. Sea $ABCD$ un cuadrado. E y F son puntos sobre AD y BC, respectivamente, tales que $EF \parallel AB$. G y H son puntos sobre AB y DC, respectivamente, tales que $GH \parallel AD$. EF y GH se intersecan en K. Si el área de $KFCH$ es igual a dos veces el área de $AGKE$, encuentra la medida en grados, del ángulo $\angle FAH$.

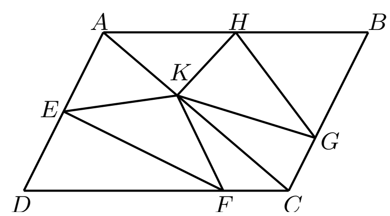


Examen por Equipos, Nivel Secundaria

Problema 1. ¿Cuántos enteros positivos menores que 2018 se pueden expresar como una suma de exactamente tres de sus divisores positivos, todos ellos distintos?

Problema 2. ¿Cuántas parejas de enteros positivos (x, y) hay tales que $x < y$ y $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ es un entero que es un divisor de 2835?

Problema 3. Sea $ABCD$ un paralelogramo de área 240 cm^2. E es el punto medio de AD y H es el punto medio de AB. G es un punto sobre BC tal que $BG = 2GC$ y F es un punto sobre CD tal que $DF = 3FC$. K es un punto sobre AC tal que el área del triángulo EKF es 33 cm^2. Encuentra el área, en cm^2, del triángulo HKG.



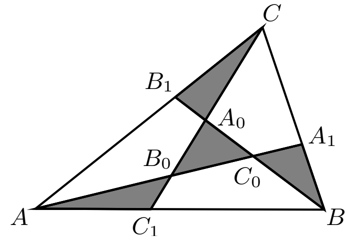
Problema 4. Encuentra el mayor entero positivo m tal que $m^4+16m+8$ es el producto de dos o más enteros consecutivos.

Problema 5. Si k es un entero positivo, ¿para qué valor de k, la expresión $\frac{20^k+18^k}{k!}$ alcanza su máximo valor?

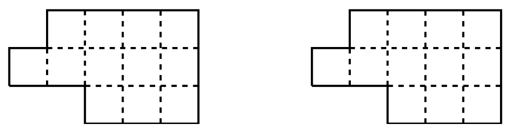
Problema 6. El ejército romano tiene 2018 soldados resguardando sus provincias. El Emperador está preocupado porque cuando hay al menos 64 soldados en una misma provincia, ellos se pueden unir en contra del Emperador. Así, en cada día, el Emperador visita una de tales provincias potencialmente problemáticas y envía a todos los soldados de esa provincia a otras provincias, cuidando de no enviar a dos soldados a una misma provincia. Prueba que después de 64 días, no hay provincias con al menos 64 soldados.

Problema 7. Se hace la suma de todos los enteros positivos que no son primos relativos con 2018 y tienen exactamente 2017 divisores positivos. Encuentra el residuo que queda al dividir dicha suma por 2019.

Problema 8. En la figura siguiente, el triángulo ABC se divide en cuatro triángulos pequeños y tres cuadriláteros, como se indica. Cada triángulo pequeño tiene área 1 cm^2. Encuentra el área, en cm^2, del cuadrilátero $CA_0C_0A_1$.



Problema 9. Divide la primera figura (izquierda), no necesariamente por las líneas punteadas, en tres piezas que sean iguales salvo rotaciones y reflexiones. Además, divide la segunda figura (derecha), no necesariamente por las líneas punteadas, en cuatro piezas que sean iguales salvo rotaciones y reflexiones.



Problema 10. Tomás escribe el número 1. Después, para cada número n que esté escrito, Tomás escribe los números $5n$ y $5n+1$, siempre que dichos números sean menores que 1000. Al final, Gerardo calcula todas las sumas posibles de dos números distintos escritos por Tomás. ¿Cuántas sumas distintas obtuvo Gerardo?

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. En cuatro viajes podemos empezar y terminar en la Ciudad 5 con cinco patrones distintos, a saber, $5-1-5-1-5$, $5-1-5-2-5$, $5-2-5-2-5$, $5-2-5-1-5$ y $5-2-4-2-5$. Para cada uno de los viajes, hay dos opciones: usar el semicírculo superior o el inferior. Luego, la cantidad total de maneras distintas es $5\times 16 = 80$.

Solución del Problema 2. Tenemos que $n=\frac{m^2+8}{m+11}=m-11+\frac{129}{m+11}$. Luego, $m+11$ es un divisor positivo de $129 = 3\cdot 43$ (pues m es positivo). Si $m+11=1$ o $m+11=3$, entonces $m<0$, lo cual no es posible. Si $m+11=43$, entonces $m=32$ y $n=24$. Si $m+11=129$, entonces $m=118$ y $n=108$. Luego, la suma buscada es $(32-24)+(118-108)=18$.

Solución del Problema 3. Ana tiene 4 resultados posibles, igualmente probables: AA, AS, SA y SS. Bob tiene 8 resultados posibles, igualmente probables: AAA, AAS, ASA, SAA, ASS, SAS, SSA, SSS. Los juegos posibles son AA contra AAS, ASA o SAA; AS o SA contra ASS, SAS o SSA; y SS contra SSS. Luego, la probabilidad es $\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$. La suma buscada es $5+16=21$.

Solución del Problema 4. Sea $p^2+3pq+q^2=r^2$ para algún entero $r>0$. Si r no es divisible entre 3, entonces $r\equiv 1$ o $2 \pmod 3$ y, en consecuencia, $r^2\equiv 1 \pmod 3$. Si $p\neq 3$ y $q\neq 3$, entonces p y q no son divisibles por 3 (ya que son números primos), de modo que $p^2+3pq+q^2\equiv 2 \pmod 3$, lo que es una contradicción ya que $r^2\equiv 1 \pmod 3$. Por lo tanto, alguno de p o q es igual a 3. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p=3$. Entonces, $q^2+9q+9=r^2$, esto es, $4q^2+36q+36=4r^2$ o, de manera equivalente, $(2q-2r+9)(2q+2r+9)=45$. Como $r>0$, tenemos dos posibilidades:
Caso 1. $2q+2r+9=15$ y $2q-2r+9=3$, de donde $q=0$, que es imposible.

Caso 2. $2q + 2r + 9 = 45$ y $2q - 2r + 9 = 1$, de donde $q = 7$ y $r = 11$. Por lo tanto, $p + q = 3 + 7 = 10$.

Solución del Problema 5. Observemos que los triángulos BO_1O_2 y CO_1O_2 son equiláteros. Luego, $\angle BO_2C = 120°$ y, en consecuencia, $\angle BNC = 60°$. Dado que MN es un diámetro del segundo círculo, tenemos que $\angle MNC = 90°$. Se sigue que PCN es medio triángulo equilátero, de manera que $CP : CN = \sqrt{3} : 1$.

Solución del Problema 6. Si n es un entero positivo mayor que 1, cada factor par en $n!$ aporta al menos un factor igual a 2 y cada múltiplo de 5 aporta al menos un factor igual a 5. Como hay más factores pares que múltiplos de 5 en el desarrollo de $n!$, el número de ceros consecutivos al final del producto $1!2!3! \cdots 99!100!$ será igual a la cantidad de factores iguales a 5. La siguiente tabla contiene la cantidad de factores iguales a 5 en $n!$

n	1 a 4	5 a 9	10 a 14	15 a 19	20 a 24	25 a 29	30 a 34
Factores 5	0	1	2	3	4	6	7
n	35 a 39	40 a 44	45 a 49	50 a 54	55 a 59	60 a 64	65 a 69
Factores 5	8	9	10	12	13	14	15
n	70 a 74	75 a 79	80 a 84	85 a 89	90 a 94	95 a 99	100
Factores 5	16	18	19	20	21	22	24

Por lo tanto, la cantidad total de factores iguales a 5 en todo el producto es igual a

$$\begin{aligned}
&5(1+2+3+4+6+7+8+9+10+12+13+14+15+16+18+19+\\
&\quad +20+21+22)+24\\
&= 5[(1+2+3+\cdots+22)-5-11-17]+24\\
&= 5\left(\frac{22\cdot 23}{2}-5-11-17\right)+24\\
&= 1124.
\end{aligned}$$

Solución del Problema 7. De las condiciones $P(1) = 7$, $P(2) = 52$ y $P(3) = 97$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a+b+c+d &= 6,\\
8a+4b+2c+d &= 36,\\
27a+9b+3c+d &= 16.
\end{aligned}$$

Restando la primera ecuación de la segunda, obtenemos que $7a + 3b + c = 30$. De manera análoga, restando la segunda ecuación de la tercera, obtenemos que $19a + 5b + c = -20$. Si ahora restamos estas últimas dos ecuaciones y simplificamos, obtenemos que $b = -6a - 25$. Sustituyendo esta expresión para b en las primeras dos ecuaciones del sistema anterior, obtenemos el nuevo sistema de ecuaciones:

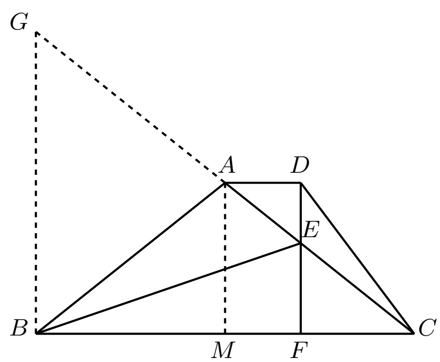
$$-5a + c + d = 31,$$
$$-16a + 2c + d = 136.$$

Luego, $31 + 5a - c = d = 136 + 16a - 2c$, de donde se sigue que $11a - c = -105$, esto es, $c = 11a + 105$. Finalmente, obtenemos que $d = 6 - a - b - c = 6 - a - (-6a - 25) - (11a + 105) = -6a - 74$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(9) + P(-5) &= 9^4 + 5^4 + 604a + 106b + 4c + 2d \\ &= 9^4 + 5^4 + 604a + 106(-6a - 25) + 4(11a + 105) + 2(-6a - 74) \\ &= 9^4 + 5^4 + 106(-25) + 4(105) + 2(-74) \\ &= 4808, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\frac{P(9)+P(-5)}{4} = \frac{4808}{4} = 1202$.

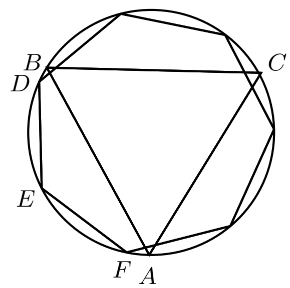
Solución del Problema 8. Sea M el pie de la perpendicular desde A sobre BC. Tracemos la perpendicular por B y sea G su intersección con la prolongación del segmento CA.



Entonces, A es el circuncentro del triángulo rectángulo BCG y, por lo tanto, A es el punto medio de CG. Esto implica que M es el punto medio de BC. Luego, tenemos que $BG = 2AM = 2DF = BE$ y de aquí, $\angle BGE = \angle BEG = 3\angle ABE$. Como $\angle ACB = 2\angle ABE$, resulta que $5\angle ABE = 90°$, esto es, $\angle ABE = \frac{90°}{5} = 18°$. Por lo tanto, $\angle BAD = 90° + 3 \times 18° = 144°$.

Solución del Problema 9. Observemos primero que $3 \equiv 6 \equiv 0 \pmod 3$, $4 \equiv 7 \equiv 1 \pmod 3$ y $5 \equiv 2 \pmod 3$. Tenemos que verificar la divisibilidad por 3 un total de siete veces y, cada vez, el residuo debe ser 1 o 2. Cuando sumamos 3 o 6 como el siguiente término, el residuo no cambia. Solo podemos sumar 1, 4 o 7 como siguiente término si el residuo actual es 1, para que cambie a 2; solo podemos sumar 2 o 5 como el siguiente término cuando el residuo sea 2, para que cambie a 1. No podemos empezar con 3 o 6. Si empezamos con 2 o 5, debemos cambiar el residuo de 1 a 2 tres veces, pero de 2 a 1 solo una vez, lo cual es imposible. Luego, debemos empezar con 1, 4 o 7, cambiando el residuo de 1 a 2 dos veces, y de 2 a 1 otras dos veces. Para las dos maneras restantes, el residuo no cambia. Luego, el patrón general queda determinado cuando el residuo no cambia. Hay $\binom{6}{2} = 15$ patrones distintos. En cada uno, los números 1, 4 y 7 pueden permutarse de $3! = 6$ maneras y los números 2 y 5, así como los números 3 y 6, pueden permutarse de 2 maneras cada pareja. Luego, la cantidad total de maneras es $15 \times 6 \times 2 \times 2 = 360$.

Solución del Problema 10. El triángulo divide a la circunferencia en tres arcos. Por el principio de las casillas, uno de estos arcos debe contener a tres de los vértices del polígono de siete lados. Supongamos que los vértices D, E y F del polígono de siete lados están en el arco menor $\widehat{AB}$ como se muestra en la figura.



La longitud del arco $\widehat{AB}$ es 28 cm mientras que la longitud de cada uno de los arcos $\widehat{DE}$ y $\widehat{EF}$ es 12 cm. Luego, la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{FA}$ y $\widehat{DB}$ es $28 - 2 \times 12 = 4$ cm. Nuevamente por el principio de las casillas, se sigue que al menos uno de los arcos $\widehat{FA}$ o $\widehat{DB}$ mide a lo más $\frac{4}{2} = 2$ cm. Poniendo el punto E en el punto medio del arco $\widehat{AB}$, podemos obtener la máxima longitud del menor de esos diez arcos, que es 2 cm.

Solución del Problema 11. Haciendo $x = \sqrt[3]{a}$ y $y = \sqrt[3]{b}$, las dos condiciones del problema ahora son $x - y = 12$ y $6xy = x^3 + y^3 + 8$. Sustituyendo $x = y + 12$ en la segunda ecuación y simplificando, obtenemos la ecuación cúbica

$$y^3 + 15y^2 + 180y + 868 = 0.$$

Como los coeficientes son números enteros, podemos aplicar el teorema de las raíces racionales[9] para determinar las posibles raíces racionales. Aplicando el mencionado teorema, tenemos que las posibles raíces racionales son los divisores de $868 = 2^2 \cdot 7 \cdot 31$. Es fácil ver que -7 es una raíz, esto es, $y + 7$ es un factor de $y^3 + 15y^2 + 180y + 868$. Efectuando una división, obtenemos que el otro factor es $y^2 + 8y + 124$, el cual no tiene raíces reales. Por lo tanto, la única raíz real de la ecuación $y^3 + 15y^2 + 180y + 868 = 0$ es $y = -7$ y, por lo tanto, $x = y + 12 = -7 + 12 = 5$. Luego, $a = x^3 = 125$ y

[9] **Teorema de las raíces racionales.** Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ un polinomio con coeficientes enteros. Si un número racional $\frac{r}{s}$, con r y s primos relativos, es una raíz de $p(x)$, entonces $r \mid a_0$ y $s \mid a_n$. Este teorema se puede consultar en el artículo "Un breve recorrido por los polinomios" de Tzaloa No. 2, 2019.

$b = y^3 = -343$, de donde se sigue que $a - b = 468$.

Solución alternativa. Iniciando como en la primera solución, obtenemos las ecuaciones $x - y = 12$ y $6xy = x^3 + y^3 + 8$. Observemos que la segunda ecuación la podemos escribir como $x^3 + y^3 + 2^3 - 3(2xy) = 0$, donde el lado izquierdo tiene la forma $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ y, es conocido, que $p^3 + q^3 + r^3 - 3pqr$ se factoriza como $(p + q + r)(p^2 + q^2 + r^2 - pq - pr - qr)$. Aplicando esta factorización a $x^3 + y^3 + 2^3 - 3(2xy)$, obtenemos que $(x+y+2)(x^2+y^2+2^2-xy-2x-2y) = 0$. De aquí que, $x + y + 2 = 0$ o $x^2 + y^2 + 2^2 - xy - 2x - 2y = 0$. La segunda ecuación se puede reescribir como $\frac{1}{2}(x - y)^2 + \frac{1}{2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2 = 0$, lo cual implica que $x - y = x - 2 = y - 2 = 0$, esto es, $x = y = 2$. Pero esto no es posible ya que $x - y = 12$. Por lo tanto, $x + y + 2 = 0$. Sustituyendo $x = y + 12$ en $x + y + 2 = 0$, obtenemos que $2y + 14 = 0$, de donde $y = -7$ y, de aquí, $x = -7 + 12 = 5$, como en la primera solución.

Solución del Problema 12. Tenemos que $z^8 = z^3z^5 = (x + y^2)(x^3 + y^4)$ y $z^8 = (z^4)^2 = (x^2 + y^3)^2$. Luego, $(x + y^2)(x^3 + y^4) = (x^2 + y^3)^2$. Desarrollando y simplificando, obtenemos que $xy^2(x - y)^2 = 0$, de donde se sigue que $x = 0$ o $y = 0$ o $x = y$.
Si $x = 0$, entonces $y^2 = z^3$ y $y^3 = z^4$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos que $z^3y = z^4$, esto es, $z^3(y - z) = 0$, de donde $z = 0$ o $y = z$. Si $z = 0$, entonces $y = 0$ y tenemos la terna $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Si $y = z$, entonces $y^2 = y^3$, esto es, $y^2(1 - y) = 0$, de donde $y = 0$ o $y = 1$. Si $y = 0$, tenemos la terna $(0, 0, 0)$; si $y = 1$, entonces $z = 1$ y tenemos la terna $(0, 1, 1)$.
Si $y = 0$, entonces $x = z^3$ y $x^2 = z^4$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda, obtenemos que $z^6 = z^4$, esto es, $z^4(z^2 - 1) = 0$, de donde $z = 0$, $z = 1$ o $z = -1$. Si $z = 0$, entonces $x = z^3 = 0$ y tenemos la terna $(0, 0, 0)$. Si $z = 1$, entonces $x = z^3 = 1$ y tenemos la terna $(1, 0, 1)$. Si $z = -1$, entonces $x = z^3 = -1$ y tenemos la terna $(-1, 0, -1)$.
Si $x = y$, entonces $x + x^2 = z^3$ y $x^2 + x^3 = z^4$. Si $z = 0$, entonces $x + x^2 = x(1 + x) = 0$, de donde $x = 0$ o $x = -1$. Si $x = 0$, entonces $y = x = 0$ y tenemos la terna $(0, 0, 0)$. Si $x = -1$, entonces $y = x = -1$ y tenemos la terna $(-1, -1, 0)$. Ahora, si $z \neq 0$, entonces $x \neq 0$ y $x \neq -1$. Luego, $z = \frac{z^4}{z^3} = \frac{x^2+x^3}{x+x^2} = \frac{x^2(1+x)}{x(1+x)} = x$ y, por lo tanto, $x + x^2 = x^3$, esto es, $1 + x = x^2$ (podemos dividir entre x ya que $x \neq 0$). Las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ son $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, de modo que tenemos las ternas $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ y $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.
En total, tenemos 7 ternas distintas.

Solución del Problema 13. La ecuación $|x^2 - 2ax + b| = 8$ sin valor absoluto es $x^2 - 2ax + b = 8$ o es $-x^2 + 2ax - b = 8$, esto es, $x^2 - 2ax + b - 8 = 0$ o $x^2 - 2ax + b + 8 = 0$. El discriminante[10] de la primera ecuación es $4(a^2 - b + 8)$ y el discriminante de la segunda ecuación es $4(a^2 - b - 8)$. Como hay solo 3 raíces

[10]El **discriminante** D de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es $D = b^2 - 4ac$. Si $D < 0$, la ecuación no tiene raíces reales; si $D = 0$, la ecuación tiene dos raíces reales iguales; si $D > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales distintas.

reales entre ambas ecuaciones, uno de los discriminantes debe ser igual a 0 y el otro discriminante debe ser mayor que 0. Como $4(a^2-b-8)<4(a^2-b+8)$, se sigue que $4(a^2-b-8)=0$, esto es, $a^2-b=8$. Luego, las raíces de la ecuación $x^2-2ax+b-8=0$ son

$$\frac{2a\pm\sqrt{4(a^2-b+8)}}{2}=\frac{2a\pm\sqrt{4(8+8)}}{2}=a\pm 4.$$

Por otro lado, como las raíces[11] de la ecuación $x^2-2ax+b+8=0$ suman $2a$ y esta ecuación tiene dos raíces iguales, se sigue que la única raíz es a.
Por lo tanto, las raíces de la ecuación $|x^2-2ax+b|=8$ son a, $a-4$ y $a+4$, la cuales son las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Como $a+4$ es mayor que a y que $a-4$, la hipotenusa de dicho triángulo rectángulo mide $a+4$. Luego, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2+(a-4)^2=(a+4)^2$, esto es, $a(a-16)=0$. Como a es la longitud de un cateto, la única posibilidad es que $a=16$. Luego, $b=a^2-8=16^2-8=248$ y así $a+b=16+248=264$.

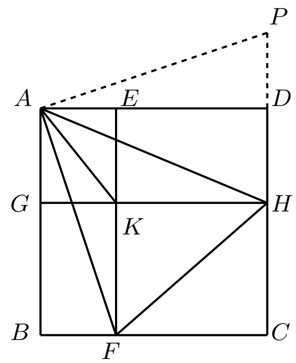
Solución del Problema 14. Puesto que no se dice cuántos colores se usaron, dividiremos la cuenta de acuerdo al número de colores.
Si se usaron 6 colores, tenemos $6!=720$ formas de pintar los vértices, incluyendo rotaciones. Como hay 5 posibles rotaciones, tenemos $\frac{720}{5}=144$ formas de colorear en este caso.
Si se usaron 5 colores, el tipo de coloración debe ser de la forma ABACD para los vértices de la base. Si fijamos la rotación haciendo B el primer vértice, el número de coloraciones es una permutación de 5 colores, esto es, es igual a $5!=120$ formas.
Si se usaron 4 colores, el tipo de coloración debe ser de la forma ABABC para los vértices de la base. Si fijamos la rotación haciendo C el primer vértice, el número de coloraciones es una permutación de 4 colores, esto es, es igual a $4!=24$.
Si se usaron menos de 4 colores, a lo más se usaron 2 colores para los vértices de la base. Como 5 es un número impar, no podemos pintar los vértices de la base usando colores de manera alternada, lo que significa que hay cero formas de colorear en este caso.
Por lo tanto, el número total de formas de hacer la coloración es igual a $144+120+24=288$.

Solución del Problema 15. Rotemos 90° el triángulo ABF alrededor del punto A hasta que B coincida con D y F coincida con el punto P en la prolongación de HD. Usaremos corchetes para denotar área.
Supongamos que el cuadrado $ABCD$ tiene área 1 y sean $x=AE$ y $y=AG$. Como $[KFCH]=2[AGKE]$, tenemos que $(1-x)(1-y)=2xy$, esto es, $1-xy=x+y$. Luego,

$$[AFH]=[AKH]+[AKF]+[KFH]=\frac{[ABCD]-[AGKE]}{2}=\frac{1-xy}{2}=\frac{x+y}{2}.$$

Por otro lado, tenemos también que $[AHP]=[ABF]+[ADH]=\frac{x+y}{2}$.

[11] Si r y s son las raíces de la ecuación $x^2+bx+c=0$, entonces $r+s=-b$ y $rs=c$.



Luego, si $a = AF = AP$ y $b = AH$, tenemos que $[AFH] = ab\,\mathrm{sen}\,\angle FAH = ab\,\mathrm{sen}\,\angle PAH = [AHP]$, esto es, $\mathrm{sen}\,\angle FAH = \mathrm{sen}\,\angle PAH$ y, como ambos ángulos $\angle FAH$ y $\angle PAH$ son menores de $90°$, se sigue que $\angle FAH = \angle PAH$. Por lo tanto, $2\angle FAH = \angle FAH + \angle PAH = 90°$, esto es, $\angle FAH = 45°$.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Sea n tal que $n = a + b + c$, donde $a > b > c > 0$ son divisores de n. Entonces, $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = 1$. En su expresión reducida, el numerador de cada una de las fracciones es 1 (pues a, b y c son divisores de n). Hay solo 3 maneras de expresar a 1 como suma de tres fracciones unitarias, a saber, $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Únicamente la tercera expresión tiene tres denominadores distintos. Se sigue que $n = 6k$, $a = 3k$, $b = 2k$ y $c = k$ para algún entero positivo k. Como $2018 = 6 \cdot 336 + 2$, se sigue que k puede tomar cualquier valor desde 1 hasta 336, inclusive.

Solución del Problema 2. Observemos primero que $2835 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. Sea $\frac{x^2+y^2}{x+y} = k$, donde k es divisor positivo de 2835. Entonces,

$$x^2 + y^2 = k(x + y). \tag{3}$$

Si $k = 1$, tenemos la ecuación $x^2+y^2 = x+y$ cuya única solución en enteros positivos es $x = y = 1$, pues $x^2 > x$ si $x > 1$. Sin embargo, como el problema pide que $x < y$, no hay soluciones si $k = 1$.
Si k es múltiplo de 3, entonces $x^2 + y^2$ es múltiplo de 3. Como todo cuadrado deja residuo 0 o 1 al dividirse por 3, la única posibilidad es que x^2 y y^2 sean múltiplos de 3, esto es, ambos x, y son múltiplos de 3. Análogamente, si k es múltiplo de 7, entonces $x^2 + y^2$ es múltiplo de 7. Como todo cuadrado deja residuo $0, 1, 2$ o 4 al dividirse por 7, la única posibilidad es que x^2 y y^2 sean múltiplos de 7, esto es, ambos x, y son múltiplos de 7.
Con estas observaciones, tenemos que si k es múltiplo de 3 pero no es múltiplo de 5 o si k es múltiplo de 7 pero no es múltiplo de 5, la ecuación (3) se puede reducir a una ecuación de la forma $r^2 + s^2 = r + s$, cancelando todos los factores 3 o todos los

factores 7, respectivamente, en cuyo caso no hay soluciones.
Ahora, si k es múltiplo de 5, nuevamente por las observaciones anteriores tenemos que la ecuación (3) se puede reducir a una ecuación de la forma $r^2 + s^2 = 5(r + s)$, cancelando todos los factores 3 (si los hay) o todos los factores 7 (si los hay). Esta última ecuación es equivalente a la ecuación $(2r - 5)^2 + (2s - 5)^2 = 50$, cuyas soluciones en enteros positivos con $r < s$ son $(r, s) = (3, 6), (2, 6)$. Se sigue que las soluciones (x, y) de la ecuación (3) con $x < y$ son $(\frac{3}{5}k, \frac{6}{5}k)$ y $(\frac{2}{5}k, \frac{6}{5}k)$, con k múltiplo de 5. Como hay 10 divisores positivos de 2835 que son múltiplos de 5 y por cada uno de tales divisores tenemos 2 soluciones, concluimos que la respuesta es 20.

Solución del Problema 3. Dado que AC es una diagonal del paralelogramo $ABCD$, el área del triángulo ACD es $240 \times \frac{1}{2} = 120$ cm^2. Supongamos que $\frac{AK}{KC} = \frac{1}{b}$. Por el teorema de ángulo común[12], tenemos que el área del triángulo DEF es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = 45$ cm^2; el área del triángulo AKE es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+b} = \frac{60}{1+b}$ cm^2; y el área del triángulo CFK es $120 \times \frac{b}{1+b} \times \frac{1}{4} = \frac{30b}{1+b}$ cm^2. Luego, $33 + 45 + \frac{60}{1+b} + \frac{30b}{1+b} = 120$ cm^2, de donde $60 + 30b = 42(1 + b)$. Por lo tanto, $12b = 18$, esto es, $b = \frac{3}{2}$.
El área del triángulo ACB también es $240 \times \frac{1}{2} = 120$ cm^2. Nuevamente, por el teorema del ángulo común, el área del triángulo BGH es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 40$ cm^2; el área del triángulo AKH es $120 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+b} = \frac{60}{1+b} = 24$ cm^2; y el área del triángulo CGK es $120 \times \frac{b}{1+b} \times \frac{1}{3} = \frac{40b}{1+b} = 24$ cm^2. Por lo tanto, el área del triángulo HKG es igual a $120 - 40 - 24 - 24 = 32$ cm^2.

Solución del Problema 4. Si $m \equiv 0 \pmod 3$, entonces $m^4+16m+8 \equiv 2 \pmod 3$. Si $m \equiv 1 \pmod 3$, entonces $m^4 + 16m + 8 \equiv 1 \pmod 3$. Si $m \equiv 2 \pmod 3$, entonces $m^4 + 16m + 8 \equiv 2 \pmod 3$. Luego, $m^4 + 16m + 8$ nunca es un múltiplo de 3 y, por lo tanto, no puede ser el producto de tres o más enteros consecutivos. Se sigue que buscamos alguna factorización de la forma $m^4 + 16m + 8 = (m^2 + n)(m^2 + n + 1)$ para algún entero no negativo n. Esta ecuación se puede reescribir como

$$(2n + 1)m^2 - 16m + (n^2 + n - 8) = 0.$$

Considerando esta ecuación como una ecuación cuadrática en la incógnita m, su discriminante[13] $16^2 - 4(2n + 1)(n^2 + n - 8) = 4(64 - (2n + 1)(n^2 + n - 8))$ es igual a 4×72, 4×82, 4×74 y 4×36, para $n = 0$, 1, 2 y 3, respectivamente. Es fácil ver que para $n \geq 4$, el discriminante es negativo, de modo que la ecuación no tiene raíces reales en este caso.
Por último, calculando las raíces de la ecuación para $n = 0, 1, 2$ y 3, el único valor entero de m ocurre cuando $n = 3$, en cuyo caso, $m = \frac{16+\sqrt{4\times 36}}{2\times(2\times 3+1)} = 2$.

Solución del Problema 5. Para cada entero positivo k, sea $a_k = \frac{20^k+18^k}{k!}$. Entonces,

[12]**Teorema del ángulo común.** Sean ABC un triángulo y D, E puntos en AB y AC, respectivamente. Entonces, $\frac{(ADE)}{(ABC)} = \frac{AD}{AB} \times \frac{AE}{AC}$, donde los paréntesis denotan área.

[13]Ver el pie de página de la página 40.

$a_{k+1} = \frac{20^{k+1}+18^{k+1}}{(k+1)!}$ y

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{20^{k+1}+18^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{20^k+18^k}{k!}} = \frac{20^{k+1}+18^{k+1}}{(k+1)(20^k+18^k)}.$$

Luego, $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ si y solo si $\frac{20^{k+1}+18^{k+1}}{(k+1)(20^k+18^k)} > 1$. Simplificando, obtenemos la desigualdad equivalente $20^k(19-k)+18^k(17-k) > 0$. Observemos que si $k \geq 19$, entonces $19-k \leq 0$ y $17-k < 0$, lo cual implica que $20^k(19-k)+18^k(17-k) < 0$. Ahora, si $1 \leq k \leq 17$, entonces $19-k > 0$ y $17-k \geq 0$, de donde obtenemos que $20^k(19-k)+18^k(17-k) > 0$. Por último, si $k = 18$, entonces $20^k(19-k)+18^k(17-k) = 20^{18}-18^{18} > 0$. Por lo tanto, tenemos que $\frac{a_{k+1}}{a_k} > 1$ si y solo si $1 \leq k \leq 18$. Esto significa que $a_k < a_{k+1}$ para $k = 1, 2, \ldots, 18$, esto es, $a_1 < a_2 < \cdots < a_{19}$.
Análogamente, tenemos que $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ si y solo si $\frac{20^{k+1}+18^{k+1}}{(k+1)(20^k+18^k)} < 1$, esto es, $20^k(19-k)+18^k(17-k) < 0$. De acuerdo a lo del párrafo anterior, esta desigualdad se satisface si y solo si $k \geq 19$. Por lo tanto, $\frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ si y solo si $k \geq 19$. Esto significa que $a_k > a_{k+1}$ para todo entero $k \geq 19$, esto es, $a_{19} > a_{20} > a_{21} > \cdots$
Por último, observemos que $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$ si y solo si $20^k(19-k)+18^k(17-k) = 0$. De acuerdo con los párrafos anteriores, tenemos que $20^k(19-k)+18^k(17-k) > 0$ si $1 \leq k \leq 18$ y, $20^k(19-k)+18^k(17-k) < 0$, si $k \geq 19$. Luego, este caso no es posible.
En conclusión, el valor máximo de a_k se obtiene cuando $k = 19$.

Solución del Problema 6. Supongamos que el Emperador pudiera encontrar una provincia potencialmente problemática el día 65. Entonces, debió haber visitado 64 provincias distintas en los primeros 64 días, porque tomó al menos 64 días para construir una provincia potencialmente problemática después de una dispersión. La primera provincia que visitó debió haber tenido al menos 64 inicialmente inicialmente. La segunda provincia que visitó pudo haber tenido solo 63 soldados inicialmente, dado que pudo haber llegado un soldado de la primera provincia. Luego, entre las 64 provincias visitadas, deben tener al menos $64+63+\cdots+1 = \frac{64(65)}{2} = 2080$ soldados inicialmente, lo que es una contradicción.

Solución del Problema 7. Observemos primero que un entero positivo con exactamente 2017 divisores positivos, es de la forma p^{2016} con p un número primo. Como $2018 = 2 \times 1009$ y cada uno de los enteros 2 y 1009 es primo, se sigue que los únicos enteros positivos que no son primos relativos con 2018 y tienen 2017 divisores positivos, son 2^{2016} y 1009^{2016}. Luego, la suma en consideración es $2^{2016}+1009^{2016}$, de la cual debemos determinar el residuo al dividirla por 2019. Observemos que $2019 = 3 \times 673$ y que 3 y 673 son números primos.
Como $2^2 \equiv 1 \pmod 3$, tenemos que $2^{2016} = (2^2)^{1008} \equiv 1^{1008} = 1 \pmod 3$. Además, por el teorema pequeño de Fermat[14], tenemos que $2^{672} \equiv 1 \pmod{673}$, lo cual implica

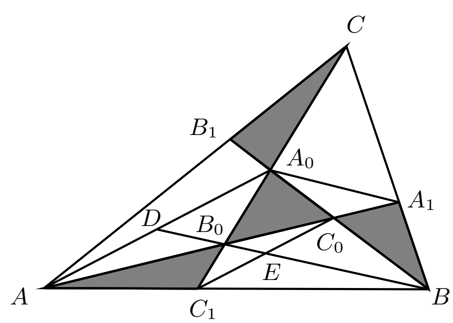
[14]**Teorema pequeño de Fermat.** Si a es un número entero y p es un número primo tal que $p \nmid a$, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

que $2^{2016} = (2^{672})^3 \equiv 1^3 = 1 \pmod{673}$. Por lo tanto, $2^{2016} \equiv 1 \pmod{3 \times 673}$, esto es, $2^{2016} \equiv 1 \pmod{2019}$.
Análogamente, como $1009 \equiv 1 \pmod 3$, tenemos que $1009^{2016} \equiv 1^{2016} = 1 \pmod 3$. Por otra parte, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $1009^{672} \equiv 1 \pmod{673}$, lo cual implica que $1009^{2016} = (1009^{672})^3 \equiv 1^3 = 1 \pmod{673}$. Por lo tanto, $1009^{2016} \equiv 1 \pmod{3 \times 673}$, esto es, $1009^{2016} \equiv 1 \pmod{2019}$.
Luego, $2^{2016} + 1009^{2016} \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{2019}$.

Solución del Problema 8. Empezamos con el cuadrilátero $AC_1C_0A_0$. Como los triángulos AA_0C_1 y AA_0C_0 tienen la misma área y comparten la base AA_0, deben tener la misma altura también (sobre AA_0), es decir, $AC_1C_0A_0$ es un paralelogramo. Por facilidad, usaremos (ABC) para referirnos al área del polígono ABC. Mostraremos ahora que la recta BB_0 biseca el área del triángulo AA_0B. Sean D y E los puntos donde BB_0 corta a AA_0 y a C_1C_0, respectivamente. Como AA_0 y C_1C_0 son paralelas, tenemos que $\frac{AD}{DA_0} = \frac{C_1E}{EC_0} = k$ para algún número k. De aquí, $(ADB_0) = k(DA_0B_0)$, $(C_1EB_0) = k(EC_0B_0)$ y $(C_1EB) = k(EC_0B)$, de donde se sigue que $\frac{(ADB_0)+(C_1EB_0)+(C_1EB)}{(DA_0B_0)+(EC_0B_0)+(EC_0B)} = k$. Por otro lado, tenemos también que $\frac{(ADB)}{(BDA_0)} = k$. Luego, por propiedad de las proporciones, resulta que

$$\frac{(ADB) - [(ADB_0) + (C_1EB_0) + (C_1EB)]}{(BDA_0) - [(DA_0B_0) + (EC_0B_0) + (EC_0B)]} = k,$$

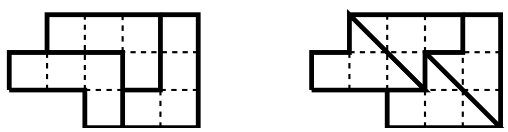
esto es, $\frac{(AB_0C_1)}{(A_0B_0C_0)} = k$, lo cual implica que $k = 1$ ya que $(AB_0C_1) = (A_0B_0C_0) = 1$. Esto muestra que BB_0 biseca el área del triángulo AA_0B, en particular, BB_0 biseca el área del cuadrilátero $C_1BC_0B_0$.
Análogamente, obtenemos que AA_0 y CC_0 bisecan las áreas de $AB_0A_0B_1$ y $CA_0C_0A_1$, respectivamente. Sean $(AB_0A_0B_1) = 2x$, $(BC_1B_0C_0) = 2y$ y $(CA_1C_0A_0) = 2z$.



Nos concentramos ahora en $\frac{AC_1}{C_1B} = k'$. Como hicimos antes, volveremos a hacer proporciones de áreas de triángulos que tienen a AB como base. Tenemos que $(AA_0C_1) = k'(C_1A_0B)$, esto es, $1 + x = k'(1 + 2y)$. Además, $(ACC_1) = k'(C_1CB)$. Luego, por propiedades de proporciones, obtenemos que $\frac{(AA_0C)}{(BA_0C)} = \frac{(ACC_1)-(AA_0C_1)}{(C_1CB)-(C_1AB)} = k'$, esto es, $(AA_0C) = k'(BA_0C)$, que es equivalente a la ecuación $1 + x = k'(1 + 2z)$. Tenemos entonces que $k'(1 + 2y) = k'(1 + 2z)$, de donde se sigue que $2y = 2z$.
Análogamente, trabajando con los triángulos que tienen base sobre AC, obtenemos

que $2x = 2y = 2z$ y, por lo tanto, los tres cuadriláteros $AB_0A_0B_1$, $BC_1B_0C_0$ y $CA_1C_0A_0$, tienen la misma área.
Finalmente, tenemos que $\frac{(AB_0C_1)}{(C_1B_0B)} = k'$ y $\frac{(AA_0C_1)}{(BC_1A_0)} = k'$. De aquí, $\frac{(AB_0C_1)}{(C_1B_0B)} = \frac{(AA_0C_1)}{(BC_1A_0)}$, esto es, $\frac{1}{x} = \frac{1+x}{1+2x}$, ya que $x = y$. Luego, tenemos que $x^2 - x - 1 = 0$, cuya única solución positiva es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por lo tanto, el área del cuadrilátero $CA_0C_0A_1$ es $1 + \sqrt{5}$ cm^2.

Solución del Problema 9. A continuación se muestran las divisiones en cada figura.



Solución del Problema 10. Expresemos a los números de Tom y Jerry en base 5. El número más grande de Tom es 11111_5 y todos sus números consisten únicamente de los dígitos 0 y 1. Los números de Jerry consisten únicamente de los dígitos 0, 1 y 2. Dado que los dos números que suma son diferentes, su suma debe tener al menos un 1 y no puede consistir de solo un 1 y ningún 2. El número más grande es 22221_5. Hay 3 elecciones para cada uno de los 5 dígitos, pero primero debemos eliminar aquellos que no tienen dígitos 1 y luego eliminar aquellos que tienen un único 1 y ningún 2. La cuenta final es $3^5 - 2^5 - 5 = 206$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Del 16 al 22 de junio de 2019 se llevó a cabo la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC) en República Dominicana, en la que participaron 13 países y un total de 50 estudiantes. En esta ocasión y por once años consecutivos, México se ha posicionado como el líder indiscutible de esta competencia, obteniendo el primer lugar por países. En esta ocasión, México obtuvo 121 puntos quedando por encima de El Salvador (99 puntos), Colombia (95 puntos) y Cuba (91 puntos), quienes ocuparon los primeros cuatro lugares por países.

La delegación mexicana estuvo integrada por Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León), Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa), Daniel Ochoa Quintero (Tamaulipas) y Jacobo de Juan Millón (Yucatán). Daniel y Karla Rebeca obtuvieron medallas de oro, mientras que Jacobo y Luis Eduardo obtuvieron medallas de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Luis Eduardo García Hernández (líder) y Julio César Díaz Calderón (tutor).

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas agradece a la familia Sverdlin Lisker su invaluable apoyo para la preparación y asistencia de la delegación mexicana a Santo Domingo, así como también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT).

A continuación, presentamos los problemas de la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $N = \overline{abcd}$ un entero positivo de cuatro cifras. Llamamos *plátano* *power* al menor entero positivo $p(N) = \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ que puede insertarse entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ de tal forma que el nuevo número $\overline{ab\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k cd}$ sea divisible por N. Determine el valor de $p(2025)$.

Problema 2. Se tiene un polígono regular P con 2019 vértices y, en cada vértice, hay una moneda. Dos jugadores Azul y Rojo van a jugar alternadamente, empezando por Azul, de la siguiente manera: Primero Azul elige un triángulo con vértices en P y pinta el interior del triángulo de azul, después Rojo elige un triángulo con vértices en P y pinta el interior del triángulo de rojo, de tal forma que los triángulos formados en cada jugada no se intersecan en su interior con ninguno de los anteriores. Continúan así hasta que ya no puedan elegir más triángulos para pintarlos. Después, la moneda de cada vértice la gana el jugador que tenga más triángulos de su color incidiendo en ese vértice (si hay la misma cantidad de triángulos de los dos colores incidentes a ese vértice, entonces ninguno de los dos gana esa moneda, y la moneda se anula). Gana el jugador que logra más monedas. Encuentre una estrategia ganadora para alguno de los dos jugadores.
Nota: dos triángulos pueden compartir vértices o lados.

Problema 3. Sea ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Sean D el pie de la altura trazada desde A al lado BC, M y N los puntos medios de AB y AC, y Q el punto en Γ diametralmente opuesto a A. Sea E el punto medio de DQ. Muestre que las perpendiculares a EM y EN que pasan por M y N respectivamente, se cortan en AD.

Problema 4. Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo y ℓ la tangente a Γ por A. Las alturas desde B y C se extienden y cortan a ℓ en D y E, respectivamente. Las líneas DC y EB cortan de nuevo a Γ en P y Q, respectivamente. Demostrar que el triángulo APQ es isósceles.

Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a+b+c=1$. Demuestre que

$$a\sqrt{a^2+6bc}+b\sqrt{b^2+6ac}+c\sqrt{c^2+6ab}\leq\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

Problema 6. Un *triminó* es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero cuadrado de 8×8 con 21 triminós, de modo que quede exactamente un cuadradito de 1×1 sin cubrir? En caso afirmativo, determine todas las posiciones posibles en el tablero del cuadradito que queda sin cubrir.

60ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 12 al 22 de julio de 2019 se llevó a cabo la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas en Bath, Inglaterra, donde México obtuvo el lugar 41 y tercer lugar de iberoamérica de 113 países participantes. El equipo mexicano fue seleccionado en el último entrenamiento que se llevó a cabo en mayo de 2019, en Camohmila, Tepoztlán, Morelos. Hubo un examen de desempate de donde se eligió a México 6.

El equipo mexicano quedó integrado por Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Bruno Gutiérrez Chávez (Colima), Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León), Diego Hinojosa Tellez (Jalisco), Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México) y Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Rogelio Valdez Delgado (líder), David Cossío Ruiz (tutor) y Marco Antonio Figueroa Ibarra (observador).
En esta ocasión, Bruno obtuvo medalla de plata; Eric Iván, Tomás y Ana Paula obtuvieron medallas de bronce; Pablo y Diego obtuvieron menciones honoríficas. En la olimpiada internacional de matemáticas, a partir del año 2017 se ha dado un premio especial a la estudiante mujer con mejor puntuación por continente y, este año, Ana Paula ganó este premio.

Previo a la 60^a olimpiada internacional, del 30 de junio al 12 de julio de 2019, la delegación mexicana estuvo entrenando en Waterloo, Canadá, con el equipo canadiense, en un entrenamiento conjunto. Los profesores de México que participaron entrenando fueron Juan Carlos Ortiz, Adán Medrano, David Cossío, Daniel Perales y Enrique Treviño.

El 12 de julio, el equipo viajó de Toronto a Londres junto con el tutor, llegando el 13 de julio y durmiendo en Bath desde ese día. El líder del equipo junto con el observador llegaron a Newport, en el sur de Gales, el 11 de julio, para participar en las reuniones del jurado, que entre otras actividades, elaboran los exámenes de la competencia. Los exámenes se llevaron a cabo los días 16 y 17 de julio.

A continuación presentamos los problemas de la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que, para todos los enteros a y b,

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a + b)).$$

(Problema sugerido por Sudáfrica).

Problema 2. En el triángulo ABC, el punto A_1 está en el lado BC y el punto B_1 está en el lado AC. Sean P y Q puntos en los segmentos AA_1 y BB_1, respectivamente, tales que PQ es paralela a AB. Sea P_1 un punto de la recta PB_1 distinto de B_1, con B_1 entre P y P_1, y $\angle PP_1C = \angle BAC$. Análogamente, sea Q_1 un punto en la recta QA_1 distinto de A_1, con A_1 entre Q y Q_1 y $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.
Demostrar que los puntos P, Q, P_1 y Q_1 son concíclicos.

(Problema sugerido por Ucrania).

Problema 3. Una red social tiene 2019 usuarios, algunos de los cuales son amigos. Siempre que el usuario A es amigo del usuario B, el usuario B también es amigo del usuario A. Eventos del siguiente tipo pueden ocurrir repetidamente, uno a la vez:

Tres usuarios A, B y C tales que A es amigo de B y de C, pero B y C no son amigos, cambian su estado de amistad de modo que B y C ahora son amigos, pero A ya no es amigo ni de B ni de C. Las otras relaciones de amistad no cambian.

Inicialmente, hay 1010 usuarios que tienen 1009 amigos cada uno, y hay 1009 usuarios que tienen 1010 amigos cada uno. Demostrar que hay una sucesión de este tipo de eventos después de la cual cada usuario es amigo como máximo de uno de los otros usuarios.

(Problema sugerido por Croacia).

Problema 4. Encontrar todos los pares (k, n) de enteros positivos tales que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

(Problema sugerido por El Salvador).

Problema 5. El Banco de Bath emite monedas con una H en una cara y una T en la otra. Harry tiene n monedas de este tipo alineadas de izquierda a derecha. Él realiza repetidamente la siguiente operación: si hay exactamente $k > 0$ monedas con la H hacia arriba, Harry voltea la k-ésima moneda contando desde la izquierda; en caso contrario, todas las monedas tienen la T hacia arriba y él se detiene. Por ejemplo, si $n = 3$ y la configuración inicial es THT, el proceso sería $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, que se detiene después de tres operaciones.

a) Demostrar que para cualquier configuración inicial que tenga Harry, el proceso se detiene después de un número finito de operaciones.

b) Para cada configuración inicial C, sea $L(C)$ el número de operaciones que se realizan hasta que Harry se detiene. Por ejemplo, $L(THT) = 3$ y $L(TTT) = 0$. Determinar el valor promedio de $L(C)$ sobre todas las 2^n posibles configuraciones iniciales de C.

(Problema sugerido por Estados Unidos).

Problema 6. Sea I el incentro del triángulo acutángulo ABC con $AB \neq AC$. La circunferencia inscrita (o incírculo) ω de ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta que pasa por D y es perpendicular a EF corta a ω nuevamente en R. La recta AR corta a ω nuevamente en P. Las circunferencias circunscritas (o circuncírculos) de los triángulos PCE y PBF se cortan nuevamente en Q.

Demostrar que las rectas DI y PQ se cortan en la recta que pasa por A y es perpendicular a AI.

(Problema sugerido por India).

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

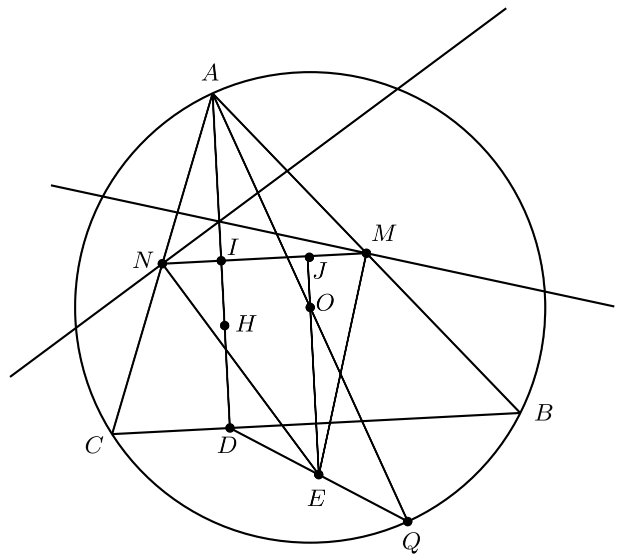
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXI Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Solución del problema 1. Como $2 + 0 + 2 + 5 = 9$, tenemos que 2025 es múltiplo de 9. Para que 2025 divida a un número de la forma $\overline{20\alpha 25}$, α también debe ser múltiplo de 9. Ahora, es fácil verificar que que 2025 no divide a ninguno de los números $20925, 201825, 202725, 203625$ y que 2025 sí divide a 204525, de modo que el plátano power $p(2025) = 204525$.

Solución del problema 2. (Solución de Jacobo De Juan Millón). Vamos a demostrar que Azul siempre puede ganar este juego. Empieza escogiendo un triángulo formado por un vértice cualquiera y los dos más alejados a él, que son consecutivos. El polígono quedará dividido en dos figuras idénticas, una de cada lado del triángulo. Después, por cada triángulo que pinte Rojo, Azul escogerá el mismo en la otra figura. Este movimiento siempre es posible porque después de cada movimiento de Azul, la figura es simétrica y cada triángulo debe estar en una de las dos figuras (porque no pueden intersecar al primero). Por lo tanto, si Azul no pudiera colorear el triángulo reflejado, Rojo tampoco habría podido escoger el triángulo al inicio de su turno.
Al final del juego, por cada vértice del polígono que ganó Rojo, su reflexión fue ganada por Azul debido a que todos los triángulos asociados al vértice cambian de color del otro lado. Más aún, la moneda del vértice cúspide del triángulo con el que iniciamos, que no es la reflexión de ninguno de estos, fue ganado por Azul porque cada triángulo rojo que lo tiene como vértice aparece azul del otro lado y viceversa, exceptuando el triángulo original que le da un triángulo más a Azul.

Por lo tanto, al seguir esta estrategia, Azul siempre termina con al menos una moneda más, como queríamos demostrar.

Solución del problema 3. Sean H y O el ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente, I la intersección de AD con MN y J la intersección de MN con la perpendicular por O a BC (que claramente también es perpendicular a MN, ya que $MN \parallel BC$). Notamos que O es el punto medio de AQ. Luego, en el triángulo ADQ, OE es base media paralela a AD, así que E se encuentra en la perpendicular a BC que pasa por O.



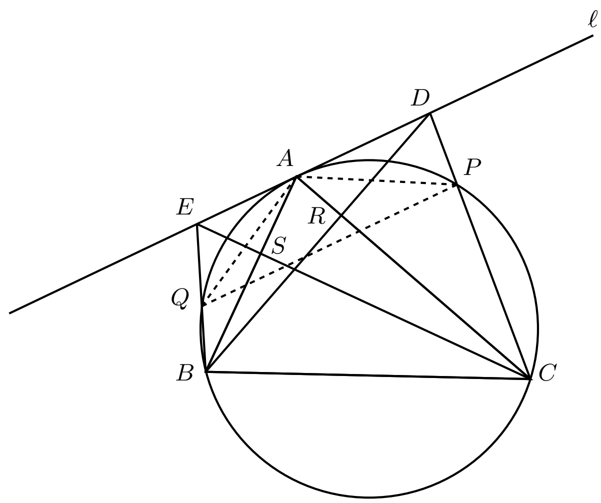
Sabemos que el centro de la circunferencia de los nueve puntos (que pasa por M y N) es el punto medio de OH y se encuentra en la mediatriz de MN, así que esta mediatriz biseca a OH, por lo que AD y OE son reflejados con respecto a esta mediatriz y, por lo tanto, $MI = JN$. Dado que EJ y MN son perpendiculares, se tiene que $EM^2 - EN^2 = JM^2 - JN^2$ y, dado que

$$\begin{aligned}&(MM^2 - EM^2) + (EN^2 - NN^2) + (NI^2 - MI^2)\\ &= (EN^2 - EM^2) - (IM^2 - IN^2)\\ &= (EN^2 - EM^2) - (JN^2 - JM^2) = 0,\end{aligned}$$

por el Teorema de Carnot[15] se sigue que las perpendiculares de I a MN, de M a ME y de N a NE concurren o, visto de otra forma, las perpendiculares a EM y EN que pasan por M y N se cortan en AD.

[15]**Teorema de Carnot.** Sean ABC un triángulo y l_1, l_2, l_3 tres rectas, cada una perpendicular a AB, BC, CA, respectivamente, de modo que l_1, l_2, l_3 concurren en un punto P. Si Q, R, S son los pies de las perpendiculares de P a los lados BC, CA, AB, respectivamente, se cumple que $AR^2 + CQ^2 + BS^2 = AS^2 + CR^2 + BQ^2$. El recíproco también es cierto, es decir, si se tienen puntos Q, R, S en los lados BC, CA, AB respectivamente, que satisfacen la ecuación anterior, entonces las perpendiculares a los lados que pasan por el punto correspondiente concurren.

Solución del problema 4. (Solución de Luis Eduardo Martínez Aguirre). Sean R y S las intersecciones de BD con AC y de EC con AB, respectivamente. Sean $\angle ACB = \beta$ y $\angle ABC = \alpha$. Por ser $\angle EAB$ seminscrito, tenemos que $\angle EAB = \angle ACB = \beta$. Análogamente, tenemos que $\angle CAD = \alpha$.



Ya que $\angle ASE = 90°$, tenemos que $\angle AES = 90° - \beta$ y, análogamente, $\angle ADR = 90° - \alpha$. Por lo tanto, el cuadrilátero $EDCB$ es cíclico ya que $\angle ECB = \angle EDB$. Luego, $\angle EBD = \angle ECD$ y, como también es cíclico el cuadrilátero $BSRC$ (pues $\angle BSC = \angle BRC = 90°$), tenemos que $\angle EBA = \angle DCA$, esto es, $\angle QBA = \angle ACP$. Por lo tanto, $\widehat{AQ} = \widehat{AP}$, de donde $\angle APQ = \angle AQP$. Concluimos que el triángulo APQ es isósceles.

Solución del problema 5. (Solución de Jacobo De Juan Millón). Sea $x = ab+bc+ca$. Tenemos que $64x^2 - 16x + 1 = (8x-1)^2 \geq 0$ por lo que $8x^2 - 2x + \frac{1}{8} \geq 0$ si y solo si $2x - 8x^2 \leq \frac{1}{8}$. Por lo tanto, $(1-2x)(1+4x) = 1 + 2x - 8x^2 \leq 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$.
Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz[16], tenemos que

$$\left(a\sqrt{a^2+6bc} + b\sqrt{b^2+6ac} + c\sqrt{c^2+6ab}\right)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+6ab+6bc+6ac).$$

Como $1 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$, resulta que

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2+6ab+6bc+6ac) = (1-2x)(1+4x),$$

lo cual implica que

$$\left(a\sqrt{a^2+6bc} + b\sqrt{b^2+6ac} + c\sqrt{c^2+6ab}\right)^2 \leq (1-2x)(1+4x) \leq \frac{9}{8}.$$

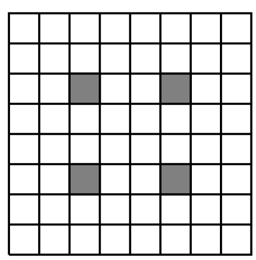
[16]**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.** Para cualesquiera números reales $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, se tiene que $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$, con la igualdad si y solo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados se concluye la desigualdad deseada.

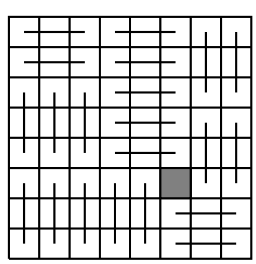
Solución del problema 6. (Solución de Karla Rebeca Munguía Romero). Consideremos la siguiente coloración, donde cada número representa un color.

1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3
3	1	2	3	1	2	3	1
1	2	3	1	2	3	1	2
2	3	1	2	3	1	2	3

Del color 1 hay 21 casillas coloreadas, del color 2 hay 22 y del color 3 hay 21. Como cada triminó cubre exactamente una casilla de cada color sin importar cómo se coloque, si es posible dejar solo una casilla sin cubrir, esta debe ser del color 2. Al considerar una coloración análoga, pero ahora que la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha sea la que es de un mismo color, y contar al igual que hicimos con la coloracion previa, concluimos que las únicas casillas que podrían dejarse sin cubrir, son las marcadas en el siguiente tablero.



Finalmente, para cada una de estas casillas es posible dar un acomodo, como el siguiente.



Para los demás acomodos basta con rotar el tablero 90° las veces que sea necesario.

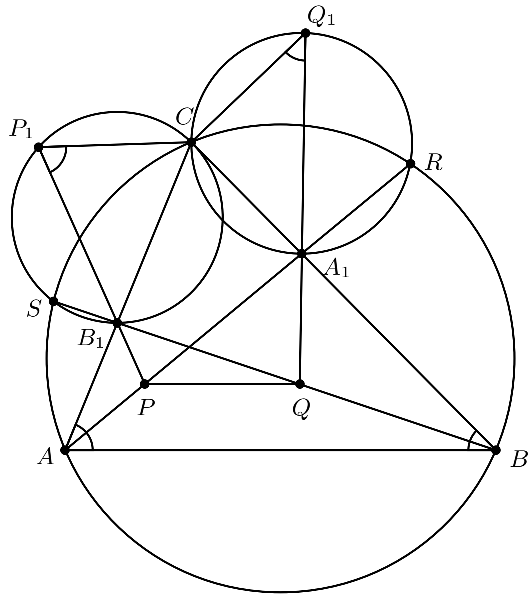
60ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 60^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Sustituyendo $(n, 0)$ en la ecuación original tenemos $f(2n) + 2f(0) = f(f(n))$. Sustituyendo $(0, n)$ obtenemos $f(0) + 2f(n) = f(f(n))$. Igualando los resultados se sigue que $f(2n) = 2f(n) - f(0)$ para todo entero n. Por lo tanto, $f(f(a+b)) = f(2a) + 2f(b) = 2f(a) - f(0) + 2f(b) = 2(f(a) + f(b)) - f(0)$.
Con la sustitución $(0, a+b)$ obtenemos que $f(f(a+b)) = f(0) + 2f(a+b)$. Igualando con el resultado anterior, resulta que $f(0) + 2f(a+b) = 2f(a) + 2f(b) - f(0)$ por lo que $f(a+b) + f(0) = f(a) + f(b)$ para todos los enteros a y b. Sustituyendo $b = 1$ en esta ecuación, obtenemos que $f(a+1) + f(0) = f(a) + f(1)$ por lo que $f(a+1) - f(a) = f(1) - f(0)$ que es una constante. Esto significa que la distancia entre cualesquiera dos valores consecutivos es la misma, por lo que la función es lineal y tiene la forma $f(n) = nm + k$ con n, k constantes.
En la ecuación original esto se vuelve $(2am + k) + 2(bm + k) = f(m(a+b) + k) = m(m(a+b) + k) + k$, esto es, $2am + 2bm + 3k = m(ma + mb + k) + k = m^2a + m^2b + mk + k$.
Por lo tanto, $2am + 2bm + 2k = m^2a + m^2b + mk$ se cumple para cualesquiera enteros a y b. En particular, se cumple para $a = b = 0$ por lo que $2k = mk$, de donde $k = 0$ o $m = 2$.
En el primer caso la ecuación se transforma en $2am + 2bm = m^2a + m^2b$ para cualesquiera enteros a y b. Sustituyendo $a = b = 1$, tenemos que $4m = 2m^2$ por lo que $m = 0, 2$ son las únicas opciones posibles, con las funciones $f(n) = 0$ y $f(n) = 2n$, respectivamente. Es fácil verificar que ambas funcionan.
En el segundo caso la ecuación funcional es equivalente a $2k = mk$, que siempre se cumple pues $m = 2$. Por lo tanto, todas las funciones $f(n) = 2n + k$ cumplen para cualquier entero k.
Entonces, las funciones que satisfacen el problema son $f(n) = 2n + k$ para cualquier entero k y la función $f(n) = 0$.

Solución del problema 2. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios). Sea Γ_1 el circuncírculo del triángulo CB_1P_1. Sea X un punto en la tangente a Γ_1 por B_1 del mismo lado que B con respecto a AC. Por la tangencia y la condición, tenemos que $\angle XB_1C = \angle B_1P_1C = \angle PP_1C = \angle BAC$. Entonces, la tangente es paralela a AB. Análogamente, si Γ_2 es el circuncírculo del triángulo CA_1Q_1, entonces la tangente por A_1 es paralela a AB. Sean R la segunda intersección de AA_1 con Γ_2 y S la segunda intersección de BB_1 con Γ_1. Sea Φ la transformación que resulta de componer una inversión por B_1 con radio $\sqrt{B_1P \cdot B_1P_1}$ con una reflexión a través de B_1. Tenemos que $\Phi(P) = P_1$ y $\Phi(P_1) = P$ porque se encuentran en lados opuestos de B_1.
Denotemos por P' y Q' a las imágenes de P y Q, respectivamente, bajo la inversión antes de reflejar. Si Y es un punto en la tangente en B_1 a $(B_1P'Q')$ sabemos que $\angle YB_1P = \angle YB_1P' = \angle B_1Q'P' = \angle QQ'P' = \angle B_1PQ$ por la tangente y porque

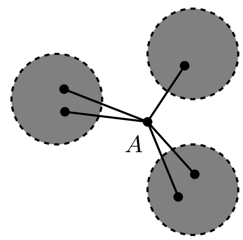
$PP_1Q'Q$ es cíclico por potencia, porque $B_1P \cdot B_1P' = B_1Q \cdot B_1Q'$. Por lo tanto, la tangente al círculo es paralela a PQ y, por lo tanto, a AB. Al reflejar la figura a través de B_1 la tangente se va a sí misma, pues es una línea que pasa por B_1.



Por lo tanto, tenemos que $\Phi(\overline{PQ})$ es un círculo que pasa por B_1, cuya tangente a través de ese punto es paralela a AB. Más aún, es un círculo que pasa por $\Phi(P) = P_1$ por lo que coincide exactamente con Γ_1. Entonces, $\Phi(Q) = S$, por lo que $B_1Q \cdot B_1S = B_1P \cdot B_1P_1$ y PQP_1S es cíclico. Por simetría, $PQRQ_1$ es cíclico.
Notemos ahora que $\angle SCA = \angle SCB_1 = \angle SP_1P = \angle SQP = \angle SBA$ porque $PQ \parallel AB$ y los cuadriláteros SP_1QP y SP_1CB_1 son cíclicos. Se sigue que S está en el circuncírculo del triángulo ABC y, por simetría, también R.
De aquí es fácil ver que $\angle SQP = \angle SBA = \angle SRA = \angle SRP$ por lo que $PQRS$ es cíclico. Luego, $PQRSQ_1P_1$ es un hexágono cíclico, por lo que PQP_1Q_1 es cíclico, como queríamos.

Solución del problema 3. Interpretamos el problema con teoría de gráficas. Tenemos una gráfica G con 2019 vértices, 1010 de los cuales tienen grado 1009 y 1009 de los cuales tienen grado 1010. Podemos hacer operaciones de la siguiente forma: Si un vértice A es adyacente a dos vértices distintos B, C que no son adyacentes entre ellos podemos remover las aristas AB, AC de G y añadir la arista BC en G.
Llamemos a esta operación un cambio. Queremos mostrar que a través de varios cambios, podemos alcanzar una gráfica que sea una unión disjunta de aristas y vértices aislados. La gráfica original está conectada porque el grado total de cualesquiera dos vértices es al menos 2018 y por tanto son adyacentes o existe un vértice al que ambos son adyacentes. Por lo tanto, la gráfica original cumple la siguiente condición: Cualquier componente conexa de G con al menos tres vértices no es completa y tiene un vértice de grado impar.

Vamos a demostrar que si una gráfica G satisface esa condición y tiene un vértice de grado al menos 2, entonces existe un cambio en G que preserva la condición. Como los cambios decrecen la cantidad total de aristas de G, al usar una secuencia de cambios que preserve esto, tenemos que alcanzar una gráfica G con grado máximo a lo más 1 por lo que habremos concluido.



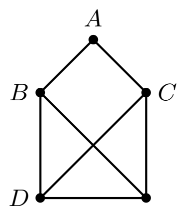
Elegimos un vértice A de grado al menos 2 en una componente conexa G' de G. Como no hay componentes de G con al menos tres vértices que sean completas podemos asumir que no todos los vecinos de A son adyacentes entre ellos. Para ver esto, podemos elegir una subgráfica completa máxima K de G', algún vértice A de K tiene un vecino fuera de K, y este vecino no es adyacente a cada vecino de K por maximalidad. Al quitar A de G dividimos G' en varias componentes conexas más pequeñas $G_1, \ldots, G_k$ posiblemente con $k = 1$, cada una de las cuales está conectada a A por al menos una arista. Dividimos el proceso en varios casos.

Caso 1: $k \geq 2$ y A está conectada a algún G_i por al menos dos aristas. Escogemos un vértice B de G_i adyacente a A, y un vértice C en otra componente G_j adyacente a A. Los vértices B, C no son adyacentes y por lo tanto al quitar las aristas AB, AC y añadiendo la arista BC no desconectamos G'. Es fácil ver que este cambio preserva la condición ya que no cambia la paridad de los grados de los vértices.

Caso 2: $k \geq 2$ y A está conectada a cada G_i por exactamente una arista. Consideramos la subgráfica inducida por A y algún G_i. El vértice A tiene grado 1 en la subgráfica. Como el número de vértices de grado impar de la gráfica siempre es par, podemos ver que G_i tiene un vértice de grado impar (en G). Por lo tanto, al elegir B, C cualesquiera dos vecinos de A, si quitamos las aristas AB, AC y añadimos BC se preserva la condición anterior: el cambio produce dos nuevas componentes y si cualquiera de estas tiene al menos tres vértices, no puede ser completa y debe de tener un vértice de grado impar, pues cada G_i tiene uno.

Caso 3: $k = 1$ y A está conectada a G_1 por al menos 3 aristas. Por la condición, A tiene dos vecinos B, C que no son adyacentes. Al quitar las aristas AB, AC y añadir BC no desconectamos G' por lo que terminamos como en el caso 1.

Caso 4: $k = 1$ y A está conectada a G_1 por exactamente dos aristas. Sean B, C los dos vecinos de A, que no son adyacentes. Al quitar AB, AC y añadir BC resultan dos nuevas componentes: una que tiene un sólo vértice y la otra que contiene un vértice de grado impar. Por lo tanto, terminamos a menos que la segunda componente sea una gráfica completa con al menos 3 vértices. Pero en este caso, G_1 sería una gráfica completa sin la arista BC y por lo tanto tiene al menos 4 vértices ya que G' no es un ciclo de tamaño 4. Si D es un tercer vértice de G_1 al quitar BA, BD y añadir AD no desconectamos G', por lo que terminamos como en el primer caso.



Solución del problema 4. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez). Veremos que $(k, n) = (1, 1), (3, 2)$ son las únicas soluciones. Sea

$$Q(n) = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}) = 2^{\frac{(n-1)n}{2}} \prod_{i=1}^{n}(2^i - 1).$$

Es fácil ver que $Q(n + 1) = 2^n Q(n)(2^{n+1} - 1)$.
Supongamos que existe (k, n) que satisface la ecuación. Es claro que si $k > 3$, entonces $n > 2$. Demostraremos que si $k! = Q(n)$, entonces $v_2(k!) = v_2(Q(n))$. Por un lado, tenemos que

$$v_2(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k,$$

mientras que $v_2(Q(n)) = \frac{n(n-1)}{2}$. Por lo tanto, se tiene que $k > \frac{n(n-1)}{2}$.
Ahora, como $7 \mid Q(3)$ y $Q(3) \mid Q(n)$ para $n \geq 3$, tenemos que $7 \mid Q(n)$ para $n \geq 3$. De manera análoga, obtenemos que

$$v_7(k!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{7^i} \right\rfloor$$

y también $v_7(Q(n)) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_7(2^i - 1) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} v_7(2^{3i} - 1)$, ya que[17] $\text{ord}_7(2) = 3$. Apli-

[17]Si a y n son enteros positivos primos relativos, el orden de a módulo n es el menor entero positivo k tal que $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ y se denota por $k = \text{ord}_n(a)$. Se recomienda al lector ver el artículo "Orden de un número" de Tzaloa No. 3, 2016.

cando el lema lifting the exponent[18], tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3}\rfloor} v_7(2^{3i}-1) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{3}\rfloor}(1+v_7(i)) = \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor + v_7\left(\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor\right) &= \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor + \sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{3}\rfloor}{7^i}\right\rfloor \\ &< \left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor + \frac{\lfloor \frac{n}{3}\rfloor}{6} \\ &< \frac{7}{6}\cdot\frac{n}{3}.\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que $\frac{7n}{18} > v_7(k!) \geq \lfloor \frac{k}{7} \rfloor \geq \lfloor \frac{n(n-1)}{14} \rfloor$, lo cual implica que $\frac{n}{2} > \frac{7n}{18} > \lfloor \frac{n(n-1)}{14} \rfloor$. Es fácil verificar por inducción que esto es falso si $n > 7$. Por lo tanto, si $n > 7$, no existen parejas (k, n) que satisfagan la ecuación.
Checamos ahora los casos $n \leq 7$.

a) Si $n = 1$, se tiene que $k = 1$.

b) Si $n = 2$, entonces $k! = 3 \cdot 2$, de donde $k = 3$.

c) Si $n = 3$, entonces $k! = 7 \cdot 6 \cdot 4$. Luego, $7 \mid k$, lo cual implica que $k \geq 7$ y, por lo tanto, $k! > Q(3)$, que es una contradicción.

d) Si $n = 4$, entonces $k! = 4 \cdot 7!$. Luego, $k \geq 8$ y, por lo tanto, $k! > Q(4)$, que es una contradicción.

e) Si $n = 5, 6$ o 7, entonces $31 \mid Q(n)$, de donde $k \geq 31$ y, por lo tanto, $k! > Q(n)$, que es una contradicción.

En conclusión, las únicas soluciones son $(k, n) = (1, 1), (3, 2)$.

Solución del problema 5. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez). Para el inciso a), procederemos por inducción fuerte sobre n, la cantidad de monedas, para ver que hay un número finito de movimientos. Para $n = 1, 2, 3$, es fácil ver que el proceso termina en menos de 10 movimientos, lo que es finito.
Supongamos ahora que para todo $n \leq k$ se cumple que para cualquier configuración inicial de n monedas, el proceso termina después de una cantidad finita de movimientos en la configutación $TT\cdots T$.
Dada una configuración con $k + 1$ monedas, hay dos opciones:

1) La última moneda muestra T. Notemos que esta moneda nunca se va a voltear pues se necesitan $k + 1$ monedas que muestren H para voltearla, pero tendremos a lo más k, además esta moneda no influye en la cuenta de las que muestran H, por lo que podemos ignorar esta última moneda. Esto nos deja una configuración con k monedas y sabemos por hipótesis de inducción que después de un número finito de movimientos llegamos a $\underbrace{TT\cdots T}_{k}$ y, por lo tanto, llegamos a $\underbrace{TT\cdots T}_{k+1}$.

[18]**Lema. (Lifting the exponent).** Sean x, y enteros, n un entero positivo y p un primo impar tal que $p \mid x - y$, $p \nmid x$ y $p \nmid y$. Entonces, $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$.
Si n es un entero positivo y p es un divisor primo de n, $v_p(n)$ denota al mayor entero no negativo tal que $p^{v_p(n)}$ divide a n.

2) La última moneda muestra H. Se tienen dos casos:

   I) Si la primera moneda muestra T, ignorando la primera y la última moneda, nos queda algo equivalente a realizar operaciones en un conjunto con $k-1$ monedas, pues si en total hay $m \leq k-1$ monedas mostrando H, es análogo a tener $m-1$ en las $k-1$ de enmedio. Entonces, por nuestra hipótesis de inducción, eventualmente se llega al estado $T\underbrace{T\cdots T}_{k-1}H$ y después de $2k+1$ movimientos se llega a $\underbrace{TT\cdots T}_{k+1}$, en una cantidad finita de movimientos.

   II) Si la primera moneda muestra H, al ignorar la primera moneda, las últimas k actúan como si la primera no existiera, por lo que por hipótesis de inducción, después de una cantidad finita de movimientos llegamos al estado $H\underbrace{T\cdots T}_{k}$, el cual nunca alteró la primera y, al aplicar un movimiento más, se llega al estado $\underbrace{TT\cdots T}_{k+1}$.

Con esto concluimos la inducción. Hemos demostrado que para cada configuración inicial, el proceso se detiene después de un número finito de movimientos.
Para el inciso b), sea $P(n)$ la suma de los $L(c)$ sobre todas las configuraciones posibles de n monedas. Entonces, el promedio es $\frac{P(n)}{2^n}$. Para los casos pequeños es fácil ver que los valores de los promedios son $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{6}{2}, \frac{10}{2}$, para $1, 2, 3, 4$ monedas respectivamente. Conjeturamos que el valor promedio de $L(C)$ es $\frac{n(n+1)}{4}$.
Veamos que se tiene la recursión $P(n+1) = 2P(n) + 2^n(n+1)$. Para esto, consideremos la moneda de hasta la derecha de una línea de $n+1$ monedas. Si esta moneda muestra T, como se vio para a), nunca se volteará, por lo que la suma de los $L(C)$ en este caso solo se ve afectada por las primeras n monedas. Concluimos que la suma de los $L(C)$ tales que C tiene su última moneda mostrando T, es $P(n)$. Ahora, si la última moneda muestra H tenemos dos casos.

1) La primera moneda muestra T. Dentro de este caso se tienen dos subcasos:

   I) Si dentro de las $n-1$ monedas restantes (las de enmedio) hay al menos una H, a lo largo de los movimientos como tenemos $k+1$ monedas ($k > 0$) que muestran H, se mueve la moneda en posición $k+1$, lo que muestra que podemos ignorar la primera y la última moneda, pues se está moviendo la k-ésima moneda de las de enmedio, entre las cuales hay k que muestran H. Para llegar a la configuración $\underbrace{TT\cdots T}_{n}H$ es como si sumáramos todos los valores $L(C)$, donde C tiene $n-1$ monedas, por lo que se suma $P(n-1)$, y luego a cada uno le sumamos los movimientos que faltan pata acabar con las $n+1$ monedas mostrando T. Es fácil ver que para pasar de $\underbrace{TT\cdots T}_{n}H$ a $\underbrace{TT\cdots T}_{n+1}$, se usan $2k+1$ movimientos.
   En este subcaso se suman $P(n-1) + (2n+1)(2^{n-1}-1)$ movimientos, pues hay $2^{n-1}-1$ configuraciones de $n-1$ monedas tales que al menos una muestra H.

II) Entre las restantes (las de enmedio) no hay monedas que muestran H. Se tiene la configuración $\underbrace{TT\cdots T}_{n}H$ y requieren $2k+1$ movimientos para terminar el proceso.

En este caso contamos $P(n-1)+(2n+1)(2^{n-1})$ movimientos.

2) La primera moneda muestra H. Veamos que si hay k monedas mostrando H dentro de las últimas N, hay en total $k+1$ mostrando H en toda la configuración. Se voltea la moneda en la posición $k+1$, que como vimos en a) es ignorar la primera moneda y contar todos los acomodos de una fila de n monedas donde la última es inicialmente tipo H. Estos acomodos suman $P(n)-P(n-1)$ operaciones (pues ya vimos que si se tienen las configuraciones de n monedas que acaban en H estas suman $P(n-1)$). Además, como son 2^{n-1}, pues hay $n-1$ que pueden mostrar H o T y la primera y la última están fijas, para cada configuración en este caso nos falta sumar un movimiento, ya que estamos llegando a la configuración $H\underbrace{T\cdots T}_{n}$, por lo que en este caso se suman un total de $P(n)-P(n-1)+2^{n-1}$ movimientos.

Juntando los casos se tiene que $P(n+1)=P(n)+P(n-1)+P(n)-P(n-1)+2^{n-1}=2P(n)+2^n(n+1)$, como queríamos probar.
Finalmente, veamos que $\frac{P(n)}{2^n}=\frac{n(n+1)}{4}$. Para esto, procederemos por inducción fuerte. Ya vimos los casos base ($n=1,2,3,4$ cumplen lo deseado). Supongamos que para $n\leq k$ se cumple que $\frac{P(n)}{2^n}=\frac{n(n+1)}{4}$.
Por la recursión que probamos, se tiene que

$$\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{2P(k)+2^k(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{P(k)}{2^k}+\frac{k+1}{2}=\frac{k(k+1)}{4}+\frac{k+1}{2},$$

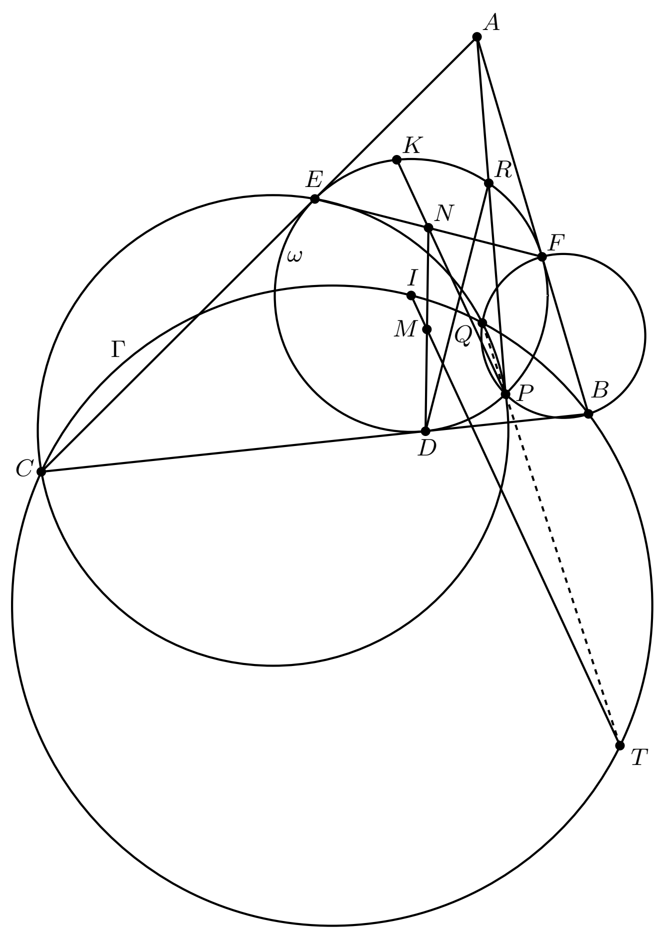
donde la última igualdad es por la hipótesis de inducción. Luego,

$$\frac{P(k+1)}{2^{k+1}}=\frac{k(k+1)}{4}+\frac{k+1}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{4},$$

lo que concluye la inducción.
Se tiene entonces que el promedio de las $L(C)$ sobre todas las configuraciones de n monedas es $\frac{P(n)}{n}=\frac{n(n+1)}{4}$.

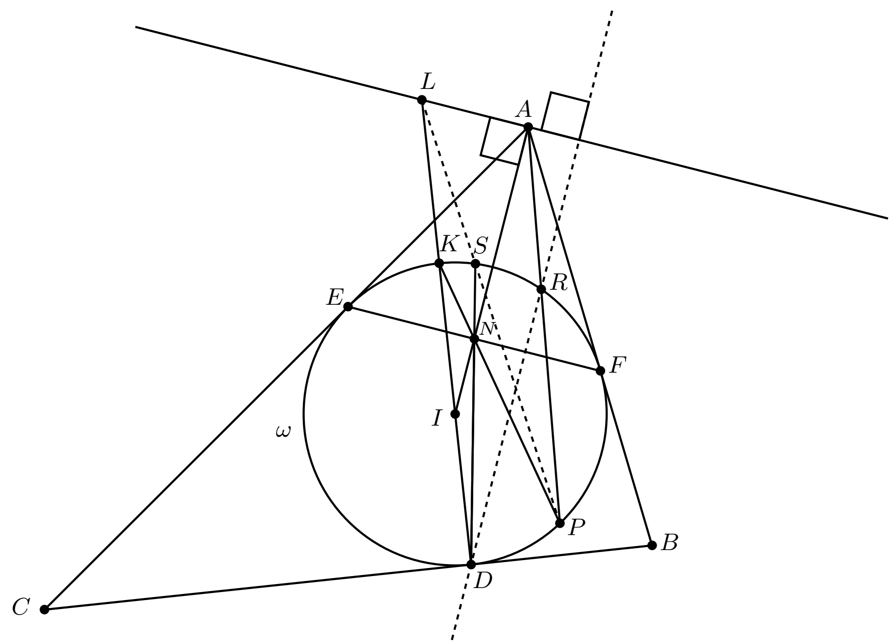
Solución del problema 6. Usaremos ángulos dirigidos para la solución del problema. Sea L la intersección de DI con la línea por A perpendicular a IA. Veamos que L,P,Q son colineales.
Sean K la intersección de DI con ω y sea R el punto donde la perpendicular desde D a EF corta a ω de nuevo. Probaremos primero que K es la reflexión de R respecto a la recta AI. Vemos simetrías respecto a AI, que es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$. Es fácil ver que E y F son simétricos respecto a AI. Sea N el punto medio de EF, que está sobre AI.
Probemos que $AI{\cdot}AN=AE^2$. En efecto, en el triángulo rectángulo AEI, es conocido que AE es la media geométrica entre AN y AI. Entonces, $AN\cdot AI=AR\cdot AP$. Esto nos dice que los puntos R,N,I,P son concíclicos (por el recíproco del teorema sobre

la potencia de un punto a una circunferencia).
Notemos, para usarlo posteriormente, que AL (por definición) es la polar de N respecto a ω.



De estas observaciones se puede probar que IN es la bisectriz externa del ángulo $\angle PNR$. En efecto, el triángulo IPR es isósceles, ya que I es el centro de ω hacia R y P. Sea $\angle PIR = \theta$. Por el isósceles IRP, se tiene que $\angle IRP = (\pi - \theta)/2$. De nuevo por el círculo $RNIP$, se tiene que $\theta = \angle PIR = \angle PNR$. Entonces, el ángulo exterior adyacente a $\angle PNR$ mide $\pi - \theta$, con lo que hemos probado que IN biseca este ángulo con la línea NP. Luego, IN es la bisectriz exterior del ángulo $\angle PNR$, lo que quiere decir que PN corta a ω de nuevo en la reflexión de R respecto a AN, digamos en K.
Sea S la intersección de DN con ω. Queremos probar que P, L, S son colineales, lo que nos permitirá considerar S, que se encuentra en ω, en lugar de L, que parece no tener conexión con el resto del dibujo.
Para esto, recordemos el siguiente teorema: en un cuadrilátero cíclico los lados opues-

tos se intersecan sobre la polar de la intersección de sus diagonales.



Consideremos el cuadrilátero $SKDP$, sus diagonales se intersecan en N, y AL es la polar de N respecto a ω. Por el teorema que mencionamos anteriormente, PS y DK se intersecan sobre la polar de N respecto a ω. Pero DK interseca a dicha polar en L (pues es como se definió L). Entonces, L es la intersección de AL, DK y PS. En particular, PS pasa por L.
Concluiremos el resultado deseado si probamos que S, Q, P son colineales: como PS pasa por L, debemos ver que PQ es la misma recta y debe pasar por L.
Sea Γ el circuncírculo del triángulo BIC. Calculando los ángulos se llega a que Q está sobre Γ. Tenemos que $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC$. Ahora, $\angle BQP = \angle BFP$ (están inscritos al mismo arco en el círculo $BFQP$) y $\angle BFP = \angle FEP$ (son medidos por el mismo arco en el círculo DEF, al cual BE es tangente). Entonces, $\angle BQP = \angle FEP$.
Del mismo modo, tenemos que $\angle PQC = \angle PEC$ (están inscritos en el mismo arco del círculo $CPQE$) y $\angle PEC = \angle PFE$ (también son medidos por el mismo arco en el círculo DEF, al cual EC es tangente).
Entonces, $\angle BQC = \angle BQP + \angle PQC = \angle FEP + \angle PFE = \pi - \angle FPE = \angle FDE$ (ambos inscritos en el círculo DEF). Un cálculo sencillo de ángulos muestra que este ángulo es igual al ángulo $\angle BIC$ (lo cual es conocido), por lo que Q, B, I, C son concíclicos.
Sea T la intersección de QP con Γ. Ahora veamos que es suficiente con probar que S, P, T son colineales. Ya vimos que $\angle BIT = \angle BQT$. Ahora veamos que $\angle BQT = \angle BQP$, entonces $\angle BQP = \angle BFP$ (están inscritos en el mismo arco del círculo BFP). Luego, $\angle BFP = \angle FKP$ (son medidos por el mismo arco del círculo DFE,

al cual BF es tangente) y, por lo tanto, $\angle BIT = \angle FKP$.
Ahora notemos que $FD \perp FK$, como KD es diámetro del círculo DEF, y $FD \perp BI$ como BD, BF son tangentes a dicho círculo e I es su centro, entonces $FK \parallel BI$. Esto y el hecho de que $\angle BIT = \angle FKP$, implica que IT es paralela a la línea KNP.
Sea M el punto medio de DN. Para ver que M está en IT, podemos ver las siguientes tres paralelas: NP, IT y la paralela a ambas que pasa por D. Estas intersecan segmentos iguales sobre la línea DK (I es el punto medio del diámetro DK en el círculo DEF), entonces también intersecan segmentos iguales sobre la línea DN.
Sean F' y E' los puntos medios de DE y DF, respectivamente. Como B, I, F, D son concíclicos (es conocido, también se puede obetener con un sencillo cálculo de ángulos), considerando la potencia de E' respecto a este círculo se tiene que $DE' \cdot E'F = BE' \cdot E'I$. Entonces, el punto E' cae sobre el eje radical de ω y Γ: su potencia respecto a ω es $DE' \cdot E'F$ y su potencia respecto a Γ es $BE' \cdot E'I$. Se tiene lo mismo para F'. Entonces el eje radical es $E'F'$, el cual pasa por M.
La potencia de M respecto a Γ es $IM \cdot MT$ y la potencia de M respecto a ω es $DM \cdot MS$, que son iguales pues M está sobre el eje radical de las dos circunferencias. Entonces S, I, D, T son concíclicos. De aquí podemos calcular algunos ángulos: $\angle DST = \angle DIT$ por el círculo $SIDT$, esto es igual a $\angle DKP$ pues $IT \parallel KP$, y esto es igual a $\angle DSP$ por ω. Entonces, los puntos S, P, T son colineales, como se quería probar.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $c \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv d \ (mod\ m)$.*
2. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $b \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd \ (mod\ m)$.*
3. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.