TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2017, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas, UADY.

Impreso por: Jaime Torre Marina
jaimetorremarina@hotmail.com
044 55 1630 3549
Ciudad de México

Esta publicación se imprimió con el apoyo financiero del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt).

CONACYT
Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología

Impreso y hecho en México.
Noviembre de 2017.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2017, Número 4

El equipo editorial de la revista *Tzaloa* te da la bienvenida a su cuarto y último número del año 2017. En este número encontrarás el artículo *Cuadriláteros Cíclicos* de nuestros amigos Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se estudian las propiedades básicas de los cuadriláteros cíclicos desde el punto de vista de ángulos y se muestran diversas aplicaciones de tales propiedades en la resolución de problemas de olimpiada. Estamos seguros que esta aportación será de gran utilidad tanto para lectores principiantes como para lectores avanzados.

En la sección de "Olimpiadas Internacionales" hallarás los resultados y los exámenes de la 4^a Olimpiada Iraní de Geometría y de la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. También hemos incluido las soluciones de los problemas de la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en español es *aprender*.

Como siempre, hemos preparado una cuidadosa selección de "Problemas de práctica" y de "Entrenamiento", mismas que esperamos sean útiles para tu preparación rumbo al concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas.

En este último número de 2017 hemos incluido los problemas con soluciones del concurso nacional de la 1^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB), así como los resultados de los alumnos que obtuvieron medalla de oro en cada nivel de la competencia.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimiento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

31ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 1998. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar

2017-2018 y, para el 1° de julio de 2018, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 31^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 10 de noviembre de 2017 en Monterrey, Nuevo León. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2017 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXX Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 59^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rumania, julio de 2018) y a la XXXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Portugal y España, septiembre de 2018).

De entre los concursantes nacidos en 2001 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XX Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Cuba, junio de 2018).

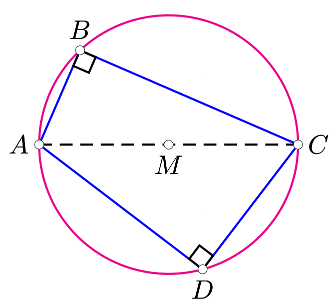
De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la VII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2018.

Cuadriláteros Cíclicos

Por Emerson Lucas Soriano Pérez y Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

La geometría tiene un rol muy importante en la olimpiada de matemática y para resolver problemas geométricos no sólo basta con aprender las propiedades y algunas aplicaciones de ellas, también se debe tener mucha imaginación. En esta ocasión hemos querido escribir sobre los cuadriláteros cíclicos. De hecho, hay muchas formas de identificarlos, pero en este escrito solo abordaremos la forma más sencilla, que es la versión por ángulos.
Un cuadrilátero $ABCD$ es llamado *cíclico* si sus cuatro vértices están en una misma circunferencia. Se dice que los vértices A, B, C y D de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ son *concíclicos*.
Por ejemplo, si tenemos un cuadrilátero $ABCD$ con ángulos rectos en B y en D, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, pues el circuncentro del triángulo rectángulo ABC es el punto medio M de la hipotenusa AC y el circuncentro del triángulo rectángulo ADC, también es el punto M. Luego, los cuatro puntos A, B, C, D pertenecen a la circunferencia con centro en M y radio AM.

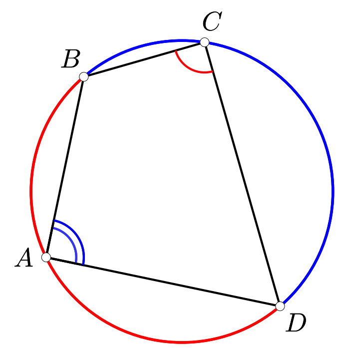


Este caso especial en donde dos ángulos internos opuestos de un cuadrilátero miden 90° cada uno, se puede generalizar como se muestra en el siguiente resultado.

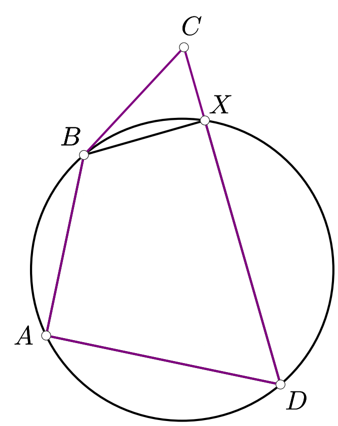
Dos Propiedades Básicas

Teorema 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de dos ángulos interiores opuestos es* $180°$.

Prueba. Supongamos primero que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Entonces, el ángulo inscrito $\angle BAD$ es la mitad del arco $\widehat{BCD}$ y el ángulo inscrito $\angle BCD$ es la mitad del arco $\widehat{BAD}$. Así, $\angle BAD + \angle BCD$ es la mitad de la suma de los arcos $\widehat{BAD}$ y $\widehat{BCD}$ y, como ambos arcos completan la circunferencia, entonces la suma de ambos arcos es $360°$, por lo tanto, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$.



Para demostrar el recíproco, procederemos por contradicción. Supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ satisface la igualdad $\angle BAD + \angle BCD = 180°$ pero no es cíclico. Entonces, C no está en el circuncírculo Γ del triángulo ABD. Como el punto C no está en Γ, entonces está en el interior o en el exterior de dicha circunferencia. Supongamos que C está en el exterior de Γ (se procede de manera similar cuando C está en el interior de Γ).



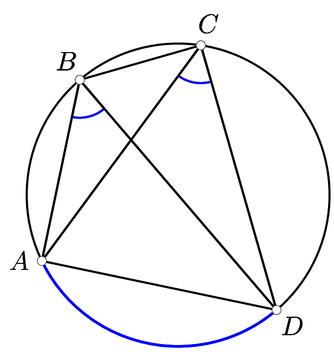
Sea $X \neq D$ el punto de intersección de Γ y CD. Como el cuadrilátero $ABXD$ es cíclico, entonces por lo demostrado en la primera parte, tenemos que $\angle BAD + \angle BXD = 180°$. Pero por hipótesis tenemos que $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, entonces $\angle BXD = \angle BCD$, de esto deducimos que $\angle CBX = 0°$, lo cual es un absurdo. $\square$

Corolario 1. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero convexo cíclico, entonces la medida de un ángulo interior es igual a la medida del ángulo exterior opuesto.*

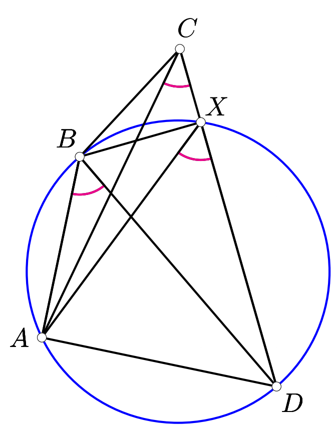
Prueba. La demostración es inmediata, pues por el teorema 1 sabemos que $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Luego, $\angle BAD = 180° - \angle BCD$ (ángulo exterior respecto al vértice C), que es lo que se quería probar. $\square$

Teorema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $\angle ABD = \angle ACD$.*

Prueba. Supongamos primero que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. En la figura se puede ver que los ángulos inscritos $\angle ABD$ y $\angle ACD$ subtienden el mismo arco $\overparen{AD}$ (que no contiene al punto B). Así, concluimos que $\angle ABD = \angle ACD$.



Para el recíproco, procederemos nuevamente por contradicción como en la prueba del teorema 1, esto es, supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ satisface que $\angle ABD = \angle ACD$ pero no es cíclico. Como los cuatro puntos A, B, C, D no están en una misma circunferencia, supongamos que el punto C no está en el circuncírculo Γ del triángulo ABD. Así, el punto C está en el interior o en el exterior de Γ. Supongamos que C está en el exterior de Γ (se procede de manera similar si el punto C está en el interior de Γ).

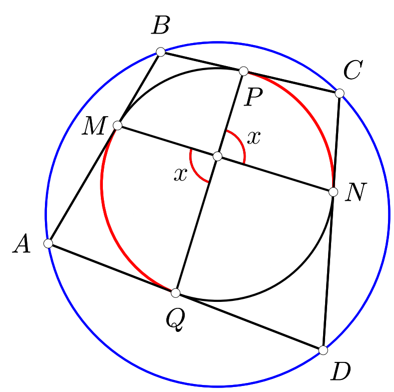


Sea X el punto de intersección de Γ y CD. Como $ABXD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces por lo demostrado en la primera parte, tenemos que $\angle ABD = \angle AXD$. Pero por hipótesis, tenemos que $\angle ABD = \angle ACD$. Entonces, $\angle AXD = \angle ACD$, lo cual implica que $\angle CAX = 0°$, que es un absurdo. $\square$

Algunas Aplicaciones Sencillas

Problema 1. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico que está circunscrito a una circunferencia ω. Sean M, P, N, Q los puntos de tangencia de ω con los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Calcular la medida del ángulo que forman las cuerdas MN y PQ.*

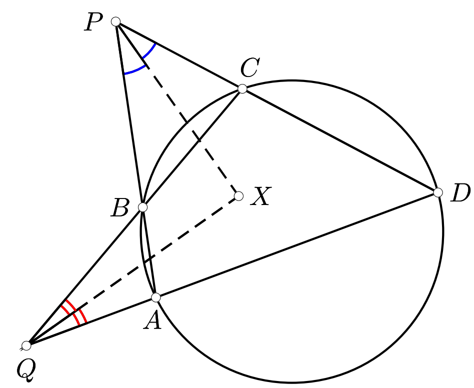
Solución. Es fácil probar que el arco $\widehat{MQ}$ (que no contiene al vértice P) en la circunferencia ω y el ángulo $\angle MAQ$ son suplementarios (basta usar el hecho conocido de que la recta que pasa por A y el centro de ω, es bisectriz del ángulo $\angle MAQ$), esto es, $\widehat{MQ} = 180° - \angle MAQ$. Análogamente, tenemos que el arco $\widehat{NP}$ (que no contiene al vértice Q en ω) y el ángulo $\angle PCN$ son suplementarios, esto es, $\widehat{NP} = 180° - \angle PCN$.



Luego, $\widehat{MQ} + \widehat{NP} = 360° - \angle MAQ - \angle PCN$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, por el teorema 1 tenemos que $\angle MAQ + \angle PCN = 180°$. Así, $\widehat{MQ} + \widehat{NP} = 180°$. Además, tenemos que $x = \frac{\widehat{MQ}+\widehat{NP}}{2}$. Por lo tanto, $x = \frac{180°}{2} = 90°$. $\square$

Problema 2. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo cíclico. Sean P y Q los puntos de intersección de AB con CD y de AD con BC, respectivamente. Las bisectrices de los ángulos $\angle AQB$ y $\angle BPC$ se intersecan en el punto X. Calcular la medida del ángulo $\angle PXQ$.*

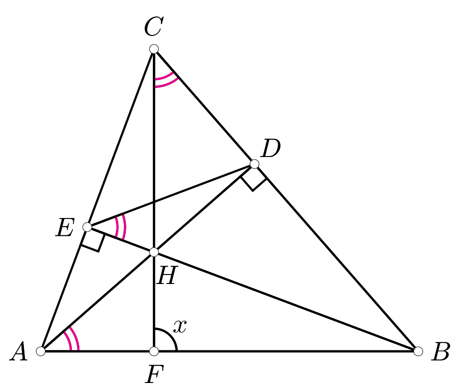
Solución. En el cuadrilátero no convexo $BPXQ$, tenemos que $\angle PBQ = \angle BQX + \angle BPX + \angle PXQ$. Pero como $\angle PBQ = \angle ABC$, entonces $\angle ABC = \angle BQX + \angle BPX + \angle PXQ$. Análogamente, en el cuadrilátero no convexo $PDQX$, tenemos que $\angle XPD + \angle PDQ + \angle XQD = \angle PXQ$. Sumando miembro a miembro las dos relaciones anteriores, obtenemos que $2\angle PXQ = \angle ABC + \angle PDQ$.



Como $\angle PDQ = \angle CDA$ y el cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico, resulta que $180° = \angle ABC + \angle PDQ = 2\angle PXQ$ y por lo tanto, $\angle PXQ = 90°$. □

Problema 3. *Demostrar que las tres alturas en un triángulo son concurrentes.*

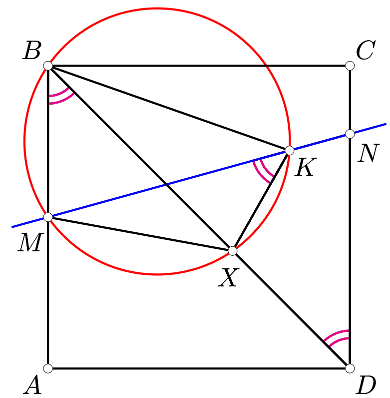
Solución. Si el triángulo es rectángulo, entonces es claro que las tres alturas concurren en el vértice del ángulo recto. Supongamos que el triángulo ABC es acutángulo (cuando el triángulo es obtusángulo se procede de manera similar). Sean D y E las proyecciones de A y B respecto a las rectas BC y CA, respectivamente. Sea H el punto de intersección de AD y BE, y sea F el punto de intersección de CH y AB.



Para demostrar que las tres rectas del triángulo ABC son concurrentes, debemos probar que CF es altura, es decir, debemos probar que $\angle HFB = 90°$. En efecto, notemos que en el cuadrilátero $AEDB$ se cumple que $\angle AEB = \angle ADB$, luego, por el teorema 2, tenemos que el cuadrilátero $AEDB$ es cíclico, así, $\angle DAB = \angle DEB$.
Por otro lado, en el cuadrilátero $CEHD$ se cumple que $\angle CEH + \angle CDH = 90° + 90° = 180°$, luego, por el teorema 1, deducimos que $CEHD$ es cíclico, por lo tanto, $\angle HED = \angle HCD$. En consecuencia, de la última igualdad tenemos que $\angle DAB = \angle FCB$, pero como $\angle CBF = 90° - \angle DAB = 90° - \angle FCB$, entonces $\angle FBC + \angle FCB = 90°$, de donde $x = 90°$, como queríamos. □

Problema 4. *Sea $ABCD$ un cuadrado y sea K un punto en su interior. Una recta que pasa por K corta a los lados AB y CD en los puntos M y N, respectivamente. Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos KBM y KDN se intersecan en el punto K y en un punto de la diagonal BD.*

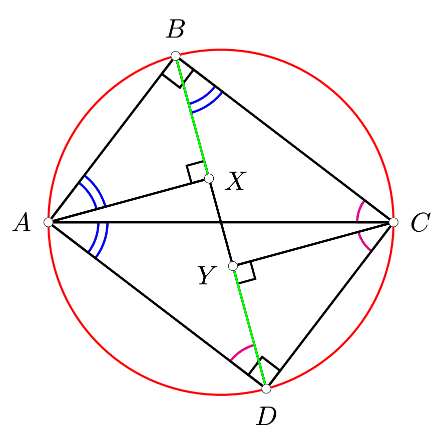
Solución. Sea X el punto de intersección del circuncírculo del triángulo KBM y la diagonal BD. Para demostrar que uno de los puntos de intersección de los circuncírculos de los triángulos KBM y KDN está sobre la diagonal BD, basta demostrar que $KNDX$ es cíclico.



Por ser BD diagonal del cuadrado $ABCD$, se cumple que $\angle XBM = 45°$. Luego, como $KBMX$ es cíclico, entonces $45° = \angle XBM = \angle XKM$. Nuevamente, por ser BD diagonal del cuadrado $ABCD$, entonces $\angle XDN = 45°$. Notemos que en el cuadrilátero $KNDX$ se cumple que el ángulo interior respecto al vértice D es igual al ángulo exterior respecto al vértice K, entonces concluimos que $KNDX$ es cíclico. $\square$

Problema 5. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AC es diámetro de su circunferencia circunscrita. Sean X, Y las proyecciones de A y C sobre BD, respectivamente. Demostrar que $DX = BY$.*

Solución. Basta demostrar que $BX = DY$.



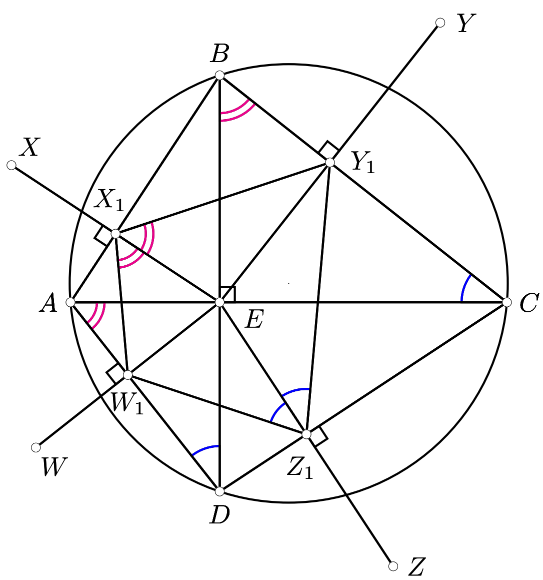
Como AC es diámetro del circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$, entonces $\angle ABC = \angle ADC = 90°$. Notemos que $\angle CBD = \angle CAD$, pues el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Además, en los triángulos rectángulos ABC y ABX, tenemos que $90° = \angle CBX + \angle XBA = \angle XAB + \angle XBA$, de donde se sigue que $\angle CBD = \angle CAD = \angle BAX$.

Análogamente, obtenemos que $\angle BCA = \angle BDA = \angle DCY$. Por lo tanto, los triángulos ABX y ACD son semejantes, de donde $\frac{BX}{AB} = \frac{CD}{AC}$. También tenemos que los triángulos CDY y ABC son semejantes, por lo tanto, $\frac{DY}{CD} = \frac{AB}{AC}$. Comparando las últimas dos igualdades, concluimos que $BX = DY$, como se quería. □

Aplicaciones en Problemas de Olimpiada

Problema 6 (Estados Unidos, 1993)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares y se intersecan en el punto E. Demostrar que las reflexiones de E respecto a los lados AB, BC, CD y DA, están en una misma circunferencia.*

Solución. Sean X_1, Y_1, Z_1, W_1 las proyecciones de E sobre los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Como X, Y, Z, W son las reflexiones de E sobre las rectas AB, BC, CD, DA, respectivamente, entonces $EX = 2EX_1$, $EY = 2EY_1$, $EZ = 2EZ_1$ y $EW = 2EW_1$.



Así, los cuadriláteros $XYZW$ y $X_1Y_1Z_1W_1$ son homotéticos con centro de homotecia E y razón $\frac{EX}{EX_1} = 2$. Entonces, basta demostrar que el cuadrilátero $X_1Y_1Z_1W_1$ es cíclico para concluir que el cuadrilátero $XYZW$ también es cíclico, pues son homotéticos.

En efecto, es fácil ver que los cuadriláteros EX_1AW_1 y EX_1BY_1 son cíclicos, por lo tanto, en esos cuadriláteros se cumple que $\angle EAW_1 = \angle EX_1W_1$ y $\angle EX_1Y_1 =$

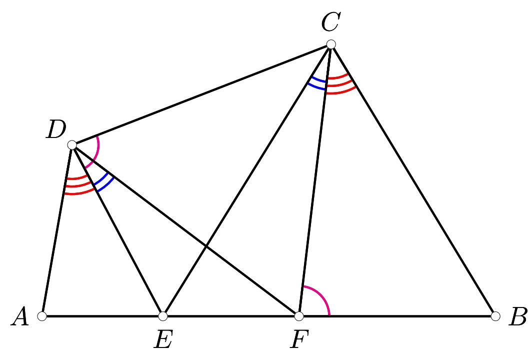
$\angle EBY_1$, respectivamente. También, los cuadriláteros EY_1CZ_1 y EZ_1DW_1 son cíclicos, por lo tanto $\angle ECY_1 = \angle EZ_1Y_1$ y $\angle EZ_1W_1 = \angle EDW_1$, respectivamente. Luego, como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle BCA = \angle BDA$ y $\angle DAC = \angle DBC$, en consecuencia, $\angle W_1X_1E = \angle EX_1Y_1$ y $\angle W_1Z_1E = \angle EZ_1Y_1$. En conclusión,

$$\angle W_1X_1Y_1 = 2\angle EBC \quad \text{y} \quad \angle Y_1Z_1W_1 = 2\angle ECB. \tag{1}$$

Como las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ son perpendiculares, entonces el triángulo EBC es rectángulo, recto en E, por lo tanto, $\angle EBC + \angle ECB = 90°$. Luego, en (1) tenemos que $\angle W_1X_1Y_1 + \angle Y_1Z_1W_1 = 2 \cdot 90° = 180°$. Esto es suficiente para garantizar que el cuadrilátero $X_1Y_1Z_1W_1$ es cíclico y, por ende, el cuadrilátero $XYZW$ también es cíclico. □

Problema 7 (Rusia, 1996). *En el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se ubican los puntos E y F con $AE < AF$. Si $\angle ADE = \angle FCB$ y $\angle EDF = \angle ECF$, demostrar que $\angle FDB = \angle ACE$.*

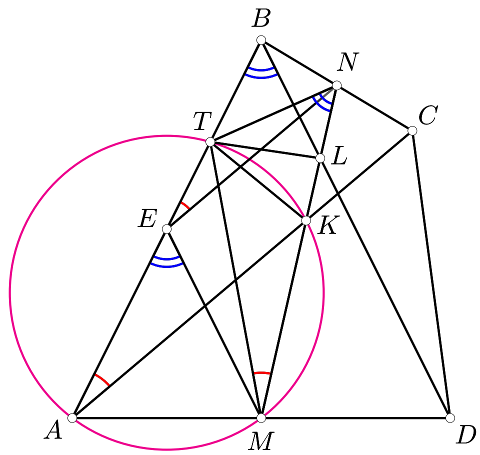
Solución. En el cuadrilátero $EDCF$ se cumple que $\angle EDF = \angle ECF$, por lo tanto, el cuadrilátero $EDCF$ es cíclico y, en consecuencia, $\angle EDC = \angle CFB$.



En el triángulo FCB, tenemos que $180° - \angle FBC = \angle BFC + \angle FCB$. Pero como, $\angle BFC + \angle FCB = \angle ADE + \angle EDC$, entonces $180° - \angle ABC = \angle ADC$, esto es, $\angle ADC + \angle ABC = 180°$. Así, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, de donde $\angle CAE = \angle BDC$. Como el cuadrilátero $EDCF$ es cíclico, tenemos que $\angle CEF = \angle FDC = \angle FDB + \angle BDC$. Luego, en el triángulo ACE, $\angle CAE + \angle ACE = \angle CEF$. Comparando las dos últimas igualdades, concluimos que $\angle FDB = \angle ACE$. □

Problema 8 (Pre-Selectivo Perú, IMO 2016). *Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que AD y BC no son paralelas. Sean M y N los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. El segmento MN corta a AC y BD en los puntos K y L, respectivamente. Demostrar que uno de los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas de los triángulos AKM y BNL pertenece a la recta AB.*

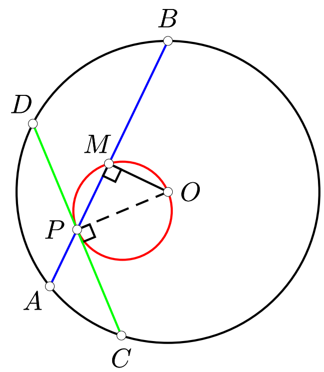
Solución. Sea E el punto medio del segmento AB y sea T el punto de intersección del circuncírculo del triángulo AKM y la recta AB. Para demostrar que uno de los puntos de intersección de los circuncírculos de los triángulos AKM y BNL está sobre la recta AB, solo debemos probar que el cuadrilátero $BNLT$ es cíclico.



Como E, M y N son puntos medios de los lados AB, AD y BC, respectivamente, entonces EM y EN son bases medias de los triángulos ABD y ABC, respectivamente. Luego, por ser EN paralelo a AC, tenemos que $\angle BEN = \angle BAC$, pero como el cuadrilátero $ATKM$ es cíclico, entonces $\angle TAK = \angle TMK$.
Observemos que en el cuadrilátero $METN$ se cumple que $\angle NMT = \angle NET$, por lo tanto, el cuadrilátero $METN$ es cíclico. Por ser EM paralelo a BD, tenemos que $\angle AEM = \angle ABD$, pero como el cuadrilátero $METN$ es cíclico, entonces $\angle TNM = \angle AEM$ y, en consecuencia, $\angle TBL = \angle TNL$. Este último resultado nos garantiza que el cuadrilátero $BNLT$ es cíclico. □

Problema 9 (Canadá, 1991)**.** *Sea ω una circunferencia y sea P un punto en su interior. Considere todas las cuerdas de ω que pasan por P. Demostrar que los puntos medios de todas esas cuerdas están en una misma circunferencia.*

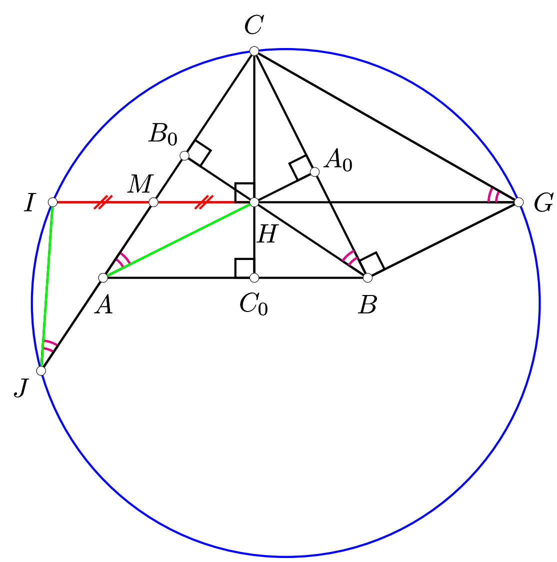
Solución. Sea O el centro de la circunferencia ω y sea Γ la circunferencia de diámetro OP. Demostraremos que los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por P en la circunferencia ω, pertenecen a la circunferencia Γ. Sea ℓ una recta que pasa por el punto P. Tenemos dos posibilidades con respecto a la recta ℓ: Que sea secante a Γ o que sea tangente a Γ.
Si la recta ℓ es secante a Γ, sean A y B los puntos de intersección de ℓ con la circunferencia ω. Si la cuerda AB pasa por O, entonces AB es díametro, y, por ende, O es punto medio de AB. Además, O es punto de la circunferencia Γ. Si ℓ no pasa por O, considere que $M \neq P$ es el punto de intersección de ℓ con la circunferencia Γ. Como OP es diámetro de Γ, entonces $\angle OMP = 90°$. Notemos que OM es perpendicular a la cuerda AB, por lo tanto, M es punto medio de AB.



Si la recta ℓ es tangente a Γ, sean C y D los puntos de intersección de ℓ con la circunferencia ω. Es claro que OP es perpendicular a CD, pues P es punto de tangencia y OP es diámetro de Γ. Así, P es punto medio de la cuerda CD.
En cualquier caso, siempre se cumple que el punto medio de la cuerda que pasa por P pertenece a la circunferencia Γ. Por lo tanto, los puntos medios de todas las cuerdas de ω que pasan por P están en una misma circunferencia. $\square$

Problema 10 (Lista corta, IMO, 2015)**.** *Sea ABC un triángulo acutángulo de ortocentro H. Sea G un punto del plano tal que $ABGH$ es un paralelogramo. Sea I el punto de la recta GH tal que AC divide al segmento HI en dos partes iguales. Supongamos que la recta AC interseca a la circunferencia circunscrita del triángulo GCI en C y J. Demostrar que $IJ = AH$.*

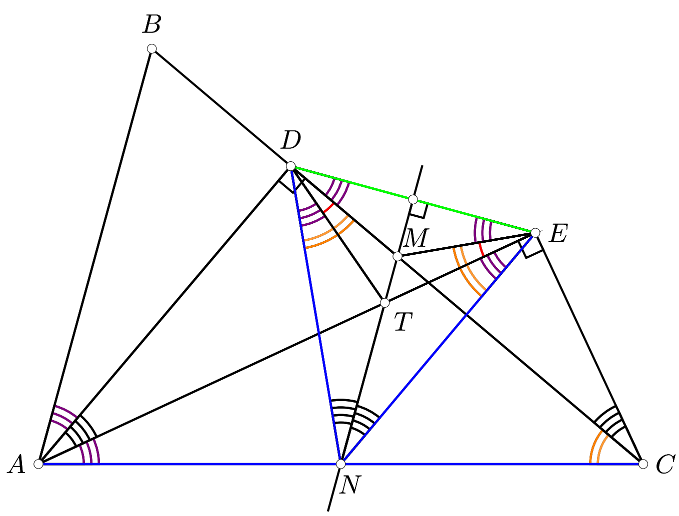
Solución. Sean A_0, B_0 y C_0 los pies de las alturas del triángulo ABC desde los vértices A, B y C, respectivamente. Sea M el punto de intersección de AC con IH.



Como $ABGH$ es un paralelogramo, entonces $AH \parallel BG$ y $AB \parallel HG$, esto implica que $\angle CHG = \angle CBG = 90°$. Así, el cuadrilátero $CHGB$ es cíclico y, en consecuencia, $\angle CGH = \angle HBC$. Además, tenemos que $\angle HBC = \angle CAA_0$, pues AB_0A_0B es cíclico. También observemos que el cuadrilátero $JICG$ es cíclico, por lo tanto, $\angle IJC = \angle IGC$. Por lo tanto, $\angle IJM = \angle MAH$. Llamemos $\angle MAH = \alpha$ y $\angle AMI = \theta$.
Aplicando la ley de senos en el triángulo JIM, tenemos que $\frac{IM}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{IJ}{\operatorname{sen}\theta}$ y aplicando la ley de senos en el triángulo AMH, tenemos que $\frac{MH}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{AH}{\operatorname{sen}(180°-\theta)}$. Como $IM = MH$ y $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, se concluye que $IJ = AH$. □

Problema 11 (Olimpiada Centroamericana, 2017)**.** *Dado un triángulo ABC, sean D el pie de la altura desde A y ℓ la recta que pasa por los puntos medios de AC y BC. Sea E la reflexión del punto D respecto a la recta ℓ. Demostrar que el circuncentro del triángulo ABC está sobre la recta AE.*

Solución. Si el triángulo ABC es rectángulo, entonces el punto E coincide con el punto C, así, el resultado es inmediato. La solución es similar si el triángulo es obtusángulo o acutángulo, así que solo analizaremos el caso cuando el triángulo ABC es acutángulo.

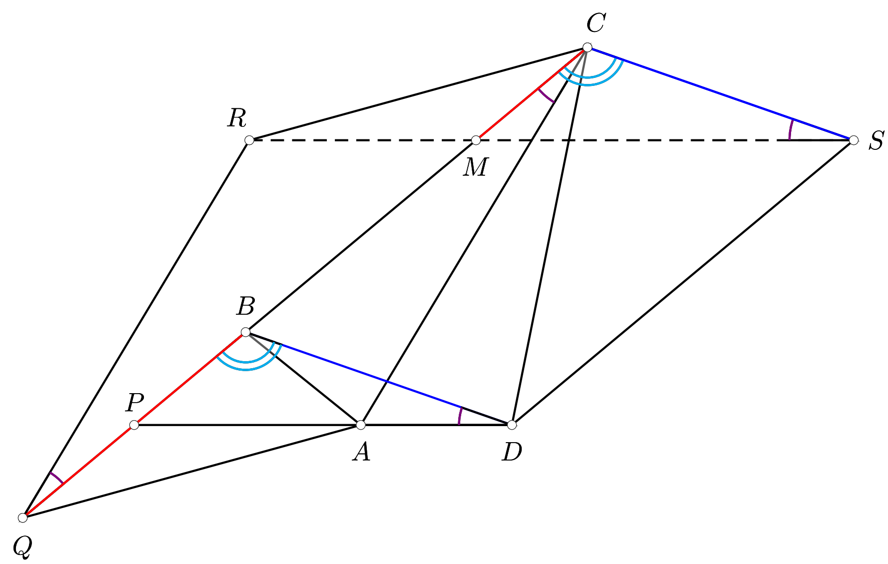


Sea T el punto de intersección de la recta ℓ y la recta AE. En el triángulo rectángulo ADC, DN es mediana, por lo tanto, $NA = NC = ND$ y $\angle NDC = \angle NCD$. Como E es la reflexión de D respecto a ℓ, entonces ℓ es la mediatriz del segmento DE. En consecuencia, tenemos que $ND = NE$, $\angle NDT = \angle NET$, $\angle NDM = \angle NEM$ y $\angle TND = \angle TNE$.
Notemos que $NA = NC = NE$, por lo tanto, el triángulo AEC es retángulo, recto en E, así, $\angle NAE = \angle NEA$. Como $\angle NCD = \angle NEM$, entonces el cuadrilátero $NMEC$ es cíclico y, en consecuencia, se tiene que $\angle MNE = \angle MCE$. Observe

que en el cuadrilátero $ADEC$ se cumple que $\angle ADC = \angle AEC = 90°$, por lo tanto, $ADEC$ es cíclico también y, por ende, $\angle EAD = \angle DCE$.
En el triángulo ABC, MN es mediana, por lo tanto MN es paralela a AB y, en consecuencia, $\angle BAC = \angle MNC$. Por otro lado, notemos que $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAE + \angle EAC$ y $\angle MNC = \angle MNE + \angle ENC$. Además, $2\angle EAN = \angle NAE + \angle NEA = \angle ENC$. Luego, como $\angle TNE = \angle DAE$, entonces $\angle BAD = \angle EAC$.
Es conocido que el ortocentro y el circuncentro del cualquier triángulo son conjugados isogonales. Luego, como el rayo AD contiene al ortocentro del triángulo ABC y los rayos AD y AE son isogonales respecto al ángulo $\angle BAC$, entonces el rayo AE contiene al circuncentro del triángulo ABC, como se quería probar. □

Problema 12 (Selectivo Perú, Cono Sur, 2014)**.** *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Suponga que las rectas BC y AD se intersecan en el punto P y sea Q un punto del plano tal que P es punto medio de BQ. Se construyen los paralelogramos $CAQR$ y $DBCS$. Demostrar que los puntos C, Q, R y S están en una misma circunferencia.*

Solución. Como $CAQR$ es un paralelogramo, tenemos que AC es paralela a RQ, así, $\angle RQC = \angle QCA$. Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\angle BCA = \angle BDA$. Sea M un punto de BC tal que RM es paralela a la recta PD. Por simetría, en el paralelogramo $AQRC$, se tiene que los triángulos APQ y RMC son congruentes y, en consecuencia, $PQ = PB = MC$.



Notemos que los triángulos MCS y PDB son congruentes, pues $PB = MC$, $BD = CS$ y $\angle PBD = \angle MCS$. Entonces, $MS = PD$ y $\angle CSM = \angle BDP$, pero como las parejas homólogas (CS, BD) y (PB, MC) son paralelas, entonces MS es paralela a PD. Así, los puntos R, M y S son colineales. Por lo tanto, $\angle RSC = \angle CQR$, lo cual implica que el cuadrilátero $QRCS$ es cíclico. □

Para finalizar, dejamos unos ejercicios para que practique el lector, esperando que sean de su agrado.

Ejercicios

1) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que AB es el diámetro de la circunferencia circunscrita. Sean A' y B' los pies de las perpendiculares desde A y B, respectivamente, hasta CD. Demostrar que $DA' = CB'$.

2) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Si P es el punto de intersección de AD y BC, y Q es el punto de intersección de AB y CD, demostrar que las bisectrices de los ángulos $\angle DPC$ y $\angle AQD$ son perpendiculares.

3) Sean C_1, C_2, C_3 y C_4 circunferencias tales que C_1 corta a C_2 en A y en P, C_2 corta a C_3 en B y en Q, C_3 corta a C_4 en C y en R y C_4 corta a C_1 en D y en S, de manera que el cuadrilátero $PQRS$ está contenido en el cuadrilátero $ABCD$. Demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si el cuadrilátero $PQRS$ es cíclico.

4) Cada una de las circunferencias Ω_1, Ω_2, Ω_3 y Ω_4 es tangente exteriormente a exactamente dos de las demás. Si A, B, C y D son los puntos de tangencia de las circunferencias, demostrar que A, B, C y D están en una misma circunferencia.

5) Demostrar que si un cuadrilátero cíclico tiene sus diagonales perpendiculares, entonces una recta que pase por el punto de intersección de las diagonales y sea perpendicular a uno de los lados, pasará por el punto medio del lado opuesto.

6) Las cuerdas AB y CD de una circunferencia Ω se cortan en el punto P. Demostrar que el circuncentro del triángulo PAD, el punto P y el ortocentro del triángulo PCB son colineales.

7) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que sus diagonales AC y BD son perpendiculares y se cortan en el punto P. Sea M el punto medio del lado AB. Demostrar que la recta MP es perpendicular a la recta AC.

8) (Sharygin, 2017) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con $AB = BC$. Sea M un punto en el menor arco $\widehat{CD}$ del circuncírculo de $ABCD$. Las rectas BM y CD se cortan en el punto P y las rectas AM y BD se cortan en el punto Q. Demostrar que AC es paralela a PQ.

9) (Grecia, 2017) Sea ABC un triángulo acutángulo, con $AB < AC < BC$, y sea ω su circuncírculo. La circunferencia con centro en A y radio AC corta nuevamente a ω en el punto D y corta a la recta CB en el punto E. Si la recta AE interseca nuevamente a ω en el punto F y G es un punto en la recta BC tal que $EB = BG$, demostrar que D, E, F, G están en una misma circunferencia.

10) (EGMO, 2017) Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\angle DAB = \angle BCD = 90°$ y $\angle ABC > \angle CDA$. Sean Q y R puntos en los segmentos BC y CD, respectivamente, tales que la recta QR interseca a las rectas AB y AD en los puntos P y

S, respectivamente. Se sabe que $PQ = RS$. Sea M el punto medio de BD y sea N el punto medio de QR. Demostrar que los puntos M, N, A y C pertenecen a una misma circunferencia.

11) (Checa y Eslovaca, 2010) Las circunferencias ω_1 y ω_2 se intersecan en los puntos A y B. La tangente exterior común de ambas circunferencias las interseca en los puntos K y L tal que el punto B está en el interior del triángulo KLA. Una recta ℓ que pasa por A interseca a las circunferencias en los puntos M y N. Demostrar que ℓ es tangente al triángulo KLA si y solo si los puntos K, L, M, N están en una misma circunferencia.

12) (Selectivo Perú, Cono Sur, 2013) Sea I el incentro del triángulo ABC y sean A_1, B_1, C_1 puntos que pertenecen a los segmentos AI, BI, CI, respectivamente. Las mediatrices de los segmentos AA_1, BB_1, CC_1 determinan un triángulo $\mathcal{T}$. Si I es el ortocentro del triángulo $A_1B_1C_1$, demostrar que los circuncentros de los triángulos $\mathcal{T}$ y ABC coinciden.

13) Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Sea M el punto de intersección de las perpendiculares a AB y CD por D y A, respectivamente. Sea N el punto de intersección de las perpendiculares a AB y CD por C y B, respectivamente. Demostrar que AC, BD y MN son concurrentes.

14) Sea M el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero cíclico $ABCD$ de manera que el ángulo $\angle AMB$ es agudo. Se construye el triángulo isósceles BCK, de base BC, externamente al cuadrilátero de manera que $\angle KBC + \angle AMB = 90°$. Demostrar que KM y AD son perpendiculares.

15) (IMO, 1985) Una circunferencia Γ está centrada en un punto del lado AB de un cuadrilátero cíclico $ABCD$. Además, los lados BC, CD y DA son tangentes a Γ. Demostrar que $AD + BC = AB$.

Bibliografía

1) Viktor Prasolov. *Problems in Plane and Solid Geometry.*

2) Titu Andreescu, Michal Rolinek. *106 Geometry Problems.*

3) Evan Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.*

4) Titu Andreescu, Razvan Gelca. *Mathematical Olympiad Challenges.*

5) Arseniy Akopyan. *Geometry in Figures.*

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2017.
Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Prueba que existe una infinidad de enteros positivos n tales que $n-1$, n y $n+1$ se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos, cada uno.

Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo con $\angle A = 60°$. Sea O el circuncentro del triángulo ABD. Sea K la intersección de AO con la bisectriz del ángulo externo al ángulo $\angle BCD$. Halla el valor de $\frac{AO}{OK}$.

Problema 3. Sea $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_{40}}$ un número de 40 dígitos. Demuestra que existen cuatro índices i, j, k, l distintos de manera que $i+j = k+l$ y $a_i + a_j = a_k + a_l$.

Problema 4. Sea m un entero positivo. Demuestra que para cualquier entero k, el número $2k$ se puede escribir como la diferencia de dos números primos relativos con m.

Problema 5. Sea $ABCDE$ un pentágono regular tal que la región estrellada $ACEBD$ tiene área 1. Si AC y BE se cortan en P y, BD y CE se cortan en Q, determina el área del cuadrilátero $APQD$.

Problema 6. Sean C_1, C_2 y C_3 tres circunferencias tales que C_2 y C_3 se intersecan en A y A', C_3 y C_1 se intersecan en B y B', C_1 y C_2 se intersecan en C y C', de manera que A está afuera de C_1, B está afuera de C_2 y C está afuera de C_3. Demuestra que

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Problema 7. Determina todos los pares (x, y) de enteros tales que $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$.

Problema 8. Encuentra todos los polinomios $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ con $a_i \in \{1, -1\}$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ tal que las raíces de $p(x)$ son todos números reales.

Problema 9. Sean ABC y $A'B'C'$ un par de triángulos que comparten el mismo gravicentro. Demuestra que se puede formar un triángulo con los segmentos AA', BB' y CC'.

Problema 10. Sea ABC un triángulo no equilátero. Asuma que $\angle CAB = 60°$. Sean D y E los puntos de intersección de la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC con los lados del ángulo $\angle CAB$. Demuestra que el triángulo ADE es equilátero.

Problema 11. El granjero Darío tiene varios cochinos. Si los dos más pequeños pesan juntos la cuarta parte de lo que pesarían todos juntos, pero los tres más pesados pesan juntos $\frac{3}{5}$ de lo que pesarían todos juntos, ¿cuántos cochinos tiene el granjero Darío? Encuentra todas las posibles respuestas.

Problema 12. Sean m y n enteros positivos y sean x, y, z números reales en el intervalo $[0, 1]$. Demuestra que

$$0 \leq x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} - x^my^n - y^mz^n - z^mx^n \leq 1.$$

Problema 13. Todos los 16 cuadrados de un tablero de 4×4 son blancos. Se define un movimiento como la selección de un rectángulo de 1×3 o de 3×1 y el cambio de los colores de cada cuadrado en el rectángulo de blanco a negro o de negro a blanco. ¿Es posible que todos los cuadrados se vuelvan negros después de alguna secuencia de movimientos?

Problema 14. Sea n un entero mayor que 2 y sea

$$A = \{2^n - 1, 3^n - 1, \ldots, (n-1)^n - 1\}.$$

Si n no es un divisor de algún elemento de A, demuestra que n es un número libre de cuadrados. (Nota: un número libre de cuadrados es tal que ningún cuadrado lo divide).

Problema 15. Sea O el circuncentro de un triángulo ABC. Denotemos por k al excírculo del triángulo ABC opuesto al vértice A. Sean D, E y F los puntos de tangencia de k con BC, CA y AB, respectivamente. Si k tiene el mismo radio que la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC, demuestra que las rectas OD y EF son perpendiculares.

Problema 16. Determina todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos que satisfacen $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, c) = \text{mcd}(b, c) = 1$ y $a + b + c$ es múltiplo de a, b y c.

Problema 17. En el triángulo acutángulo ABC, sea M el punto medio del lado BC. Un punto X sobre la bisectriz del ángulo $\angle AMB$ es tal que $\angle BXM = 90°$. Un punto Y sobre la bisectriz del ángulo $\angle AMC$ es tal que $\angle CYM = 90°$. Los segmentos AM y XY se intersecan en el punto Z. Demuestra que Z es el punto medio de XY.

Problema 18. Los enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ satisfacen que para cualesquiera índices distintos i, j, el número a_i es divisible por el número $a_j - a_i$. Demuestra que para cada $i < j$, se cumple que $ia_j \leq ja_i$.

Problema 19. Sea $p(x)$ un polinomio de grado 2 tal que $|p(x)| \leq 1$ para $x = -1, 0, 1$. Demuestra que para cada x en el intervalo $[-1, 1]$, se cumple que $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$.

Problema 20. Determina el valor mínimo de la expresión $|x + 4y + 7z|$ si x, y, z son enteros distintos que satisfacen la ecuación

$$(x - y)(y - z)(z - x) = x + 4y + 7z.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Observemos que la sucesión $(2m^2+1)^2$, con m entero no negativo, es estrictamente creciente, por lo que todos sus términos son distintos. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}(2m^2+1)^2-1&=(2m^2)^2+(2m)^2,\\(2m^2+1)^2&=(2m^2+1)^2+0^2,\\(2m^2+1)^2+1&=(2m^2+1)^2+1^2.\end{aligned}$$

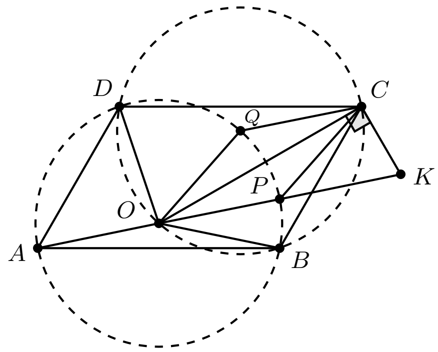
Por lo tanto, si n es de la forma $(2m^2+1)^2$, entonces $n-1$, n y $n+1$ satisfacen las condiciones del problema.

Solución del problema 2. Observemos que

$$\angle DCB+\angle BOD=\frac{180^\circ}{3}+2\angle BAD=\frac{180^\circ}{3}+2\cdot\frac{180^\circ}{3}=180^\circ,$$

por lo que $CBOD$ es un cuadrilátero cíclico. Sea Q su circuncentro.
Sea AP un diámetro del circuncírculo del triángulo BAD. La reflexión en el centro

del paralelogramo, envía el segmento QC en OA, por lo que $QC = OA = OP$ y QC es paralela a OP. Esto quiere decir que $POQC$ es un paralelogramo. Como Q es el centro del cuadrilátero $CBOD$, resulta que $QC = OQ$. Esto implica que $POQC$ es un rombo y, en consecuencia, $OP = PC$.

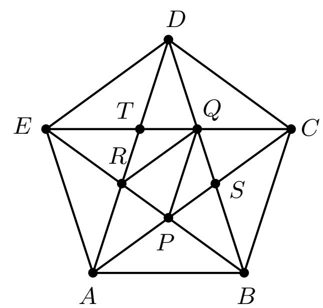


Dado que $OB = OD$ y el cuadrilátero $CBOD$ es cíclico, tenemos que la recta CO es perpendicular a CK, de modo que el triángulo OCK es rectángulo. Como P es un punto de la hipotenusa tal que $OP = PC$, P es el punto medio y, por lo tanto, $OK = 2OP = 2OA$, lo cual implica que la razón buscada es $\frac{1}{2}$.

Solución del problema 3. Consideremos las parejas $(a_1, a_{40}), (a_2, a_{39}), \ldots, (a_{20}, a_{21})$. La suma de los números de cada pareja es un número entre 0 y 18 pues cada número es un dígito entre 0 y 9. Como hay 19 posibles sumas y se tienen 20 parejas, por el principio de las casillas, existen dos parejas, digamos (a_i, a_j) y (a_k, a_l), que tienen la misma suma. Además, $i+j = 41 = k+l$, entonces estos índices cumplen la condición requerida.

Solución del problema 4. Si $m = 1$, el resultado es inmediato. Supongamos que $m > 1$ y que la factorización en primos de m es $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$. Veamos que no puede existir un primo p tal que $p \mid x(x + 2k)$ para cualquier x entero, pues si esto ocurriera $p \mid 1(1 + 2k) = 2k + 1$ y $p \mid -1(-1 + 2k) = -(2k - 1)$, de donde $p \mid 2k+1-(2k-1) = 2$, esto es, $p = 2$ lo que es una contradicción, pues es imposible que divida al número impar $2k+1$. Lo anterior implica que para $i = 1, 2, \ldots, r$, existe algún entero x_i de manera que $p_i \nmid x_i(x_i + 2k)$.
Por el teorema chino del residuo, existe un entero x_0 tal que $x_0 \equiv x_i \pmod{p_i}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, entonces $x_0(x_0 + 2k) \equiv x_i(x_i + 2k) \not\equiv 0 \pmod{p_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Ahora, al no dividir a algún primo de la factorización en primos de m, x_0 y $x_0 + 2k$ son primos relativos y su diferencia es $2k$, como se buscaba.

Solución del problema 5. Sean R la intersección de AD y BE, S la intersección de AC y BD, T la intersección de CE y AD. Dado que triángulos correspondientes en pentágonos regulares son semejantes, tenemos que los triángulos PQR y CAD son semejantes. Pero, como los triángulos CAD y PAR son semejantes, tenemos que los triángulos PQR y PAR también son semejantes.

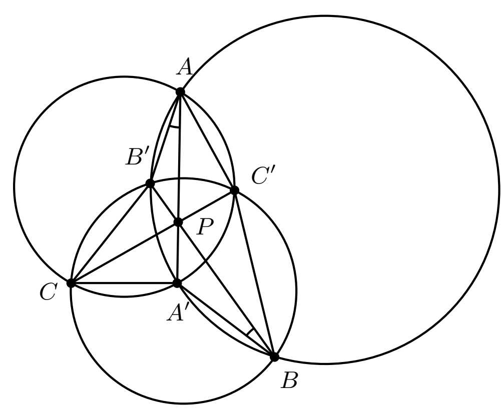


Por lo tanto, el área del cuadrilátero $APQD$ la podemos calcular como sigue.

$$(APQD) = \frac{(APQD)}{(ACEBD)} = \frac{2(APR) + (PQR) + (RQT)}{5(APR) + (PQR) + 2(RQT)} = \frac{3(APR) + (RQT)}{6(APR) + 2(RQT)},$$

de donde se sigue que $(APQD) = \frac{1}{2}$. (Nota: Los paréntesis denotan área).

Solución del problema 6. Los segmentos AA', BB' y CC' concurren en un punto P, el centro radical de C_1, C_2 y C_3. Por el cuadrilátero cíclico $AB'A'B$ se tiene que $\angle B'AP = \angle PBA'$, de donde los triángulos $AB'P$ y $BA'P$ son semejantes y, por lo tanto, $\frac{AB'}{BA'} = \frac{AP}{BP}$. De manera análoga se tiene $\frac{CA'}{AC'} = \frac{CP}{AP}$ y $\frac{BC'}{CB'} = \frac{BP}{CP}$. Multiplicando estas tres igualdades obtenemos que $\frac{AB'}{BA'} \cdot \frac{CA'}{AC'} \cdot \frac{BC'}{CB'} = \frac{AP}{BP} \cdot \frac{CP}{AP} \cdot \frac{BP}{CP} = 1$.



Solución del problema 7. Sea (x, y) un par de enteros que satisface la ecuación $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$. Observemos que $(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$. Si $y^2 + 3y > 0$, entonces $(y+1)^3 > y^3 + 2y^2 + 1 = x^3$. Dado que $y^3 + 2y^2 + 1 > y^3$, se sigue que $x^3 > y^3$ y, por lo tanto, $(y+1)^3 > x^3 > y^3$. De aquí que $y + 1 > x > y$, lo cual no es posible ya que x, y son enteros. Luego, necesariamente $y^2 + 3y \leq 0$, esto es, $-3 \leq y \leq 0$. Como y es entero, los valores posibles de y son $-3, -2, -1$ y 0.

- Si $y = -3$, entonces $x^3 = -8$, de donde $x = -2$.
- Si $y = -2$, entonces $x^3 = 1$, de donde $x = 1$.
- Si $y = -1$, entonces $x^3 = 2$ y no hay soluciones enteras en este caso.
- Si $y = 0$, entonces $x^3 = 1$, de donde $x = 1$.

Por lo tanto, las soluciones son las parejas $(x, y) = (1, 0)$, $(1, -2)$ y $(-2, -3)$.

Solución del problema 8. Por las relaciones de Vieta se tiene que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las raíces del polinomio, entonces $-\frac{a_{n-1}}{a_n} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ y $\frac{a_{n-2}}{a_n} = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$. Combinando estas ecuaciones, obtenemos que

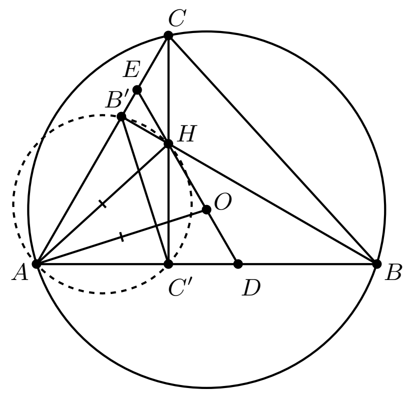
$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n) \\ &= \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right) = 1 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right). \end{aligned}$$

Sin embargo, la fracción del lado derecho es 1 o -1 y el lado izquierdo es un número mayor o igual a cero. Por lo tanto, la única posibilidad es que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 3$. Ahora, $1 = a_0^2 = x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2$. Por la desigualdad MA-MG se obtiene que $3 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq n\sqrt[n]{x_1^2x_2^2 \cdots x_n^2} = n$, de donde los polinomios buscados son de grado a lo más 3. Si el polinomio es de grado tres, entonces ocurre la igualdad en la desigualdad MA-MG, de donde las raíces son iguales en valor absoluto. Pero $x_1x_2x_3 = 1$, entonces son 1 o -1. Es fácil ver que las dos opciones (con sus respectivos negativos) cumplen: $(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x - 1$ y $(x+1)^2(x-1) = x^3 + x^2 - x - 1$. Para el grado dos, con un análisis del discriminante se obtiene que a_2 y a_0 deben tener distinto signo. Los casos con $a_2 = 1$ dejan los polinomios $x^2 - x - 1$ y $x^2 + x - 1$, ambos cumplen, al igual que sus negativos. Por último, los de grado 1 son $x + 1$, $x - 1$ y sus negativos.

Solución del problema 9. Identifiquemos a cada vértice de los triángulos con un vector, partiendo todos desde un origen arbitrario. Puesto que vectorialmente el gravicentro de un trángulo se obtiene de hacer el promedio de los vectores de los vértices, la hipótesis de los gravicentros se traduce en la condición $\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}}{3} = \frac{\overrightarrow{A'}+\overrightarrow{B'}+\overrightarrow{C'}}{3}$, la cual quiere decir que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A'} + \overrightarrow{B'} + \overrightarrow{C'}$, de donde al restar una de la otra obtenemos que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{0}$. Lo anterior implica que efectivamente se forma un triángulo, pues por la desigualdad del triángulo para vectores se puede concluir que $\left|\overrightarrow{AA'}\right| + \left|\overrightarrow{BB'}\right| \geq \left|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right| = \left|-\overrightarrow{CC'}\right| = \left|\overrightarrow{CC'}\right|$ y de manera análoga las demás desigualdades.

Solución del problema 10. Sean H, O y R el ortocentro, el circuncentro y el circunradio, respectivamente, del triángulo ABC. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que OH interseca a AB y a AC en los puntos D y E, respectivamente. Sean B' y C' los pies de las alturas del triángulo ABC desde B y C, respectivamente. Dado que $\angle BB'C = \angle BC'C = 90°$, tenemos que $BCB'C'$ es un cuadrilátero cíclico. Así,

$\angle AB'C' = \angle ABC$. Por tener dos ángulos iguales, los triángulos $AB'C'$ y ABC son semejantes, con razón de semejanza $\frac{AC'}{AC} = \cos(\angle CAB) = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, la razón de semejanza entre los diámetros de los circuncírculos de los triángulos $AB'C'$ y ABC es $\frac{AH}{2R} = \frac{1}{2}$. Es decir, $AH = R = AO$.



Por otra parte, es conocido que $\angle BAO = \angle CAH$, pues AH y AO son isogonales. Como $AH = AO$, entonces $\angle AOH = \angle AHO$; es decir, $\angle AOD = \angle AHE$. Por tener dos ángulos iguales y un lado correspondiente igual, los triángulos AOD y AHE son congruentes; por tanto, $AD = AE$. Dado que $\angle CAB = 60°$, entonces el triángulo ADE es equilátero.

Solución del problema 11. Sean $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots \leq a_m$ los pesos de los cochinos. Como fracción del peso total x, $a_1 + a_2 = \frac{1}{4}x$ y $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = \frac{3}{5}x$. Como $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = \frac{17}{20}$, eso quiere decir que hay 6 o más cochinos y que los restantes deben sumar $\frac{3}{20}$.

Tenemos así, tres grupos: (a_1, a_2) los cochinos pequeños, $(a_3, a_4, \ldots, a_{m-3})$ los cochinos medianos y (a_{m-2}, a_{m-1}, a_m) los cochinos pesados. Si hubieran 2 o más cochinos medianos, el más ligero de ellos (es decir, a_3) pesaría menos o igual que $\frac{3/20}{2} = \frac{3}{40}$. Pero en este caso $a_1 + a_2 \leq \frac{3}{40} + \frac{3}{40} = \frac{6}{40} < \frac{1}{4}$, lo cual muestra que la cantidad de cochinos no puede ser 7 o más. Finalmente, vemos que $m = 6$ sí es posible, tomando $a_1 = a_2 = \frac{1}{8}$, $a_3 = \frac{3}{20}$ y $a_4 = a_5 = a_6 = \frac{1}{5}$.

Solución del problema 12. Sin pérdida de generalidad, supongamos que x es el mayor número real entre x, y y z. Tanto si $z \leq y$, como si $z \geq y$, $y^m - z^m$ y $y^n - z^n$ tienen el mismo signo, es decir, $0 \leq (y^m - z^m)(y^n - z^n)$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x^m - z^m)(x^n - y^n) + (y^m - z^m)(y^n - z^n) \\ &= x^{m+n} + y^{m+n} + z^{m+n} - x^m y^n - y^m z^n - z^m x^n. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} &(x^m - z^m)(x^n - y^n) + (y^m - z^m)(y^n - z^n) \\ &\leq (1^m - z^m)(1^n - y^n) + (y^m - z^m)(y^n - z^n) \\ &= 1 - y^n(1 - y^m) - z^m(1 - z^n) - y^m z^n \leq 1, \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

Solución del problema 13. Consideremos la siguiente numeración de los cuadrados del tablero de 4×4.

1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3
1	2	3	1

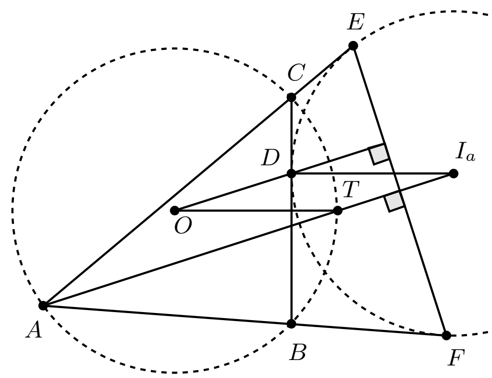
Observemos que un movimiento cambia el color de uno de los cuadrados de cada número. Como hay seis cuadrados numerados con el 1, son necesarios un número par de movimientos para que todos esos cuadrados tengan color negro. Por otro lado, hay cinco cuadrados numerados con el 2; así, son necesarios un número impar de movimientos para que todos estos cuadrados tengan color negro. Por lo tanto, no es posible que todos los cuadrados se vuelvan negros después de alguna secuencia de movimientos.

Solución del problema 14. Supongamos, por contradicción, que un cuadrado divide a n. En particular, si p es un divisor primo del cuadrado que divide a n, entonces n se puede escribir como $n = pa$ con a un entero mayor que uno y con la propiedad de que $p \mid a$. Ahora, observemos que

$$\begin{aligned}(a+1)^n - 1 &= a(a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-1} - 1\\ &= a(a+1)^{n-1} + a(a+1)^{n-2} + (a+1)^{n-2} - 1\\ &\ \vdots\\ &= a(a+1)^{n-1} + a(a+1)^{n-2} + \cdots + a(a+1) + (a+1) - 1\\ &= a((a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2} + \cdots + (a+1) + 1).\end{aligned}$$

Dado que $a+1 \equiv 1 \pmod p$, tenemos que $(a+1)^{n-1}+(a+1)^{n-2}+\cdots+(a+1)+1 \equiv n \equiv 0 \pmod p$, de donde se sigue que n divide a $(a+1)^n - 1 \in A$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, ningún cuadrado divide a n, esto es, n es libre de cuadrados.

Solución del problema 15. Sea I_a el centro de k. Además, sea T el punto de intersección de AI_a con el circuncírculo del triángulo ABC. Como AI_a es la bisectriz del triángulo ABC, entonces T es el punto medio del arco $\widehat{BC}$. Por ser ángulos centrales, $\angle BOT = \angle TOC$. Como $OB = OC$ por ser radios, el triángulo OBC es isósceles. Entonces, OT es una altura del triángulo OBC, en particular, OT es perpendicular a BC.
Por hipótesis I_aD es perpendicular a BC y $OT = I_aD$, entonces I_aD y OT son paralelas y tienen la misma longitud. Por lo tanto, ODI_aT es un paralelogramo, lo que implica que OD es paralela a AI_a.



Ahora, AF y AE tienen la misma longitud por ser las tangentes a una circunferencia desde un mismo punto. Dado que el triángulo AFE es isósceles y que AI_a es su bisectriz hacia el lado posiblemente desigual, entonces AI_a es perpendicular a EF. Como OD es paralela a AI_a, se concluye que OD es perpendicular a EF.

Solución del problema 16. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b \leq c$. Como a y b son positivos, tenemos que $a + b + c > c$. Además, como c es el mayor de los tres enteros, también tenemos que $a + b + c \leq 3c$. Luego, $c < a + b + c \leq 3c$. Dado que $a + b + c$ debe ser múltiplo de c, tenemos dos posibilidades: $a + b + c = 2c$ o $a + b + c = 3c$.

a) Si $a + b + c = 3c$, entonces a, b y c deben ser todos iguales, ya que de lo contrario, tendríamos que $a + b + c < 3c$ (si $a \neq b$, por ejemplo, entonces $a < b \leq c$). Luego, $\text{mcd}(b, c) = \text{mcd}(c, c) = c$. Como $\text{mcd}(b, c)$ debe ser 1, se sigue que $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ y es fácil ver que esta terna satisface el problema pues $\text{mcd}(1, 1) = 1$ y 1 es divisor de $1 + 1 + 1$.

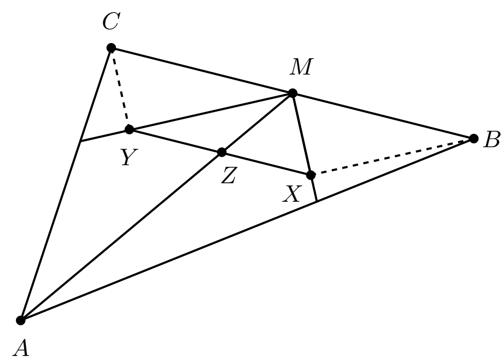
b) Si $a + b + c = 2c$, entonces $a + b = c$. Sabemos que b debe ser un divisor de $a + b + c = 2a + 2b$. Como $a > 0$, obtenemos que $2a + 2b > 2b$. Dado que $b \geq a$, tenemos que $2a + 2b \leq 4b$ y, como $2a + 2b$ debe ser múltiplo de b, solo hay dos posibilidades: $2a + 2b = 3b$ o $2a + 2b = 4b$.

   I) Si $2a + 2b = 3b$, entonces $b = 2a$. De manera análoga al primer caso, obtenemos que $a = \text{mcd}(a, 2a) = \text{mcd}(a, b) = 1$. Luego, $b = 2$ y $c = a + b = 3$. La terna resultante $(a, b, c) = (1, 2, 3)$ satisface el problema puesto que $\text{mcd}(1, 2) = \text{mcd}(1, 3) = \text{mcd}(2, 3) = 1$ y $1 + 2 + 3 = 6$ es múltiplo de 1, 2 y 3.

   II) Si $2a + 2b = 4b$, entonces $a = b$. Luego, $a = \text{mcd}(a, a) = \text{mcd}(a, b) = 1$. Como $b = a = 1$, se sigue que $c = a + b = 2$ y, en consecuencia, $(a, b, c) = (1, 1, 2)$. Esta terna satisface el problema puesto que $\text{mcd}(1, 1) = \text{mcd}(1, 2) = 1$ y $1 + 1 + 2 = 4$ es múltiplo de 1 y 2.

Concluimos que las soluciones con $a \leq b \leq c$ son $(a,b,c) = (1,1,1)$, $(1,1,2)$ y $(1,2,3)$. Permutando los valores de a, b y c, obtenemos un total de diez ternas (a,b,c) que satisfacen el problema: $(1,1,1)$, $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ y $(3,2,1)$.

Solución del problema 17. Observemos que $\angle CMY = \frac{1}{2}\angle CMA = \frac{1}{2}(180° - \angle AMB) = 90° - \angle XMB$. Dado que $\angle MXB = 90°$, tenemos que $\angle CMY = 90° - \angle XMB = \angle MBX$. Ahora, en los triángulos CMY y MBX, tenemos que $\angle CMY = \angle MBX$, $\angle MYC = 90° = \angle BXM$ y $CM = MB$, esto es, son triángulos congruentes (por el criterio LAA). En particular, tenemos que $MX = CY$ y $MY = BX$.



Fijémonos ahora en el triángulo XYM. Ya sabemos que $MY = BX$ y que $\angle YMX = \angle YMA + \angle AMX = \frac{1}{2}\angle CMA + \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Como los triángulos XYM y MBX también comparten el lado MX, son congruentes (por el criterio LAL). En particular, tenemos que $\angle MXY = \angle XMB$. Dado que MX es bisectriz del ángulo $\angle AMB$, obtenemos que $\angle XMB = \angle AMX$. Esto implica que el triángulo MXZ tiene dos ángulos iguales y, por lo tanto, es isósceles con ángulo posiblemente desigual en el vértice Z. Luego, $MZ = XZ$.
De manera análoga, se demuestra que los triángulos XYM y CMY son congruentes y, por lo tanto, $\angle XYM = \angle CMY = \angle YMA$. Así, el triángulo MYZ es isósceles con ángulo posiblemente desigual en el vértice Z. Esto implica que $YZ = MZ$. En conclusión, $YZ = MZ = XZ$, esto es, Z es el punto medio de XY.

Solución del problema 18. Para cualesquiera índices distintos, i, j con $i < j$, tenemos que $a_j - a_i \mid a_j$ (pues como $a_j - a_i$ divide a a_i y también a $a_j - a_i$, se sigue que $a_j - a_i$ divide a la suma $a_i + (a_j - a_i) = a_j$) y $a_j > a_j - a_1 > a_j - a_2 > \cdots > a_j - a_i$. Por otro lado, todos los términos anteriores son divisores de a_j, de manera que si los divisores de a_j en orden decreciente son $a_j > b_1 > b_2 > \cdots > b_k$, entonces $a_j - a_i \leq b_i$. Puesto que $b_i \leq \frac{a_j}{i+1}$, tenemos que $a_j - a_i \leq \frac{a_j}{i+1}$, lo cual implica que $(i+1)(a_j - a_i) \leq a_j$. Por lo tanto, $ia_j \leq (i+1)a_i \leq ja_i$.

Solución del problema 19. Notemos que

$$p(x) = ax^2 + bx + c = \frac{x(1+x)}{2}p(1) - \frac{x(1-x)}{2}p(-1) + (1-x^2)p(0),$$

pues $\frac{x(1+x)}{2}p(1) = \frac{x+x^2}{2}(a+b+c)$, $\frac{x(1-x)}{2}p(-1) = \frac{x-x^2}{2}(a-b+c)$ y $(1-x^2)p(0) = (1-x^2)c = c - cx^2$.
Si $0 \leq x \leq 1$, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned}|ax^2+bx+c| &\leq \frac{x(1+x)}{2}|p(1)| + \frac{x(1-x)}{2}|p(-1)| + (1-x^2)|p(0)| \\ &\leq \frac{x(1+x)}{2} + \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) \\ &= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \leq \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Si $-1 \leq x \leq 0$, por la desigualdad del triángulo, tenemos que

$$\begin{aligned}|ax^2+bx+c| &\leq -\frac{x(1+x)}{2}|p(1)| - \frac{x(1-x)}{2}|p(-1)| + (1-x^2)|p(0)| \\ &\leq -\frac{x(1+x)}{2} - \frac{x(1-x)}{2} + (1-x^2) \\ &= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \leq \frac{5}{4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ para todo x del intervalo $[-1, 1]$.

Solución del problema 20. Sean x, y, z enteros distintos que satisfacen la ecuación $(x-y)(y-z)(z-x) = x + 4y + 7z$. Si x, y, z dejan diferente residuo cuando se dividen por 3, entonces $(x-y)(y-z)(z-x) \not\equiv 0 \pmod 3$; mientras que $x+4y+7z \equiv x+y+z \equiv 0+1+2 \equiv 0 \pmod 3$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, al menos dos residuos son iguales y, en consecuencia, el producto $(x-y)(y-z)(z-x)$ es múltiplo de 3.
Sean r_1, r_2, r_3 los residuos que se obtienen al dividir a x, y, z por 3, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}(x-y)(y-z)(z-x) \equiv 0 \pmod 3 &\iff x + 4y + 7z \equiv 0 \pmod 3 \\ &\iff x + y + z \equiv 0 \pmod 3 \\ &\iff r_1 = r_2 = r_3,\end{aligned}$$

pues al menos dos residuos son iguales. Por lo tanto, $x \equiv y \equiv z \pmod 3$ y $(x-y)(y-z)(z-x) \equiv 0 \pmod{27}$. Escribamos, $x = y+3a$, $y = z+3b$ y $(x-y)(y-z)(z-x) = 27k$ para ciertos enteros a, b, k. Entonces, $27k = 3a(3b)(-(3a+3b)) = -27ab(a+b)$, esto es, $-ab(a+b) = k$. Como los enteros x, y, z son distintos, ninguno de los enteros a, b o $a+b$ es igual a 0. Si $|a| = |b| = 1$, entonces $a+b$ es par. Como $a+b$ no es cero, tenemos que $|a+b| \geq 2$. Así, $|k| = |a||b||a+b| \geq 2$. El valor $|k| = 2$ se puede obtener considerando $a = 1$ y $b = 1$, lo cual implica que $x = 0$, $y = -3$ y $z = -6$. Por lo tanto, el valor mínimo de $|x+4y+7z|$ es $|-12-42| = 54$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2017 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones.

Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean x, y números reales diferentes de 0 tales que $x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = x^3y^3$. Determina todos los valores posibles de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Problema 2. Dado un círculo con centro O y un punto exterior S, sean P y Q los puntos de tangencia de las tangentes que pasan por S. La recta S corta al círculo en A y B con B más cerca de S. Sea X un punto interior del arco menor $\widehat{PB}$ y sean C y D las intersecciones de QX y PX con OS, respectivamente. Prueba que

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}.$$

Problema 3. Sea $P(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes enteros que satisface lo siguiente:

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \text{ para cada } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Encuentra el valor de $P(m)$ para cada entero $m > n$.

Problema 4. Un examen tiene 5 preguntas de opción múltiple, cada una con 4 opciones. Si 2000 estudiantes presentan el examen, encuentra el menor entero positivo n para el cual es posible que, si se escogen n estudiantes al azar, existan siempre 4 de ellos de manera que cualquier par de esos cuatro tenga a lo más tres respuestas iguales.

Problema 5. Determina el mayor entero positivo n tal que la suma

$$\lfloor\sqrt{1}\rfloor + \lfloor\sqrt{2}\rfloor + \lfloor\sqrt{3}\rfloor + \cdots + \lfloor\sqrt{n}\rfloor$$

sea un número primo. (Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. El incírculo ω del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. La recta perpendicular a BC desde C interseca a EF en el punto M. De manera similar, sea N el punto de intersección entre la perpendicular de BC desde B con la recta EF. La recta DM interseca de nuevo a ω en el punto P. Análogamente, sea Q el segundo punto de intersección de DN con ω. Demuestra que $DP = DQ$.

Problema 7. Sean a, b y c números reales positivos tales que $abc \geq 1$. Demuestra que

$$\frac{1}{a^3 + 2b^3 + 6} + \frac{1}{b^3 + 2c^3 + 6} + \frac{1}{c^3 + 2a^3 + 6} \leq \frac{1}{3}.$$

Problema 8. Sean ω_a, ω_b y ω_c tres circunferencias que son tangentes exteriormente por pares. El triángulo ABC contiene en su interior a ω_a, ω_b y ω_c de manera que BC es tangente común de ω_b y ω_c, CA es tangente común de ω_c y ω_a, AB es tangente común de ω_a y ω_b. Si los puntos de contacto de los pares de circunferencias (ω_b, ω_c), (ω_c, ω_a) y (ω_a, ω_b) son A', B' y C', respectivamente, demuestra que AA', BB' y CC' concurren.

Problema 9. En una ciudad con n personas se sabe que si dos personas se conocen, entonces no tienen a ningún conocido en común. También se sabe que si dos personas no se conocen, entonces esas dos personas tienen exactamente dos conocidos en común. Demuestra que hay un número k fijo tal que cada persona en la ciudad conoce a exactamente k personas.

Problema 10. Sea G una gráfica con $n \geq 4$ vértices y m aristas. Demuestra que si $m > \frac{n(\sqrt{4n-3}+1)}{4}$, entonces G contiene un 4-ciclo, esto es, un ciclo de longitud 4.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2017 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2017. En esta ocasión felicitamos a Germán Puga Castillo por habernos enviado su solución al problema 8 y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2017, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. La banda de los 5 piratas y su capitán, se repartieron un botín como sigue: el primer pirata tomó la mitad de los doblones de oro, el segundo pirata tomó la tercera parte de los doblones restantes, el siguiente pirata tomó la cuarta parte de los doblones sobrantes, y así sucesivamente. Al final, quedaron 10 doblones que tomó el capitán. ¿Cuántos doblones de oro había en el botín?

Solución. Una forma de resolver este problema es "trabajando hacia atrás". Si al final el capitán recibió 10 doblones y el último pirata tomó la sexta parte de lo que había, ello quiere decir que 10 doblones son $\frac{5}{6}$ de lo que había antes que tomara su quinta parte el último pirata, es decir, habían 12 doblones. Pero, si el cuarto pirata tomó la quinta parte de lo que había y dejó 12 doblones, quiere decir que 12 doblones son $\frac{4}{5}$ de lo que había antes de que el cuarto pirata tomara su parte, por tanto, habían 15 doblones. El tercer pirata tomó la cuarta parte y dejó 15 doblones, de modo que 15 es $\frac{3}{4}$ de la cantidad de doblones que había antes de que el tercer pirata tomara su parte, por lo que habían 20 doblones. Continuando este proceso vemos que había 30 doblones antes que el segundo pirata tomara su parte. Por lo tanto, al inicio del proceso habían 60 doblones.

Problema 2. Sean m y n enteros positivos. Si $2^m - 2^n = 1792$, ¿cuánto vale $m^2 + n^2$?

Solución. Dado que $2^m - 2^n = 2^n(2^{m-n} - 1) = 1792$, tenemos que n es el número de factores 2 en la factorización en primos de 1792. Como $1792 = 2^8 \cdot 7$, entonces $n = 8$. Luego, $2^{m-n} - 1 = 2^{m-8} - 1 = 7 = 2^3 - 1$, por lo que $m = 11$. Concluimos que $m^2 + n^2 = 11^2 + 8^2 = 121 + 64 = 185$.

Problema 3. Demuestra que el número de enteros positivos de 10 dígitos que tienen la propiedad de que cada dígito es divisor de 2016, es un cubo perfecto.

Solución. De la factorización $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ obtenemos que los únicos dígitos posibles son $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Como no hay restricción en las repeticiones, la cantidad total de números es $8^{10} = (2^3)^{10} = (2^{10})^3$, que es un cubo perfecto.

Problema 4. Encuentra todos los números enteros positivos n tales que el producto de sus dígitos es igual a $n^2 - 10n - 22$.

Solución. Supongamos que $n = 10^m \cdot d_m + 10^{m-1} \cdot d_{m-1} + \cdots + 10 \cdot d_1 + d_0$ con $d_0, d_1, \ldots, d_m$ dígitos. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} n &= 10^m \cdot d_m + 10^{m-1} \cdot d_{m-1} + \cdots + 10 \cdot d_1 + d_0 \\ &\geq d_m \cdot 10^m \\ &\geq d_m \cdot d_{m-1} \cdots d_1 \cdot d_0 = n^2 - 10n - 22, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad es cierta porque $d_0, d_1, \ldots, d_m$ son dígitos. Entonces, los números n que buscamos deben cumplir $n^2 - 11n - 22 \leq 0$. Las raíces del polinomio $x^2 - 11x - 22$ son $x_1 = \frac{11-\sqrt{209}}{2}$ y $x_2 = \frac{11+\sqrt{209}}{2}$, así los números enteros positivos que satisfacen la desigualdad pedida son los números del 1 al 12. Ahora, los números del 1 al 9 no cumplen lo pedido pues se tendría que $x = d_1 = x^2 - 10x - 22$ y estos deberían ser raíces del polinomio $x^2 - 11x - 22$, pero ya vimos cuáles son las raíces de este polinomio. Por último, de 10, 11 y 12 es fácil ver que el único que cumple la condición es 12 pues $12^2 - 10(12) - 22 = 2 = 1 \cdot 2$.

Problema 5. Demuestra que en un conjunto de 10 números enteros positivos distintos de dos dígitos, siempre es posible encontrar dos subconjuntos disjuntos que tienen la misma suma.

Solución. Sabemos que en un conjunto de 10 elementos hay $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos distintos no vacíos. Además, cada suma de los elementos de un subconjunto debe ser un número entre 10 y $90+91+92+93+94+95+96+97+98+99 = 945$. Como hay $945 - 10 + 1 = 936$ sumas posibles, por el principio de las casillas, deben existir dos subconjuntos distintos A y B con la misma suma. Finalmente, es fácil ver que dos conjuntos que satisfacen el problema son $A - (A \cap B)$ y $B - (A \cap B)$.

Problema 6. Determina todas las ternas de enteros positivos (a, b, c), con $a \leq b \leq c$, que satisfacen la igualdad

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

Solución. Si $a = 1$, la igualdad $2(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 2$ no es posible, pues $1 + \frac{1}{b} > 1$ y $1 + \frac{1}{c} > 1$, así el lado izquierdo es mayor que 2.
Si $a \geq 4$, entonces $c \geq b \geq a \geq 4$; por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64} < 2.$$

Luego, $a = 2$ o $a = 3$.
Si $a = 2$, entonces $(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = \frac{4}{3}$, esto es, $4bc = 3(b+1)(c+1)$. Simplificando obtenemos que $bc = 3b + 3c + 3$. Esto implica que $(b - 3)(c - 3) = 12$. Como $c \geq b \geq a \geq 2$, tenemos que $c - 3 \geq b - 3 \geq -1$ y claramente $(-1)(-1) \neq 12$. Además $b - 3 \neq 0$ y $c - 3 \neq 0$. Luego, $c - 3 \geq b - 3 \geq 1$. De esta manera tenemos

que $(b-3, c-3) = (1,12), (2,6), (3,4)$, de donde se sigue que las ternas (a,b,c) con $a \leq b \leq c$ son, en este caso, $(2,4,15)$, $(2,5,9)$ y $(2,6,7)$.
Si $a = 3$, entonces $(1+\frac{1}{b})(1+\frac{1}{c}) = \frac{3}{2}$, esto es, $3bc = 2(b+1)(c+1)$. Simplificando obtenemos que $bc = 2b+2c+2$. Esto implica que $(b-2)(c-2) = 6$. Como $c \geq b \geq a \geq 3$, tenemos que $c-2 \geq b-2 \geq 1$. Luego, $(b-2, c-2) = (1,6)$ o $(2,3)$, de donde se sigue que las ternas (a,b,c) con $a \leq b \leq c$ son, en este caso, $(3,3,8)$ y $(3,4,5)$.
Por lo tanto, las soluciones son $(a,b,c) = (2,4,15)$, $(2,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,3,8)$ y $(3,4,5)$.

Problema 7. Sea n un entero positivo. Diego escribe n enteros positivos distintos. Juan borra algunos de los números (puede no borrar números o borrarlos todos), coloca un signo $+$ o $-$ enfrente de cada uno de los números y suma todos los enteros con signo. Juan gana si el resultado no es cero y 2017 lo divide, en otro caso gana Diego. ¿Quién tiene una estrategia ganadora?

Solución. Para $n \leq 10$ Diego tiene una estrategia ganadora, le basta con escribir los números $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$. Funciona porque los resultados que Juan puede obtener al borrar números y colocar signos, son enteros entre -1023 y 1023. Basta con observar que el resultado tendrá el mismo signo del número más grande que no sea borrado ya que $2^j > 2^j - 1 = \sum_{k=0}^{j-1} 2^k$, para todo entero positivo j.
Para $n \geq 11$ el conjunto C de números que escribe Diego tiene $2^n - 1 > 2017$ diferentes subconjuntos no vacíos. Entonces, el principio de las casillas garantiza que las sumas de los elementos de dos de dichos subconjuntos, que se pueden denotar como A y B, son congruentes módulo 2017. Además, podemos asumir que los elementos de A y de B son distintos, pues bastaría eliminar la intersección en ambos conjuntos (uno de los conjuntos puede ser vacío). Si Juan coloca el signo $+$ delante de los números de A, coloca el signo $-$ delante de los números de B y borra el resto de los elementos de C, entonces gana. Por tanto, si $n \geq 11$, Juan tiene estrategia ganadora.

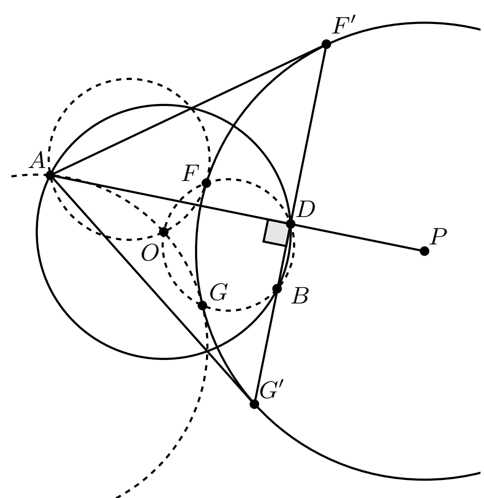
Problema 8. Un conjunto finito C de enteros positivos se llamará *bueno* si para cada entero k, existen $a, b \in C$, $a \neq b$, tales que los números $a+k$ y $b+k$ no son coprimos. Demuestra que si la suma de los elementos de un conjunto bueno C es 2017, entonces existe un elemento $c \in C$ para el cual el conjunto $C - \{c\}$ es bueno.

Solución de Germán Puga Castillo. Sea C un conjunto bueno. Dado que los elementos de C son positivos y suman 2017, la diferencia entre cualesquiera dos elementos de C es menor a 2017. Así, cualquier primo que divida alguna de estas diferencias debe ser menor a 2017.
Sea n un entero positivo. Diremos que C es n-completo si para todo entero $0 \leq l < n$ existen x y y enteros distintos en C tales que $x \equiv y \equiv l \pmod{n}$. Sea P el conjunto de números primos menores a 2017. Mostraremos que para algún p en P, C es p-completo. Supongamos que no, entonces para cada t en P existe algún residuo $C(t)$ módulo t para el cual no hay dos elementos en C tales que son congruentes a $C(t)$ en módulo t. Por el teorema chino del residuo, existe un entero K tal que $-K \equiv C(t) \pmod{t}$ para todo t en P. Por hipótesis, existen a y b en C tales que $a+K$ y $b+K$ tienen un factor en común. Así, ese mismo factor divide a $|a-b|$; luego,

existe r en P tal que $a \equiv b \equiv -K \equiv C(r) \pmod{r}$, lo que es una contradicción a como tomamos $C(r)$.
Sea p en P tal que C es p-completo. Notemos que C tiene por lo menos $2p$ elementos, ya que hay dos elementos por cada clase residual. Además, ya que cada entero n lo podemos asociar a su clase residual (mod p), se pueden escoger los dos enteros a y b en C que se asocian al residuo $-n$ para que p divide a $n+a$ y $n+b$. Así, los $2p$ elementos forman un conjunto bueno, denotémoslo con N.
Demostremos que C no puede tener exactamente $2p$ elementos. En efecto, si $|C| = 2p$, entonces la suma de sus elementos sería congruente a $2(1+2+\cdots+p) = p(p+1) \equiv 0 \pmod{p}$. Pero, la suma de los elementos de C es 2017; luego, p es un factor de 2017 y, como este es primo, $p = 2017$, lo que contradice que p esté en P.
Por el principio de las casillas, hay tres elementos de C que están en una misma clase residual de p. Por lo tanto, podemos quitar uno de estos elementos de C y considerar los $2p$ elementos que quedan para construir N como antes y terminar.

Problema 9. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias con centros O y P, respectivamente. Supón que las circunferencias se intersecan en los puntos X e Y de forma que $\angle OXP = \angle OYP = 90°$. Sea AB un diámetro de Γ_1 tal que B está dentro de Γ_2. Las dos circunferencias que son tangentes a Γ_2 y que pasan por O y A tocan a Γ_2 en F y G. Demuestra que $FGOB$ es cíclico.

Solución. Consideremos la inversión con respecto a Γ_1. Como Γ_1 y Γ_2 son ortogonales (pues $\angle OXP = 90°$), Γ_2 se invierte en sí misma. Entonces, el circuncírculo del triángulo AFO se invierte en una recta tangente a Γ_2 por F' y A, donde F' es el inverso de F. Análogamente, AG' es tangente a Γ_2, donde G' es el inverso de G.



Por otro lado, si se invierte con respecto a Γ_2, el inverso de A se calcula como el punto medio del segmento formado por los puntos de tangencia desde A que son justamente F' y G'. Supongamos que D es el punto medio de F' y G'. Tenemos que D debe estar sobre Γ_1, pues esta circunferencia es ortogonal a Γ_2. Como $\angle ADB = 90°$ (por ser

AB un diámetro), tenemos que los puntos B, D, G' y F' están en una recta. De la inversión respecto a Γ_1, concluimos que $FOGB$ es cíclico.

Problema 10. Un conjunto de enteros positivos con al menos tres elementos se llama *uniforme* si el conjunto que queda al remover cualquiera de sus elementos se puede dividir en dos subconjuntos que satisfacen que las sumas de sus elementos son iguales. ¿Cuál es el menor número de elementos que puede tener un conjunto uniforme? Nota: como consideramos el conjunto, no hay dos elementos iguales.

Solución. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto uniforme. Sea $S = a_1+a_2+\cdots+a_n$. Por la condición del problema se sabe que $S - a_i$ es par para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Si S es par, entonces todos los elementos de A son pares. Así, $a_i = 2b_i$, con b_i número entero para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. El hecho de que A sea uniforme implica que B también lo será, con los subconjuntos correspondientes, donde B es el conjunto de los enteros b_i. Luego, se puede asumir que S es impar, lo que implica que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ también son impares. Como la suma de una cantidad par de números impares es par, entonces n es impar.
Se demostrará que $n = 7$. Un análisis directo de los casos demuestra que el conjunto $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ es uniforme. Los conjuntos con tres elementos no son uniformes porque al quitar uno los otros dos deberían ser iguales. Resta demostrar que no hay conjuntos uniformes de cinco elementos. Supongamos que $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ es un conjunto uniforme y que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$. Al considerar el conjunto $A - \{a_1\}$, la condición de uniformidad garantiza que $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ o que $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$. Si se considera el conjunto $A - \{a_2\}$, se obtiene que $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$ o que $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$.

- Si $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ y $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$, entonces $a_1 = a_2$.
- Si $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ y $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$, entonces $a_1 = -a_2$.
- Si $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$ y $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$, entonces $a_1 = -a_2$.
- Si $a_2 + a_3 + a_4 = a_5$ y $a_1 + a_3 + a_4 = a_5$, entonces $a_1 = a_2$.

Dado que todas las opciones anteriores llevan a una contradicción, se puede concluir que no existe un conjunto uniforme de cinco elementos.

Concursos Estatales

3ª Olimpiada Regional de Matemáticas del Sureste

Del 6 al 8 de octubre de 2017, previo al concurso nacional de la XXXI Olimpiada Mexicana de Matemáticas, se llevó a cabo en Cancún, Quintana Roo, la 3^a olimpiada regional de matemáticas del sureste, con la participación de 37 alumnos provenientes de Campeche, Chiapas, Quintana Roo, Tabasco y Yucatán.
A continuación listamos los nombres de los alumnos que obtuvieron medalla en orden de puntuación de mayor a menor.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Fabián Domínguez López	Chiapas	Oro
Manuel Guillermo Flota López	Yucatán	Oro
Rodrigo Jesús Pantoja Vázquez	Yucatán	Oro
Ricardo de Jesús Balam Ek	Yucatán	Oro
Jordi de Jesús Oseguera Martínez	Chiapas	Plata
Sofía Ingigerth Cañas Urbina	Chiapas	Plata
Miguel Yair Márquez Reyes	Yucatán	Plata
Nínive Montserrat Aguilar Trujillo	Chiapas	Plata
Luis Mario Pérez Saldaña	Quintana Roo	Plata
José Luis Salomón Castillo	Tabasco	Plata
Marien Ordoñez Rodríguez	Chiapas	Bronce
Ángel Gabriel Jiménez Isidro	Tabasco	Bronce
Román Emiliano Mandrujano González	Campeche	Bronce
Ricardo Iván González Franco	Quintana Roo	Bronce
Carlos Samuel Corzo Ruiz	Chiapas	Bronce
Erick Fernando Eudave Valdivia	Tabasco	Bronce
Guillermo Salvador Calderón López	Quintana Roo	Bronce
Jael Saraí Cámara Caballero	Yucatán	Bronce
Juan Josué Méndez Espina	Chiapas	Bronce

A continuación presentamos los problemas de la 3^a Olimpiada Regional de Matemáticas del Sureste. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. Sea ABC un triángulo y $\mathcal{C}$ su circuncírculo. Sea D un punto de $\mathcal{C}$ en el arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A, diferente de B y C de tal manera que CD y AB no son paralelas. Sean E la intersección de CD con AB y O el circuncentro del triángulo DBE. Demuestra que la medida del ángulo $\angle OBE$ no depende de la elección de D.

Problema 2. En la liga local de fútbol de Cancún participan 30 equipos. Para este torneo se quiere dividir a los 30 equipos en dos grupos de manera que:

1) Cada equipo juegue exactamente 82 partidos.

2) El número de partidos entre equipos de diferentes grupos es igual a la mitad de partidos jugados en total.

¿Es posible realizar esto?

Problema 3. Sea p un número primo de la forma $3k+2$ tal que a^2+ab+b^2 es divisible por p para algunos enteros a y b. Demuestra que a y b son ambos divisibles por p.

Segundo día

Problema 4. Encuentra todas las parejas de enteros positivos m y n tales que

$$n! + 5 = m^3.$$

Problema 5. Considera un triángulo acutángulo ABC con circuncentro O. Una circunferencia que pasa por B y O interseca a los lados BC y AB en los puntos P y Q, respectivamente. Demuestra que el ortocentro del triángulo OPQ está sobre AC.

Problema 6. Considera $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ y $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ para $n \geq 2$. Determina si existe $n \leq 1000001$ tal que los últimos tres dígitos de f_n son cero.

Concurso Nacional de la 1$^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica

Del 15 al 18 de junio de 2017 se llevó a cabo, en Oaxtepec, Morelos, la 1^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas de Educación Básica (OMMEB) en los niveles de primaria y secundaria, con la participación de 192 estudiantes representando a 23 entidades federativas. Cada equipo estuvo integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes. La OMMEB está compuesta de tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria o una institución equivalente.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente.

Hay dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El nivel I de la prueba individual constó de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Cada problema tuvo un valor de 5 puntos y solo la respuesta final es necesaria para obtener los puntos correspondientes. No se dan puntos parciales y no hay penalización por respuesta incorrecta.
Los niveles II y III de la prueba individual constaron de 15 problemas para resolver en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes. La parte A consiste de 12 problemas de 5 puntos cada uno, en los cuales solo la respuesta es requerida. En esta parte no hay puntos parciales y no hay penalización por respuesta incorrecta. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre de 20 puntos cada uno, donde se pueden otorgar puntos parciales.
En los tres niveles, la prueba por equipos consistió de 8 problemas, de 40 puntos cada uno, a resolver en 70 minutos.

De manera individual, se otorgaron medallas de oro, plata y bronce, así como menciones honoríficas a $\frac{2}{3}$ de los participantes, aproximadamente en razón $1 : 2 : 3 : 4$. También se otorgaron medallas de oro, plata y bronce a los mejores equipos de cada categoría.

Los 5 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel I fueron:

Eduardo Calderón Jácquez (Chihuahua).
Rosa V. Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Ana P. Galindo Romero (Morelos).
Fernando Álvarez Ruiz (Nuevo León).
Javier Mena Chávez (Zacatecas).

Los 4 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel II fueron:

Leonardo M. Cervantes Mateos (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Karla R. Munguia Romero (Sinaloa).
Jacobo De Juan Millón (Yucatán).

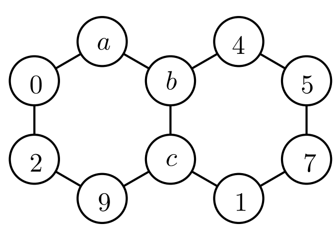
Los 4 alumnos que obtuvieron medalla de oro en el nivel III fueron:

Alberto Sosa Borunda (Chihuahua).
Tomás F. Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Darío Hinojosa Delgadillo (Nuevo León).
Teresa Rojas Rodríguez (Yucatán).

A continuación presentamos los problemas y soluciones del concurso nacional de la 1^a OMMEB.

Prueba individual. Nivel I.

1) Los diez dígitos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ se han colocado cada uno dentro de un círculo de manera que las dos sumas, de los seis números en cada hexágono, son iguales. ¿Cuál es el valor de $b + c - a$?



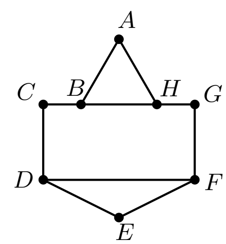
2) En la siguiente operación cada letra representa un dígito entre 0 y 9. ¿Cuánto vale la suma $o + m + m + e + b$?

$$\begin{array}{cccc} o & m & m & e \\ + & b & 3 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}$$

3) Víctor y Vicky compraron un pastel y se lo comieron de la siguiente manera: Una mañana Víctor se comió la mitad del pastel, por la noche Vicky se comió la mitad del pastel que quedaba. Este proceso siguió de la misma manera durante 4 días, comiendo cada uno la mitad del pastel que encontraban. En la mañana del quinto día, Víctor se comió lo que quedaba del pastel. ¿Qué proporción del pastel comió Víctor en los 5 días?

4) Dada la lista de números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ una *sublista* se forma tomando al menos un número de la lista y ordenados de menor a mayor, por ejemplo $1, 2, 8$ es una *sublista*. Encuentra la cantidad de *sublistas* en las que ninguno de los números $2, 3, 5$ o 7 aparecen.

5) La siguiente figura está compuesta por el triángulo equilátero ABH; el rectángulo $CDFG$ y el triángulo isósceles DEF; de manera que $AB = DE$ y $CD = 2BC = 2GH$. Si el perímetro de DEF es 8 y el perímetro de $CDFG$ es 10, ¿Cuál es el perímetro de la figura?



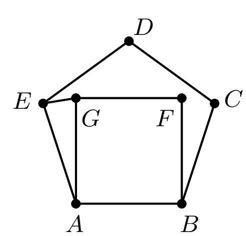
6) Los enteros positivos a, b, c, d, e cumplen con:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e+1}}}} = \frac{268}{187}.$$

Encuentra el valor de $a + b + c + d + e$.

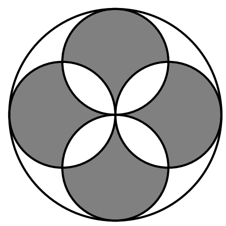
7) Al imprimir un libro, el impresor no incluyó las hojas que tienen páginas que terminan con la cifra 8. Si el total de las cifras de las páginas que no se incluyeron es 230; ¿cuál es el número máximo de páginas que puede tener el libro original?

8) En la siguiente figura, $ABCDE$ es un pentágono regular y $ABFG$ es un cuadrado. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle GED$?



9) El número $100\ldots00200\ldots001$ se formó con un 1 seguido de 2017 ceros, luego un 2, seguido de otros 2017 ceros y al final un 1. ¿Cuántos ceros tiene la raíz cuadrada del número?

10) En la figura siguiente, la circunferencia mayor tiene radio 2 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



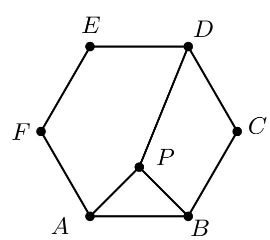
11) A Pedro y a María les dejaron de tarea recortar círculos de cartón en fracciones. María recortó cada círculo en 8 partes. Pedro las recortó en 6 partes. En total recortaron 30 círculos y María terminó con el doble de piezas que Pedro, ¿cuántos círculos recortó María?

12) Las bases de un trapecio miden 18 cm y 8 cm, y los otros dos lados, 8 cm y 6 cm. Encuentra la longitud, en centímetros, del segmento que une los puntos medios de las bases.

13) ¿Cuántos enteros de 2 dígitos existen tales que al multiplicarlos por 3 se obtiene un número de 3 dígitos, todos ellos iguales?

14) Encuentra la cantidad de enteros positivos de 5 dígitos distintos, tales que cada uno de sus tres dígitos intermedios es igual al promedio de sus dos dígitos adyacentes. Un ejemplo de estos números es 12345.

15) Sea $ABCDEF$ un hexágono regular de lado 2 cm. Sea P un punto dentro del hexágono de tal manera que $\angle APB = 90^\circ$ y que $AP = PB$. Encuentra el valor, en cm^2, de DP^2.



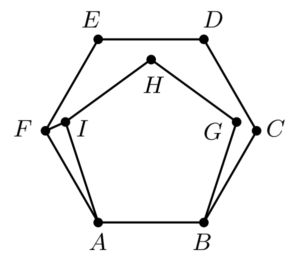
Prueba individual. Nivel II.

Parte A.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con el Problema 4 del Nivel I.

3) En la siguiente figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular y $ABGHI$ es un pentágono regular. ¿Cuál es la medida, en grados, del ángulo $\angle IFE$?



4) Coincide con el Problema 13 del Nivel I.

5) Si se lanzan 3 dados, calcula la probabilidad de que el producto de los números que quedaron boca arriba tenga exactamente dos divisores positivos.

6) Coincide con el Problema 15 del Nivel I.

7) Al realizar la multiplicación $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+2017)$, ¿Cuál es el coeficiente de x^{2016}?

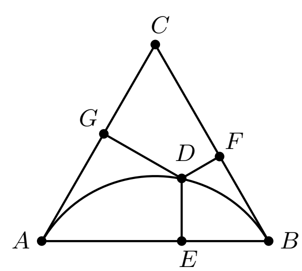
8) Coincide con el Problema 14 del Nivel I.

9) Se escriben en fila los números naturales a partir del 50, excluyendo aquellos que tienen alguna cifra 3:

$$505152545556575859606162 64\ldots$$

¿Qué cifra queda en el lugar 2017?

10) En la siguiente figura, D es un punto sobre el arco AB, los segmentos CA y CB son tangentes al arco en los puntos A y B, respectivamente, y los puntos E, F y G son los pies de las perpendiculares desde D a los lados AD, BC y CA, respectivamente. Si $DG = 9$ cm y $DF = 4$ cm, calcula, en cm, la longitud DE.



11) Encuentra el máximo común divisor de 111444444 y 444111111.

12) Encuentra todos los enteros positivos x, que cumplan la ecuación

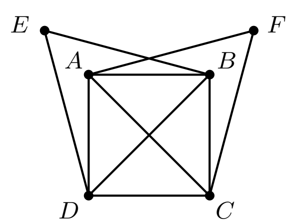
$$x^3 - 2017x - 360 = 0.$$

Parte B.

1) Encuentra la suma de todos los números positivos primos relativos con 100 y que sean menores que 100.

2) Un entero positivo se dice *balanceado* si todos sus dígitos aparecen la misma cantidad de veces. Por ejemplo, 1234, 101022 y 777 son números *balanceados*. Encuentra la cantidad de números balanceados menores a 10^4.

3) Sean $ABCD$ un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ cm y E, F puntos tales que ACF y BDE son triángulos equiláteros. Encuentra la razón del área del cuadrilátero $DCFE$ entre el área del cuadrilátero $ABFE$.

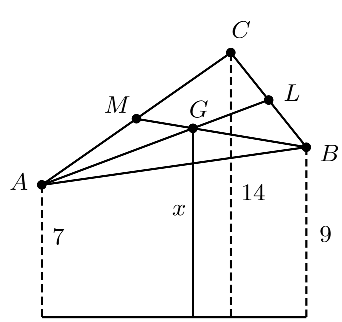


Prueba individual. Nivel III.

Parte A.

1) El número $10!$ tiene 270 divisores positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar uno de ellos al azar, este divisor sea impar?

2) Las distancias desde los tres vértices A, B, C de un triángulo ABC a una recta dada miden 7 cm, 9 cm y 14 cm, respectivamente. Sean L y M los puntos medios de BC y CA, respectivamente, y sea G el punto de intersección de AL y BM. Calcula la distancia, en centímetros, desde G a dicha recta.



3) Coincide con el Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 11 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

7) Coincide con el Problema 10 del Nivel II.

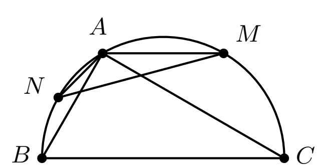
8) Coincide con el Problema 12 del Nivel II.

9) Sea $\mathcal{M}$ el conjunto $1, 2, 3, \ldots, 2017$. Para cada subconjunto $\mathcal{A}$ de $\mathcal{M}$ se denota por $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ a la suma de todos los elementos de $\mathcal{A}$. Calcula el promedio de todos los números $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$.

10) Encuentra todos los números de tres cifras que sean cuadrados perfectos y tales que el número que se obtiene al invertir el orden de sus cifras también sea un cuadrado perfecto.

11) En un autobús van seis pasajeros, cada uno lleva un boleto con número, los 6 números son distintos. Además los números de los boletos cumplen que ninguno es múltiplo de 5 y para cada número de boleto hay exactamente otro, de los cinco restantes, de manera que ese par de números no tiene divisores positivos en común, aparte del 1. ¿Cuál es el número más pequeño que se puede obtener al multiplicar los números de los seis boletos?

12) En el triángulo ABC, el segmento AB mide 1 cm, $\angle BAC = 90°$ y $\angle CBA = 60°$. Además M y N son los puntos medios de los arcos $\widehat{AC}$ y $\widehat{AB}$, respectivamente, de la semicircunferencia. Calcula, en cm^2, el valor del área del triángulo ANM.



Parte B.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel II.

2) Los números enteros positivos a, b y c son distintos y satisfacen que

$$a \mid b + c + bc, \quad b \mid c + a + ca, \quad c \mid a + b + ab.$$

Prueba que al menos uno de los números a, b, c no es primo.

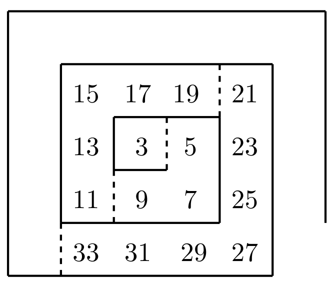
3) El número natural M tiene exactamente 6 divisores positivos cuya suma es 3500. Encuentra todos los valores posibles de M.

Prueba por equipos. Nivel I.

1) Toño fue a la tienda. Tanto Toño como el señor de la tienda tienen solo monedas de 1, 2, 5 y 10 pesos. Toño afirmó: "Puedo pagar con 3 monedas y de cambio recibir 2 monedas de valor distinto a las que usé para pagar". ¿Cuáles son todas las posibles cantidades que puede pagar Toño?. Toma en cuenta que Toño nunca usaría monedas de más, es decir, no usa monedas que al quitarlas, el valor de las monedas restantes siga siendo mayor o igual a la cantidad que debe pagar.

2) Una pulga salta sobre los vértices de un polígono regular de 2017 lados. Los vértices están numerados consecutivamente del 1 al 2017. La pulga inicia en el vértice 6, siempre salta 4 vértices y cae en el quinto más adelante (por ejemplo, del vértice 20 llega al 25), pero se regresa 2 vértices cuando cae en un vértice numerado con una potencia de 2 (por ejemplo, después de un posible salto $27 - 32$, regresa al 30). ¿Después de cuántos saltos la pulga supera por primera vez el 1?

3) Se colocan los números impares $3, 5, 7, 9, \ldots$, siguiendo una espiral como se muestra en la figura. El número 3 quedo en un primer cuadrado de 1×1, al poner el 9 se cerró un segundo cuadrado de 2×2, un tercer cuadrado se cerró al poner el 19. ¿Qué número cierra el cuadrado número 18?



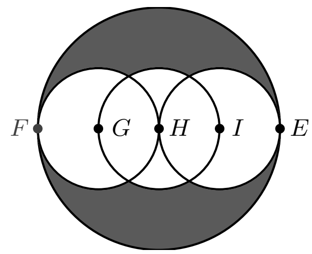
4) Los nadadores Omar, Mario, Miguel, Edgar y Beto van a competir en una carrera de 100 metros libres en una alberca de 5 carriles. Se acomodan en los carriles de forma que:

   1. Beto no nada al lado de Mario, ni de Edgar.
   2. Omar nada en un extremo.
   3. Miguel nada en medio de dos personas y ninguna de ellas es Mario.
   4. Edgar no está en los carriles 2, 3 ni 5.

   Indica en qué carril está cada uno de los competidores.

5) Determina la cantidad máxima de triángulos que tienen sus tres vértices en algunos de los puntos de intersección de 6 rectas y ninguno de sus lados está sobre alguna de las rectas.

6) El diámetro *FE* mide 4 cm y se divide en 4 partes iguales: *FG* $=$ *GH* $=$ *HI* $=$ *IE*. Se trazan circunferencias con diámetros *FH*, *GI* y *HE*. ¿Cuánto mide el área sombreada, en cm^2?



7) Encuentra todos los números múltiplos de 3, de 4 cifras, ninguna de ellas igual a 2 o 4, tales que al dividirlos entre 3, resulte un número de 4 cifras con exactamente las mismas cifras del número original.

8) El número de la casa de Joaquín es el 932. Joaquín se da cuenta que este número cumple las siguientes condiciones:

   a) Todos los dígitos son positivos y aparecen en orden decreciente $(9 > 3 > 2 > 0)$.

   b) La suma de 932 con el número que se obtiene invirtiendo el orden de los dígitos es un número que tiene todos sus dígitos impares $(932 + 239 = 1171)$.

   ¿Cuáles números de 3 dígitos, incluyendo el 932, tienen estas dos propiedades?

Prueba por equipos. Nivel II.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

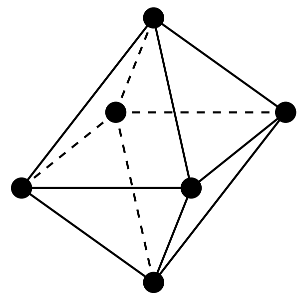
2) Coincide con el Problema 4 del Nivel I.

3) Sean $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ y $A_1A_2B_3 \dots B_nB_{n+1}$ dos polígonos regulares con n y $n+1$ lados, respectivamente, tales que comparten el lado A_1A_2. Además, el polígono $A_1A_2A_3 \dots A_{n-1}A_n$ es interno al polígono $A_1A_2B_3 \dots B_{n-1}B_nB_{n+1}$. Encuentra todos los valores de $n > 3$ tales que

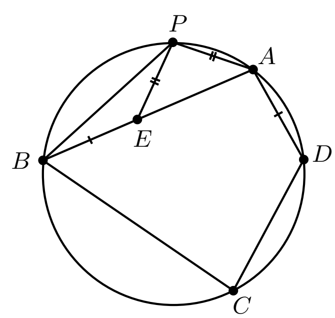
$$\angle A_nB_{n+1}B_n = \frac{\angle A_1B_{n+1}B_n}{3}.$$

4) Coincide con el Problema 8 del Nivel I.

5) Coloca los números del 1 al 8 en las caras del octaedro regular, de manera que se cumpla la siguiente condición: si en cada vértice del octaedro se escribe el producto de los números que están en las 4 caras que lo tocan, entonces la suma de cada pareja de números escritos en vértices opuestos es la misma.



6) Sea $ABCD$ un cuadrilátero con sus vértices sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ y tal que $AB > AD$. Sea E un punto sobre el lado AB tal que $BE = AD$. Sea P un punto sobre la circunferencia $\mathcal{C}$ con $AP = PE$. Muestra que $\angle DCP = \angle PCB$.

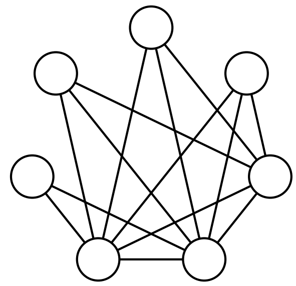


7) Para cada entero positivo n, considera los enteros positivos a y b tales que: a y b no tiene divisores positivos en común diferentes de 1, $ab = n$ y $a + b$ es mínimo (esto último quiere decir que si $n = ab = cd$, entonces $a + b \leq c + d$.) Definimos $f(n) = |s(a) - s(b)|$ donde $s(j)$ representa la suma de los dígitos de j. Calcula la suma $f(1^2 + 1) + f(2^2 + 2) + \cdots + f(2017^2 + 2017)$.

8) Juan escribe un número, entre 1 y 1000 (inclusive). Él reta a su hermano Mario a adivinar qué número escribió. En cada paso, Mario puede hacer preguntas a Juan de la siguiente forma: ¿El número que escribiste es **igual**, **mayor** o **menor** a x?, donde x es cualquier número entre 1 y 1000 que Mario puede escoger en cada paso. Juan deberá responder esta pregunta con la verdad. Mario gana cuando Juan le responde que el número que escribió es **igual** al número x por el cual preguntó Mario. Encuentra una estrategia en la cual Mario tarde a lo más 9 preguntas en ganar, independientemente de qué número escriba Juan.

Prueba por equipos. Nivel III.

1) Coloca los números del 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dentro de los círculos de la siguiente figura, de manera que si dos círculos están conectados con un segmento los números en esos círculos no tienen divisores en común distintos de 1.



2) Encuentra todas las ternas de enteros positivos (x, y, z) tales que

$$x^3 + 3x^2 + z^2 + 2x + 3y = 2018.$$

3) Coincide con el Problema 3 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 6 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

6) Sea P un punto en el plano. Se dibujan n circunferencias de radio 1 tales que P es un punto común a ellas. Encuentra el máximo n de tal manera que no suceda que el centro de alguna de las circunferencias quede en el interior o en el borde de otra de las circunferencias.

7) Para cada entero positivo n que no termine en cero, sea n^* el resultado de escribir los dígitos de n en orden inverso. Por ejemplo $2017^* = 7102$. Sea a un entero positivo de menos de 8 dígitos tal que a^* es distinto de a y denotemos por D al máximo común divisor de los números a y a^*. Se sabe que D es mayor a 2017 y lo dividen al menos tres primos distintos. Halla un valor posible de a.

8) Un entero positivo n es *bueno* si el exponente del 13 en la factorización de primos de $n!$ es distinto de cero y divisible por 13. Encuentra todos los enteros positivos n que sean *buenos* pero que ningún número menor a $n - 13$ lo sea.

Soluciones de la prueba individual. Nivel I.

1) La respuesta es 5.
Igualando las sumas de los números en los hexágonos:

$$a + b + c + 9 + 2 + 0 = b + c + 1 + 7 + 5 + 4$$

se obtiene $a = 6$ y como se deben usar todos los dígitos, tenemos que b y c son 3 y 8 en algún orden. Por lo tanto, $b + c - a = 3 + 8 - 6 = 5$.

2) La respuesta es 24.
Como $e+1 = 7$, entonces $e = 6$. Luego, como $m+3 = 1$, necesitamos que $m = 8$. Esta última operación, nos acarrea 1 para la suma de los dígitos de las centenas, por

lo cual $m+b+1$ debe dar como resultado 0. Como m vale 8, entonces b debe valer 1. Finalmente esta última suma acarrea un 1 a los millares, por lo tanto $o+1=2$ y $o=1$. Así, $o+m+m+e+b=1+8+8+6+1=24$.

3) La respuesta es $\frac{171}{256}$.
Durante los primeros 4 días, Víctor y Vicky, juntos se comieron

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)+\left(\frac{1}{128}+\frac{1}{256}\right)=1-\frac{1}{256}.$$

Por lo tanto, en el día 5 Víctor comió $1/256$ de pastel. Así, durante los 5 días, Víctor comió $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}=\frac{128+32+8+2+1}{256}=\frac{171}{256}$ del pastel.

4) La respuesta es 31.
Contemos las sublistas que no contienen a 2, 3, 5 o 7. Estas se conforman con los restantes 5 dígitos, y por tanto tenemos 2^5 de ellas. El total de sublistas es $2^5-1=31$, ya que el conjunto vacío no genera ninguna sublista.

5) La respuesta es 13.
Sean $x=BC=GH=CD/2$ y $y=HA=AB=DE=EF$. Así, el perímetro total de la figura es $6x+4y$. Por otro lado, $2x+3y=8$ y $8x+2y=10$. Por lo tanto, la respuesta es $2x+3y+\frac{8x+2y}{2}=8+5=13$.

6) La respuesta es 15.
Como $\frac{268}{187}=1+\frac{81}{187}=1+\frac{1}{\frac{187}{81}}$, se tiene que $a=1$ y $b+\frac{1}{c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}}=\frac{187}{81}=2+\frac{25}{81}$, por lo que $b=2$ y $c+\frac{1}{d+\frac{1}{e+1}}=\frac{81}{25}=3+\frac{6}{25}$. Luego, $c=3$ y $d+\frac{1}{e+1}=\frac{25}{6}=4+\frac{1}{6}$, por lo que $d=4$ y $e=5$. Así, $a+b+c+d+e=1+2+3+4+5=15$.

7) La respuesta es 426.
Sea x el número de cifras eliminadas. Como a cada hoja arrancada le corresponden dos páginas, una terminada en cifra 7 y la otra en cifra 8, se eliminan $x/2$ cifras con las páginas terminadas en 8. Analicemos las páginas con numeración terminada en cifra 8, para encontrar la última hoja arrancada:

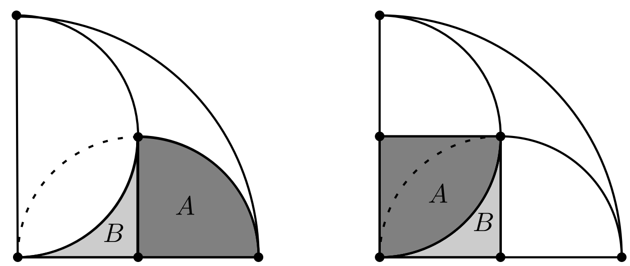
$$8, 18, 28, 38, \ldots, 98; 108, 118, 128, 138, \ldots, 198; 208, 218, \ldots, 998.$$

Vemos que hasta el 98, inclusive, se han eliminado 19 cifras, así que las restantes $\frac{x}{2}-19$ cifras se eliminarán de 3 en 3, es decir, el número de hojas que faltan por arrancar es la tercera parte de $\frac{x}{2}-19$, siempre y cuando $\frac{x}{2}-19\leq 270=30\times 9$, antes de empezar con la hoja donde está el 1008. Luego, la última hoja que se arranca está numerada con N y $\frac{N-108}{10}+1=\frac{\frac{x}{2}-19}{3}$, esto es, $N=\frac{5}{3}(x-38)+98$. Así que el máximo número de páginas del libro es $N+8=\frac{5}{3}(x-38)+106$. Para el caso $x=230$, $N=418$ y el máximo número de páginas es $N+8=426$.

8) La respuesta es 27°.
Notemos que $\angle BAG=90^\circ$ y $\angle BAE=180^\circ\times\frac{3}{5}=108^\circ$. Por lo tanto, $\angle EAG=18^\circ$. Además, $GA=AB=AE$ y, por lo tanto, el triángulo EAG es isósceles. Así, $\angle GEA=\frac{(180^\circ-18^\circ)}{2}=81^\circ$ y $\angle GED=108^\circ-81^\circ=27^\circ$.

9) La respuesta es 2017.
Notemos que el número es $10^{2\times 2018} + 2 \times 10^{2018} + 1 = (10^{2018} + 1)^2$. Su raíz cuadrada es $10^{2018} + 1$ que tiene 2017 ceros.

10) La respuesta es 8.
Observemos las siguientes figuras.



La región B tiene un área igual a $1 - \frac{\pi}{4}$, en tanto que la región A tiene un área igual a $\frac{\pi}{4}$. Así, la región sombreada tiene un área igual a $2(A + B) = 2$. Por lo tanto, el área de toda la figura es $4 \times 2 = 8$.

11) La respuesta es 18.
Podemos hacer una tabla para llegar al resultado. Si cada uno hubiera recortado 15 círculos, tendríamos lo siguiente:

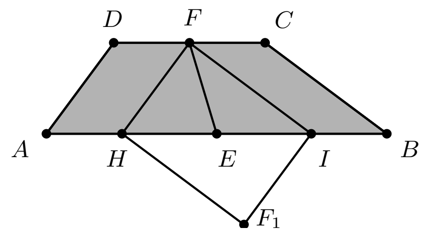
Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90

Si continuamos la tabla podremos llegar al resultado

Círculos de María	Círculos de Pedro	Piezas de María	Piezas de Pedro
15	15	120	90
16	14	128	84
17	13	136	78
18	12	144	72

y podemos ver que María recortó 18 círculos.

12) La respuesta es 5.
Sea $ABCD$ el trapecio con $AB = 18$, $CD = 8$, $DA = 6$ y $BC = 8$. Si E y F son los puntos medios de las bases AB y CD respectivamente, hay que calcular la longitud de EF. Trazando FH y FI, paralelas a DA y BC se forman dos paralelogramos.



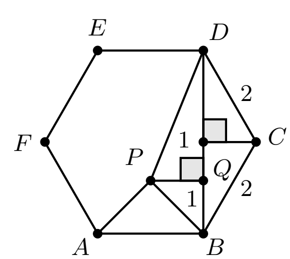
Luego, $AH = DF = 4 = FC = IB$, de donde $HI = 18 - 8 = 10$, $FH = DA = 6$ y $FI = BC = 8$.
Observemos que HFI es un triángulo rectángulo, ya que $FH^2 + FI^2 = HI^2$. Como E es el punto medio de la hipotenusa, entonces $FE = HE = EI = 5$.

Otra posible solución considera la ley del paralelogramo: si prolongamos la mediana hasta F_1, donde $FE = EF_1$, obtenemos el paralelogramo FHF_1I y, por lo tanto, ${FF_1}^2 + HI^2 = 2FH^2 + 2FI^2$, esto es, ${FF_1}^2 = 2FH^2 + 2FI^2 - HI^2 = 72 + 128 - 100 = 100$, de donde $FE = \frac{FF_1}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$.

13) La respuesta es 2.
Sea n un número de dos dígitos tal que $3 \times n = aaa = 111 \times a = 3 \times 37 \times a$, para algún dígito $a \neq 0$. Podemos notar que lo anterior es equivalente a tener que $n = 37 \times a$ pero como n es un número de dos dígitos, a solo puede ser 1 o 2 y por ende n puede tener únicamente dos valores. Así, el resultado es 2.

14) La respuesta es 12.
Si $abcde$ es un número de cinco dígitos que cumple lo anterior debemos tener que $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$, $c = \frac{b+d}{2}$, lo que implica que a, c y e deben tener la misma paridad. Sustituyendo b y d en $c = \frac{b+d}{2}$, obtenemos que $c = \frac{a+2c+e}{4}$ y, por lo tanto, $c = \frac{a+e}{2}$. Ahora notemos que al encontrar a, e distintos con las propiedades anteriores obtendremos un número del tipo buscado pues es fácil ver que como a, e son distintos, entonces los números a, e, $c = \frac{b+d}{2}$, $b = \frac{a+c}{2}$, $d = \frac{c+e}{2}$ son distintos. Si a, e son pares, las únicas parejas que cumplen con las propiedades anteriores son $(2, 6)$, $(4, 8)$ y sus permutaciones. Si a, e son impares las parejas buscadas son $(1, 5)$, $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 9)$ y sus permutaciones. Entonces, hay $6 \times 2 = 12$ números que cumplen las condiciones.

15) La respuesta es $2(7 - 2\sqrt{3})$.
Como $DC = BC = 2$ y $\angle DCB = 120°$ tenemos por el teorema de Pitágoras que $DB = 2\sqrt{3}$. Sea Q el pie de la altura de P a DB, entonces BQ es igual a la altura desde P a AB.



Dado que el triángulo APB es rectángulo e isósceles, dicha altura mide 1 y, por lo tanto, $QB = 1$. Esto implica que $DQ = 2\sqrt{3} - 1$ y de nuevo por el teorema de Pitágoras $DP^2 = 1 + (2\sqrt{3} - 1)^2 = 2(7 - 2\sqrt{3})$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte A.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

3) La respuesta es $36°$.
Notemos que $\angle IAB = \frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y $\angle FAB = \frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Por lo tanto, $\angle FAI = 12°$. Además, $IA = AB = AF$ y así, el triángulo FAI es isósceles. Luego, $\angle IFA = \frac{180° - 12°}{2} = 84°$ y $\angle IFE = 120° - 84° = 36°$.

4) Ver la solución del Problema 13 del Nivel I.

5) La respuesta es $\frac{1}{24}$.
Notemos primero que dicho producto debe ser un número primo y solo puede ser 2, 3 o 5. Sea p alguno de estos primos, luego en los otros dos tiros se debió obtener un 1 y lo que varía es en cuál tiro salió el primo p, por lo que para cada primo tenemos 3 opciones: $p \times 1 \times 1$, $1 \times p \times 1$ y $1 \times 1 \times p$. Como hay 3 primos válidos, entonces la cantidad de tiros "favorables" son $3 \times 3 = 9$, de un total de $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ resultados posibles. Luego la respuesta es $\frac{9}{216} = \frac{1}{24}$.

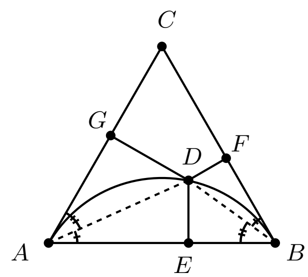
6) Ver la solución del Problema 15 del Nivel I.

7) La respuesta es $2017 \times 1009 = 2,035,153$.
Notemos que para obtener x^{2016} como término en la multiplicación de binomios, debemos elegir a la x en 2016 de los binomios multiplicados y uno de los números de exactamente un paréntesis. Entonces, cada uno de los números en los paréntesis aparecerá exactamente una vez multiplicando al término x^{2016}, es decir,
$$1x^{2016} + 2x^{2016} + 3x^{2016} + \cdots + 2017x^{2016} = (1 + 2 + 3 + \cdots + 2017)x^{2016},$$
por lo tanto el coeficiente de x^{2016} es equivalente a la suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017$. Usando la fórmula de Gauss, la suma es igual a $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = 2017 \times 2018/2 = 2017 \times 1009$.

8) Ver la solución del Problema 14 del Nivel I.

9) La respuesta es 9.
Notemos que desde el 50 hasta el 59 hay 9 números de 2 cifras, que en total aportan 18 cifras. Así desde 50 hasta 99 hay 45 números de 2 cifras y en total se escriben 90 cifras. Además, desde el 100 hasta el 199 hay 81 números de 3 cifras, que en total aportan 243 cifras. Así desde el 100 hasta el 999 hay $8 \times 81 = 648$ números de tres cifras y en total se escriben 1944 cifras. Por tanto del 50 al 999 se escriben $90 + 1944 = 2034$ cifras. Para encontrar la cifra en la posición 2017, hay que regresar del 999 hacia atrás 17 cifras, . . . **9**94995996997998999. Por lo tanto, la cifra 9 ocupa el lugar 2017.

10) La respuesta es 6 cm.
Los triángulos rectángulos AED y BFD son semejantes porque el ángulo semi-inscrito $\angle CBD$ es igual al ángulo inscrito $\angle BAD$. Entonces, $\frac{DE}{AD} = \frac{DF}{DB}$, de donde $DE = DF \times \frac{AD}{DB}$. De manera análoga, los triángulos BED y AGD son semejantes. Luego, $\frac{DE}{DB} = \frac{GD}{AD}$, de donde $DE = GD \times \frac{DB}{AD}$.



Multiplicando estas relaciones vemos que DE es la media geométrica de DF y GD, esto es, $DE^2 = \left(DF \times \frac{AD}{DB}\right)\left(GD \times \frac{DB}{AD}\right) = (DF)(GD) = 4 \times 9 = 36$.

11) La respuesta es 333.
Sean $A = 111444444$, $B = 444111111$ y $x = 333$. Podemos notar que $A = 334668x$ y $B = 1333667x$ por lo que el máximo común divisor de A y B es múltiplo de x. Además $d = \text{mcd}(334668, 1333667)$ debe dividir a $4 \times 334668 - 1333667 = 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$ pero 1333667 no es múltiplo de 5, 7, 11 o 13 por lo que 5005 es primo relativo con 1333667 y así $d = 1$. Por tanto, $\text{mcd}(A, B) = x = 333$.

12) La respuesta es 45.
Como $x \geq 1$, entonces $x^3 = 2017x + 360$ implica que $x^3 \geq 2017 + 360 = 2377$. Esto a su vez implica que $x \geq 14$ ya que $13^3 = 2197$. Por otro lado, $x^2 = 2017 + \frac{360}{x}$ de modo que

$$44^2 = 1936 < 2017 \leq x^2 \leq 2017 + \frac{360}{14} < 2017 + 26 = 2043 < 46^2 = 2116.$$

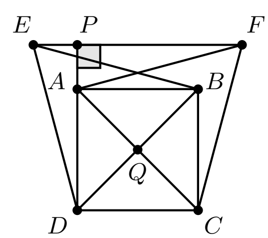
La única opción que le queda es $x = 45$. Luego comprobamos $45^3 - 2017(45) - 360 = 45(45^2 - 2017) - 360 = 45(2025 - 2017) - 360 = 45(8) - 360 = 0$. Por lo tanto, concluimos que $x = 45$ es la única solución entera positiva para esta ecuación.

Soluciones de la prueba individual. Nivel II. Parte B.

1) Como $100 = 2^2 \times 5^2$, la cantidad de primos relativos con 100 es $100 - 50 - 20 + 10 = 40$. Ahora notemos que si $1 \leq n \leq 50$ es primo relativo con 100, entonces $100 - n$ también lo es. Según el argumento anterior podemos agrupar los primos relativos en parejas $(n, 100 - n)$ tales que cada pareja suma 100 y, como 50 no es primo relativo con 100, entonces podemos dividir los números de forma exacta en $\frac{40}{2} = 20$ parejas. Por lo tanto, la respuesta es $20 \times 100 = 2000$.

2) Notemos que los números menores a 10^4 tienen a lo más 4 dígitos. Si los dígitos no se repiten, tenemos $9+9\times 9+9\times 9\times 8+9\times 9\times 8\times 7 = 9+81+648+4536 = 5274$ números balanceados. Si un dígito se repite, entonces todos los dígitos se repiten (de otra forma no sería balanceado). En el caso en que cada dígito está dos veces y ninguno es cero, tenemos $\binom{9}{2}$ formas de escoger los dígitos y $\binom{4}{2}$ formas de acomodarlos (si nuestro número es de 4 dígitos). Por otro lado, si consideramos las parejas de dígitos que contienen al cero, estas son 9 y hay solo 3 opciones para acomodar las parejas, dado que el 0 no puede ir al principio del número. Por tanto en este caso hay $\binom{9}{2}\binom{4}{2} + 9\times 3 = 216+17 = 243$. Si nuestro número es de dos dígitos tenemos solamente 9 opciones. Por tanto en este caso tenemos $243+9 = 252$ números. Si los números se repiten 3 o 4 veces tenemos $9\times 2 = 18$ números, pues para cada uno de los 2 casos se tienen 9 posibilidades. Por tanto, en total contamos $5274+252+18 = 5544$ números balanceados.

3) Sean P el punto de intersección de AD con EF y Q el centro del cuadrado.



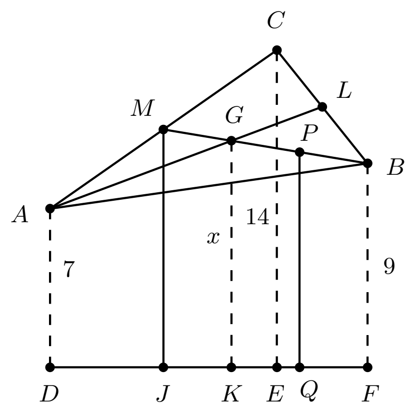
Notemos que $[DCFE] = \frac{PD(DC+FE)}{2}$ y $[ABFE] = \frac{PA(AB+FE)}{2} = \frac{PA(DC+FE)}{2}$. Entonces, $\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD(DC+FE)}{PA(DC+FE)} = \frac{PD}{PA}$. Es fácil ver que C, A y E son colineales al igual que D, B y F. Además, por simetría tenemos que AB es paralela a EF. Por lo tanto $\angle DPF = \angle DAB = 90°$ y $\angle DBA = \angle DFP = 45°$. Así $PD = PF$ y $2PD^2 = PD^2 + PF^2 = DF^2$. Por lo tanto, $PD = \frac{DF}{\sqrt{2}}$. Como el triángulo AFC es equilátero y $AC = 2$, tenemos que $FQ = \sqrt{3}$ y por lo tanto $DF = 1+\sqrt{3}$, $PD = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2}$ y $PA = PD - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{2} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$. Entonces, $\frac{[DCFE]}{[ABFE]} = \frac{PD}{PA} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3}$.

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte A.

1) La respuesta es $\frac{1}{9}$.
La descomposición en primos de 10! es 2^8 es $2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$. Los divisores impares de 10! deben ser entonces divisores de $3^4\times 5^2\times 7$. Como hay $5\times 3\times 2 = 30$ de estos divisores, la probabilidad buscada es $30/270 = 1/9$.

2) La respuesta es 10.
Sean D, F, E, K las proyecciones respectivas de A, B, C, G sobre la recta. Los segmentos DA, EC y FB son paralelos, formando varios trapecios. El baricentro G es el punto de intersección de las medianas AL y BM, así que la distancia que

se busca es $GK = x$. Sea P el punto medio de GB y sean J y Q las proyecciones de M y P sobre la recta. Entonces, x será la línea media del trapecio $MJQP$, $x = \frac{MJ+QP}{2}$.



Notemos que MJ es la línea media del trapecio $ADEC$, entonces $MJ = \frac{7+14}{2} = \frac{21}{2}$. Análogamente, QP es la línea media del trapecio $GKFB$ ya que $GB = 2GM$. Entonces $PQ = \frac{9+x}{2}$. Sustituyendo, obtenemos la ecuación $x = \frac{\frac{21}{2}+\frac{9+x}{2}}{2} = \frac{30+x}{4}$ cuya solución es $x = 10$.

3) Ver la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 11 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 5 del Nivel II.

6) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

7) Ver la solución del Problema 10 del Nivel II.

8) Ver la solución del Problema 12 del Nivel II.

9) La respuesta es $\frac{2017\times 1009}{2}$.
Para cada $1 \leq k \leq 2017$, un subconjunto $\mathcal{A}$ que contiene a k se puede expresar de la forma $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cup \{k\}$ donde $\mathcal{B}$ es un subconjunto que no contiene a k. Como hay 2^{2016} subconjuntos $\mathcal{B}$, entonces el número k aparecece 2^{2016} veces como sumando en $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$. Así, la suma de todos los conjuntos $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ es igual a

$$2^{2016}(1+2+3+\cdots+2017) = \frac{2^{2016}\times 2017\times 2018}{2} = 2^{2015}\times 2017\times 2018.$$

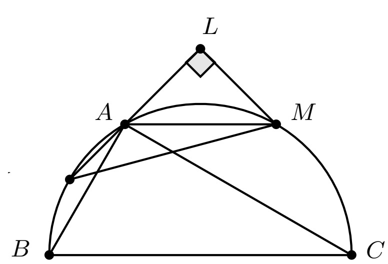
Dado que hay en total 2^{2017} subconjuntos, la probabilidad buscada es $\frac{2^{2015}(2017)(2018)}{2^{2017}} = \frac{2017\times 1009}{2}$.

10) La respuesta es $144, 169, 441, 961, 121, 484, 676, 100, 400, 900$.
Sean $x^2 = abc$, $y^2 = cba$. Entonces, tenemos que $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = 99(a - c)$. En consecuencia, si $x \neq y$, 99 divide al producto $(x + y)(x - y)$. Como los cuadrados deben ser números de tres cifras y $31^2 = 961$, entonces tenemos que $10 \leq x, y \leq 31$. Entonces $21 \leq x + y \leq 61$ y $1 \leq x - y \leq 21$. Por tanto tenemos dos casos: *(1)* $x + y = 27, 36, 45, 54$ y $x - y = 11$, *(2)* $x + y = 33, 44, 55$ y $x - y = 9, 18$. El caso *(1)* no arroja soluciones, en tanto que el caso *(2)* nos da $x^2 = 21^2 = 441$ y $x^2 = 31^2 = 961$. Por otro lado, si $x = y$ entonces $a = b$ y tenemos las soluciones $x^2 = 11^2 = 121$, $x^2 = 22^2 = 484$ y $x^2 = 26^2 = 676$. Finalmente, si un número a ponerlo al revés no tiene 3 cifras entonces el número original termina en 0, así que es divisible entre 10 y por tanto entre 100. Aquí las soluciones son $x^2 = 10^2 = 100$, $x^2 = 20^2 = 400$ y $x^2 = 30^2 = 900$.

11) La respuesta es 462^3.
Para minimizar el producto de los boletos, basta considerar los 6 números más pequeños que cumplan las condiciones del problema, lo cual implica que dichos números deberán estar formados por parejas de los 4 números primos más pequeños, sin contar al 5 (ya que $\binom{4}{2} = 6$). Así los números se formarán tomando parejas del conjunto $\{2, 3, 7, 11\}$, por lo que el producto de ellos será $2^3 \times 3^3 \times 7^3 \times 11^3 = 462^3$. El siguiente arreglo muestra una posible disposición de los números.

Pasajero	Boleto
1	$2 \times 7 = 14$
2	$3 \times 11 = 33$
3	$2 \times 3 = 6$
4	$7 \times 11 = 77$
5	$2 \times 11 = 22$
6	$3 \times 7 = 21$

12) La respuesta es $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$.
Considera L el pie de la altura desde M sobre AN.



Como N y M son puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$, entonces $\angle MNA = 30°$ y $\angle AMN = 15°$. Por lo tanto, el triángulo MNL es rectángulo de $30° - 60° - 90°$ y el triángulo LAM es rectángulo isósceles. Por otro lado, $\angle MCA = 30° = \angle ACB$.

Así, $AB = AM = 1$, entonces el triángulo LAM tiene hipotenusa 1, lo cual implica que $LM = 1/\sqrt{2}$. Luego, $LN = \sqrt{3}/\sqrt{2}$ y

$$[ANM] = [LMN] - [LAM] = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

Soluciones de la prueba individual. Nivel III. Parte B.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

2) Supongamos que los tres números son primos. Si uno de ellos fuera par, digamos $a = 2$, entonces b y c son impares, luego $b + c + bc$ es impar, y no es posible que $a \mid b + c + bc$, por lo que ninguno de los números puede ser par. Como $a \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$, $b \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$, $c \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$ y a, b, c son primos, entonces $abc \mid (a+1)(b+1)(c+1)-1$. Sin embargo,

$$1 < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)-1}{abc} < \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{abc} = \frac{a+1}{a} \cdot \frac{b+1}{b} \cdot \frac{c+1}{c}$$
$$\leq \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} < 2,$$

por lo que abc no divide a $(a+1)(b+1)(c+1)-1$, lo cual es una contradicción. Luego, alguno de los números a, b, c no puede ser primo.

3) Supóngase que M tiene más de 3 divisores primos, entonces, tendría cuando menos $2 \times 2 \times 2 = 8$ divisores, una contradicción, por lo que M debe tener a lo mucho dos divisores primos, y siendo este el caso es fácil ver que M es de una de las siguientes formas p^5 o p^2q.

Caso (1): $M = p^5$. En este caso la suma de los divisores de M es $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500$: Si $p \leq 5$ entonces el lado izquierdo es mayor que el lado derecho, si $p = 2, 3$ tampoco se da la igualdad, por lo que no hay soluciones en este caso.

Caso (2): $M = p^2q$. En este caso los divisores son $1, p, p^2, q, pq, p^2q$ y su suma puede ser escrita como: $(p^2+p+1)(q+1) = 3500 = 2^2 \times 5^3 \times 7$. Pero p^2+p+1 es siempre impar, luego $q+1$ debe ser par y q es impar. Supóngase que $q+1 = 4k$ entonces tenemos que $k(p^2+p+1) = 5^3 \times 7$. Analizando las congruencias módulo 5, notamos que p^2+p+1 no puede ser múltiplo de 5, luego debe ser 1 o 7, resolviendo estos dos casos, concluimos que el único valor válido para p es $p = 2$, por lo que $k = 125$ y $q = 4 \times 125 - 1 = 499$ que es también primo. Luego el único valor posible para M es $22 \times 499 = 1996$.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel I.

1) Consideremos el pensamiento de Toño. Como Toño puede pagar con 3 monedas y que le regresen cambio, entonces a lo más, la cantidad que tiene que pagar es 30. Ahora, podrían regresarle el cambio con 2 monedas, por lo tanto la diferencia con

esas 3 monedas que pagó es al menos 2 pesos. Por lo tanto la cantidad a lo más es 28 pesos. Si paga con 3 monedas ninguna de ellas puede ser de 1 o 2 pesos porque la cantidad que le regresarían es al menos 2 pesos, volviendo innecesaria la moneda de 1 o 2 pesos. Por lo tanto en el primer pensamiento de Toño, pagó sólo con monedas de 10 y 5 pesos. Analizemos primero el caso donde se usan 3 monedas de 10 pesos. El cambio puede darse usando a lo más una moneda de 5 pesos (si se usan dos se vuelve innecesaria una de 10 pesos). Si se utiliza, el cambio será 6 o 7 pesos y la cantidad a pagar sería 24 o 23 pesos. Si no se utiliza, el cambio será 2, 3 o 4 pesos, y la cantidad a pagar sería 28, 27 o 26 pesos. Si se usa al menos una moneda de 5 pesos, en el cambio sólo podrán utilizarse monedas de 1 y 2 pesos, pues de lo contrario la moneda de 5 pesos se volvería innecesaria, en este caso el cambio se dará sólo con monedas de 1 o 2 pesos y deberá ser 2, 3 o 4 pesos. Tres monedas de 5 pesos: La cantidad a pagar sería 13, 12 u 11 pesos. Dos monedas de 5 pesos y una de 10 pesos: La cantidad a pagar sería 18, 17 o 16. Una moneda de 5 pesos y dos de 10 pesos: La cantidad sería 23, 22 o 21 pesos.

2) Como empieza en el 6, después de 2 saltos debería llegar al 16 que es potencia de 2, por lo tanto regresa al 14. Notemos que va saltando de par a impar y viceversa siempre que no caiga en una potencia de 2, pero cada dos saltos es que va de par en par con diferencia de 10. Entonces, la siguiente potencia de 2 en la que caerá es la siguiente cuya cifra de las unidades sea igual a 4, es decir, el 64, al cual llega después de $\frac{64-14}{5} = 10$ saltos. En este punto regresa al vértice 62 y no volverá a caer en una potencia de 2 hasta la siguiente que termine en 2, es decir la 512 a la cual llega después de $\frac{512-62}{5} = 90$ saltos. Aquí regresará al vértice 510 y no caeŕa en potencia de 2 de nuevo en esta vuelta porque no hay potencias de 2 que terminen en 0. Por lo tanto, la primera vez que supere el 1, es cuando salte desde el 2015, es decir con $\frac{2020-510}{5} = 302$ saltos más. Por lo tanto, la pulga necesitó de $2 + 10 + 90 + 302 = 404$ saltos.

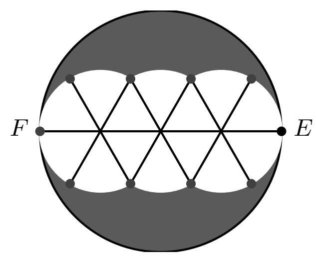
3) La sucesión $3, 5, 7\ldots$ corresponde a la de los números impares a partir del 3, es decir, $\{2n + 1 \mid n = 1, 2, 3\ldots\}$. Ahora veamos cómo localizamos el número que cierra cada cuadrado, para pasar del primer cuadrado le añadimos 3 cuadrados, del segundo al tercero le añadimos 5 cuadrados, así los términos de la sucesión van quedando agrupados según se van añadiendo de la siguiente manera: $\{3\}, \{5, 7, 9\}\{11, 13, 15, 17, 19\}, \ldots$, donde el término que cierra el k-ésimo cuadrado es $2(1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)) + 1 = 2(k^2) + 1$. Entonces, el número que cierra el 18° cuadrado es $2(18^2) + 1 = 2(324) + 1 = 649$.

4) Si Edgar está en el carril 1, entonces como Omar está en un extremo y ya está ocupado el 1, Omar está en el 5. Como Beto no nada al lado de Edgar, entonces debe estar en algún carril de 3 o 4, pero si está en el 3 forzosamente nadaría al lado de Mario (pues los únicos carriles libres serían el 2 y 4), entonces Beto estaría en el 4, lo cual obliga a que Miguel y Mario naden juntos, pero eso no ocurre. En conclusión si Edgar estuviera en el carril 1 forzaría una configuración que no cumple las cuatro afirmaciones. Por lo anterior Edgar debe estar en el 4, lo cual obliga a que Beto este en el carril 1 o 2. En este caso si Beto está en el carril 1, Omar estaría en el 5 lo cual fuerza que Mario y Miguel naden juntos lo cual no

ocurre. Luego Beto debe estar en el carril 2, esto fuerza a que Mario esté en el carril 5, Omar en el 1 y Miguel en el 3, la cual es una configuración forzada que cumple las condiciones, por lo tanto esta es la única configuración posible.

5) Consideremos un punto P en alguna de las intersecciones de las rectas y veamos cuántos triángulos tienen a P como vértice. Como hay a lo más $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones y cada una de las 6 rectas tienen 5 puntos de intersección, nos quedan $15 - 9 = 6$ puntos que pueden ser otro de los vértices del triángulo. Una vez elegido uno de esos 6 puntos, las dos rectas que pasan por él intersecan a las otras dos rectas que teníamos, lo cual nos dice que nos queda un único punto para elegir que sea vértice del triángulo. Por lo tanto, para cada vértice tenemos 6 triángulos que cumplen las propiedades del problema. Como hay 15 vértices posibles y cada triángulo tiene 3 vértices, concluimos que hay $\frac{6\times 15}{3} = 30$ triángulos de los que se querían contar.

6) Dividamos la figura de la siguiente manera:



El área de la circunferencia mayor es 4π. El área de cada círculo blanco original es π. La figura blanca está formada por $\frac{10}{6}$ de círculo blanco y cuatro triángulos equiláteros. Cada triángulo tiene un área de $\frac{\sqrt{3}}{4}$. El área sombreada es $4\pi - \frac{10\pi}{6} - 4 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7\pi}{3} - \sqrt{3}$.

7) Sean $A = abcd$ y $N = pqrs$ dos enteros que se escriben con las mismas cifras. Según las condiciones del problema tenemos que $A = 3N$, con lo cual tenemos que $a+b+c+d = p+q+r+s$ es un múltiplo de 3. En consecuencia, N también es un múltiplo de 3, digamos $N = 3T$, y por tanto $A = 9T$. Así, concluímos que $a + b + c + d = p + q + r + s$ es un múltiplo de 9. Como A es un número de 4 cifras, tenemos que $A \leq 9999$. Entonces tenemos que $N \leq 3333$. Como ninguna de las cifras puede ser 2 o 4, podemos concluir que solamente existen dos casos: (1) $p = 3$ y (2) $p = 1$.

Caso (1): Si $p = 3$, entonces $a = 9$ y por tanto la suma de las restantes dos cifras debe dejar residuo 6 al dividirse entre 9. Además q no puede ser mayor a 4 ya que de lo contrario $A = 3N$ tendría 5 cifras. Entonces las únicas posibilidades para las restantes dos cifras son $\{0, 6\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 3\}$. Procedemos a analizar cada una de estas opciones. Para $\{0, 6\}$ tenemos $2! = 2$ formas de acomodar las cifras: 3069, 3096. Lo mismo sucede para $\{1, 5\}$, con los números 3195 y 3159; y también en el caso $\{3, 3\}$ con las opciones 3339 y 3393. Como ninguno de estos números cumple la condición $A = 3N$, observamos que en este caso no hay solución.

Caso(2): Si $p = 1$ entonces $1000 \leq N \leq 1999$ y por tanto $3000 \leq A \leq 5997$. De aquí podemos concluir que hay dos casos: $a = 3$ o $a = 5$. En el primer caso, las dos cifras restantes al sumarse deben dejar residuo 5 al dividirse entre 9; en tanto que en el segundo caso el residuo de la suma deberá ser 3. Entonces surgen las siguientes opciones: para $a = 3$ tenemos $\{0, 5\}$, $\{5, 9\}$, $\{6, 8\}$ y $\{7, 7\}$; en tanto que para $a = 5$ tenemos $\{0, 3\}$, $\{3, 9\}$, $\{5, 7\}$ y $\{6, 6\}$. Analizando cada una de estas opciones como en el inciso anterior nos lleva a concluir que el único número que satisface las condiciones del problema es $N = 1305$.

8) Sea abc el número de tres dígitos tales que $a > b > c > 0$. Entonces $a + c$ debe ser número impar. Si $a + c < 10$, eso significa que el número de las decenas de la suma es $2b$, que es par, lo cual no es posible, por lo tanto $a + c > 10$. Si $2b + 1 > 10$, entonces el dígito de las decenas de la suma es $a + c + 1$, pero como $a + c$ debe ser impar, entonces $a + c + 1$ es par, por lo cual no es posible. Por lo tanto $2b + 1 \leq 9$, o sea $b \leq 4$. Si $b = 4$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, las únicas soluciones en este caso son 942 y 843. Si $b = 3$, entonces como $a + c$ es impar mayor que 10, la única solucíon en este caso es 932. Si $b = 2$, entonces $c = 1$ y no existe un dígito a tal que $a + c$ sea impar mayor que 10. En resumen, las únicas soluciones son 932, 942 y 843.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel II.

1) Ver la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Ver la solución del Problema 4 del Nivel I.

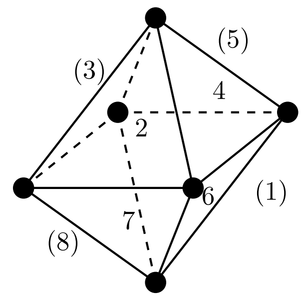
3) Por ser polígonos regulares tenemos que $\angle A_n A_1 A_2 = 180° \times \frac{n-2}{n}$ y $B_{n+1} A_1 A_2 = 180° \times \frac{n-1}{n+1}$. Luego, $\angle B_{n+1} A_1 A_n = \angle B_{n+1} A_1 A_2 - \angle A_n A_1 A_2 = \frac{180° \times (n-1)}{n+1} - \frac{180° \times (n-2)}{n} = \frac{360°}{n(n+1)}$. Como $A_n A_1 = A_2 A_1 = B_{n+1} B_1$, el triángulo $B_{n+1} A_1 A_n$ es isósceles y, por lo tanto, $\angle A_1 B_{n+1} A_n = \angle A_1 A_n B_{n+1} = \frac{180° - \angle A_n A_1 B_{n+1}}{2} = \frac{180° - \frac{360°}{n(n+1)}}{2} = \frac{90° \times (n^2+n-2)}{n(n+1)}$. Luego, si n cumple lo pedido, entonces

$$\frac{90° \times (n^2 + n - 2)}{n(n+1)} = \frac{2}{3} \times \angle A_1 B_{n+1} B_n = \frac{2}{3} \times \frac{180° \times (n-1)}{n+1},$$

que es equivalente a que $n^2 - 7n + 6 = 0$. Luego, $n = 1$ o $n = 6$, de donde el único valor posible para n es 6.

4) Ver la solución del Problema 8 del Nivel I.

5) El siguiente acomodo funciona (note que los números entre paréntesis representan las caras que están por detrás):



6) Notemos primero que basta probar que $BP = PD$. Como subtienden el mismo arco, tenemos que $\angle ADP = \angle ABP$. Entonces, dado que los triángulos BEP y DAP son obtusángulos, podemos concluir que son congruentes. Luego, $BP = PD$.

7) Para cada n, como ab es fijo, $a+b$ es mínimo cuando $a-b$ lo es, pues $a+b$ mínimo si y solo si $(a+b)^2$ es mínimo, lo cual es cierto si y solo si $(a+b)^2-4ab$ es mínimo (puesto que ab es constante), esto es, si y solo si $a-b$ es mínimo. Ahora bien, para cada número de la forma n^2+n tenemos que los a, b que cumplen el enunciado son $a = n+1$ y $b = n$ pues son coprimos y $a-b = 1$ es mínimo. Entonces, $f(n^2+n) = s(n+1) - s(n)$. Así,

$$\begin{aligned} & f(1^2+1) + f(2^2+2) + \cdots + f(2017^2+2017) \\ = {} & s(2) - s(1) + s(3) - s(2) + s(4) - s(3) + \cdots + s(2018) - s(2017) \\ = {} & s(2018) - s(1) = 11 - 1 = 10. \end{aligned}$$

8) Una estrategia puede ser la siguiente. Sea k el número que Juan está pensando. Llamemos a y b a los números tales que Mario puede estar seguro que el número de Juan está entre a y b (inclusive), estos se irán actualizando según la información que vaya recabando Mario. Por ejemplo, inicialmente $a = 1$ y $b = 1000$. Sea m igual a $\frac{(a+b)}{2}$ o su parte entera en caso de que tenga decimal. Posteriormente, Mario puede hacer la pregunta ¿Es el número que estás pensando igual, mayor o menor a m? Si m es igual al número que está pensando Juan, entonces Mario ya ganó. Sino, hay dos opciones: si responde que **menor**, actualizaremos nuestra b para que sea igual a $m-1$, ya que sabíamos que $a \leq k \leq b$ y por la información de la respuesta sabemos que $k \leq m$ (notemos que como inicialmente $a \leq k \leq m$, siempre se cumplirá que $a \leq m \leq b$), por lo tanto, ahora sabremos que $a \leq k \leq m$, por lo cual ahora m será el número que sabemos es mayor o igual a k. Haciendo un razonamiento análogo, si Juan responde **mayor**, entonces podemos asignar a la nueva a para que sea igual a $m+1$.
Ahora bien, Mario estará seguro del número que está pensando Juan cuando $a = b$ (pues entonces $a \leq k \leq b = a$, y por lo tanto $k = a$). También notemos que después de cada pregunta, la distancia $(b-a)$ entre a y b, irá disminuyendo pues en caso de que la respuesta sea **mayor**, como $\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{a+b}{2}$, entonces $b-(m+1) \leq b - (\frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}) \leq \frac{b-a}{2} - 1$. Análogamente, si la respuesta es **menor**,

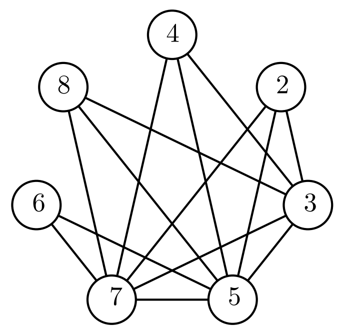
se concluye que $(m-1)-a \leq \frac{b-a}{2}$. Así pues, la nueva distancia entre a y b será a lo más $\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2}$ en el siguiente paso.

Inicial	1	2	3	4	5	6	7	8	9
999	499	299	124	61	30	14	6	2	0

Por lo tanto, al cabo de 9 preguntas Mario puede saber cuál número estaba pensando Juan con esta estrategia.

Soluciones de la prueba por equipos. Nivel III.

1) El siguiente arreglo funciona:



2) Primero notemos que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y = x(x+1)(x+2)+3y+z^2$, sin importar el valor de x. Como x, $x+1$, $x+2$ son tres enteros consecutivos, entonces uno de ellos es múltiplo de 3, por lo que $x(x+1)(x+2)+3y$ es múltiplo de 3, luego si existe una terna de enteros tal que $x^3+3x^2+z^2+2x+3y = 2018$, entonces z^2 deja residuo 2 al dividirse entre tres, algo imposible ya que los cuadrados dejan residuo 1 o 0 al dividirse entre tres, de lo anterior se concluye que no existen ternas como las pedidas.

3) Ver la solución del Problema 3 del Nivel II.

4) Ver la solución del Problema 6 del Nivel II.

5) Ver la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son los círculos que buscamos de tal manera que O_i es el centro de C_i. Sea C el círculo con centro en P y radio 1. Es claro que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ están al borde de C. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $O_1, O_2, \ldots, O_n$ forman un polígono convexo, es decir, que los centros están etiquetados en orden de manera que $\angle O_1PO_2+\angle O_2PO_3+\cdots+\angle O_nPO_1 = 360°$. Notemos que el hecho de que O_i no esté en el interior o en el borde de C_{i+1} y que el triángulo O_iPO_{i+1} sea isósceles implica que $\angle O_iPO_{i+1} > 60°$. Dadas las observaciones anteriores es fácil deducir que el máximo número de circunferencias es 5.

7) Como la única relación entre a y a^* son sus dígitos, aseguraremos que ambos sean divisibles por enteros de los que tenemos criterio de divisibilidad. Es claro que $99 \mid a$ si y solo si $99 \mid a^*$. De esta manera, $D = 99k > 2017$ con $k > 20$. Como buscamos que se pueda asegurar la divisibilidad con un criterio, comprobemos que $k = 25$. Tras varios intentos se llega a que a puede ser de la forma $52xy75$, con lo que aplicando los criterios de divisibilidad, $9 \mid x + y + 1$ y $11 \mid x - y + 5$. Para $x = 7$, $y = 1$ esto se cumple, ya que $a = 527175$ satisface.

8) Consideremos los números $x = 13^2$ y $w = 13^2 + 13 \times 12$. Si $n < x$, entonces $n!$ contiene a lo más 12 factores 13 y no puede ser bueno. Si $n = x$ entonces $n!$ contiene los primeros doce múltiplos de 13 (que tienen solo un factor 13) y 13^2 que tiene dos. El exponente de 13 en $(13^2)!$ es 14 y no es bueno. si $x < n < w$, entonces $n!$ contiene 14 factores de x y a lo más 11 factores extras pues los múltiplos de 13 entre x y w solo tienen factor 13, por lo tanto $n!$ tiene 14, $15 \ldots$ o 25 factores 13 y no es bueno. Si $n = 13^3 + 13 \times 12$, entonces $n!$ es bueno, pues tiene 26 factores 13. Ningún número de los que buscamos es mayor a $13^2 + 13 \times 12 + 13 = 2 \times 13^2$, pues $n = w$ es bueno. Notemos que si $n = w$, $w + 1, \ldots,$$w + 12$ entonces $n!$ tiene 26 factores 13 y es bueno, además $n - 13 < w$ y sabíamos que ningún número menor a w era bueno. Por lo tanto, los números son $w, w + 1, \ldots, w + 12$ con $w = 13^2 + 13 \times 122$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

4ª Olimpiada Iraní de Geometría

El 7 de septiembre de 2017 se aplicó en México el examen de la 4^a Olimpiada Iraní de Geometría. Este examen fue aplicado en 13 Estados del país participando un total de 198 alumnos en los diferentes niveles de la competencia. México envió los resultados de los mejores 4 alumnos de cada uno de los niveles elemental, intermedio y avanzado y de un alumno en el nivel libre. El examen del nivel libre es el mismo que el examen del nivel avanzado, solo que en el nivel libre participan alumnos de universidad. En esta ocasión, se obtuvieron una medalla de oro, cuatro medallas de plata y ocho medallas de bronce. México ocupó el noveno lugar de los 44 países participantes.

Los resultados fueron los siguientes:

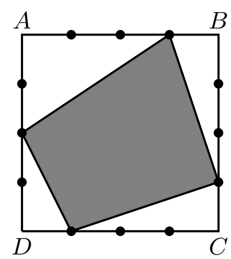
Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Nivel**
Karla Rebeca Munguía Romero	Sinaloa	Plata	Elemental
Ana Illanes Martínez de la Vega	Ciudad de México	Plata	Elemental
Adrián Arturo García López	Jalisco	Plata	Elemental
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo	Nuevo León	Bronce	Elemental
Ana Paula Jiménez Díaz	Ciudad de México	Plata	Intermedio
Eduardo Jaziel Juárez Martínez	San Luis Potosí	Bronce	Intermedio
Alfredo Hernández Estrada	San Luis Potosí	Bronce	Intermedio
Darío Hinojosa Delgadillo	Nuevo León	Bronce	Intermedio
Pedro Jacobo Gómez Landero Cota	Morelos	Bronce	Avanzado
Isaac Jair Jiménez Uribe	Sinaloa	Bronce	Avanzado
Bruno Gutiérrez Chávez	Colima	Bronce	Avanzado
Víctor Antonio Domínguez Silva	Nuevo León	Bronce	Avanzado
Leonardo Ariel García Morán	Jalisco	Oro	Libre

A continuación presentamos los problemas de la 4^a Olimpiada Iraní de Geometría.

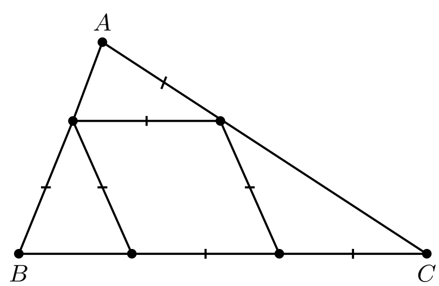
Nivel Elemental

Tiempo: 4 horas. Cada problema vale 8 puntos.

Problema 1. En un cuadrado $ABCD$ de lado de longitud 4, cada lado se divide con tres puntos en partes iguales. Escoge uno de los tres puntos en cada lado y conecta los puntos de manera consecutiva para obtener un cuadrilátero. ¿Cuáles números pueden ser el área del cuadrilátero? Solo escribe los números sin demostración.



Problema 2. Encuentra los ángulos del triángulo ABC.



Problema 3. En el pentágono regular $ABCDE$, la perpendicular a CD que pasa por C, interseca a AB en F. Muestra que $AE + AF = BE$.

Problema 4. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ cien puntos en el plano, no tres de ellos colineales. Para cada tres puntos, decimos que el triángulo formado por ellos es *positivo* si cuando se leen los nombres de sus vértices desde el que tiene índice más pequeño hasta el que tiene índice más grande, se leen en el sentido de las manecillas del reloj. ¿Es posible que el número de triángulos positivos sea exactamente 2017?

Problema 5. En el triángulo isósceles ABC (con $AB = AC$), sea ℓ la recta paralela a BC que pasa por A. Sea D un punto arbitrario en ℓ. Sean E y F los pies de las perpendiculares desde A sobre BD y CD, respectivamente. Suponga que P y Q son los pies de las perpendiculares desde E y F, respectivamente, sobre ℓ. Muestra que $AP + AQ \leq AB$.

Nivel Intermedio

Tiempo: 4 horas y 30 minutos. Cada problema vale 8 puntos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $\angle A = 60°$. Sean E y F los pies de las alturas desde B y C, respectivamente. Muestra que $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

Problema 2. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 se intersecan en A y B. Una recta arbitraria que pasa por B interseca a ω_1 y ω_2 en C y D, respectivamente. Sean E y F dos puntos sobre ω_1 y ω_2, respectivamente, tales que $CE = CB$ y $BD = DF$. Suponga que BF interseca a ω_1 en P y BE interseca a ω_2 en Q. Prueba que A, P y Q son colineales.

Problema 3. Se tienen n puntos en el plano $(n > 2)$. No hay tres de ellos colineales. Para cada par de puntos, se dibuja la recta que pasa por ellos y entre los ocho puntos restantes dados, se marca el punto más cercano a esta recta (en cada caso este punto es único). ¿Cuál es el máximo número posible de puntos marcados para cada n?

Problema 4. Ver el problema 5 del nivel elemental.

Problema 5. Sean X, Y dos puntos sobre el lado BC del triángulo ABC tales que $2XY = BC$ (X entre B y Y). Sea AA' el diámetro del circuncírculo del triángulo AXY. Sean P el punto de intersección de AX con la perpendicular desde B a BC y Q el punto de intersección de AY con la perpendicular desde C a BC. Muestra que la recta tangente desde A' al circuncírculo del triángulo AXY, pasa por el circuncentro del triángulo APQ.

Nivel Avanzado

Tiempo: 4 horas y 30 minutos. Cada problema vale 8 puntos.

Problema 1. En un triángulo ABC, su incírculo con centro I, toca el lado BC en un punto D. La recta DI corta a AC en X. La tangente por X al incírculo (diferente de AC) interseca a AB en Y. Si la recta YI corta a BC en un punto Z, muestra que $AB = BZ$.

Problema 2. Se tienen seis circunferencias que por pares no se cortan y cada una de radio mayor o igual que 1. Muestra que el radio de cualquier circunferencia que interseca a cada una de las seis circunferencias dadas, es al menos 1.

Problema 3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. La recta CO interseca a la altura por A en el punto K. Sean P y M los puntos medios de AK y AC, respectivamente. Si PO interseca a BC en Y y el circuncírculo del triángulo BCM corta a AB en X, muestra que $BXOY$ es cíclico.

Problema 4. Tres circunferencias ω_1, ω_2, ω_3 son tangentes a una recta ℓ en los puntos A, B, C (con B entre A y C) y ω_2 es tangente externamente a las otras dos. Sean X,

Y los puntos de intersección de ω_2 con la tangente externa común a ω_1 y ω_3. La recta perpendicular a ℓ por B, corta a ω_2 nuevamente en Z. Muestra que la circunferencia de diámetro AC toca a ZX y a ZY.

Problema 5. Una esfera S toca a un plano. Sean A, B, C y D cuatro puntos de tal plano de manera que no hay tres de ellos colineales. Considera el punto A' tal que S es tangente a las caras del tetraedro $A'BCD$. Los puntos B', C' y D' se definen de manera similar. Muestra que A', B', C' y D' son coplanares y el plano donde se encuentran toca a S.

XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 15 al 23 de septiembre de 2017 se celebró en la ciudad de Puerto Iguazú, Argentina, la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, con la participación de 22 países y un total de 80 estudiantes.

Toda la delegación mexicana fue premiada, los cuatro alumnos que nos representaron obtuvieron medalla, logrando así una destacada participación: Leonardo Ariel García Morán (Jalisco) obtuvo medalla de oro, Oriol Andreu Solé Pi (Ciudad de México), Isaac Jair Jiménez Uribe (Sinaloa) y Maximiliano Sánchez Garza (Nuevo León) obtuvieron medallas de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Daniel Perales Anaya (tutor).

Sus logros, colocan a México en el cuarto lugar general por países en el evento, quedando por encima de países como España, Portugal y Colombia.

A continuación presentamos los problemas de la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Para cada entero positivo n sea $S(n)$ la suma de sus dígitos. Decimos que n tiene la propiedad P si los términos de la sucesión infinita

$$n, S(n), S(S(n)), S(S(S(n))), \ldots$$

son todos pares y decimos que n tiene la propiedad I si los términos de esta sucesión son todos impares. Demostrar que entre todos los enteros positivos n tales que $1 \leq n \leq 2017$ son más los que tienen la propiedad I que los que tienen la propiedad P.

Problema 2. Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ su circunferencia circunscrita. Sea D un punto en el segmento BC, distinto de B y de C, y sea M el punto medio de AD. La recta perpendicular a AB que pasa por D corta a AB en E y a Γ en F, con el punto D entre E y F. Las rectas FC y EM se cortan en el punto X. Si $\angle DAE = \angle AFE$, demostrar que la recta AX es tangente a Γ.

Problema 3. Consideramos las configuraciones de números enteros

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{2017,1} & a_{2017,2} & a_{2017,3} & \cdots & a_{2017,2017} \end{array}$$

con $a_{i,j} = a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ para todos los i, j tales que $1 \leq j \leq i \leq 2016$.
Determinar la máxima cantidad de enteros impares que puede contener una tal configuración.

Problema 4. Sean ABC un triángulo acutángulo con $AC > AB$ y O su circuncentro. Sea D un punto en el segmento BC tal que O está en el interior del triángulo ADC y $\angle DAO + \angle ADB = \angle ADC$. Llamamos P y Q a los circuncentros de los triángulos ABD y ACD respectivamente y M al punto de intersección de las rectas BP y CQ. Demostrar que las rectas AM, PQ y BC son concurrentes.
Nota. El circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo.

Problema 5. Dado un entero positivo n, se escriben todos sus divisores enteros positivos en un pizarrón. Ana y Beto juegan el siguiente juego:
Por turnos, cada uno va a pintar uno de esos divisores de rojo o azul. Pueden elegir el color que deseen en cada turno, pero solo pueden pintar números que no hayan sido pintados con anterioridad. El juego termina cuando todos los números han sido pintados. Si el producto de los números pintados de rojo es un cuadrado perfecto, o si no hay ningún número pintado de rojo, gana Ana; de lo contrario, gana Beto. Si Ana tiene el primer turno, determinar para cada n quién tiene estrategia ganadora.

Problema 6. Sean $n > 2$ un entero positivo par y $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ números reales tales que $a_{k+1} - a_k \leq 1$ para todo k con $1 \leq k \leq n-1$. Sea A el conjunto de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ par, y sea B el conjunto de parejas (i, j) con $1 \leq i < j \leq n$ y $j - i$ impar. Demostrar que

$$\prod_{(i,j)\in A} (a_j - a_i) > \prod_{(i,j)\in B} (a_j - a_i).$$

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la XXXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Maximiliano Sánchez Garza). Primero, analicemos los números del 1 al 29 y del 2000 al 2017.

- Números del 1 al 9.
  Claramente estos números generan una sucesión constante, de donde se tiene que cada uno tiene la propiedad P o I. De estos, los impares $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ tienen la propiedad I y los pares $\{2, 4, 6, 8\}$ tienen la propiedad P.
- Números del 10 al 19.
  En este caso la sucesión se vuelve constante en el segundo paso. Además, se tiene que si $n = 10+j$, entonces $s(n) = 1+j$, luego $n-s(n) = 10+j-(1+j) = 9$; por lo tanto el primer término de la sucesión y el segundo tienen distinta paridad, de donde ninguno va a poder tener alguna de las dos propiedades.
- Números del 20 al 29.
  Para los $n = 20 + j$ con $0 \leq j \leq 7$, se va a tener que $s(n) = 2 + j$ es un número de un dígito y puesto que en este caso $n - s(n) = 18$ se va a conservar la paridad de la sucesión. Luego, de este conjunto los que tienen la propiedad I son $\{21, 23, 25, 27\}$ y los que tiene la propiedad P son $\{20, 22, 24, 26\}$. Para el 28 y 29 las sucesiones son $28, 10, 1, 1, \ldots$ y $29, 11, 2, 2, \ldots$ las cuales no tienen ninguna de las propiedades.
- Números del 2000 al 2009.
  De manera muy similar al caso anterior se cumple que si $n = 2000 + j$ con

$0 \leq j \leq 7$ se tiene que $s(n)$ es de un dígito; por lo tanto basta ver si se conserva la paridad entre n y $s(n)$. Esto es cierto pues $n - s(n) = 1998$; de donde $\{2001, 2003, 2005, 2007\}$ tienen I y $\{2000, 2002, 2004, 2006\}$ tiene P. Así como el caso de 28 y 29 las sucesiones para 2008 y 2009 no tendrán ninguna de las propiedades.

- Números del 2010 al 2017.
  Si $n = 2010 + j$, entonces $s(n) = 3 + j$; de donde $n - s(n) = 2007$. Por lo tanto, el primer y segundo términos de la sucesión tienen distinta paridad, por lo que ninguno tendrá alguna de las dos propiedades.

Luego, los números del conjunto analizado que cumplen I son 13 y los que cumple P son 12, es decir hay uno mas con I.
Para finalizar veamos que en cada bloque de 10 números consecutivos empezando por $\{30, 31, 32, \ldots, 39\}$ y terminando con $\{1990, 1991, \ldots, 1999\}$, la cantidad de números con la propiedad P es la misma que la cantidad de números con la propiedad I.
Observemos que los números a analizar son de la forma $n = 1000a_1 + 100a_2 + 10a_3 + a_4$, con $0 \leq a_1 \leq 1$, y $0 \leq a_2, a_3, a_4 \leq 9$, donde no es posible que todos sean 0. Luego $s(n) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, por lo tanto $n - s(n) = 999a_1 + 99a_2 + 9a_3 = 998a_1 + 98a_2 + 8a_3 + (a_1 + a_2 + a_3)$, de esto se deduce que n y $s(n)$ tienen la misma paridad si y sólo si $a_1 + a_2 + a_3$ es par.
Por la primera observación, los números analizados cumplen que $s(n) \leq 28$. Luego, un número entero n tiene alguna de las propiedades si y solo si $s(n)$ está en el conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 20, 21, 22, \ldots, 27\}$ (para que la sucesión a partir del segundo término tenga paridad constante) y $a_1 + a_2 + a_3$ debe ser par (para que n y $s(n)$ tengan la misma paridad). Además, un número que cumpla esta caracterización estará en P o en I según su paridad.
Para demostrar la afirmación dicha de los bloques analicemos los bloques según el $s(n)$ del primer número de dicho bloque. Este valor a lo sumo es $1 + 9 + 9 = 19$, pues el dígito de las unidades es cero; además como en cada bloque la cantidad $a_1 + a_2 + a_3$ es fija, basta analizar los números donde este número sea par, pues de lo contrario ningún número del bloque tendrá alguna de las propiedades.

- $s(n) \in \{1, 2, 3 \ldots, 9\}$. En este caso existe un primer dígito j tal que $s(n + j) = 10$ (a saber $j = 10 - s(n)$), de donde los números $n + j, n + j + 1, \ldots, n + 9$ no cumplirán pues su $s(n)$ no esta en A, mientras que $n, n + 1, n + 2, \ldots, n + j - 1$ tienen todos alguna de las dos propiedades. Como $s(n) = a_1 + a_2 + a_3$ es par, entonces $j = 10 - s(n)$ también sera par, de donde el conjunto $\{n, n + 1, n + 2, \ldots, n + j - 1\}$ tiene la misma cantidad de números pares e impares; por lo tanto, tienen la misma cantidad de elementos que cumplen la propiedad I que de elementos que cumplen la propiedad P.

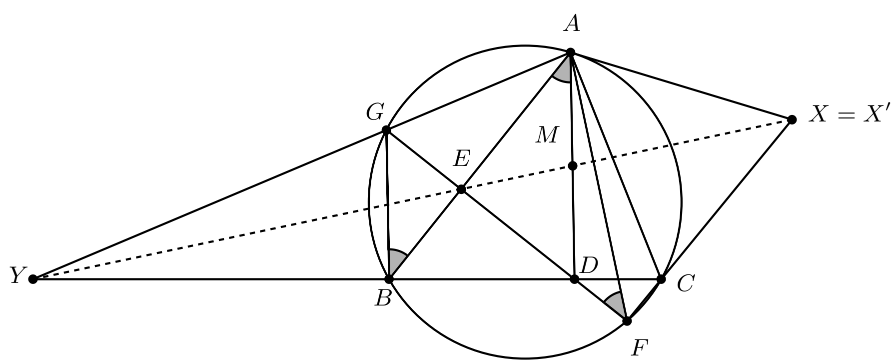
- $s(n) = 10$. En este caso, como $a_1 + a_2 + a_3$ es par, tenemos que $s(n + j)$, con j un dígito, no estará en el conjunto A, de donde ningún número tendrá alguna de las propiedades.

- $s(n) \in \{11, 12, \ldots, 19\}$. En este caso, existe un primer dígito j tal que $s(n + j) = 20$, de donde los números del bloque que tendrán alguna propiedad son

$\{n+j, n+j+1, \ldots, n+9\}$ (pues $s(n)$ es menor a 28, ya que esa suma solo ocurre con 1999 el cual está en un bloque con $a_1+a_2+a_3 = 9+9+1 = 19$, por lo que no es de los que estamos analizando). Ahora, $j = 20 - s(n) = 20 - (a_1 + a_2 + a_3)$, como la suma en paréntesis es par se cumple que j es par y, por lo tanto, hay la misma cantidad de números pares con respecto a los impares en el conjunto $\{n+j, n+j+1, \ldots, n+9\}$ de $10-j$ números, de donde hay la misma cantidad de números con la propiedad I con respecto a los que tienen la propiedad P.

Lo anterior concluye la afirmación, luego en el conjunto del 30 al 1999 hay la misma cantidad de números con la propiedad P que con la propiedad I. De donde se reduce el problema al análisis inicial donde había más con la propiedad I que con la propiedad P.

Solución del problema 2. (Solución de Leonardo Ariel García Morán). Sea G la intersección de DE con Γ, distinta de F y sea Y la intersección de AG y BC. Como $ABFG$ es un cuadrilátero cíclico, tenemos que $\angle GBA = \angle GFA = \angle EFA$. Por hipótesis $\angle EFA = \angle EAD$, por lo que $\angle GBE = \angle EAD$, lo cual implica que GB y AD son paralelas.
Esto último garantiza que $\frac{YB}{BD} = \frac{YG}{GA}$ y como M es punto medio de AD, tenemos que $\frac{YB}{BD} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AG}{GY} = \frac{YB}{BD} \cdot \frac{AG}{GY} = 1$. Por el Teorema de Ceva, lo anterior implica que las cevianas AB, DG y YM del triángulo AYD son concurrentes, es decir Y, M y E son colineales.



Aplicando el Teorema de Pascal al hexágono cíclico degenerado $AABCFG$, garantizamos que los puntos $E = AB \cap FG$, $Y = AG \cap BC$ y $X' = AA \cap CF$ son colineales; es decir, la intersección X' de EY con CF yace sobre la tangente a Γ por A. Ya que Y, E y M son colineales, el punto X' es el mismo que X, y por lo tanto X se encuentra sobre la tangente a Γ por A, así AX es tangente a Γ.

Solución del problema 3. Consideremos el problema general para un arreglo de n filas y n números $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}$ en la base. Sea $M(n)$ el número máximo de números impares que se pueden obtener. Para contar el número de enteros impares, podemos trabajar módulo 2, esto es, podemos suponer que los $a_{i,j}$ son 0 o 1 y que

$a_{i,j} \equiv a_{i+1,j} + a_{i+1,j+1} \pmod 2$.
Es fácil ver que la sucesión $M(1), M(2), M(3), \ldots$ comienza con los enteros 1, 2, 4, 7, $10, 14, \ldots$. Estos valores máximos se pueden obtener por ejemplo así:

$$
\begin{array}{c}1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}0\\1\;1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}1\\0\;1\\1\;1\;0\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}1\\1\;0\\0\;1\;1\\1\;1\;0\;1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}0\\1\;1\\1\;0\;1\\0\;1\;1\;0\\1\;1\;0\;1\;1\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}1\\0\;1\\1\;1\;0\\1\;0\;1\;1\\0\;1\;1\;0\;1\\1\;1\;0\;1\;1\;0\end{array}
$$

Observemos que si $n \equiv 0$ o $2 \pmod 3$, entonces $M(n) = \frac{n(n+1)}{3}$, mientras que si $n \equiv 1 \pmod 3$, entonces $M(n) = \frac{n(n+1)}{3} + \frac{1}{3}$. Esto significa que para estos casos,

$$M(n) = \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil. \tag{2}$$

Demostraremos por inducción que (2) se cumple para todo entero $n \geq 1$.
En primer lugar, demostraremos por inducción que el valor dado por (2) efectivamente se puede alcanzar poniendo $1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$ en la base del arreglo. Para $n = 1, 2, 3$ es cierto. Supongamos que $n > 3$ y que (2) se cumple para $1, 2, \ldots, n-1$.
Si $n = 3k$, entonces habrá $2k$ unos en la base. En la línea por encima de la base, tendremos $0\ 1\ 1\ 0\ 1 \ldots$, con $2k-1$ unos. En la línea siguiente tendremos $1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1 \ldots$, con $2k-1$ unos. En total, las tres líneas inferiores tienen $6k-2 = 2n-2$ unos. Análogamente, si $n = 3k+2$ habrá $2k+2$ unos en la base y $2k$ unos en cada una de las dos líneas siguientes, para un total de $6k+2 = 2n-2$ unos. Si $n = 3k+1$, entonces habrá $2k+1$ unos en la base, $2k$ unos en la línea siguiente y $2k-1$ unos en la subsiguiente, para un total de $6k = 2n-2$ unos.
Como la cuarta línea, contando desde la base, vuelve a tener el patrón $1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0 \ldots$, por hipótesis de inducción en esa línea junto con las que están por encima de ella, habrá $\left\lceil \frac{(n-3)(n-2)}{3} \right\rceil$ unos y, en total, $\left\lceil \frac{(n-3)(n-2)}{3} \right\rceil + 2n - 2 = \left\lceil \frac{1}{3}(n^2 - 5n + 6 + 6n - 6) \right\rceil = \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$. Por lo tanto, $M(n) \geq \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$.
A continuación probaremos, también por inducción, que el número de unos $U(n)$ en cualquier triángulo con n líneas es a lo más $\left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$. Esto es cierto para $n = 1, 2, 3$. Supongamos que $n > 3$ y que el resultado es cierto para $1, 2, \ldots, n-1$. Sea r la cantidad de unos en la base del triángulo. Ahora, observemos que $a_{n-1,j} = 1$ si o bien $a_{n,j} = 0$ y $a_{n,j+1} = 1$ o bien $a_{n,j} = 1$ y $a_{n,j+1} = 0$. Como cada 0 en la base puede dar lugar a lo más a dos unos en la línea $n-1$ y, en la base hay $n-r$ ceros, es claro que en la línea $n-1$ puede haber a lo más $2(n-r)$ unos. Luego, la base junto con la línea $n-1$ contienen a lo más $r + 2(n-r) = 2n - r$ unos.
Consideraremos tres casos:
Caso 1: $n \equiv 0 \pmod 3$. Si $r \leq \frac{2n}{3}$, entonces $U(n) \leq \frac{2n}{3} + \frac{(n-1)n}{3} = \frac{n(n+1)}{3}$. Si, en cambio, $r \geq \frac{2n}{3} + 1$, entonces como entre las líneas n y $n-1$ hay a lo más $2n - r$ unos, tenemos que

$$U(n) \leq 2n - r + \left\lceil \frac{(n-2)(n-1)}{3} \right\rceil \leq 2n - \frac{2n}{3} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)+1}{3} = \frac{n(n+1)}{3}.$$

Caso 2: $n \equiv 1 \pmod 3$. Si $r \leq \frac{2n+1}{3}$, entonces $U(n) \leq \frac{2n+1}{3} + \frac{(n-1)n}{3} = \frac{n(n+1)+1}{3} =$

$\left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil$. Si, en cambio, $r \geq \frac{2n+1}{3} + 1$, entonces

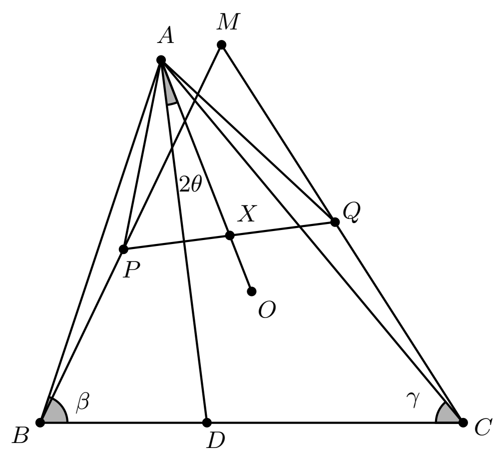
$$\begin{aligned} U(n) &\leq 2n - r + \left\lceil \frac{(n-2)(n-1)}{3} \right\rceil \\ &\leq 2n - \frac{2n+1}{3} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)-2}{3} \\ &< \left\lceil \frac{n(n+1)}{3} \right\rceil . \end{aligned}$$

Caso 3: $n \equiv 2 \pmod 3$. Si $r \leq \frac{2n-1}{3}$, entonces $U(n) \leq \frac{2n-1}{3} + \left\lceil \frac{(n-1)n}{3} \right\rceil = \frac{2n-1}{3} + \frac{(n-1)n+1}{3} = \frac{n(n+1)}{3}$. Si, en cambio, $r \geq \frac{2n-1}{3} + 1$, entonces

$$U(n) \leq 2n - r + \frac{(n-2)(n-1)}{3} \leq 2n - \frac{2n-1}{3} - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{3} = \frac{n(n+1)}{3}.$$

Finalmente, para $n = 2017$, tenemos que $M(2017) = \left\lceil \frac{2017 \cdot 2018}{3} \right\rceil = 1356769$.

Solución del problema 4. (Solución de Leonardo Maximiliano Sánchez Garza). Sean X la intersección de PQ con AO, $\angle DAO = 2\theta$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$ y $\angle CAB = \alpha$. Claramente $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Vamos a demostrar que las rectas AM, PQ y BC son los ejes radicales de tres circunferencias. Para esto, solo basta probar que los cuadriláteros $AMCB$, $PCQB$ y $AMPQ$ son cíclicos. Veamos primero que $AMCB$ es cíclico, y para esto, veamos que $\angle BMC = \alpha$.



Como P es el circuncentro del triángulo ABD, se tiene que $\angle BPD = 2\angle BAD$ y, por la misma razón, se tiene que $\angle PBD = 90° - \frac{\angle BPD}{2} = 90° - \angle BAD$. Análogamente, se tiene que $\angle QCD = 90° - \angle CAD$. Luego,

$$\begin{aligned} \angle BMC &= 180° - (\angle PBD + \angle DCQ) = 180 - (90° - \angle BAD + 90° - \angle CAD) \\ &= \angle BAD + \angle CAD = \angle BAC = \alpha \end{aligned}$$

que es justo lo que queríamos.
Ahora mostremos que $AMQP$ es cíclico, para ello basta probar que $\angle PAQ = \alpha$.
Notemos que por ser P el circuncentro del triángulo ABD, se tiene que $\angle PAD = 90° - \frac{\angle APD}{2} = 90° - \angle ABC = 90° - \beta$. Análogamente $\angle DAQ = 90° - \gamma$. Luego,

$$\angle PAQ = \angle PAD + \angle DAQ = 90° - \beta + 90° - \gamma = 180° - \beta - \gamma = \alpha,$$

justo como se quería.
Para finalizar veamos que $BPQC$ es cíclico. Primero notemos que como P, Q son circuncentros de los triángulos ABD y ADC, respectivamente, entonces PQ es mediatriz de AD. Por definición, X es un punto sobre la recta PQ, entonces $XA = XD$, de donde $\angle XAD = \angle XDA = 2\theta$. Por hipótesis se tiene que $\angle ADC = \angle ADB + \angle DAO$, luego $\angle ADC - \angle DAO = \angle ADB$, pero $\angle DAO = \angle XDA$, por lo tanto $\angle CDX = \angle ADB = x$.
Ahora, $\angle ADB + \angle ADX + \angle XDC = 180°$ de donde $2x + 2\theta = 180°$. Así, $x = 90° - \theta$, de donde $\angle ADC = 90° + \theta$ y $\angle ADB = 90° - \theta$. Tenemos que $\angle DQC = 2\angle DAC$ y $\angle PQD = \frac{1}{2}\angle AQD = \angle ACD$. Por otro lado, $\angle PBD = 90° - \frac{BPD}{2} = 90° - \angle BAD$.
Luego, $BPQC$ es cíclico si y solo si

$$\begin{aligned}
\angle PBC + \angle CQP = 180° &\Leftrightarrow (90° - \angle BAD) + (\angle DQC + \angle PQD) = 180° \\
&\Leftrightarrow (90° - \angle BAD) + \angle ACD + 2\angle DAC = 180° \\
&\Leftrightarrow \angle ACD + 2\angle DAC - \angle BAD = 90° \\
&\Leftrightarrow (\angle ACD + \angle DAC) + \angle DAC - \angle BAD = 90° \\
&\Leftrightarrow \angle ADB + \angle DAC - \angle BAD = 90° \\
&\Leftrightarrow (90° - \theta) + \angle DAC - \angle BAD = 90° \\
&\Leftrightarrow \theta = \angle DAC - \angle BAD \\
&\Leftrightarrow \theta = \angle OAC + 2\theta - \angle BAD \\
&\Leftrightarrow \theta = \angle BAD - \angle OAC,
\end{aligned}$$

donde la penúltima equivalencia es cierta ya que $\angle DAC = \angle DAO + \angle OAC$. Tenemos que por ser O circuncentro del triángulo ABC se cumple que

$$\angle OAC = 90° - \frac{\angle AOC}{2} = 90° - \angle ABC.$$

Entonces, $PQCB$ es cíclico si y solo si $2\theta = 2\angle BAD - 2\angle OAC = 2\angle BAD + 2\angle ABC - 180°$. Lo cual es equivalente a $\angle DAO = 2\angle ADC - 180°$ (ya que $\angle ADC = \angle BAD + \angle ABC$, por ángulo externo en el triángulo ADB), esto es, $2\theta = (90° + \theta) - 180°$, lo cual claramente es cierto. Por lo tanto, $PQCB$ es cíclico y se concluye la concurrencia por el centro radical en los circuncírculos de los tres cuadriláteros cíclicos $AMCB$, $PCQB$ y $AMPQ$.

Solución del problema 5. (Solución de Isaac Jair Jiménez Uribe). Veremos dos casos: cuando n es cuadrado perfecto y cuando no lo es.
Caso 1. $n = k^2$ con $k \in \mathbb{Z}^+$. En este caso Ana gana. Como Ana empieza, su estrategia

es pintar de azul el número k, lo cual se puede hacer porque $k \mid k^2$. Ahora k^2 tiene un número impar de divisores, pues por cada divisor d de k^2, $\frac{k^2}{d}$ también divide a k^2 y $\frac{k^2}{d} = d \Leftrightarrow k^2 = d^2 \Leftrightarrow |k| = |d|$ y como se toman divisores positivos, solo pasa si $k = d$.
Entonces al pintar k, queda un número par de divisores y es turno de Beto. Así, Ana tomará los turnos impares y, como k^2 tiene un número impar de divisores, Ana tiene el último turno. Ahora, en cada turno, con excepción del primero, Ana hará lo siguiente. Cuando Beto pinte de rojo el número d, Ana pinta (justo en el turno siguiente a ese) el número $\frac{k^2}{d}$. Como cada d tiene un $\frac{k^2}{d}$ único y diferente al de los demás, esto se puede hacer siempre. Si Beto pinta d de azul, pintará $\frac{k^2}{d}$ de azul. Como Ana tiene el último turno, funciona esta estrategia.
Por lo tanto, si hay números rojos, su producto es de la forma $(d_1 \cdot d_2 \cdots d_l)(\frac{k^2}{d_1} \cdot \frac{k^2}{d_2} \cdots \frac{k^2}{d_l}) = (k^2)^l$ que es un cuadrado. Si no hay números rojos, entonces terminamos. En ambos casos gana Ana.

Caso 2. $n \neq c^2$ para cualquier entero c. Gana Beto. Como $n \neq c^2$, existe un primo p tal que la máxima potencia de p que divide a n es impar; es decir $n = p^{2\alpha+1}k$ con α entero no negativo y k entero positivo no múltiplo de p. Sean $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_m = k$ los divisores positivos de k. La estrategia de Beto es la siguiente:
Ordenamos los divisores en un tablero $(2\alpha + 2) \times m$ tal que si el divisor d está en la fila i y columna j, entonces $d = p^i d_j$ donde enumeramos la filas del 0 al $2\alpha + 1$ de arriba hacia abajo y las columnas del 1 al m de izquierda a derecha.
Como todos los divisores de n son de la forma $p^i d$ con d y p primos relativos, $0 \leq i \leq 2\alpha + 1$ entero y d divisor positivo de k, entonces el tablero tiene a todos los divisores de n y ninguno se repite. En efecto, si $p^i d_l = p^j d_r$ con $l \neq r$ e $i \geq j$, entonces $p^{i-j} d_l = d_r$ pero $d_l \neq d_r$ y $p \not| d_r$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, como el tablero tiene un número par de números (pues $2\alpha + 2$ es par), n tiene un núero par de divisores. Como Ana empieza, Ana tiene los turnos impares y Beto los pares; entonces Beto tiene el último turno y siempre le puede contestar a Ana.
Si Ana pinta de un color a $d_i p^l$, Beto puede pintar del mismo color a $d_{m-i} p^{2\alpha+1-l}$, puesto que l no tiene la misma paridad que $2\alpha + 1 - l$. En efecto, si Ana pintó un $d_i p^l$ divisor con i impar (par), entonces Beto pinta $d_{m-i} p^{2\alpha+1-l}$ con $2\alpha + 1 - l$ par (impar), de donde se sigue la siguiente afirmación.
Afirmación. Después del turno de Beto habrá la misma cantidad de números pintados (con alguno de los dos colores) de la forma $p^{2\beta} d_i$ que de los de la forma $p^{2\gamma+1} d_j$.
Por otro lado, hay $m(\alpha + 1)$ divisores de la forma $p^i d_j$ con i impar y hay $m(\alpha + 1)$ divisores de la forma $p^l d_j$ con l par, entonces la estrategia de Beto será la descrita anteriormente hasta el penúltimo turno que le toque a Beto tirar. En ese momento habrá tres divisores. Por la afirmación anterior, puede ocurrir uno de los siguientes casos.

Caso 2.1. Quedan dos divisores de la forma $p^{2i} d_j$ y uno de la forma $p^{2l+1} d_j$. En este caso sea R el producto de todos los números pintados de rojo hasta ese momento y sea x entero no negativo tal que $p^x \mid R$ pero $p^{x+1} \nmid R$ (si no hay números rojos, entonces $x = 0$). Si x es par, entonces Beto pinta de rojo el divisor de la forma $p^{2l+1} d_j$, de donde la máxima potencia que divide al producto de los rojos $x + 2l + 1$ será impar. Como quedan solo divisores con potencia de p a un valor par, al concluir el juego quedará un producto con máxima potencia de p a un valor impar, lo cual quiere decir que el producto de los números rojos no es un cuadrado perfecto. Si en cambio x es impar, entonces Beto pinta de azul el divisor de la forma $p^{2l+1}d_j$ y, como en el caso anterior, no se podrá alterar la paridad de la potencia de p que aparece en el producto de los rojos. Así, este producto será impar y, en particular, este producto no será un cuadrado perfecto.

Caso 2.2. Quedan dos divisores de la forma $p^{2i+1}d_j$ y uno de la forma $p^{2l}d_j$. Sean R y x como en el caso anterior. Si x es par, entonces Beto pinta de rojo el divisor de la forma $p^{2l}d_j$, el cual no altera la paridad de la potencia de p en el producto de los rojos. En el último turno si Ana pinta de un color un divisor, Beto pinta del otro color el último divisor. Así, la potencia de p en el producto de los rojos será de la forma $x+2l+2i+1$ que es impar y, por lo tanto, no será un cuadrado perfecto. Si x es impar, entonces Beto pinta de azul el divisor de la forma $p^{2l}d_j$. Despues, si Ana pinta de un color un divisor en su último turno, Beto pinta de ese mismo color el último divisor, con lo cual la paridad de la potencia de p en el producto de los rojos se mantiene impar y, por lo tanto, no es cuadrado perfecto.

Como en ambos subcasos Beto gana, Beto tiene estrategia ganadora cuando n no es un cuadrado perfecto.

Solución del problema 6. (Solución de Leonardo Ariel García Morán). Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$ números reales positivos. Para índices $1 \leq i \leq j \leq 2k+1$, consideramos $S(i,j) = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j$. En particular, $S(i,i) = x_i$. El resultado en que se basa la solución de la desigualdad del problema, es el siguiente lema:

Lema. Se satisface la desigualdad

$$\prod_{\substack{1\leq i<j\leq 2k+1\\ j-i \text{ impar}}} S(i,j) > x_2x_4\cdots x_{2k} \prod_{\substack{1\leq i<j\leq 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j).$$

Demostración. Para esto, iniciamos con el caso $k=1$, que asegura que se cumple $(x_1+x_2)(x_2+x_3) > x_2(x_1+x_2+x_3)$. En efecto, esta desigualdad es inmediata, pues $(x_1+x_2)(x_2+x_3) - x_2(x_1+x_2+x_3) = x_1x_3 > 0$.

Como corolario de este caso obtenemos el siguiente resultado crucial.

Sub-lema. Para $2 \leq i \leq j \leq 2k$, se satisface la desigualdad,

$$S(i-1,j)S(i,j+1) > S(i,j)S(i-1,j+1).$$

En efecto, esto es equivalente a la desigualdad del caso $k=1$, con las variables $x_1 = x_{i-1}$, $x_2 = S(i,j) = x_i + x_{i+1} + \cdots + x_j$ y $x_3 = x_{j+1}$. Así, $x_1 + x_2 = S(i-1,j)$, $x_2 + x_3 = S(i,j+1)$, $x_2 = S(i,j)$ y $x_1 + x_2 + x_3 = S(i-1,j+1)$. $\square$

Utilizando el sub-lema para cada pareja (i,j) con i,j ambos pares, tenemos que

$$L = \prod_{\substack{1\leq i\leq j\leq 2k\\ i,j \text{ par}}} S(i-1,j)S(i,j+1) > \prod_{\substack{1\leq i\leq j\leq 2k\\ i,j \text{ par}}} S(i,j)S(i-1,j+1) = R.$$

Para finalizar la demostración del Lema, basta ahora probar que los lados izquierdo y derecho de esta expresión son de hecho equivalentes a las expresiones dadas en el Lema. Si (a,b) es una pareja con $a<b$ y $b-a$ impar, entonces uno de a y b es impar y el otro es par. Si a es impar entonces $a+1$ es par y $a+1\le b$, luego en L el término $S((a+1)-1,b)=S(a,b)$ aparece. Más aún, $S(a,b)$ no aparece como un término de la forma $S(i,j+1)$ en L, pues esto implicaría que a es par. Luego, $S(a,b)$ aparece exactamente una vez en L. De manera similar si b es impar, entonces $S(a,b)$ aparece como un término de la forma $S(i,j+1)$ en L, pero no como un término de la forma $S(i-1,j)$. Se sigue que cada término del lado izquierdo de la expresión del Lema aparece una vez en L.
De manera análoga se puede probar que R coincide con el lado derecho, cualquier suma $S(a,b)$ en el lado derecho cumple que a y b tienen la misma paridad. Si a y b son pares, entonces $S(a,b)$ aparece en R como término de la forma $S(i,j)$, en este caso $(i,j)=(a,b)$ y, si ambos son impares, entonces $S(a,b)$ aparece en R en la forma $S(i-1,j+1)$, pero no en la forma $S(i,j)$, (en este caso $i=a+1$ y $j=b-1$). Se tendría un problema si $a>b-2$, pues entonces $i>j$. Esto da que $a=b$ pues $b-a$ es par, lo cual entonces no ocasiona problemas pues $S(a,a)=x_a$ no aparece en el lado derecho de R cuando a es impar.
Con esto último queda demostrado el Lema.

Para aplicarlo al problema original, elegimos k tal que $n=2k+2$ (es posible ya que $n>2$), y definimos $x_i=a_{i+1}-a_i$. Entonces, por hipótesis, todos los números $x_1,x_2,\ldots,x_{2k+2}$ son números menores o iguales a 1; por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_2x_4\cdots x_{2k}\prod_{\substack{1\le i<j\le 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j) &\ge x_1x_2x_3\cdots x_{2k+1}\prod_{\substack{1\le i<j\le 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j)\\ &= \prod_{1\le i=j\le 2k+1} S(i,j)\cdot\prod_{\substack{1\le i<j\le 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j)\\ &= \prod_{\substack{1\le i\le j\le 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j). \end{aligned}$$

Por ser $j-i\neq 0$ cuando $j-i$ es impar, tenemos que

$$\prod_{\substack{1\le i<j\le 2k+1\\ j-i \text{ impar}}} S(i,j)=\prod_{\substack{1\le i\le j\le 2k+1\\ j-i \text{ impar}}} S(i,j).$$

Luego, usando el Lema y estas dos últimas observaciones se tiene que,

$$\prod_{\substack{1\le i\le j\le 2k+1\\ j-i \text{ impar}}} S(i,j)>\prod_{\substack{1\le i\le j\le 2k+1\\ j-i \text{ par}}} S(i,j).$$

Para finalizar vemos que

$$\begin{aligned} S(i,j) &= x_i+x_{i+1}+\cdots+x_j\\ &= (a_{i+1}-a_i)+(a_{i+2}-a_{i+1})+\cdots+(a_{j+1}-a_j)=a_{j+1}-a_i; \end{aligned}$$

por lo tanto, la desigualdad anterior es simplemente,

$$\prod_{\substack{1\leq i\leq j\leq 2k+1\\ j-i \text{ impar}}}(a_{j+1}-a_i) > \prod_{\substack{1\leq i\leq j\leq 2k+1\\ j-i \text{ par}}}(a_{j+1}-a_i).$$

Al hacer $l = j+1$, la desigualdad anterior es,

$$\prod_{\substack{1\leq i<l\leq 2k+2\\ l-i \text{ par}}}(a_l-a_i) > \prod_{\substack{1\leq i<l\leq 2k+2\\ l-i \text{ impar}}}(a_l-a_i).$$

Recordando que $n = 2k+2$, lo anterior es

$$\prod_{(i,l)\in A}(a_l-a_i) > \prod_{(i,l)\in B}(a_l-a_i),$$

que es justo lo que queríamos demostrar.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Euler)**.** *Si a y n son enteros positivos primos relativos, entonces $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod n).*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Desigualdad media aritmética - media armónica). *Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Para cualesquiera números reales x_1, $\ldots$, x_n, $y_1, \ldots, y_n$, se cumple que,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

La igualdad se verifica si y solo si existe un número real λ tal que $x_i = \lambda y_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 10 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 11 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 12 (Tales). *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 13 (Bisectriz). *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 14 (Ley de senos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R$, donde α es el ángulo opuesto al lado a, β es el ángulo opuesto al lado b, γ es el ángulo opuesto al lado c, y R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Teorema 15 (Ley de cosenos). *En un triángulo de lados a, b y c, se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, donde α es el ángulo opuesto al lado a.*

Teorema 16 (Ceva). *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 17 (Menelao). *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y sólo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo semi-inscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

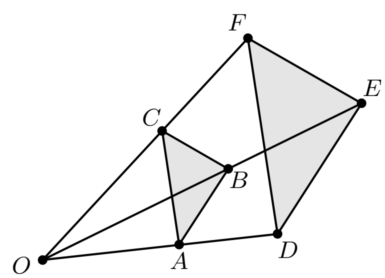
Teorema 18 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 19 (Medida del ángulo semi-inscrito)**.** *La medida de un ángulo semi-inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 20 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Triángulos homotéticos)**.** *Decimos que los triángulos ABC y DEF son homotéticos si $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ y $CA \parallel FD$. Dichos triángulos siempre son semejantes y la razón de homotecia es la razón de semejanza entre los triángulos. Si la razón de semejanza es diferente de 1, las rectas AD, BE y CF concurren en un punto O al que llamamos centro de homotecia.*



Teorema 21 (Circunferencia de los 9 puntos)**.** *Los pies de las tres alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van de los vértices al ortocentro del triángulo, están sobre una circunferencia de radio $\frac{1}{2}R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del triángulo.*

Definición 7 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 22 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Definición 8 (Figuras en perspectiva)**.** *Dos figuras están en perspectiva si todas las rectas que unen puntos correspondientes de las dos figuras son concurrentes. El punto por el cual pasan estas rectas se llama centro de perspectiva.*

Teorema 23 (Desargues)**.** *Dos triángulos están en perspectiva si y solo si los puntos de intersección de lados correspondientes son colineales.*

Teorema 24 (Recta de Euler)**.** *En un triángulo ABC, el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos puntos se conoce como la recta de Euler.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[7] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[8] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[10] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[11] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[14] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[16] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.