# TZALOA

# Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

## Año 2019, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán


Impreso y hecho en México.
Noviembre de 2019.

# Contenido

# Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

## Tzaloa, Año 2019, Número 4

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *El Teorema Chino del Residuo, una herramienta poderosa*, de nuestro amigo Víctor Hugo Almendra Hernández. En él, se aborda el Teorema Chino del Residuo como herramienta para construir números, acotar números o dividir un problema en problemas con los que sea más fácil trabajar. Estamos seguros que esta aportación será de gran utilidad para todos nuestros amigos lectores.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este cuarto y último número del año 2019, incluimos los exámenes de la Etapa Final Estatal de la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y de la $6^a$ Olimpiada Iraní de Geometría, así como los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos en el nivel I del Concurso Nacional de la $3^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). También hemos incluido los exámenes con soluciones de la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, que se celebró en el mes de septiembre de 2019 en la ciudad de Guanajuato, Guanajuato, México, siendo la sede académica el CIMAT.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

## México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

## 33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del $1^\circ$ de agosto de 2000. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2019-2020 y, para el $1^\circ$ de julio de 2020, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 10 al 15 de noviembre de 2019 en la Ciudad de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2019 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la $61^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rusia, julio de 2020) y a la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Perú, septiembre de 2020).

De entre los concursantes nacidos en 2003 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2020).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la IX Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2020.

# El Teorema Chino del Residuo, una herramienta poderosa

**Por Víctor Hugo Almendra Hernández**

**Nivel Avanzado**

El manejo de congruencias en teoría de números, juega un papel muy importante dentro de la olimpiada de matemáticas y, dentro de ello, el Teorema Chino del Residuo es una herramienta sumamente útil. Además de hablar del teorema en sí, mostraremos tres maneras en las que este puede ser usado: para construir, para acotar números y para dividir un problema de modo que sea fácil trabajar con los subproblemas resultantes.

## Teorema Chino del Residuo

Comenzaremos por enunciar y demostrar el teorema en cuestión.

**Teorema Chino del Residuo (TCR).** Sean $m_1, m_2, \ldots, m_n$ enteros positivos distintos de $1$ y primos relativos por parejas, y sea $M = m_1 m_2 \cdots m_n$. Entonces, para cualesquiera enteros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{m_1}, \\ x &\equiv x_2 \pmod{m_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv x_n \pmod{m_n}, \end{aligned}$$

tiene soluciones y cualesquiera dos soluciones tienen la misma congruencia módulo $M$.

**Demostración.** Construiremos primero una solución al sistema de congruencias propuesto. Esta construcción es muy clara una vez que se tiene en mente la forma que queremos que tenga nuestra $x$ para que satisfaga las $n$ congruencias. Buscaremos enteros $k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se cumpla que $k_i \equiv x_i \pmod{m_i}$ y $k_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ para todo $j \neq i$, con $i \neq j$. Una vez que determinemos estos enteros, $x = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ será solución al sistema de congruencias, ya que $x = k_1 + k_2 + \cdots + k_n \equiv k_i \equiv x_i \pmod{m_i}$, pues $k_j \equiv 0 \pmod{m_j}$ siempre que $j$ sea distinto de $i$. Entonces solo resta encontrar los enteros $k_1, k_2, \ldots, k_n$ que cumplan lo mencionado anteriormente. Para esto, sean $r_i = \frac{M}{m_i}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como los $m_i$'s son primos relativos por parejas, tenemos que $\text{mcd}(r_i, m_i) = 1$, por lo que para cada $i$ existe $c_i$ entero tal que $c_i r_i \equiv 1 \pmod{m_i}$. Finalmente, los enteros $k_i = x_i c_i r_i$ cumplen lo deseado, ya que si $j \neq i$, $m_j$ divide a $r_i$ y, por lo tanto, $k_i \equiv 0 \pmod{m_j}$ y también se tiene que $k_i = x_i(c_i r_i) \equiv x_i \pmod{m_i}$, como queríamos. Entonces, $x = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ satisface el sistema de congruencias planteado.
Notemos ahora que si $x, y$ son soluciones del sistema de congruencias, tenemos que $m_i$ divide a $x - y$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y, como los $m_i$'s son primos relativos por parejas, se sigue que $M$ divide a $x - y$, esto es, $x \equiv y \pmod{M}$. Es fácil ver que si $x$ es solución del sistema, entonces cualquier entero $y$ tal que $y \equiv x \pmod{M}$ es también es solución.
Con esto concluimos que los enteros congruentes módulo $M$ al entero $x$ que construimos, son las únicas soluciones al sistema de congruencias. $\square$

# El caso general

El Teorema Chino del Residuo nos dice que bajo ciertas hipótesis nuestro sistema de congruencias tiene solución, ¿pero qué sucede cuando estas hipótesis no se cumplen? Es decir, cómo saber si determinado sistema tiene solución, si el sistema no satisface que los módulos que se están considerando son primos relativos por parejas. Nos gustaría poder resolver este problema con lo que ya tenemos, por lo que pasaremos de un sistema cualquiera a uno que cumpla las hipótesis del teorema.

Se tiene el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_1 \pmod{k_1}, \\ x &\equiv x_2 \pmod{k_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv x_n \pmod{k_n}, \end{aligned}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son enteros cualesquiera y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ son enteros positivos. Una primera observación es que para que el sistema tenga solución, es necesario que para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se cumpla que $x_i \equiv x_j \pmod{\text{mcd}(k_i, k_j)}$. Para probar esto, basta con notar que si existe $x$ tal que satisface cada una de las congruencias planteadas anteriormente, entonces $k_i$ divide a $x - x_i$ y $k_j$ divide a $x - x_j$, por lo que $\text{mcd}(k_i, k_j)$ divide a ambos números y, en consecuencia, divide a su diferencia,

que es $x_i - x_j$, de donde concluimos que $x_i \equiv x_j \pmod{\text{mcd}(k_i, k_j)}$ para cualesquiera $i, j$, como se quería.
Veamos que esta condición también es suficiente para garantizar que existe solución al sistema de congruencias. Supongamos que, además de las congruencias presentadas, se cumple que $x_i \equiv x_j \pmod{\text{mcd}(k_i, k_j)}$ para cualesquiera $i, j$. Sea $K$ el mínimo común múltiplo de $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Considerando la descomposición canónica de $K = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, tenemos que existe $j_s$ tal que $p_s^{\alpha_s}$ divide a $k_{j_s}$ y, además, no existe $t$ tal que $p_s^{\alpha_s+1}$ divida a $k_t$. En otras palabras, $\alpha_s$ es la máxima potencia de $p_s$ que divide a alguno de los $k_i$'s. Definimos $s_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $p_i^{\alpha_i}$ divide a $k_{s_i}$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ (tal entero existe por lo que mencionamos anteriormente). Demostraremos ahora que el sistema de congruencias:

$$\begin{aligned} x &\equiv x_{s_1} \pmod{p_1^{\alpha_1}}, \\ x &\equiv x_{s_2} \pmod{p_2^{\alpha_2}}, \\ &\vdots \\ x &\equiv x_{s_r} \pmod{p_r^{\alpha_r}}, \end{aligned}$$

es equivalente al planteado inicialmente, esto es, $x$ es solución del primer sistema de congruencias si y solo si $x$ es solución del segundo sistema de congruencias. Supongamos primero que $x$ es solución del primer sistema de congruencias y sea $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Como $x \equiv x_{s_i} \pmod{k_{s_i}}$, se sigue que $k_{s_i}$ divide a $x - x_{s_i}$ y, como $p_i^{\alpha_i}$ divide a $k_{s_i}$, resulta que $x \equiv x_{s_i} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, por lo que $x$ es, en efecto, una solución del segundo sistema de congruencias. Para el recíproco, consideremos $x$ solución del segundo sistema y sea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $k_i$ divide a $K$, tenemos que $k_i = p_{i_1}^{\beta_{i_1}} p_{i_2}^{\beta_{i_2}} \cdots p_{i_t}^{\beta_{i_t}}$, donde $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$ y, además, $\beta_{i_j} \leq \alpha_{i_j}$ para cada $j$. Entonces, por Teorema Chino del Residuo tenemos que $x \equiv x_i \pmod{k_i}$ si y solo si $x \equiv x_i \pmod{p_{i_j}^{\beta_{i_j}}}$ para cada $j \in 1, 2, \ldots, t$. Ahora, como $x \equiv x_{s_{i_j}} \pmod{p_{i_j}^{\alpha_{i_j}}}$ y $\beta_{i_j} \leq \alpha_{i_j}$, tenemos que $x \equiv x_{s_{i_j}} \pmod{p_{i_j}^{\beta_{i_j}}}$. Recordemos que $x_i \equiv x_{s_{i_j}} \pmod{\text{mcd}(k_i, k_{s_{i_j}})}$ y, como $p_{i_j}^{\beta_{i_j}}$ divide a $k_i$ y $p_{i_j}^{\alpha_{i_j}}$ divide a $k_{s_{i_j}}$, se sigue que $p_{i_j}^{\beta_{i_j}}$ divide a $\text{mcd}(k_i, k_{s_{i_j}})$, por lo que $x_i \equiv x_{s_{i_j}} \pmod{p_{i_j}^{\beta_{i_j}}}$. Luego, $x \equiv x_{s_{i_j}} \equiv x_i \pmod{p_{i_j}^{\beta_{i_j}}}$ para cada $j$, lo cual implica que $x \equiv x_i \pmod{k_i}$, como queríamos. Finalmente, como el segundo sistema de congruencias cumple las hipótesis del Teorema Chino del Residuo, este tiene solución y es única módulo $K$.
Concluimos entonces que el sistema de congruencias planteado tiene solución si y solo si para cualesquiera $i, j$ se cumple que $x_i \equiv x_j \pmod{\text{mcd}(k_i, k_j)}$. Además, la solución es única módulo $M$, el mínimo común múltiplo de $k_1, k_2, \ldots, k_n$. $\square$

# Fórmula de interpolación de Lagrange

Consideremos el siguiente ejemplo. Se quiere encontrar un polinomio $P(x)$ tal que $P(0) = 1$, $P(1) = 7$ y $P(2) = 10$. Lo que haremos será considerar un polinomio de la forma $P(x) = c_1 x(x-1) + c_2(x-1)(x-2) + c_3(x-2)(x)$. Notemos que

$P(0) = 2c_2$, $P(1) = -c_3$ y $P(2) = 2c_1$, entonces basta con hacer $c_1 = 5, c_2 = \frac{1}{2}$ y $c_3 = -7$.

Notemos que la idea con la que construimos el polinomio $P(x)$ es muy similar a la forma en como se construyó una solución al sistema de congruencias, pues nos apoyamos en sumandos que surgen al considerar el producto de todos los elementos en cuestión excepto alguno de ellos. Ciertamente esta es una idea bastante útil para problemas de esta naturaleza. De manera más general, supongamos que tenemos $d+1$ números reales distintos $x_1, x_2, \ldots, x_{d+1}$ y $d+1$ valores (no necesariamente distintos) $y_1, y_2, \ldots, y_{d+1}$. Entonces, existe un único polinomio $P$, de grado menor o igual a $d$ tal que $P(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \cdots, d+1$ y, además, se conoce la forma de dicho polinomio $P$, la cual está dada por la *Fórmula de interpolación de Lagrange*. Veamos cómo se construye. Una vez teniendo esto será muy claro que el polinomio construido cumple lo deseado y tiene grado menor o igual a $d$, y restaría ver que es único.
Para cada $i = 1, \ldots, d+1$, sea

$$Q_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - x_j),$$

esto es, $Q_i(x)$ es el polinomio que resulta de multiplicar todos los $x - x_j$, excepto $x - x_i$. Ahora, veamos que existen números reales $c_1, c_2, \ldots, c_{d+1}$, tales que

$$P(x) = c_1 Q_1(x) + c_2 Q_2(x) + \cdots + c_{d+1} Q_{d+1}(x).$$

Notemos que el papel que juegan los $Q_i$'s es exactamente el mismo que el de los $k_i$'s en la prueba dada para el Teorema Chino del Residuo, es decir, $Q_i(x_j) = 0$ para todo $j \neq i$ y $Q_i(x_i)$ es distinto de 0, por lo que si hacemos $c_i = \frac{y_i}{Q_i(x_i)}$ tendremos que $P(x_i) = y_i$, como queremos.

El polinomio obtenido,

$$P(x) = y_1 \frac{Q_1(x)}{Q_1(x_1)} + y_2 \frac{Q_2(x)}{Q_2(x_2)} + \cdots + y_{d+1} \frac{Q_{d+1}(x)}{Q_{d+1}(x_{d+1})},$$

es conocido como la **fórmula de interpolación de Lagrange**. Notemos que el grado de $P$ es en efecto a lo más $d$, ya que cada uno de los $Q_i$'s tiene grado $d$. Demostraremos que no existe otro polinomio $R$, de grado menor o igual a $d$ que cumpla que $R(x_i) = y_i$ para todo $i$. Supongamos, por contradicción, que sí existe. Entonces, el polinomio $R(x) - P(x)$ es de grado a lo más $d$. Sin embargo, $R(x_i) - P(x_i) = y_i - y_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, d+1$, esto nos dice que el polinomio es la constante 0 pues de lo contrario tendría grado mayor que $d$ por tener al menos $d+1$ raíces. Como $R(x) - P(x) = 0$ para todo $x$ real, se sigue que $R(x) = P(x)$, lo que es una contradicción. Concluimos que el polinomio dado por la fórmula de interpolación de Lagrange, es el único que cumple las $d+1$ condiciones deseadas y que tiene grado menor o igual a $d$.

Este tipo de ideas "diagonales" al momento de construir cosas, en donde forzamos que suceda cierta condición cuando $i \neq j$ y otra distinta cuando $i = j$, como en la solución propuesta en la demostración del Teorema Chino del Residuo, o la forma de llegar a la fórmula de interpolación de Lagrange, resultan muy útiles en el mundo de las matemáticas, incluso fuera de la olimpiada.

Retomando el Teorema Chino del Residuo (TCR), además de las ideas tan útiles que se vieron en la demostración, el resultado que nos da este teorema suele ser muy útil dentro de los problemas de la olimpiada. A continuación, mostraremos tres diferentes técnicas en las que es común utilizar el TCR: para construir números que cumplan ciertas propiedades, para acotar números que satisfagan ciertas condiciones, o para dividir el problema en subproblemas con los que sea más fácil trabajar.

# Construcciones

Para construir enteros que satisfagan cierto sistema de congruencias como el planteado por el TCR, muchas veces es suficiente con saber de su existencia para concluir lo que se ande buscando.

**Ejemplo 1.** (Estados Unidos, 2008) Sea $n$ un entero positivo. Muestra que existen enteros positivos $k_0, k_1, \ldots, k_n$ mayores que 1, primos relativos por parejas tales que $k_0 k_1 \cdots k_n - 1$ es el producto de dos enteros consecutivos.

**Solución con el TCR.** Notemos que es suficiente demostrar que existe $m$ entero positivo tal que $m(m+1)+1$ tiene al menos $n+1$ factores primos distintos, lo que nos permitirá "repartir" los factores en $k_0, k_1, \ldots, k_n$ de modo que resulte cada uno mayor que 1 y que sean primos relativos. Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 + x + 1$. Queremos probar que existe $m$ tal que $P(m)$ tiene tantos divisores primos distintos como queramos, para lo cual primero hay que ver que el conjunto de primos que divide a algún $P(a)$, con $a$ entero, es infinito. Supongamos que tal conjunto es finito, digamos que $p_1, p_2, \ldots, p_r$ son dichos primos, podemos tomar $a = p_1 p_2 \cdots p_r$ y, claramente, ninguno de estos primos divide a $P(a)$, lo que es una contradicción. Entonces, el conjunto de los primos que dividen a algún $P(a)$ es infinito, en particular tiene al menos $n+1$ elementos distintos. Sean $p_0, p_1, \ldots, p_n$ estos primos y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ enteros tales que $p_i$ divide a $P(a_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Consideremos ahora el sistema de congruencias dado por $x \equiv a_i \pmod{p_i}$ para cada $i$. Por el TCR este sistema de congruencias tiene solución, pues $\text{mcd}(p_i, p_j) = 1$ si $i \neq j$ (ya que los $p_i$'s son primos distintos). Sea $N$ una solución de dicho sistema. Tenemos ahora que $P(N)$ es múltiplo de $p_0, p_1, \ldots p_n$, esto es, hemos encontrado un entero tal que $N(N+1)+1$ tiene al menos $p+1$ divisores primos distintos, como queríamos ver.

**Solución sin el TCR.** Recordando la factorización

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

podemos generalizarla como sigue:

$$\begin{aligned} x^{2^{k+1}}+x^{2^k}+1 &= (x^{2^k}+x^{2^{k-1}}+1)(x^{2^k}-x^{2^{k-1}}+1) \\ &= (x^{2^{k-1}}+x^{2^{k-2}}+1)(x^{2^{k-1}}-x^{2^{k-2}}+1)(x^{2^k}-x^{2^{k-1}}+1). \end{aligned}$$

Además, la diferencia entre los primeros dos factores es $2x^{2^{k-1}}$, con lo que es fácil concluir que si $x$ es entero, entonces los factores son primos relativos. Con esta observación concluimos que podemos tomar $x$ entero positivo mayor que 1 y un exponente $k$ lo suficientemente grande, de modo que $x^{2^{k+1}}+x^{2^k}+1$ tenga al menos $n+1$ factores primos relativos por parejas (los que se obtienen al ir factorizando), con lo que hemos concluido, pues $x^{2^{k+1}}+x^{2^k}+1 = x^{2^k}(x^{2^k}+1)+1$. Entonces, los factores obtenidos serán $k_0, k_1, \ldots, k_n$ y, claramente, son mayores que 1 si $x$ es mayor que 1.

La segunda solución del Ejemplo 1, es evidentemente más simple que la primera. Sin embargo, requiere que se recuerde la factorización o que esta sea motivada de algún modo, lo cual ya no parece ser tan sencillo. La primera solución, una vez que se tiene en mente que se quiere que $m^2+m+1$ tenga muchos divisores, resulta natural pensar en el TCR, ya que este nos permite construir números, basados en su congruencia módulo ciertos enteros.

**Ejemplo 2.** Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que para cada entero $x$, existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_i$ divide a $P(x)$. Muestra que existe $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a_m$ divide a $P(x)$ para todo entero $x$.

**Solución.** Supongamos, por contradicción, que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existe $x_i$ tal que $a_i$ no divide a $P(x_i)$. Nos gustaría construir $x$ tal que $P(x)$ no sea divisible por ninguno de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, lo que nos daría la contradicción buscada. Como $P$ tiene coeficientes enteros, sabemos que si $d$ no divide a $P(a)$ entonces $d$ no divide a $P(a+kd)$ con $k$ entero. Esto último nos hace pensar que ya estamos cerca, pues si existe $x$ tal que $x \equiv x_i \pmod{a_i}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ se llega a lo deseado. El único problema con esto, es que no sabemos si los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son primos relativos por parejas, por lo que no podemos usar el TCR. Haremos ciertas modificaciones para poder usar este teorema. Como $a_i$ no divide a $P(x_i)$, existe $p_i$ primo tal que si $\alpha_i = v_{p_i}(a_i)$, entonces $p_i^{\alpha_i}$ no divide a $P(x_i)$. Consideremos entonces el sistema de congruencias dado por $x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Si existen $j, k$ tales que $p_j = p_k$, omitimos la congruencia que contiene el mayor exponente para tal primo, esto es, si $\alpha_j \leq \alpha_k$, omitimos la congruencia $x \equiv x_k \pmod{p_k^{\alpha_k}}$. En caso contrario, omitimos la congruencia $x \equiv x_j \pmod{p_j^{\alpha_j}}$. Continuamos este proceso hasta que tengamos puras potencias de primos distintos en nuestro sistema de congruencias y, por el TCR, garantizamos que existe solución. Es fácil ver que esta $x$ cumple que ninguno de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ divide a $P(x)$, pues para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $p_i^{\alpha_i}$ no divide a $P(x)$, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que existe $m$ tal que $a_m$ divide a $P(x)$ para todo entero $x$, como queríamos.

El ejemplo 2 muestra que hay ocasiones en las que no tenemos inmediatamente un sistema de congruencias que cumpla las hipótesis del Teorema Chino del Residuo, pero no hay que preocuparse. Usualmente con trucos que se adquieren con la práctica, como el de este ejemplo, podemos modificar las cosas para tener un sistema que cumpla tanto las condiciones del TCR como lo que se quiera para el problema en cuestión.

**Ejemplo 3.** Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función que satisface las siguientes condiciones:

- Si $m$ y $n$ son primos relativos, entonces $f(m)$ y $f(n)$ son primos relativos.
- $n \leq f(n) \leq n + 2012$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Muestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier primo $p$, si $p$ divide a $f(n)$, entonces $p$ divide a $n$.

**Solución.** Procederemos por contradicción. Supongamos que existen $n$ entero positivo y $p$ primo tal que $p$ divide a $f(n)$ pero $p$ no divide a $n$. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_{2012}$ números primos distintos y mayores que $2012, n$ y $p$. Como $1 < p_i \leq f(p_i)$, se tiene que existe $q_i$ primo tal que $q_i \mid f(p_i)$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$. Notemos que si $i \neq j$, entonces $q_i \neq q_j$, pues $p_i \neq p_j$. En particular, $\text{mcd}(p_i, p_j) = 1$, por lo que $\text{mcd}(f(p_i), f(p_j)) = 1$ y, en consecuencia, $q_i \neq q_j$, como queremos. Ahora, por el TCR podemos garantizar que existe un entero positivo $m$ que satisface las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
& m \equiv 0 \ (\text{mod}\ p), && (1)\\
& m + i \equiv 0 \ (\text{mod}\ q_i) \ \ \text{para cada } i \in \{1, 2, \ldots, 2012\}, && (2)\\
& p_i \nmid m \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, 2012\}, && (3)\\
& \text{mcd}(n, m) = 1. && (4)
\end{aligned}
$$

Notemos que $p \neq q_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$, ya que $p_i > n$ implica que $\text{mcd}(p_i, n) = 1$ y, en consecuencia, $\text{mcd}(f(p_i), f(n)) = 1$; en particular, $p$ no divide a $f(p_i)$ pues divide a $f(n)$. Con esto garantizamos que el sistema de congruencias dado por (1) y (2), tiene solución. Luego, si algún $p_i$ es igual a algún $q_j$, entonces $p_i$ no divide a las soluciones del sistema de congruencias dado por (1) y (2), ya que si $x$ es solución, entonces $x + j \equiv 0 \ (\text{mod}\ q_j)$ y, como $0 < j \leq 2012$ y $q_j = p_i$, resulta que $p_i$ no puede dividir a $x$. Concluimos que sí podemos garantizar (1), (2) y (3) simultáneamente, pues si el primo $p_i$ no ha aparecido en (2), podemos pedir que $m \equiv 1 \ (\text{mod}\ p_i)$. Sea $x$ una solución de (1), (2) y (3). Para ver la cuarta condición, basta ver que para cada primo $q$ que divida a $n$, como $p$ no divide a $n$, $q \neq p$, y entonces si $q$ aparece en alguna de las condiciones anteriores, $q$ no divide a $x$, y su $q$ no ha aparecido, pediremos que $m \equiv 1 \ (\text{mod}\ q)$, con lo que se existe $m$ que satisface las cuatro condiciones deseadas. Si $f(m) = m + i$ con $i \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$, entonces $q_i \mid f(m)$. Por otro lado, como $\text{mcd}(p_i, m) = 1$, tenemos que $\text{mcd}(f(p_i), f(m)) = 1$ y como $q_i \mid f(p_i)$, $q_i$ no divide a $f(m)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(m) = m$ y, además, $p \mid m$ y $\text{mcd}(n, m) = 1$, con lo que hemos acabado, pues se tiene que entonces $1 = \text{mcd}(f(m), f(n)) = \text{mcd}(m, f(n))$, lo que es una contradicción, ya que $p \mid m$

y $p \mid f(n)$. Concluimos que la suposición de la existencia de $n$ y $p$ nos lleva a una contradicción, por lo que todo primo que divida a $f(n)$ divide a $n$ para todo entero positivo $n$, como queríamos.

## Acotar con TCR

En ciertas ocasiones nos presentamos con problemas en los que el TCR es útil para acotar. Un ejemplo de esto es que si sabemos que se tienen dos soluciones distintas de cierto sistema de congruencias, entonces su diferencia puede ser muy grande, pues será múltiplo del producto de los módulos considerados.

**Ejemplo 4.** (Olimpiada Nacional de Matemáticas por Internet, 2013) Para cualquier conjunto finito $X$ de enteros, definimos $S(X)$ como la suma de todos los elementos de $X$ y $P(X)$ como el producto de todos los elementos de $X$. Sean $A$ y $B$ dos conjuntos finitos de enteros positivos tales que $|A| = |B|$, $P(A) = P(B)$ y $S(A) \neq S(B)$. Si para cada $n \in A \cup B$ y cualquier primo $p$ divisor de $n$ se tiene que $p^{36}$ divide a $n$ pero $p^{37}$ no divide a $n$, demuestra que

$$|S(A) - S(B)| > 5 \cdot 10^7.$$

**Solución.** De la condición de que para cualquier primo $p$ que divide a $n \in A \cup B$, la mayor potencia de $p$ que divide a $n$ es 36, concluimos que todos los elementos de $A$ y $B$ son potencias 36-ésimas. Sean $q$ un primo y $\alpha$ un entero positivo tales que $36 \mid \varphi(q^\alpha)$. Si $n \in A \cup B$, entonces $n \equiv 1 \pmod{q^\alpha}$ o $n \equiv 0 \bmod q^\alpha)$, pues $n = k^{36}$ para algún entero $k$. Notemos además que $A$ y $B$ tienen la misma cantidad de múltiplos de $q$, pues como $P(A) = P(B)$, se tiene que $v_q(P(A)) = v_q(P(B))$ y, como $v_q(P(A))$ es 36 veces la cantidad de múltiplos de $q$ en $A$, y análogamente para $B$, se sigue que tienen la misma cantidad de múltiplos de $q$. Como $|A| = |B|$, resulta que $A$ y $B$ tienen la misma cantidad de números que no son múltiplos de $q$, por lo que $S(A) \equiv S(B) \pmod q$, pues los números en $A$ y en $B$ que no son múltiplos de $q$ son congruentes con 1 módulo $q$.
Por el TCR, tenemos que $S(A) - S(B)$ debe ser múltiplo de $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37$ y, como $S(A) \neq S(B)$, tenemos que $|S(A) - S(B)| > 5 \cdot 10^7$, como queríamos.

## Divide y conquistarás

El TCR también nos permite "dividir" el problema, pues si $M = m_1 m_2 \cdots m_n$, donde $\operatorname{mcd}(m_i, m_j) = 1$ para cualesquiera $i, j$ distintos, y tenemos alguna condición dada módulo $M$, podemos analizar cada congruencia por separado, es decir, analizando módulo $m_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Ejemplo 5.** Sea $n$ un entero positivo impar. Encuentra el número de soluciones de la congruencia $x^2 \equiv 1 \pmod n$, esto es, cuántos elementos del conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ satisfacen dicha congruencia.

**Solución.** Consideremos la descomposición canónica de $n$, $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. Por el TCR tenemos que $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$ si y solo si $x^2 \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$. Ahora, $x^2 \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ si y solo si $p_i^{\alpha_i}$ divide a $(x-1)(x+1)$. Como $p_i$ es primo impar, solo puede dividir a uno de $x-1$ o $x+1$, de donde se tiene que $x \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ o $x \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Se tienen entonces dos posibilidades para cada uno de $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_k^{\alpha_k}$, lo que nos da un total de $2^k$ sistemas de congruencias y, por el TCR, sabemos que cada sistema tiene solución. Como los sistemas difieren en al menos una congruencia, estas soluciones serán distintas entre sí. Entonces concluimos que hay $2^k$ soluciones de la congruencia $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$.

**Ejemplo 6.** Demuestra que para cada entero positivo $n$, existen enteros $a$ y $b$ tales que $4a^2 + 9b^2 - 1$ es múltiplo de $n$.

**Solución.** Por el TCR, basta demostrar la existencia para potencias de primos. Para $2^k$, consideremos $a$ y $b$ tales que $a \equiv 0 \pmod{2^k}$ y $3b \equiv 1 \pmod{2^k}$, esto es, $b$ es el inverso multiplicativo de 3 módulo $2^k$. Finalmente, para $p^k$, con $p$ primo impar, sean $a$ y $b$ tales que $2a \equiv 1 \pmod{p^k}$, equivalentemente, $a$ es el inverso multiplicativo de 2 módulo $p^k$ y $b \equiv 0 \pmod{p^k}$. Los enteros $a$ y $b$ satisfacen la condición del problema, por lo que hemos terminado.

# Problemas

1) Encuentra el residuo de dividir $2019^{2019^{2019}}$ entre 100.

2) Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros y sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ primos distintos tales que para cada $i$ existe un entero $x_i$ tal que $q_i$ divide a $P(x_i)$. Demuestra que existe un entero $x$ tal que $q_1q_2\cdots q_n$ divide a $P(x)$.

3) Sea $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un conjunto de enteros positivos. Muestra que existe $b$ entero positivo tal que todos los elementos de $\{ba_1, ba_2, \ldots, ba_n\}$ son potencias perfectas.

4) (Olimpiada Internacional, 1989) Sea $n$ un entero positivo. Demuestra que existen $n$ enteros positivos consecutivos tales que ninguno de ellos es potencia de un primo.

5) Demuestra que existe una sucesión creciente de enteros tal que para cualquier entero no negativo $k$ se tiene que la sucesión $\{a_n + k\}$ contiene una cantidad finita de números primos.

6) (México, 2017) Un conjunto de $n$ enteros positivos se llama *balanceado* si para cada entero $k$ tal que $1 \leq k \leq n$, el promedio de cualesquiera $k$ números en el conjunto es un entero. Encuentra la mayor suma posible de los elementos de un conjunto balanceado tal que todos sus elementos son menores o iguales que 2017.

7) (Olimpiada Internacional, 2016) Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2+n+1$. Determina el menor número entero positivo $b$ para el cual existe

algún entero no negativo $a$ tal que el conjunto $\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$ es fragante.

8) (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2005) Sean $a$ y $b$ enteros positivos tales que $a^n + a$ divide a $b^n + b$ para todo entero positivo $n$. Muestra que $a = b$.

9) (Taiwan, 2002) Sea $O$ el origen en el plano. A un punto con coordenadas enteras $X$ en el plano le llamamos *visible desde el origen* si el segmento $\overline{OX}$ no contiene ningún otro punto con coordenadas enteras además de $O$ y $X$. Muestra que para cualquier entero positivo $n$, existe un cuadrado de $n^2$ puntos con coordenadas enteras (con lados paralelos a los ejes) tal que ninguno de los puntos con coordenadas enteras dentro del cuadrado es visible desde el origen.

10) (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2014) Sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ enteros primos relativos por parejas, tales que $a_1$ es primo y $a_1 \geq n + 2$. En el segmento $I = [0, a_1 a_2 \cdots a_n]$ de la recta real, se marcan todos los enteros que son divisibles por al menos uno de los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Los puntos marcados dividen a $I$ en segmentos más pequeños. Demuestra que la suma de los cuadrados de las longitudes de los segmentos formados es divisible por $a_1$.

## Bibliografía

1) Evan Chen. *The Chinese Remainder Theorem.* 2015.

2) Dorin Andrica, Titu Andreescu. *Number Theory: Structures, Examples and Problems.* Springer, 2009.

3) Naoki Sato. *Number Theory.*

# Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2019. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

**Problema 1.** Sin usar calculadora, determina el valor de

$$\sqrt{\frac{11^4+100^4+111^4}{2}}.$$

**Problema 2.** En cada casilla de un tablero de $7\times 7$ se escribe un $1$ o un $2$ de manera que cada rectángulo de $1\times 4$ o de $4\times 1$ contenga siempre cuatro números cuya suma es par. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?

**Problema 3.** Sea $ABC$ un triángulo equilátero y sea $D$ un punto del lado $AB$. Sean $E$ y $F$ los pies de las perpendiculares trazadas desde $D$ hacia los lados $BC$ y $AC$, respectivamente. Si $CE=8$ cm y $CF=7$ cm, determina, en centímetros, el perímetro del triángulo $ABC$.

**Problema 4.** La razón de las medidas (en grados) de dos ángulos agudos es $5:4$ y el complemento de uno de los dos ángulos es el doble del complemento del otro. Determina la suma de sus medidas.

**Problema 5.** Un entero entre $1000$ y $9999$ es escogido al azar. Determina la probabilidad de que sea un número impar y sus dígitos sean todos distintos.

**Problema 6.** Determina todos los números reales $x$ tales que $x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor=\sqrt{2}$. (Para cada número real $x$, $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que $x$).

**Problema 7.** Un estacionamiento tiene $16$ lugares en fila. Llegaron $12$ coches a estacionarse, cada uno ocupa un lugar y lo hicieron sin un orden predeterminado. Después llegó una camioneta que requiere 2 espacios juntos. ¿Cuál es la probabilidad de que la camioneta se pueda estacionar?

**Problema 8.** En el pizarrón, están escritos los números del $1$ al $100$. ¿Cuál es la menor cantidad de números que hay que borrar para que el producto de los números que quedan termine en $2$?

**Problema 9.** ¿Cuántos números de tres dígitos $abc$ satisfacen que $a + 4b + 7c$ es un múltiplo de $3$?

**Problema 10.** ¿De cuántas maneras distintas es posible acomodar 3 torres en un tablero de ajedrez de $8 \times 8$ de manera que haya dos en una misma columna y dos en una misma fila?

**Problema 11.** Determina el valor de la suma

$$\sum_{d \mid 10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}},$$

donde la suma se realiza sobre todos los divisores positivos $d$ de $10!$

**Problema 12.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $BC = 8$, $CD = 12$, $AD = 10$ y $\angle DAB = \angle ABC = 60°$. Si $AB = p + \sqrt{q}$, con $p$ y $q$ enteros positivos, encuentra el valor de $p + q$.

**Problema 13.** Sea $s_n$ el número de permutaciones $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $(1, 2, \ldots, n)$ tales que

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n}$$

es un entero positivo. Prueba que $s_{2n} \geq n$ para todo entero positivo $n$.

**Problema 14.** Dos circunferencias $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ se intersecan en los puntos $A$ y $B$. Una recta $\ell$ interseca a $\mathcal{C}_1$ en los puntos $C$ y $E$, e interseca a $\mathcal{C}_2$ en los puntos $D$ y $F$, de tal manera que $D$ está entre $C$ y $E$, y $E$ está entre $D$ y $F$. Las rectas $CA$ y $BF$ se intersecan en el punto $G$ y las rectas $DA$ y $BE$ se intersecan en el punto $H$. Demuestra que $CF$ y $HG$ son paralelas.

**Problema 15.** Sean $a$ y $d$ números reales no negativos y sean $b$ y $c$ números reales positivos tales que $b + c \geq a + d$. Determina el valor mínimo de la suma $\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b}$.

**Problema 16.** Sobre una mesa hay 2019 monedas. Dos jugadores juegan el siguiente juego, haciendo movimientos alternados. El primer jugador puede tomar en un movimiento un número impar de monedas entre 1 y 99 inclusive. El segundo jugador puede tomar en un movimiento un número par de monedas entre 2 y 100 inclusive. El jugador que no pueda hacer un movimiento pierde. Determina quién tiene estrategia ganadora.

**Problema 17.** Demuestra que para cada entero positivo $k$, existe un entero positivo $n$ tal que $n \cdot 2^k - 7$ es un cuadrado.

**Problema 18.** Demuestra que para cualesquiera números reales $x, y$,

$$1 \leq \frac{(x+y)(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{9}{8}.$$

**Problema 19.** Determina todos los enteros positivos $n$ tales que $n(n+2)(n+4)$ tiene a lo más $15$ divisores positivos.

**Problema 20.** Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy,$$

para todos los números reales $x, y$.

# Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de leer estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a los problemas o al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.

Es muy común en matemáticas que cada problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto el problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a leer estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas en tus soluciones, te invitamos a compartirla con nosotros en la dirección electrónica `revistaomm@gmail.com`.

**Solución del problema 1.** Sean $a = 11$ y $b = 100$. Queremos determinar el valor de

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{2}} = \sqrt{a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3}.$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 \\
&= a^2(a^2 + ab + b^2) + b^2(a^2 + ab + b^2) + a^3b + a^2b^2 + ab^3 \\
&= a^2(a^2 + ab + b^2) + b^2(a^2 + ab + b^2) + ab(a^2 + ab + b^2) \\
&= (a^2 + ab + b^2)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sqrt{a^4 + b^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3} &= \sqrt{(a^2 + ab + b^2)^2} \\
&= a^2 + ab + b^2 = 11^2 + 11(100) + 100^2 \\
&= 121 + 1100 + 10000 = 11221.
\end{aligned}$$

**Solución del problema 2.** Una vez determinados tres de los cuatro números en un rectángulo de $1 \times 4$ o $4 \times 1$, el cuarto número debe ser el que haga falta para que la suma sea par. Luego, si elegimos los 9 números del cuadrado de $3 \times 3$ de la esquina superior izquierda, todo el tablero se determina. Por lo tanto, la respuesta es $2^9 = 512$.

**Solución del problema 3.** Supongamos que $EB = x$. Como el triángulo $DEB$ tiene un ángulo de $60°$ y un ángulo de $90°$, entonces es la mitad de un triángulo equilátero y $DB = 2EB = 2x$. Análogamente, si $AF = y$, entonces $AD = 2y$. Luego, tenemos que $7 + y = 2x + 2y = 8 + x$, lo cual implica que $x + 2y = 8$ y $2x + y = 7$. Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $x = 2$, $y = 3$. Por lo tanto, $AB = 2x + 2y = 10$ cm, de modo que el perímetro del triángulo $ABC$ es 30 cm.

**Solución del problema 4.** Sean $a$ y $b$ las medidas de los ángulos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a > b$. Entonces, el complemento de $b$ es más grande que el complemento de $a$, por lo que $4a = 5b$ y $90° - b = 2(90° - a) = 2(90° - \frac{5b}{4}) = 180° - \frac{5b}{2}$. Por lo tanto, $\frac{3b}{2} = 90°$, de donde se sigue que $b = 60°$ y $a = \frac{5b}{4} = 75°$. Luego, la suma buscada es igual a $135°$.

**Solución del problema 5.** Si el número tiene un dígito igual a $0$, tenemos $2$ formas de escoger su posición, $5$ opciones para el último de los otros tres dígitos para que el número sea impar, $8$ opciones para el segundo dígito y $7$ para el tercero para que no se repitan, por lo que hay $8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$ números en este caso.
Si el número no tiene ningún dígito $0$, tenemos $5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1680$ formas de escoger los $4$ dígitos para que no se repitan empezando con el último.
Esto implica que la probabilidad es $\frac{560+1680}{9000} = \frac{2240}{9000} = \frac{56}{225}$.

**Solución del problema 6.** La prueba la haremos en casos.
Si $x \geq 2$, entonces $\lfloor x \rfloor \geq 2$ y, en consecuencia, $x\lfloor x \rfloor \geq 2x \geq 4$, de donde se sigue que $x\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor \geq 8 > \sqrt{2}$. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.
Si $x < 0$, entonces $\lfloor x \rfloor < 0$, lo cual implica que $x\lfloor x \rfloor > 0$. De aquí, obtenemos que $\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor \geq 0$ y, por lo tanto, $x\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor \leq 0$. Luego, no hay soluciones en este caso.
Si $0 < x < 1$, entonces $\lfloor x \rfloor = 0$ y, por lo tanto, $x\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor = 0 \neq \sqrt{2}$.
Si $1 \leq x < 2$, entonces $\lfloor x \rfloor = 1$ y, por lo tanto, $\sqrt{2} = x\lfloor x\lfloor x \rfloor\rfloor = x\lfloor x \rfloor = x$. Como $1 \leq \sqrt{2} < 2$, concluimos que $x = \sqrt{2}$ es la única solución.

**Solución del problema 7.** Vamos a contar las maneras en que la camioneta podría no estacionarse y restarlas del total de maneras en que los coches pueden estacionarse sin condiciones, que es igual a $\binom{16}{12} = 1820$. Para hacerlo, elegimos $4$ lugares para dejar vacíos; sin embargo, no lo haremos de $16$ espacios sino de $13$. Los $3$ espacios restantes los "colocamos" inmediatamente a la izquierda del primero vacío (contando de derecha a izquierda), inmediatamente a la izquierda del segundo vacío e inmediatamente a la izquierda del tercero vacío. Dado que esos $3$ lugares no estaban disponibles para quedar vacíos, garantizamos que queden ocupados. Por ejemplo, convertimos el acomodo $1001111011101$ en el acomodo $1010111110111101$. Esto cuenta todos los acomodos posibles donde quedan $4$ espacios vacíos y separados, es decir, $\binom{13}{4} = 715$. Luego, hay un total de $1820 - 715 = 1105$ casos donde la camioneta sí puede estacionarse y la probabilidad buscada es igual a $\frac{1105}{1820} = \frac{17}{28}$.

**Solución del problema 8.** Como todo número par cuando se multiplica por $5$ termina en $0$, debemos borrar todos los múltiplos de $5$. Esto nos obliga a borrar en total $20$ números. El último dígito ahora es el resultado de multiplicar $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 72576$, diez veces. Como $6 \times 6$ termina en $6$, el producto hasta ahora termina en $6$. Bastaría con hacer que uno de los productos termine en $2$. Podemos hacer esto si eliminamos cualquier número que termine en $8$, pues $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 7 \times 9 = 9072$. Luego, necesitamos borrar al menos $21$ números.

**Solución del problema 9.** Sabemos, por el criterio de divisibilidad del $3$, que un número de tres dígitos $abc$ es múltiplo de $3$ si y solo si $a + b + c$ es múltiplo de $3$. Como $3b + 6c$ es múltiplo de $3$, entonces $a + b + c + 3b + 6c = a + 4b + 7c$ es múltiplo de $3$ si y solo si $a + b + c$ lo es. Por lo tanto, los números que cumplen la condición son precisamente los múltiplos de $3$. Hasta $999$ tenemos $333$ múltiplos de $3$, de los cuales $33$ tienen uno o dos dígitos. Por lo tanto, son $300$ números en total.

**Solución del problema 10.** Para cumplir lo que pide el problema, las tres torres se deben ubicar en tres de los cuatro vértices de un rectángulo. En cada rectángulo que podamos formar en el tablero, es posible crear $4$ acomodos distintos, uno por cada vértice que dejamos vacío. Luego, basta contar el número de rectángulos del tablero y multiplicarlo por $4$. Como un rectángulo se forma eligiendo dos filas y dos columnas del tablero, tenemos $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} = 28^2 = 784$ rectángulos distintos. Luego, las tres torres se pueden acomodar de $4 \cdot 784 = 3136$ formas distintas.

**Solución del problema 11.** Sea $S$ la suma buscada. Invirtiendo el orden tenemos que

$$S = \sum_{d|10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}} = \sum_{d|10!} \frac{1}{\frac{10!}{d} + \sqrt{10!}} = \sum_{d|10!} \frac{d}{\sqrt{10!}} \cdot \frac{1}{d + \sqrt{10!}}.$$

Luego,

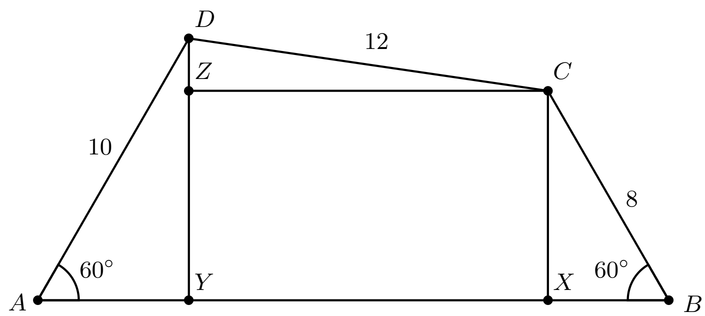
$$\begin{aligned}
2S = S + S &= \sum_{d|10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}} + \sum_{d|10!} \frac{d}{\sqrt{10!}} \cdot \frac{1}{d + \sqrt{10!}} \\
&= \sum_{d|10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}} \left(1 + \frac{d}{\sqrt{10!}}\right) = \sum_{d|10!} \frac{1}{d + \sqrt{10!}} \left(\frac{\sqrt{10!} + d}{\sqrt{10!}}\right) \\
&= \sum_{d|10!} \frac{1}{\sqrt{10!}} = \frac{1}{\sqrt{10!}} \sum_{d|10!} 1.
\end{aligned}$$

Ahora, observemos que la suma $\sum_{d|10!} 1$ es igual al número de divisores positivos del entero $10!$, la cual denotaremos por $\tau(10!)$. Como $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$, utilizando la fórmula del número de divisores positivos[2], obtenemos que

$$\tau(10!) = (1+8)(1+4)(1+2)(1+1) = 270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

y, por lo tanto, $S = \frac{\tau(10!)}{2\sqrt{10!}} = \frac{2 \cdot 3^3 \cdot 5}{2(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{7})} = \frac{3\sqrt{7}}{112}$.

**Solución del problema 12.** Sean $X, Y$ los pies de las perpendiculares desde $C$ y $D$ a $AB$, respectivamente. Como los triángulos $BXC$ y $AYD$ tienen ángulos de 30°, 60° y 90°, tenemos que $BX = 4$, $AY = 5$, $CX = 4\sqrt{3}$ y $DY = 5\sqrt{3}$. Si $Z$ es el pie de perpendicular desde $C$ a $DY$, tenemos que $DZ = \sqrt{3}$ y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo $CZD$, obtenemos que $CZ = \sqrt{CD^2 - DZ^2} = \sqrt{141}$.




Luego, $AB = AY + BX + CZ = 9 + \sqrt{141}$. Como $AB = p + \sqrt{q}$, resulta que $p + \sqrt{q} = 9 + \sqrt{141}$, esto es, $q = (9 + \sqrt{141} - p)^2$. Al expandir, obtenemos que $(18 - 2p)\sqrt{141}$ debe ser entero, lo que significa que la única posibilidad es que $18 - 2p = 0$, ya que $\sqrt{141}$ no es racional. Por lo tanto, $p = 9$ y $q = 141$, de donde se sigue que $p + q = 150$.

**Solución del problema 13.** Procederemos por inducción en $n$. Si $n = 1$, $\frac{1}{1} + \frac{2}{2}$ hace que $s_2 \geq 1$. Si $n = 2$, $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4}$ y $\frac{4}{1} + \frac{1}{2} + \frac{3}{3} + \frac{2}{4}$ hacen que $s_4 \geq 2$. Por último si $n = 3$, las permutaciones $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(4, 1, 3, 2, 5, 6)$ y $(2, 3, 1, 6, 5, 4)$, hacen que $s_6 \geq 3$. Supongamos que el resultado es cierto para algún entero $n \geq 1$ y consideremos a $n + 1$. Podemos usar las $n$ permutaciones del caso $n$ escogiendo $a_{2n+1} = 2n + 1$ y $a_{2n+2} = 2n + 2$. Solo necesitamos otra más, para eso tomamos $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = 2n + 2, a_{2n+2} = n + 1$ y $a_j = j$ para el resto, esto nos da $n + 1$ permutaciones y la inducción queda completa.

**Solución del problema 14.** Es suficiente demostrar que $\angle ECA = \angle HGA$. Como el cuadrilátero $ACBE$ es cíclico, tenemos que $\angle ECA = \angle EBA$. Luego, basta demostrar que el cuadrilátero $ABGH$ es cíclico.

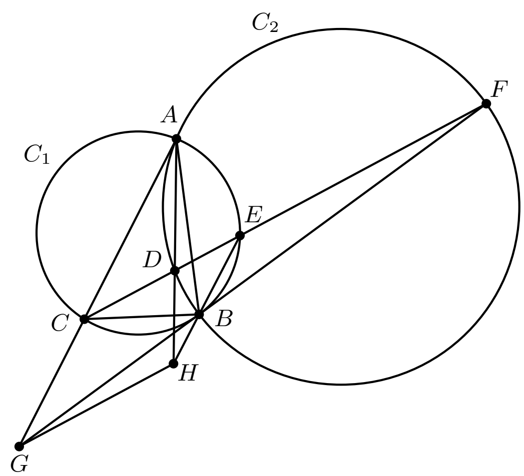
[2]**Teorema.** *Si* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ *con* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *números primos distintos y* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *enteros positivos, entonces* $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$. Ver el artículo "El Teorema Fundamental de la Aritmética" de Tzaloa No. 1, año 2013.

En el triángulo $DEH$ tenemos que $\angle DHE = 180^\circ - \angle EDH - \angle HED$, esto es,

$$\angle AHB = \angle DHE = 180^\circ - \angle FDA - (180^\circ - \angle CEB).$$

Usando el cuadrilátero cíclico $ACBE$, tenemos que $\angle CEB = \angle CAB$. Luego,

$$\angle AHB = 180^\circ - \angle FDA - (180^\circ - \angle CAB) = 180^\circ - \angle FDA - \angle BAG.$$




Ahora, como el cuadrilátero $ADBF$ es cíclico, tenemos que $\angle FDA = \angle FBA = \angle GBA$. Por lo tanto,

$$\angle AHB = 180^\circ - \angle FDA - \angle BAG = 180^\circ - \angle GBA - \angle BAG = \angle AGB,$$

esto es, el cuadrilátero $ABGH$ es cíclico.

**Solución del problema 15.** Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq d$ y $b \geq c$. De la desigualdad $b+c \geq a+d$, tenemos que $b+c \geq (a+b+c+d)/2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{b}{c+d} + \frac{c}{a+b} &= \frac{b+c}{c+d} - c\left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}\right)\\
&\geq \frac{a+b+c+d}{2(c+d)} - (c+d)\left(\frac{1}{c+d} - \frac{1}{a+b}\right)\\
&= \frac{a+b}{2(c+d)} + \frac{c+d}{a+b} - \frac{1}{2}\\
&\geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2(c+d)} \cdot \frac{c+d}{a+b}} - \frac{1}{2}\\
&= \sqrt{2} - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

donde hemos usado la desigualdad MA-MG en la última desigualdad. Además, la igualdad se da si $b+c = a+d$, $c = c+d$ y $\frac{a+b}{2(c+d)} = \frac{c+d}{a+b}$, esto es, si $d = 0$,

$b+c=a$ y $a+b=\sqrt{2}(c+d)=\sqrt{2}c$. Por lo tanto, el valor mínimo $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ se alcanza, por ejemplo, con $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$, $c=2$ y $d=0$.

**Solución del problema 16.** Describiremos una estrategia ganadora para el primer jugador. El primer movimiento consiste en tomar 99 monedas de la mesa. En cada siguiente movimiento, si el segundo jugador toma $x$ monedas, entonces el primer jugador debe tomar $101-x$ monedas. Esto siempre se puede hacer, ya que si $x$ es un número par entre 2 y 100 inclusive, entonces $101-x$ es un número impar entre 1 y 99 inclusive. Como $2019=101\cdot 19+99+1$, después de 19 movimientos, después del movimiento del primer jugador, solo una moneda quedará sobre la mesa y el segundo jugador no podrá hacer ningún movimiento y, por lo tanto, pierde.

**Solución del problema 17.** La prueba la haremos por inducción en $k$. Para los casos base ($k\leq 3$), simplemente podemos escoger $n=2^{3-k}$, obteniendo que $n\cdot 2^k-7=2^3-7=1$. Ahora, sea $k\geq 3$ y supongamos que existen enteros $a$ y $b$ tales que $a^2=n\cdot 2^k-7$. Demostraremos que existen enteros $b$ y $m$ tales que $b^2=m\cdot 2^{k+1}-7$. Para esto, consideraremos dos casos.
Si $n$ es par, consideremos $b=a$ y $m=\frac{n}{2}$. Entonces, $b^2=(2m)2^k-7=m\cdot 2^{k+1}-7$.
Si $n$ es impar, entonces $a$ también es impar. Sea $n=2x+1$ y sea $a=2y+1$. Consideremos el número $(a+2^{k-1})^2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}(a+2^{k-1})^2 &= a^2+2^k\cdot a+2^{2k-2}=(n\cdot 2^k-7)+2^k\cdot a+2^{2k-2}\\ &= ((2x+1)2^k-7)+2^k(2y+1)+2^{2k-2}\\ &= (x+y+1+2^{k-3})2^{k+1}-7.\end{aligned}$$

Luego, en este caso podemos hacer $b=a+2^{k-1}$ y $m=x+y+1+2^{k-3}$.

**Solución del problema 18.** Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que $(x+y)(x^3+y^3)\geq (x^2+y^2)^2$, lo cual implica la desigualdad izquierda.
Por otra parte, como $0\leq ((x-y)^2-2xy)^2$, tenemos que

$$4xy(x-y)^2\leq (x-y)^4+4x^2y^2.$$

Luego, $8x^3y+8y^3x\leq x^4+18x^2y^2+y^4$, de donde se sigue que

$$8x^3y+8y^3x+8x^4+8y^4\leq 9x^4+18x^2y^2+9y^4.$$

Por lo tanto, $8(x+y)(x^3+y^3)\leq 9(x^2+y^2)^2$, lo cual implica la desigualdad derecha.

**Solución del problema 19.** Sea $\tau(n)$ el número de divisores positivos de $n$. Es conocido[3] que $\tau(mn)=\tau(m)\tau(n)$, si $\text{mcd}(m,n)=1$. Consideraremos dos casos.
Caso 1. $n$ es impar. En este caso, tenemos que $n, n+2, n+4$ son primos relativos por parejas y, en consecuencia,

$$\tau(n(n+2)(n+4))=\tau(n)\tau(n+2)\tau(n+4).$$

[3] Ver el artículo "El Teorema Fundamental de la Aritmética" de Tzaloa No. 1, año 2013.

Luego, basta determinar los enteros positivos $n$ tales que $\tau(n)\tau(n+2)\tau(n+4) \leq 15$.
Claramente, $n = 1$ satisface la desigualdad.
Si $n \geq 2$, entonces $\tau(n) \geq 2$. Si alguno de $\tau(n), \tau(n+2)$ o $\tau(n+4)$ es mayor o igual que 4, entonces $\tau(n)\tau(n+2)\tau(n+4) \geq 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, lo cual implica que los valores posibles de $\tau(n), \tau(n+2)$ y $\tau(n+4)$ son 2 o 3.
Si al menos uno de los factores $\tau(n), \tau(n+2)$ o $\tau(n+4)$ es igual a 3, entonces los otros dos deben ser iguales a 2. Por otra parte, observemos que si $\tau(k) = 3$, entonces $k$ debe ser el cuadrado de un número primo y, si $\tau(k) = 2$, entonces $k$ debe ser un número primo. Esto significa que entre los enteros $n, n+2$ y $n+4$, uno es el cuadrado de un primo y los otros dos son primos. Como $n, n+2$ y $n+4$ son tres impares consecutivos, alguno es múltiplo de 3. Luego, si tal múltiplo de 3 es el cuadrado de un primo, la única posibilidad es que sea 9 y, si tal múltiplo de 3 es primo, la única posibilidad es que sea 3. De aquí, es fácil ver que los valores posibles de $n$ son $3, 5, 7$ o 9.
Si los tres factores $\tau(n), \tau(n+2)$ y $\tau(n+4)$ son iguales a 2, entonces $n, n+2$ y $n+4$ son primos por lo comentado en el párrafo anterior. Analizando congruencias módulo 3, es fácil probar que la única posibilidad es $n = 3$.
En conclusión, los enteros impares que satisfacen el problema son $1, 3, 5, 7$ y 9.
Caso 2. $n$ es par, esto es, $n = 2k$ para algún entero positivo $k$. Entonces,

$$n(n+2)(n+4) = 8k(k+1)(k+2).$$

Si $k = 1$, entonces $n(n+2)(n+4) = 48 = 3 \cdot 4^3$ y $\tau(48) = 2 \cdot 4 = 8 < 15$, esto es, $n = 2$ es solución.
Supongamos que $k > 1$.
Si $k$ es impar, entonces $k$, $8(k+1)$ y $k+2$ son primos relativos por parejas y, por lo tanto,

$$\tau(8k(k+1)(k+2)) = \tau(k)\tau(8(k+1))\tau(k+2) \geq 2 \cdot \tau(8) \cdot 2 = 16 > 15,$$

lo que significa que no hay soluciones en este caso.
Si $k$ es par, esto es, $k = 2a$ para algún entero positivo $a$, entonces $8k(k+2)$ y $k+1$ son primos relativos, lo cual implica que

$$\tau(8k(k+1)(k+2)) = \tau(8k(k+2))\tau(k+1) = \tau(32a(a+1))\tau(k+1) \geq 2\tau(32a(a+1)).$$

Si $a = 1$, entonces $k = 2$ y $\tau(8k(k+1)(k+2)) = \tau(2^6 \cdot 3) = 7 \cdot 2 = 14 < 15$, lo que significa que $n = 2k = 4$ es solución.
Si $a > 1$ entonces $2\tau(32a(a+1)) = 2\tau(2^5 a(a+1))$. Si $a$ es par, entonces $2^5 a$ y $a+1$ son primos relativos, lo cual implica que

$$\tau(2^5 a(a+1)) = \tau(2^5 a)\tau(a+1) \geq \tau(2^5)\tau(a+1) \geq 6 \cdot 2 = 12$$

y, en consecuencia, $2\tau(2^5 a(a+1)) \geq 2 \cdot 12 = 24 > 15$. Análogamente, si $a$ es impar, entonces $2^5(a+1)$ y $a$ son primos relativos, lo cual implica que

$$\tau(2^5 a(a+1)) = \tau(2^5(a+1))\tau(a) \geq \tau(2^5)\tau(a) \geq 6 \cdot 2 = 12$$

y, en consecuencia, $2\tau(2^5 a(a+1)) \geq 2 \cdot 12 = 24 > 15$.
Esto significa que en este caso no hay soluciones.
Por lo tanto, las soluciones son $1, 2, 3, 4, 5, 7$ y 9.

**Solución del problema 20.** Notemos primero que la función $f$ dada por $f(x) = 0$ para todo número real $x$, no satisface la ecuación funcional. Luego, existe un número real $x_0$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Sustituyendo $x = x_0$ y $y = 0$ en la ecuación funcional, tenemos que $f(x_0)f(0) = f(x_0)$. Como $f(x_0) \neq 0$, obtenemos que $f(0) = 1$. Sustituyendo ahora $x = 1$ y $y = -1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(1)f(-1) = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$. Por lo tanto, $f(1) = 0$ o $f(-1) = 0$.
Supongamos que $f(1) = 0$. Sustituyendo $x = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $0 = f(1)f(y) = f(1 + y) + y$ para todo número real $y$, esto es, $f(1 + y) = -y$ para todo número real $y$. Haciendo $y = t - 1$, resulta que $f(t) = -t + 1$ para todo número real $t$.
Supongamos ahora que $f(-1) = 0$. Sustituyendo $x = -1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $0 = f(-1)f(y) = f(-1 + y) - y$ para todo número real $y$, esto es, $f(-1 + y) = y$ para todo número real $y$. Haciendo $y = t + 1$, resulta que $f(t) = t + 1$ para todo número real $t$.
Ahora, si $f(t) = -t + 1$ para todo número real $t$, entonces

$$f(x)f(y) = (-x + 1)(-y + 1) = (-x - y + 1) + xy = f(x + y) + xy,$$

para cualesquiera números reales $x, y$.
Análogamente, si $f(t) = t + 1$ para todo número real $t$, entonces

$$f(x)f(y) = (x + 1)(y + 1) = (x + y + 1) + xy = f(x + y) + xy,$$

para cualesquiera números reales $x$, $y$.
Por lo tanto, ambas funciones son las únicas soluciones.

# Problemas de Entrenamiento

## Problemas de Entrenamiento.
## Año 2019 No. 4.

Presentamos ahora los $10$ problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican $3$ números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

**Problema 1.** Sean $a, b, c$ y $d$ números reales distintos entre sí. Si $a$ y $b$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 10cx - 11d = 0$ y, $c$ y $d$ son las soluciones de la ecuación $x^2 - 10ax - 11b = 0$, determina el valor de la suma $a + b + c + d$.

**Problema 2.** Para cada entero $k > 1$, definimos $p(k)$ como el mayor divisor primo de $k$. Una sucesión $a_n$ de enteros positivos satisface que $a_1 > 1$ y $a_{n+1} = a_n + p(a_n)$ para todo entero $n \geq 1$. Demuestra que hay al menos un cuadrado en la sucesión $a_n$.

**Problema 3.** Sean $a$, $b$ y $c$ números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

**Problema 4.** Determina todos los enteros positivos $n$ tales que $7^n - 1$ sea divisible entre $6^n - 1$.

**Problema 5.** En un tablero de $8 \times 8$ se escriben los números $1, 2, \ldots, 64$, uno en cada casilla. Después se colocan cuadrados de $2 \times 2$ sobre el tablero, de modo que no se traslapen entre sí y que cada cuadrado cubra exactamente cuatro casillas del tablero, con la propiedad de que la suma de las casillas que cubre sea menor que $100$. Encuentra el mayor número de cuadrados de $2 \times 2$ que se pueden poner en el tablero y, para dicho máximo, da un ejemplo de un tablero al que se le puedan colocar tal cantidad de cuadrados.

**Problema 6.** Cada punto del plano con coordenadas enteras se colorea con uno de tres colores, de manera que todos los colores son usados al menos una vez. Demuestra que siempre puedes encontrar un triángulo rectángulo con todos sus vértices de coordenadas enteras y de distinto color.

**Problema 7.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo con circuncentro $O$. Una recta perpendicular a $AO$, corta a $AB$ y a $AC$ en $D$ y $E$, respectivamente. Sea $K$ un punto en el lado $BC$, distinto de la intersección de $AO$ con $BC$. La recta $AK$ corta al circuncírculo del triángulo $ADE$ en $L$ que es diferente de $A$. Sea $M$ la reflexión de $A$ por $DE$. Demuestra que los puntos $K$, $L$, $M$ y $O$ son concíclicos.

**Problema 8.** Sean $p$ y $q$ números primos tales que $p + q^2$ es un cuadrado. Demuestra que $p^2 + q^n$ no es un cuadrado para todo entero positivo $n$.

**Problema 9.** Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

para cualesquiera números reales $x, y$.

**Problema 10.** Sea $n$ un entero positivo. Determina todos los números reales positivos $x$ tales que

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + nx^2 = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

# Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2019 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2019. En esta ocasión, agradecemos a Guillermo Courtade Morales, a Milton Adolfo Lozano Arroyo, a Carlos Alberto García Ezquerra y a Luis Francisco Medina Quintero, por habernos enviado sus soluciones. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista.

Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2019, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

**Problema 1.** Esteban vende galletas en cajas pequeñas de 5 galletas y en cajas grandes de 12 galletas. Tiene muchas cajas de cada tipo, pero no hay cajas de distintos tamaños y no vende galletas sueltas. Si, por ejemplo, un cliente quiere 39 galletas, Esteban puede despachar el pedido exactamente con tres cajas pequeñas y dos grandes, ya que $3\times 5+2\times 12 = 39$. Pero hay pedidos que no se pueden despachar de manera exacta, por ejemplo, cuando un cliente quiere 7, 16 o 23 galletas. ¿Cuál es el pedido más grande que no se puede despachar de manera exacta?

**Solución.** Notemos primero que si hay 5 números consecutivos que se pueden despachar exactamente, entonces después de estos 5, todos los demás también se pueden despachar. Sean $x, x + 1, x + 2, x + 3, x + 4$ los números buscados. Entonces, para despachar el $x + 5$ simplemente al despachado de $x$ le agregamos una caja de 5; para el $x + 6$ al despachado de $x + 1$ le agregamos una caja de 5 y así sucesivamente con el resto.
Ahora veamos que el 43 no se puede despachar de manera exacta, esto es, no se puede escribir en la forma $5x + 12y$ con $x, y$ enteros no negativos, ya que $43 \equiv 7 \pmod{12}$ y, si fuera posible, tendríamos que $5x \equiv 7 \pmod{12}$, de donde $x \equiv 35 \pmod{12}$, esto es, $x \equiv 11 \pmod{12}$ y $5 \times 11 > 43$, por lo que 43 no se puede despachar de manera exacta con las cajas que vende Esteban. Solo falta ver que los siguientes cinco números sí se pueden despachar de manera exacta: $44 = 12 \times 2 + 5 \times 4$; $45 = 5 \times 9$; $46 = 12 \times 3 + 2 \cdot 5$; $47 = 12 \times 1 + 5 \times 7$; $48 = 12 \times 4$. Por lo tanto, 43 es el pedido más grande que no se puede despachar de manera exacta.

**Problema 2.** Determina todos los números primos $p, q$ y $r$, distintos entre sí, tales que $p^3 - q^2 = r$ y $\frac{p+q+r}{q} = r$.

**Solución de Guillermo Courtade Morales.** Si los tres primos son impares, entonces $p^3 - q^2 = r$ sería par, lo que es una contradicción. Por lo tanto, uno de los primos es 2. Además, como $p, q$ y $r$ son distintos, solo uno de ellos es 2.
Si $p = 2$, entonces $p^3 - q^2 = 8 - q^2 \leq 0$ para cualquier primo $q > 2$, esto es, no hay soluciones en este caso.
Si $q = 2$, entonces $\frac{p+2+r}{2} = r$, de donde $r = p + 2$ y $p^3 - q^2 = p^3 - 4 = p + 2$, esto es, $p(p^2 - 1) = 6$, lo cual no es posible ya que $p(p^2 - 1) \geq 3(3^2 - 1) > 6$ al ser $p \geq 3$.
Si $r = 2$, entonces $\frac{p+q+2}{q} = 2$, de donde $q = p + 2$ y $p^3 - q^2 = p^3 - (p + 2)^2 = p^3 - (p^2 + 4p + 4) = 2$, esto es, $p(p^2 - p - 4) = 6$. Si $p > 3$, entonces $p(p^2 - p - 4) > 3(9 - 3 - 4) = 6$. Luego, $p = 3$, lo cual implica que $q = 3 + 2 = 5$.
Por lo tanto, la única solución es $p = 3$, $q = 5$ y $r = 2$.

Este problema también fue resuelto por Luis Francisco Medina Quintero, Carlos Alberto García Ezquerra y Milton Adolfo Lozano Arroyo.

**Problema 3.** Sean $a$ y $b$ números reales distintos entre sí y distintos de cero tales que $\frac{a-2010}{b} + \frac{b+2010}{a} = 2$. Determina el valor de $a - b$.

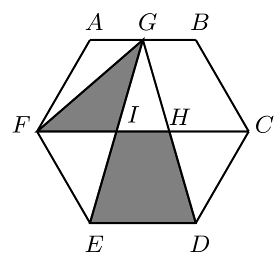
**Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo.** Tenemos que $\frac{a-2010}{b} + \frac{b+2010}{a} = 2$. Sumando las fracciones obtenemos que $\frac{a^2-2010a+b^2+2010b}{ab} = 2$, que puede reescribirse como $2ab = a^2 + b^2 + 2010(b-a)$. Por lo tanto,

$$(a-b)^2 - 2010(a-b) = (a-b)((a-b) - 2010) = 0$$

y, ya que $a - b \neq 0$, concluimos que $a - b = 2010$.

Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales y por Carlos Alberto García Ezquerra.

**Problema 4.** En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular de área $2018$ y $G$ es el punto medio del lado $AB$. Calcula el valor del área sombreada.




**Solución de Carlos Alberto García Ezquerra.** Supongamos que cada lado del hexágono mide $x$ y que el apotema mide $a$. Tenemos que el área del hexágono es $\frac{6xa}{2} = 2018$, de donde $xa = \frac{2018}{3}$. El área del triángulo $GED$ es $\frac{x(2a)}{2} = xa = \frac{2018}{3}$. Es bien conocido que una línea recta que une dos vértices opuestos en un hexágono regular es un eje de simetría, lo cual implica que $FC$ y $ED$ son paralelas y, además, los puntos $I$ y $H$ son puntos medios de $GE$ y $GD$, respectivamente, por lo que el área del triángulo $GIH$ es la cuarta parte del área del triángulo $GED$, esto es, $\frac{2018}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1009}{6}$ y, el área del cuadrilátero $DEIH$ es $\frac{3}{4}$ del área del triángulo $GED$, esto es, $\frac{2018}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1009}{2}$. Debido a la simetría de la figura, tenemos que $(GFI) = \frac{(GFC)-(GIH)}{2}$, donde los paréntesis denotan área. Por otro lado, también es conocido que $FC = 2ED$, lo cual implica que $(GFC) = \frac{2xa}{2} = xa = \frac{2018}{3}$. Por lo tanto, $(GFI) = \frac{1}{2}\left(\frac{2018}{3} - \frac{1009}{6}\right) = \frac{3027}{12} = \frac{1009}{4}$. Luego, el área sombreada mide $\frac{1009}{4} + \frac{1009}{2} = \frac{3027}{4}$.

**Problema 5.** Un torneo de $215$ jugadores es de eliminación directa, esto es, en cuanto un jugador pierde un juego, sale del torneo. Así, en la primera ronda hay $107$ juegos y un jugador pasa directamente. En la segunda ronda hay $108$ jugadores y por tanto hay $54$ juegos sin que nadie pase directamente, y así sucesivamente. ¿Cuántos juegos hay?

**Solución de Carlos Alberto García Ezquerra.** Notemos que en cada juego que hay, pierde una persona y, por cada persona que sale, hay un juego, por lo que la cantidad de juegos es exactamente la misma que la cantidad de personas que salieron. Como al final hay un solo ganador, deben salir todos los jugadores excepto uno. Por lo tanto, hubo $215 - 1 = 214$ juegos.

**Problema 6.** Sean $x$, $y$, $z$ números reales positivos. Demuestra que

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4.$$

**Solución de Carlos Alberto García Ezquerra.** Observemos que

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 = x^2 + \frac{xy^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + 4.$$

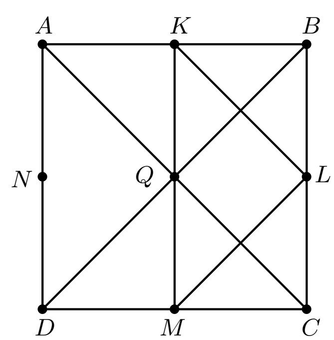
Luego, aplicando la desigualdad MA-MG a los $8$ números positivos de la suma $x^2 + \frac{xy^2}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + \frac{xyz^2}{4} + 4$, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 + xy^2 + xyz^2 + 4 &\geq 8\left(x^2 \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xy^2}{2} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot \frac{xyz^2}{4} \cdot 4\right)^{1/8} \\ &= 4xyz, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. Además, la igualdad se sostiene si y solo si $x^2 = \frac{xy^2}{2} = \frac{xyz^2}{4}$, esto es, si y solo si $x = y = z = 2$.

**Problema 7.** Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean $K$, $L$, $M$, $N$ los puntos medios de los lados $AB$, $BC$, $CD$, $DA$, respectivamente. Si $BD$ parte a $KM$ por la mitad en $Q$, $QA = QB = QC = QD$ y $\frac{LK}{LM} = \frac{CD}{CB}$, demuestra que $ABCD$ es un cuadrado.

**Solución de Guillermo Courtade Morales.** Como el triángulo $QAB$ es isósceles y $K$ es el punto medio de $AB$, tenemos que $\angle QKA = 90°$. Análogamente, tenemos que $\angle QMD = 90°$. Entonces, $\angle ABQ = \angle QDC$, pero como $\angle AQB = \angle DQC$, se sigue que los puntos $A, Q$ y $C$ son colineales y, por lo tanto, $\angle CBD = \angle ACD$. En consecuencia, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.




Luego, $\angle CAD = \angle CBD = \angle BCA = \angle ADB$ por lo que $4(\angle DBA + \angle DBC) = 360°$, lo cual implica que $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = \angle DAB = 90°$, esto es, $ABCD$ es un rectángulo. Por último, tenemos que $KL = LM$ ya que $KB = MC$

(pues $KBM$ es un triángulo rectángulo) y $BL = CL$. Por el criterio LAL, el triángulo isósceles $KLM$ es semejante al triángulo $DCB$. Por lo tanto, $DC = BC = AD = AB$, lo que significa que $ABCD$ es un cuadrado.

**Problema 8.** Determina si existen 2019 enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2019}$ tales que mcd$(a_i, a_j) = a_j - a_i$ para cualesquiera $i, j$ con $1 \leq i < j \leq 2019$.

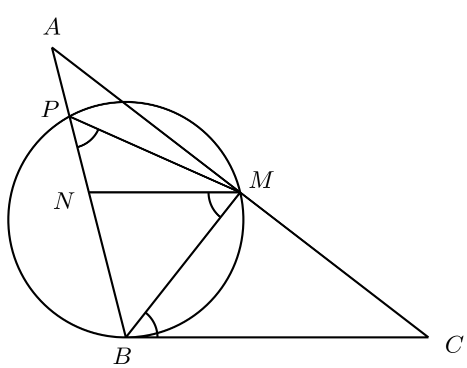
**Solución.** Sí existen. Procederemos por inducción. Para $n = 2$, hacemos $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$. Ahora, dado un conjunto con $k$ elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ que cumple la condición pedida, definimos $b = a_1 a_2 \cdots a_k$. Afirmamos que el conjunto

$$\{b, b + a_1, b + a_2, \ldots, b + a_k\}$$

cumple y tiene $k + 1$ elementos.
Para cualesquiera $i, j$ con $1 \leq i < j \leq 2019$, tenemos que mcd$(b + a_i, b + a_j) =$ mcd$(b + a_i, a_j - a_i)$. Sabemos que $a_j - a_i$ divide a $a_i$, por lo que también divide a $b$ y, por lo tanto, divide a $b + a_i$. Luego, mcd$(b + a_i, b + a_j) = a_j - a_i$. Además, mcd$(b, b + a_i) = a_i = (b + a_i) - b$, lo que concluye la demostración.

**Problema 9.** Sean $ABC$ un triángulo y $M$ el punto medio de $AC$. La circunferencia tangente a $BC$ por $B$ que pasa por $M$ interseca a la recta $AB$ de nuevo en $P$. Demuestra que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

**Solución de Carlos Alberto García Ezquerra.** Sea $N$ el punto medio de $AB$. Por la tangencia de la circunferencia con $BC$, tenemos que $\angle CBM = \angle BPM$ por ángulos seminscritos. Por otro lado, al ser $N$ y $M$ puntos medios de $AB$ y $AC$, respectivamente, tenemos que $NM$ y $BC$ son paralelas. Luego, por ángulos alternos internos, resulta que $\angle NMB = \angle CBM$. De las dos igualdades de ángulos, se sigue que $\angle BPM = \angle NPM = \angle NMB$. Luego, por el criterio AA, tenemos que los triángulos $BMN$ y $BPM$ son semejantes y, en consecuencia, $\frac{BM}{BN} = \frac{BP}{BM}$. Por lo tanto, $BM^2 = BN \cdot BP$, de donde se sigue que $2BM^2 = (2BN) \cdot BP$. Finalmente, como $N$ es el punto medio de $AB$, tenemos que $2BN = BA$ y de aquí el resultado.




Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo.

**Problema 10.** Los enteros positivos del $1$ al $49$ se colocan al azar en las casillas de un tablero de ajedrez de $7 \times 7$. Demuestra que hay un subtablero de $2 \times 2$ tal que la suma de los cuatro números en sus casillas es por lo menos $81$.

**Solución.** Notemos primero que hay $6 \cdot 6 = 36$ subtableros de tamaño $2 \times 2$ en el tablero de $7 \times 7$. Sean $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_{36}$ las sumas de los números escritos dentro de ellos. Luego, $s = s_1 + s_2 + \cdots + s_{36} \leq 36s_{36}$.
Por otro lado, en la suma anterior los números de las casillas de las esquinas se sumaron una sola vez; los números de las casillas de los bordes del tablero pero que no son esquinas, se sumaron dos veces y, el resto de los números, se sumaron cuatro veces. De aquí que $s \geq 49+48+47+46+2(45+44+\cdots+26)+4(25+24+\cdots+1) = 2910$. Por lo tanto, $36s_{36} \geq 2910$, de donde obtenemos que $s_{36} \geq \frac{2910}{36} > 80$. Como $s_{36}$ es entero, concluimos que $s_{36} \geq 81$.

# Concursos Estatales

## Etapa Final Estatal de la 33ª OMM

En el mes de septiembre de 2019, se envió a los Estados el examen que propone el Comité Nacional de la OMM como examen final estatal para los Estados que lo deseen aplicar. Los profesores encargados de elaborar este examen son Marco Antonio Figueroa Ibarra y María Luisa Pérez Seguí.
A continuación presentamos los problemas de la Etapa Final Estatal de la $33^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4 horas cada una para resolverlos.

### Primer día.

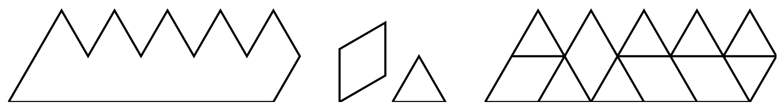
**Problema 1.** ¿De cuántas maneras se pueden distribuir los números enteros del $0$ al $9$ para hacer una lista de 5 números en orden de menor a mayor, si cada uno de los números es múltiplo de 3 y consta de dos dígitos? Por ejemplo, una lista posible es $21, 30, 48, 75, 96$.

**Problema 2.** Sea $\mathcal{C}$ un semicírculo con diámetro $AB$. El punto $C$ está en el diámetro $AB$ y los puntos $E$ y $D$ están sobre $\mathcal{C}$ de manera que $E$ está entre $B$ y $D$ y $\angle ACD = \angle ECB$. Las tangentes a $\mathcal{C}$ por $D$ y $E$ se intersecan en $F$. Demostrar que

$$\angle EFD = \angle ACD + \angle ECB.$$

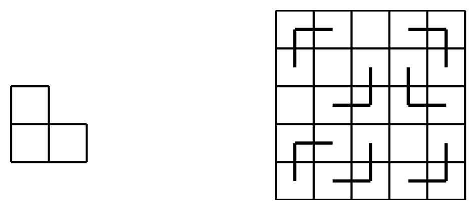
**Problema 3.** El conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ se quiere partir en 3 o más conjuntos de tal manera que las sumas de los números de los conjuntos estén en sucesión aritmética. ¿De cuántas formas es eso posible?
Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ se puede partir en los $5$ conjuntos $A_1 = \{5\}$, $A_2 = \{1, 7\}$, $A_3 = \{2, 3, 6\}$, $A_4 = \{4, 10\}$ y $A_5 = \{8, 9\}$, donde las sumas $5, 1 + 7 = 8, 2 + 3 + 6 = 11, 4 + 10 = 14$ y $8 + 9 = 17$ forman una sucesión aritmética porque la diferencia entre cualesquiera dos sumas consecutivas es 3: $3 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14$.

**Problema 4.** ¿De cuántas formas distintas se puede construir una figura como la que se muestra abajo a la izquierda usando fichas como las dos que se muestran al centro de la figura? (Nota: Las fichas se pueden girar o voltear como se desee. En la figura de la derecha se muestra una forma de construirla).

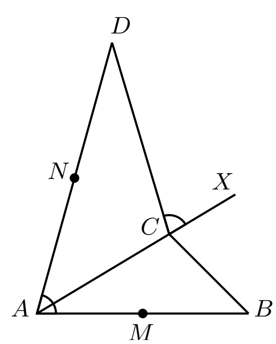


## Segundo día.

**Problema 5.** En una cuadrícula de $5 \times 5$ se quieren tapar algunos cuadritos usando fichas en forma de L's de $3$ cuadritos como se muestra abajo a la izquierda, de manera que ya no quepa una sola más. ¿Cuál es el mínimo número de L's que deben usarse? (En la figura de la derecha se muestra un acomodo con $7$ L's en la que ya no cabe ninguna otra).



**Problema 6.** La figura muestra un triángulo $ABC$ en el que $\angle C > 90°$, $X$ es un punto en la prolongación de $AC$, $D$ es un punto tal que $\angle BCX = \angle XCD = \angle BAD$ y, $M$ y $N$ son los puntos medios de $AB$ y $AD$, respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero $NAMC$ es cíclico.




**Problema 7.** Un número $n$ es el resultado de multiplicar dos números enteros positivos cuya diferencia es $9$ y también $n$ es el resultado de multiplicar dos números enteros positivos cuya diferencia es $6$. Determinar todas las posibilidades para $n$.

**Problema 8.** Sean $p, q, r, s$ números primos tales que $5 < p < q < r < s < p + 10$. Demostrar que la suma de estos cuatro números primos es divisible entre $60$.

# $3^{\text{a}}$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 14 al 17 de junio de 2019 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la $3^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), en Oaxtepec, Morelos. Participaron 270 estudiantes de primaria y secundaria, representando a 31 entidades federativas del país. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2020 en algún país del sureste asiático.

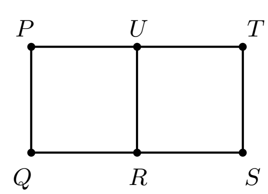
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones, del Nivel I de la $3^a$ OMMEB.

| Nombre | Estado | Medalla |
|---|---|---|
| Javier Caram Quirós | Ciudad de México | Oro |
| Sebastián Montemayor Trujillo | Nuevo León | Oro |
| Luis Veudi Vivas Pérez | Quintana Roo | Oro |
| Emiliano Hernández Barranco | Morelos | Oro |
| Rodrigo Saldivar Mauricio | Zacatecas | Oro |
| Rodrigo Avilés Cabrera | Guanajuato | Oro |
| Kalid Rafael Rodríguez Silva | Oaxaca | Oro |
| Antonio Gutiérrez Meléndez | Coahuila | Plata |
| Ángel Eduardo Hernández Hernández | Hidalgo | Plata |
| Artie Aarón Ramírez Villa | Jalisco | Plata |
| Juan Pablo Adolfo Calva Villalobos | Estado de México | Plata |
| Andrea Sarahí Cascante Duarte | Morelos | Plata |
| Leonardo Melgar Rubí | Morelos | Plata |
| Eric Arce Pérez | Chiapas | Plata |
| Alexis Akim Ramírez Villa | Jalisco | Plata |
| Sebastián Gutiérrez Suárez | Sinaloa | Plata |
| Rania de María Rada Rivera | San Luis Potosí | Plata |
| Erik Julián Tamayo Pérez | Tabasco | Plata |
| Carlos Santos Acosta | Tabasco | Plata |
| Dana Karen Medina González | Yucatán | Plata |
| Daniel Alonso Márquez Corono | Baja California | Plata |

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Nuevo León obtuvo el primer lugar (con 290 puntos), el Estado de Zacatecas y la Ciudad de México obtuvieron el segundo lugar (con 245 puntos) y el Estado de Morelos obtuvo el tercer lugar (con 230 puntos).

## Prueba Individual, Nivel I

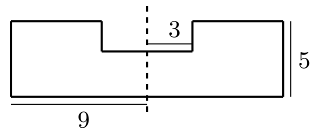
1) En la siguiente figura hay dos cuadrados unidos. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar de manera que sus tres vértices sean puntos de $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $U$?




2) El número 13 es primo y tiene la propiedad que al escribir sus dos dígitos (cifras) al revés, se obtiene un número primo, en este caso el primo 31. ¿Cuántos números primos de dos dígitos tienen esta propiedad?

3) Encuentra el número capicúa más cercano a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

4) La figura de abajo es simétrica respecto a la recta punteada y se muestran algunas medidas sobre su contorno. Si el perímetro de toda la figura es $50$ cm, ¿cuál es, en $\text{cm}^2$, el área de la figura?



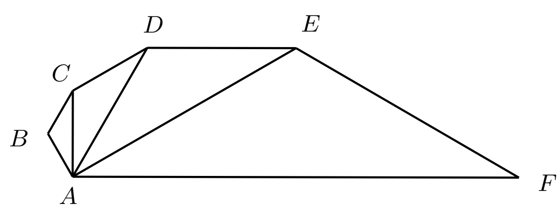

5) ¿Es posible pagar $\$25$ con monedas de $\$1$ y monedas de $\$5$, usando exactamente $12$ monedas?

6) Al número de tres dígitos (cifras) $4\square 7$ se le suma el número $321$ para dar como resultado el número de tres dígitos $7\triangle 8$. Si $7\triangle 8$ es divisible entre $9$, ¿cuánto vale la suma de $\square$ más $\triangle$?
*Nota. Cada símbolo $\square$ y $\triangle$ representa un dígito.*

7) En un tablero de $3 \times 5$ cuadritos, ¿cuántos cuadrados se pueden dibujar de manera que sus vértices sean centros de los cuadritos de $1 \times 1$ del tablero?

8) Luis tiene un nuevo restaurante, su amiga Laura le regaló mesas y sillas. Si las mesas las coloca de forma que cada una tenga $4$ sillas, le faltan $6$ sillas. Pero si colocan de dos en dos de forma que dos mesas juntas tengan $6$ sillas, le sobran $4$ sillas. ¿Cuántas mesas recibió Luis de regalo?

9) En la figura se muestra un triángulo $ABC$ donde $\angle ABC = 120°$. Además, se cumple que $AB = BC$, $AC = CD$, $AD = DE$, $AE = EF$ y que $\angle BCD = \angle CDE = \angle DEF = 150°$. ¿Cuál es el valor, en grados, del ángulo $\angle EFA$?

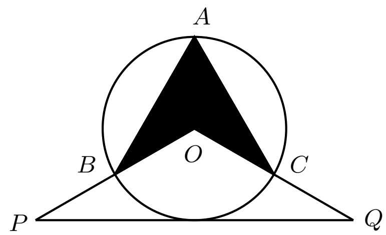



10) Las caras de un dado tienen los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lalo forma números siguiendo tres pasos:
*Paso 1.* Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras.
*Paso 2.* Encuentra el producto de los números de las otras tres caras.
*Paso 3.* El número lo forma sumando los dos resultados anteriores.
¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

11) ¿Cuántos números de dos dígitos (cifras) son iguales a la suma de sus dos dígitos más el producto de sus dos dígitos?

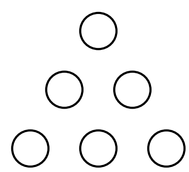
12) Un número entero se llama *ascendente* si cada uno de sus dígitos (salvo el primero a la izquierda) es mayor que el dígito que está a su izquierda. Por ejemplo, $2478$ es un número ascendente. ¿Cuántos números ascendentes hay entre $4000$ y $5000$?

13) En la siguiente figura, el triángulo $OPQ$ es isósceles con $OP = OQ$. La circunferencia de centro $O$ y radio $\frac{OQ}{2}$ corta a $OP$ en $B$, corta a $OQ$ en $C$ y toca a $PQ$ (tangentemente). El punto $A$ sobre la circunferencia cumple que $AB = AC$. Si el área sombreada vale 2 cm$^2$, ¿cuál es el valor, en cm$^2$, del área del triángulo $OPQ$?




14) a) ¿Puedes escribir a $2048$ como suma de enteros consecutivos?
b) ¿Puedes escribir a $2048$ como suma de enteros positivos consecutivos?

15) Lucy colocó los números $2, 3, 4, 5, 6$ y $10$ en los círculos, de tal manera que el producto de los tres números de cada lado es el mismo y cuidó que el producto fuera lo más grande posible. ¿Cuál es el valor de tal producto?

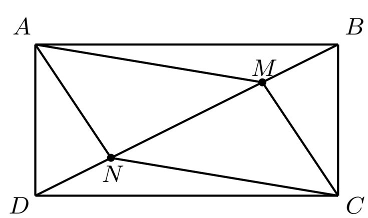


## Prueba por Equipos, Nivel I

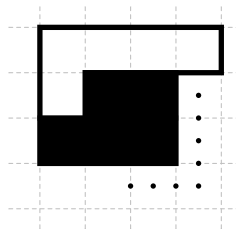
1) La suma rara (simbolizada con $\oplus$) es la suma normal más 1, por ejemplo $2 \oplus 3 = 2 + 3 + 1 = 6$ y $1 \oplus 0 = 1 + 0 + 1 = 2$.
Encuentra el valor de $1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \cdots 1 \oplus 0$, en donde el $0$ se ha escrito $100$ veces.

2) ¿De cuántas formas podemos cambiar un billete de $\$100$ por monedas de $\$5$ y de $\$2$, si tenemos que utilizar al menos una moneda de cada denominación?

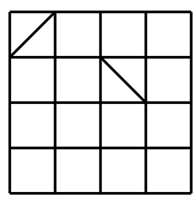
3) En un rectángulo $ABCD$ de área $40$ cm$^2$, se construye el cuadrilátero $AMCN$ donde $M$ y $N$ son puntos en la diagonal $BD$ de manera que $BM = 3$ cm, $MN = 4$ cm y $ND = 3$ cm. ¿Cuál es, en cm$^2$, el área del cuadrilátero $AMCN$?



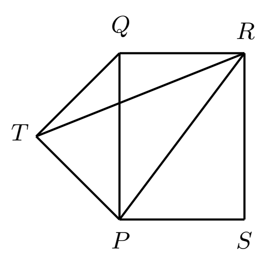
4) Marián comienza a pintar cuadritos siguiendo un patrón en espiral: pinta 2 negros, 3 grises, 5 blancos y luego repite pintando 2 negros, 3 grises, 5 blancos y así sucesivamente, tal como se observa en la figura. Marián deja de pintar cuando la figura sea un cuadrado. ¿Cuántos cuadritos pintó Marián?



5) Considera un tablero de $4 \times 4$ con 16 cuadritos. ¿Cuál es el mayor número de diagonales de cuadritos que se pueden dibujar, de manera que cualesquiera dos diagonales no tengan puntos comunes?
*Nota. Por ejemplo, se pueden dibujar diagonales como en la siguiente figura.*



6) En la figura, $PQRS$ es un rectángulo. El punto $T$ está fuera del rectángulo, de manera que $PQT$ es un triángulo con $PT = QT$ y $\angle PTQ = 90°$. Si $PQ = 4$ cm y $QR = 3$ cm, encuentra, en cm$^2$, el área del triángulo $PRT$.




7) Sobre cada una de las caras de un cubo, se trazan las dos diagonales. Cada una de las aristas del cubo y cada una de las diagonales trazadas se quieren etiquetar con uno de los números $1, 2, 3$, de manera que todos los triángulos que se formen con tres de estos segmentos, tengan las tres etiquetas en algún orden sobre sus lados. Da una manera de etiquetar.

8) Si $wxyz$ es un entero positivo de cuatro dígitos (cifras) con $w$ diferente de $0$, se llama *la suma de capas* de este entero a la suma $wxyz + xyz + yz + z$. Por ejemplo, la suma de capas del entero $4089$ es $4089 + 089 + 89 + 9 = 4276$.
a) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a $2019$?
b) ¿Es posible que la suma de capas de algún entero $wxyz$ sea igual a $2020$?

# Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) Si la longitud del lado del cuadrado es $1$, los diferentes tipos de triángulos rectángulos son:
a) Triángulos con catetos de longitudes $1$ y $2$, de los cuales hay $4$.
b) Triángulos isósceles con catetos de longitud $1$, de los que hay $8$.
c) Triángulos isósceles con catetos de longitud $\sqrt{2}$, de los que hay $2$.
En total hay $14$ triángulos rectángulos.

2) Cualquier número que termine en $2, 4, 6$ u $8$ es par, por lo cual el número no es primo. De la misma manera, no es primo cualquier número que termine en $5$ ya que es divisible entre $5$. Además, para que un número de dos dígitos y el escrito al revés sean primos, el número original debe empezar con $1, 3, 7$ o $9$. Hay $10$ primos de dos dígitos que empiezan con $1, 3, 7$ o $9$, los cuales son: $11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79$ y $97$, de los cuales solo el $19$ no cumple que el número escrito al revés es primo, pues $91 = 7 \cdot 13$. Así que hay $9$ primos de dos dígitos con esta propiedad.

3) El capicúa anterior a $2019$ es $2002$ y el posterior es $2112$. Como $2019 - 2002 = 17$ y $2112 - 2019 = 93$, se tiene que $2002$ es el más cercano.

4) Por la simetría, podemos determinar las longitudes de los lados de la figura, excepto la longitud del lado pequeño que está al lado del de longitud $3$ cm. El perímetro del rectángulo grande (completo) es de $46$ cm y aumentó a $50$ cm al quitar el rectángulo pequeño, luego el lado menor de este rectángulo pequeño mide $2$ cm. Para calcular el área, observamos que la figura se divide en $3$ rectángulos de $6 \times 5$, $6 \times 3$ y $6 \times 5$. Por lo que el área es $30 + 18 + 30 = 78$ cm$^2$.
Otra manera de calcular el área es: restar al área del rectángulo grande, que es $18 \cdot 5$ cm$^2$, el área del rectángulo que se quitó, que es $6 \cdot 2$ cm$^2$.

5) Si fuera posible, estaríamos sumando $12$ números impares (usando los números $1$ y $5$) y el resultado sería par, lo que es una contradicción ya que $25$ es impar. Por lo tanto, la respuesta es no.

6) Si $7\triangle 8$ es divisible entre $9$, entonces por el criterio de divisibilidad del $9$, $\triangle = 3$. Luego, $738 - 321 = 417$, lo que nos dice que $\square = 1$. Por lo tanto, $\square + \triangle = 1 + 3 = 4$.

7) Solo podemos trazar cuadrados de áreas $1$, $2$ y $4$. El total de los de área $1$ coincide con el total de formas de elegir el vértice inferior izquierdo, es decir, hay $2 \times 4$ formas de hacerlo. Para los de área $2$, basta con elegir el vértice inferior del rombo dentro del cuadrado de $2 \times 2$, lo cual se puede hacer de $3$ formas y hay $3$ formas de

construir cuadrados de $2 \times 2$. Por lo tanto, el total de cuadrados con vértices en los centros de los cuadritos de la cuadrícula es $(2 \times 4) + 3 + 3 = 14$.

8) Fijémonos en el acomodo de las mesas dobles, podemos pensar que a cada mesa le han tocado 3 sillas. En este acomodo sobran $4$ sillas. Ahora separemos las mesas dobles y coloquemos 3 sillas por mesa, notemos que estamos usando todas las mesas. Con las $4$ sillas sobrantes podemos completar $4$ mesas con $4$ sillas. Pero en el acomodo de mesas con $4$ sillas nos faltan 6 sillas y, como tenemos ya todas las mesas con 3 sillas (y las $4$ ya con $4$ sillas), hay $6$ mesas incompletas. Por lo tanto, son $10$ mesas las que Luis recibió de regalo.

9) Como $AB = AC$ y $\angle ABC = 120°$, tenemos que $\angle BCA = 30°$. Luego, $\angle ACD = 120°$ ya que $\angle BCD = 150°$. Análogamente, como $CA = AD$, obtenemos que $\angle CDA = 30°$. De la misma forma, resulta que $\angle DEA = 30°$ y, por lo tanto, $\angle EFA = 30°$.

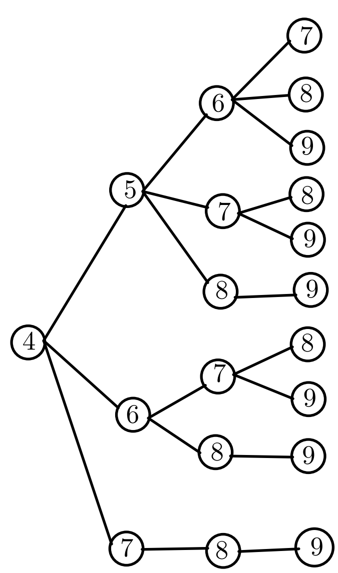
10) El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6 \times 5 \times 1 + 4 \times 3 \times 2 = 54,$$

$$6 \times 4 \times 1 + 5 \times 3 \times 2 = 54.$$

11) El número $ab$ cumple lo requerido si $10a + b = a + b + a \cdot b$, por lo que $9a = a \cdot b$ y, como $a$ no es cero, se tiene que $b = 9$. Luego, los números son 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99. Por lo tanto, la respuesta es 9.

12) El dígito de las unidades de millar es $4$ y el dígito de las centenas puede ser $5$, $6$ o $7$. En cada caso, el dígito de las decenas es $6$, $7$ u $8$; $7$ u $8$; $8$, respectivamente. Ahora, el dígito de las unidades es en cada subcaso: $7$, $8$ o $9$; $8$ o $9$; $9$; $8$ o $9$; $9$; $9$, respectivamente. Esto se muestra en el siguiente diagrama.



13) Sea $D$ el punto de tangencia de la circunferencia con $PQ$. La simetría de la figura permite ver que $DB = DC$ y, por lo tanto, $A$, $O$ y $D$ son colineales con $OA = OD$. Esto implica que el área del cuadrilátero $OBDC$ es igual al área sombreada, es decir, vale 2. Además, es claro que $(OPQ) = 2(OPD)$ pero, como $OP = 2OB$ (por cómo se construyó $B$), entonces $(OBDC) = 2(OBD) = (OPD)$. Por lo tanto, $(OPQ) = 2(OBDC) = 4$. (Los paréntesis denotan área).

**Segunda Solución.** Sea $D$ el punto de tangencia de la circunferencia con $PQ$. Como $OP = OQ$ y $OD$ es común a los triángulos rectángulos $OPD$ y $OQD$, estos son congruentes y, por lo tanto, de la misma área. También por tener lados correspondientes iguales, son congruentes los triángulos $ABO$ y $ACO$. Como consecuencia, $A$, $O$ y $D$ son colineales. Como $AO = OD$ los triángulos $ABO$ y $OBD$ tienen la misma área. Análogamente, los triángulos $ACO$ y $OCD$ tienen la misma área. Luego, todos triángulos $ABO$, $BOD$, $BPD$, $CDQ$, $ODC$ y $AOC$ tienen área igual a 1, por lo que el área de $OPQ$ es igual a 4.

14) a) Sí es posible. Una forma es

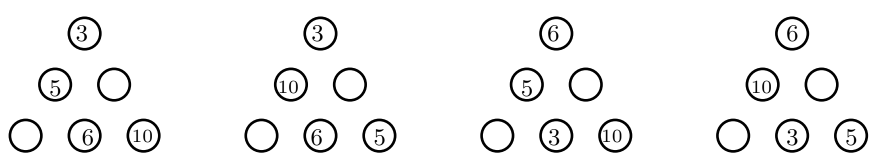
$$(-2047) + (-2046) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots + 2047 + 2048 = 2048.$$

b) No es posible. La suma de $r$ enteros positivos consecutivos es de la forma,

$$(n+1) + \cdots + (n+r) = nr + \frac{r(r+1)}{2} = \frac{r(2n+r+1)}{2}.$$

De aquí que $r$ es par o $2n + r + 1$ es par. Si $r$ es par, entonces $r + 1$ es impar y también $(2n + r + 1)$ es impar. Luego, como $2048 = 2^{11}$ no tiene factores impares, no es posible escribirlo como suma de enteros positivos consecutivos. De manera análoga se prueba que si $2n + r + 1$ es par, entonces $r$ es impar y, por lo tanto, no es posible escribir a 2048 como suma de enteros positivos consecutivos.

15) Escribamos los números dados como producto de números primos. Tenemos que $2 = 2$, $3 = 3$, $4 = 2^2$, $5 = 5$, $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$. Notemos que solo hay dos factores 3 y dos factores 5, entonces 3 y 6 no pueden estar sobre un mismo "lado" del triángulo. Análogamente, 5 y 10 no pueden estar sobre un mismo lado del triángulo. Salvo rotaciones y reflexiones, hay cuatro maneras de acomodar los números $3, 5, 6, 10$, que son las siguientes.



# Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Observemos que $n \oplus 0 = n + 1$. La sucesión de sumas raras parciales

$$1,\ 1 \oplus 0,\ 1 \oplus 0 \oplus 1,\ 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0,\ \ldots$$

es $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, \ldots$ Observemos que esta sucesión inicia con el número $1$, luego alternadamente están los siguientes dos pares consecutivos y después los siguientes dos impares consecutivos, y así sucesivamente. El valor buscado corresponde al término 200 de la sucesión. El término en la posición $4m$ es $6m - 1$, luego el término $200 = 4(50)$ es $6(50) - 1 = 299$.

**Solución alternativa.** Podemos agrupar en $100$ parejas como sigue

$$[1 \oplus 0] \oplus [1 \oplus 0] \oplus \cdots \oplus [1 \oplus 0],$$

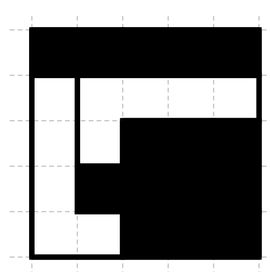
donde $[1 \oplus 0] = 2$, así que la operación buscada es $2 \oplus 2 \oplus 2 \oplus \cdots \oplus 2$, donde los números $2$ aparecen $100$ veces. Como en cada suma rara se agrega un $1$ adicional a los dos que se suman y como hay $99$ símbolos $\oplus$, tenemos que sumar todos los números $2$ y agregar $1$ por cada símbolo $\oplus$. El resultado es $100(2) + 99(1) = 299$.

2) El cambio se debe dar con un número par de monedas de $\$5$ y completar con monedas de $\$2$, hasta llegar a los $\$100$. Como debe utilizar al menos una moneda de cada denominación, entonces se deben utilizar $2$ o $4$ o $6 \ldots$ o $18$ monedas de $\$5$. Luego, hay $9$ maneras de poder cambiar el billete.

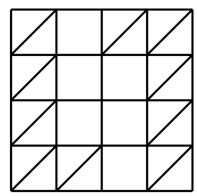
3) Como $MN = 4$ y $BD = 3 + 4 + 3 = 10$, tenemos que $\frac{(AMN)}{(ABD)} = \frac{MN}{BD} = \frac{4}{10}$. Por la simetría de la figura, tenemos que $(AMCN) = 2(AMN)$ y $(ABCD) = 2(ABD)$, por lo que $(ABD) = \frac{(ABCD)}{2} = 20$. Por lo tanto,

$$(AMCN) = 2(AMN) = 2\left(\frac{4}{10}\right)(ABD) = \left(\frac{4}{5}\right)(20) = 16.$$

4) Para que la figura pintada sea un cuadrado, el número de cuadritos pintados debe ser un cuadrado perfecto. La primera vez que sucede esto es cuando hay $25$ cuadritos pintados ($25 = 2+3+5+2+3+5+2+3$ y es fácil ver que no se obtienen cuadrados perfectos antes). Para verificar que, en efecto, la figura pintada será un cuadrado, se muestra la figura. Por lo tanto, el número de cuadritos que pintó Marián es $25$.

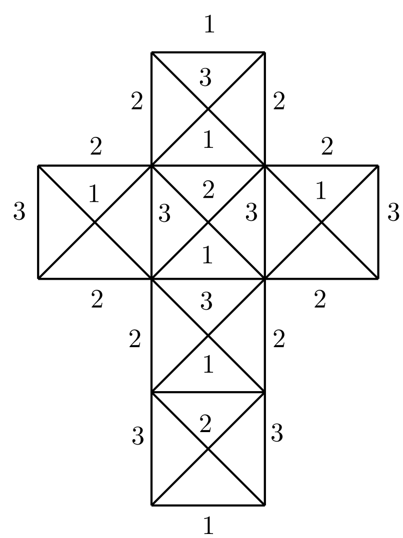


5) La respuesta es 10. En la siguiente figura se muestra un ejemplo.



6) Tenemos que, $(PRQ) = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Ahora, sea $M$ el punto medio de $PQ$, que también es el pie de altura desde $T$ hasta $PQ$. Como $PQT$ es un triángulo rectángulo isósceles, resulta que $QM = TM = PM = 2$. Luego, $(PQT) = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$, por lo que $(PRQT) = (PQT) + (PRQ) = 10$. Además, claramente la altura desde $T$ hasta la recta $QR$ mide lo mismo que $QM$, es decir, 2. Entonces, $(TRQ) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ y, por lo tanto, $(PRT) = (PTQR) - (TRQ) = 10 - 3 = 7$.

7) Desdoblando el cubo podemos hacer el siguiente etiquetado, donde las diagonales en cada cara tienen la misma etiqueta.




8) a) No es posible porque la última cifra de la suma de capas se obtiene de la última cifra de $4 \times z$ y ningún producto de esta forma termina en $9$.
b) Sí se puede con $1505$ o con $2005$.

# Problemas de Olimpiadas Internacionales

## 6ª Olimpiada Iraní de Geometría

El 6 de septiembre de 2019 se aplicó en México el examen de la $6^a$ Olimpiada Iraní de Geometría. Este examen fue aplicado en 24 Estados del país, con la participación de 110 alumnos en los tres niveles de la competencia. En cada nivel, son 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas y cada problema vale 8 puntos. México envió a Irán los resultados de los exámenes con mayor puntuación en cada uno de los niveles elemental (4 exámenes), intermedio (7 exámenes) y avanzado (9 exámenes). En el nivel libre solo una alumna participó. El examen del nivel libre es el mismo que el del nivel avanzado, solo que en el nivel libre participan alumnos de universidad. En esta ocasión, se obtuvieron 5 medallas de plata y 16 medallas de bronce. México ocupó el onceavo lugar de 55 países participantes.

Los resultados fueron los siguientes:

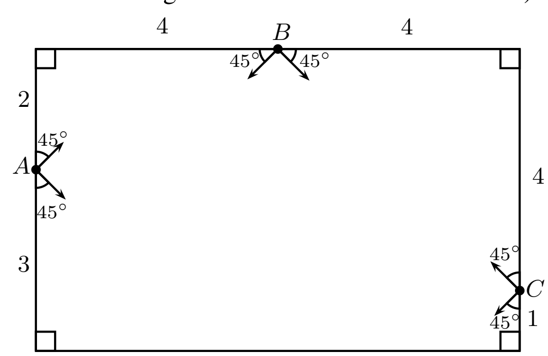
| **Nombre** | **Estado** | **Medalla** | **Nivel** |
|---|---|---|---|
| Mateo Iván Latapí Acosta | Ciudad de México | Plata | Elemental |
| Rogelio Guerrero Reyes | Aguascalientes | Bronce | Elemental |
| Carlos Eduardo Seck Cabrera | Hidalgo | Bronce | Elemental |
| Rosa Victoria Cantú Rodríguez | Ciudad de México | Bronce | Elemental |
| Daniel Alejandro Ochoa Quintero | Tamaulipas | Plata | Intermedio |
| Ana Illanes Martínez de la Vega | Ciudad de México | Plata | Intermedio |
| Karla Rebeca Munguía Romero | Sinaloa | Plata | Intermedio |
| Leonardo Mikel Cervantes Mateos | Ciudad de México | Bronce | Intermedio |
| Luis Eduardo Martínez Aguirre | Nuevo León | Bronce | Intermedio |
| Pedro Antonio González Soto | Nuevo León | Bronce | Intermedio |
| Marte Esteban Aparicio Rodríguez | Tlaxcala | Bronce | Intermedio |
| Fabián Domínguez López | Chiapas | Plata | Avanzado |
| Ana Paula Jiménez Díaz | Ciudad de México | Bronce | Avanzado |

| Nombre | Estado | Medalla | Nivel |
|---|---|---|---|
| Tomás Francisco Cantú Rodríguez | Ciudad de México | Bronce | Avanzado |
| Mauricio Elías Navarrete Flores | Chihuahua | Bronce | Avanzado |
| Diego Oswaldo Aceves Aldrete | Jalisco | Bronce | Avanzado |
| Elías Garza Valdés | Nuevo León | Bronce | Avanzado |
| Pablo Valeriano Quiroz | Nuevo León | Bronce | Avanzado |
| Emmanuel Iván Montiel Paredes | Tlaxcala | Bronce | Avanzado |
| Ricardo Balam Ek | Yucatán | Bronce | Avanzado |
| Zaida Victoria Cuate Tablas | Morelos | Bronce | Libre |

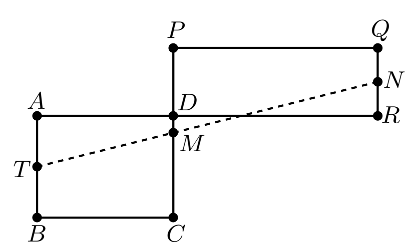
A continuación presentamos los problemas de la $6^a$ Olimpiada Iraní de Geometría.

## Nivel Elemental

**Problema 1.** Hay una mesa en forma de rectángulo de $8 \times 5$ con cuatro hoyos en sus esquinas. Después de lanzar una bola desde los puntos $A$, $B$ y $C$ según las trayectorias que se muestran, ¿caerá la bola en alguno de los hoyos después de 6 reflexiones? (La bola se refleja con el mismo ángulo al tocar las orillas de la mesa).




**Problema 2.** Como se muestra en la figura, hay dos rectángulos $ABCD$ y $PQRD$ con la misma área y con lados correspondientes paralelos. Los puntos $N$, $M$ y $T$ son puntos medios de los segmentos $QR$, $PC$ y $AB$, respectivamente. Probar que los puntos $N$, $M$ y $T$ están sobre una misma línea.



**Problema 3.** Hay $n > 2$ líneas en el plano en posición general; es decir, cualesquiera dos se intersecan y no hay tres concurrentes. Todos los puntos de intersección se marcan y, después, las líneas se quitan, pero los puntos marcados quedan. No se muestra cuáles puntos marcados pertenecen a cuáles dos líneas. ¿Es posible saber dónde está cada línea y reproducirlas todas?

**Problema 4.** En un cuadrilátero dado $ABCD$ se cumple que $\angle DAC = \angle CAB = 60°$ y $AB = BD - AC$. Las líneas $AB$ y $CD$ se intersecan en el punto $E$. Demostrar que $\angle ADB = 2\angle BEC$.

**Problema 5.** En un polígono convexo (es decir, un polígono donde todos los ángulos son menores a $180°$) decimos que una diagonal es *bisectora* si biseca tanto al área como al perímetro del polígono. ¿Cuál es el máximo número de diagonales bisectoras de un pentágono convexo?

## Nivel Intermedio

**Problema 1.** Dos círculos $\omega_1$ y $\omega_2$ con centros $O_1$ y $O_2$, respectivamente, se intersecan en los puntos $A$ y $B$, y el punto $O_1$ está sobre $\omega_2$. Sea $P$ un punto arbitrario sobre $\omega_1$. Las rectas $BP$, $AP$ y $O_1O_2$ intersecan a $\omega_2$ por segunda vez en los puntos $X, Y$ y $C$, respectivamente. Muestra que el cuadrilátero $XPYC$ es un paralelogramo.

**Problema 2.** Encuentra todos los cuadriláteros $ABCD$ tales que los cuatro triángulos $DAB$, $CDA$, $BCD$ y $ABC$ sean semejantes por parejas.

**Problema 3.** Tres círculos $\omega_1, \omega_2$ y $\omega_3$ pasan por un punto común $P$. La recta tangente a $\omega_1$ en $P$ interseca a $\omega_2$ y a $\omega_3$ por segunda vez en los puntos $P_{1,2}$ y $P_{1,3}$, respectivamente. Los puntos $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ y $P_{3,2}$ se definen de manera análoga. Muestra que las mediatrices de los segmentos $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ y $P_{3,1}P_{3,2}$ concurren.

**Problema 4.** Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea $K$ un punto en la recta $AD$ tal que $BK = AB$. Supóngase que $P$ es un punto arbitrario en $AB$ y que la mediatriz del segmento $PC$ interseca al circuncírculo del triángulo $APD$ en los puntos $X$ y $Y$. Muestra que el circuncírculo del triángulo $ABK$ pasa por el ortocentro del triángulo $AXY$.

**Problema 5.** Sea $ABC$ un triángulo con $\angle A = 60°$. Los puntos $E$ y $F$ son los pies de las bisectrices de los ángulos en $B$ y en $C$, respectivamente. Se consideran los puntos $P$ y $Q$ tales que los cuadriláteros $BFPE$ y $CEQF$ son paralelogramos. Muestra que $\angle PAQ > 150°$. (Considera el ángulo $\angle PAQ$ que no contiene al lado $AB$ del triángulo).

## Nivel Avanzado

**Problema 1.** Las circunferencias $\omega_1$ y $\omega_2$ se intersecan en los puntos $A$ y $B$. El punto $C$ está en la recta tangente a $\omega_1$ en $A$ y cumple que $\angle ABC = 90°$. Una línea arbitraria $\ell$ pasa por $C$ e interseca a $\omega_2$ en los puntos $P$ y $Q$. Las líneas $AP$ y $AQ$ intersecan de nuevo a $\omega_1$ en $X$ y $Z$, respectivamente. Sea $Y$ el pie de la altura trazada desde $A$ a $\ell$. Demuestra que los puntos $X, Y$ y $Z$ son colineales.

**Problema 2.** ¿Es cierto que en cualquier $n$-ágono convexo con $n > 3$, existen un vértice y una diagonal que pasa por este vértice, tales que los dos ángulos que forma la diagonal con cada uno de los dos lados adyacentes al vértice son agudos?

**Problema 3.** Las circunferencias $\omega_1$ y $\omega_2$ tienen centros $O_1$ y $O_2$, respectivamente. Estas dos circunferencias se intersecan en los puntos $X$ y $Y$. Sea $AB$ una tangente común a estas circunferencias tal que $A$ está en $\omega_1$ y $B$ está en $\omega_2$. Las tangentes a $\omega_1$ y a $\omega_2$ por $X$ intersecan a $O_1O_2$ en los puntos $K$ y $L$, respectivamente. Supongamos que la línea $BL$ interseca de nuevo a $\omega_2$ en $M$ y que la línea $AK$ interseca de nuevo a $\omega_1$ en $N$. Demuestra que las líneas $AM, BN$ y $O_1O_2$ concurren.

**Problema 4.** Sea $ABC$ un triángulo acutángulo escaleno con circuncírculo $\Gamma$. Sean $M$ el punto medio del segmento $BC$ y $N$ el punto medio del arco $\widehat{BC}$ de $\Gamma$ (que no contiene a $A$). Sean $X$ y $Y$ puntos en $\Gamma$ tales que $BX \parallel CY \parallel AM$. Supongamos que existe un punto $Z$ en el segmento $BC$ tal que el circuncírculo del triángulo $XYZ$ es tangente a $BC$. Sea $\omega$ el circuncírculo del triángulo $ZMN$. La línea $AM$ interseca de nuevo a $\omega$ en $P$. Sea $K$ el punto en $\omega$ tal que $KN \parallel AM$, sea $\omega_b$ la circunferencia que pasa por $B$, $X$ y es tangente a $BC$, y sea $\omega_c$ la circunferencia que pasa por $C$, $Y$ y es tangente a $BC$. Demuestra que la circunferencia con centro $K$ y radio $KP$ es tangente a las tres circunferencias $\omega_b, \omega_c$ y $\Gamma$.

**Problema 5.** Sean $A$, $B$ y $C$ puntos sobre una parábola $\Delta$ tal que el punto $H$, ortocentro del triángulo $ABC$, coincide con el foco de la parábola $\Delta$. Demuestra que si variamos las posiciones de los puntos $A, B$ y $C$ en $\Delta$ de forma que el ortocentro siga fijo en el foco $H$, entonces el inradio del triángulo $ABC$ también se queda fijo.

# XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 11 al 19 de septiembre de 2019 se llevó a cabo en la ciudad de Guanajuato, México, la edición 34 de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas con la participación de 89 estudiantes provenientes de 23 países de habla hispana y portuguesa.

México participó con cuatro estudiantes: Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Bruno Gutiérrez Chávez (Colima), Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León) y Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México). En esta ocasión, México ocupó el tercer lugar de la competencia por países, quedando por debajo de Perú y Brasil. De manera individual, Bruno, Ana Paula y Eric obtuvieron medallas de plata y, Francisco, obtuvo una medalla de bronce. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Enrique Treviño López (jefe de la delegación) y Leonardo Ariel García Morán (tutor).

La Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) agradece la colaboración de empresas como BIC® México, Google México, Grupo Salinas, Fundación Jenkins, Fundación UNIFIN y LUMO Financiera del Centro, entre otras, por su apoyo en la organización de este evento. México cumplió 30 años de participar en esta competencia y es la cuarta vez que la organiza, lo que hace que México sea el país que más veces ha sido anfitrión de esta olimpiada iberoamericana de matemáticas.

A continuación, presentamos los problemas de la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

**Problema 1.** Para cada entero positivo $n$, sea $s(n)$ la suma de los cuadrados de los dígitos de $n$. Por ejemplo, $s(15) = 1^2 + 5^2 = 26$. Determina todos los enteros $n \geq 1$ tales que $s(n) = n$.

**Problema 2.** Determina todos los polinomios $P(x)$ de grado $n \geq 1$ con coeficientes enteros tales que para todo número real $x$ se cumple

$$P(x) = (x - P(0))(x - P(1))(x - P(2)) \cdots (x - P(n-1)).$$

**Problema 3.** Sea $\Gamma$ el circuncírculo del triángulo $ABC$. La paralela a $AC$ que pasa por $B$ corta a $\Gamma$ en $D$ ($D \neq B$) y la paralela a $AB$ que pasa por $C$ corta a $\Gamma$ en $E$ ($E \neq C$). Las rectas $AB$ y $CD$ se cortan en $P$ y las rectas $AC$ y $BE$ se cortan en $Q$. Sea $M$ el punto medio de $DE$. La recta $AM$ corta a $\Gamma$ en $Y$ ($Y \neq A$) y a la recta $PQ$ en $J$. La recta $PQ$ corta al circuncírculo del triángulo $BCJ$ en $Z$ ($Z \neq J$). Si las rectas $BQ$ y $CP$ se cortan en $X$, demuestra que $X$ pertenece a la recta $YZ$.
*Nota.* El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo.

**Problema 4.** Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$ e inscrito en la circunferencia $\Gamma$. Sean $P$ y $Q$ dos puntos en el segmento $AB$ ($A, P, Q, B$ están en ese orden y son distintos) tales que $AP = QB$. Sean $E$ y $F$ los segundos puntos de intersección de las rectas $CP$ y $CQ$ con $\Gamma$, respectivamente. Las rectas $AB$ y $EF$ se cortan en $G$. Demuestra que la recta $DG$ es tangente a $\Gamma$.

**Problema 5.** Don Miguel coloca una ficha en alguno de los $(n+1)^2$ vértices determinados por un tablero de $n \times n$. Una *jugada* consiste en mover la ficha desde el vértice en que se encuentra a un vértice adyacente en alguna de las ocho posibles direcciones: $\uparrow, \downarrow, \rightarrow, \leftarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow$ siempre y cuando no se salga del tablero. Un *recorrido* es una sucesión de jugadas tal que la ficha estuvo en cada uno de los $(n+1)^2$ vértices exactamente una vez. ¿Cuál es la mayor cantidad de jugadas diagonales ($\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$) que en total puede tener un recorrido?

**Problema 6.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ enteros positivos y $P$ un polinomio con coeficientes enteros tal que, para todo entero positivo $n$,

$$P(n) \text{ divide a } a_1^n + a_2^n + \cdots + a_{2019}^n.$$

Demuestra que $P$ es un polinomio constante.

# Soluciones de Olimpiadas Internacionales

## XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de la XXXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

**Solución del problema 1. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez).** Primero veamos que $n < 1000$. Esto es fácil de ver puesto que si existiera un $n \geq 1000$ que cumpliera, tendríamos que $n \geq 10^{k-1}$, donde $k$ es la cantidad de dígitos de $n$. Además, $s(n)$ es a lo más el valor que se obtiene para $n$ con todos sus dígitos iguales a 9, esto es, $s(n) = 81k$. Queremos que $81k \geq s(n) = n \geq 10^{n-1}$; para $k = 4$ tenemos que $81 \times 4 = 324 < 1000 = 10^3$. Además, para cada $k$ siguiente, el lado izquierdo aumenta en 81, mientras que el lado derecho aumenta en al menos 1000. Por lo tanto, $n$ tiene a lo más 3 dígitos.
Si $n = \overline{abc}$, con $a \geq 1$, entonces $n = s(n)$ si y solo si $100a + 10b + c = a^2 + b^2 + c^2$. Como $a$, $b$ y $c$ son dígitos, tenemos que $10b \geq b^2$ y $9a \geq a^2$. Además, $c + 91a \geq 91 > 9^2 \geq c^2$. Juntando las tres desigualdades, obtenemos que $n = 100a + 10b + c > a^2 + b^2 + c^2 = s(n)$, de modo que no hay solución si $n \geq 100$.
Si $n = \overline{ab}$ con $a \geq 1$, entonces $n = s(n)$ si y solo si $10a + b = a^2 + b^2$ si y solo si $0 = b^2 - b + (a^2 - 10a)$. Usando fórmula general, $b$ es un entero si $x = 1 + 40a - 4a^2$ es un cuadrado perfecto. Sin embargo, $x = 37, 65, 85, 97, 101, 97, 85, 65, 37$ para $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, respectivamente. Por lo tanto, no hay solución si $n \geq 10$.
Por último, si $n \geq 9$ y $n = s(n)$, entonces $a = a^2$ si y solo si $1 = a$. En conclusión, la única solución es $n = 1$.

**Solución del problema 2. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez).** Probaremos que el único $P$ que cumple es $P(x) = x$. Sea $n$ el grado del polinomio, veamos primero qué pasa si $n \geq 3$. Supongamos que para tal $n$ existe un polinomio $P$ que cumple.

Evaluando en 0 tenemos que

$$P(0) = (-P(0))(-P(1))(-P(2)) \cdots (-P(n-1)) = (-1)^n P(0)P(1) \cdots P(n-1).$$

Si $P(0) \neq 0$, entonces $1 = (-1)^n P(1) \cdots P(n-1)$. Multiplicando esta igualdad por $(-1)^n$, obtenemos que $P(1)P(2) \cdots P(n-1) = (-1)^n$. Como $P$ tiene coeficientes enteros, se tiene que $P(k)$ es entero para todo entero $k$, por lo que $P(i) = \pm 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. En particular, $P(1) = \pm 1$. Evaluando en 1 se tiene que

$$P(1) = (1 - P(0))(1 - P(1)) \cdots (1 - P(n-1)) = \pm 1.$$

Si $P(i) = 1$ para algún $1 \leq i \leq n-1$, entonces $P(1) = 0$, una contradicción. Luego, todos los $P(i)$ son $-1$, por lo que

$$-1 = P(1) = (1 - P(0))(1 + 1)(1 + 1) \cdots (1 + 1) = 2^{n-1}(1 - P(0)),$$

de donde $2^{n-1}$ divide a $-1$, lo que es una contradicción pues $2^{n-1} \geq 2$. Con esto concluimos que $P(0)$ no puede ser distinto de 0.
Si $P(0) = 0$, entonces $P(x) = x(x-P(1))(x-P(2)) \cdots (x-P(n-1))$. Si $P(i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n-1$, entonces $0 = P(2) = 2^n \neq 0$, lo que es una contradicción. Luego, existe $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tal que $P(r) \neq 0$. Sea

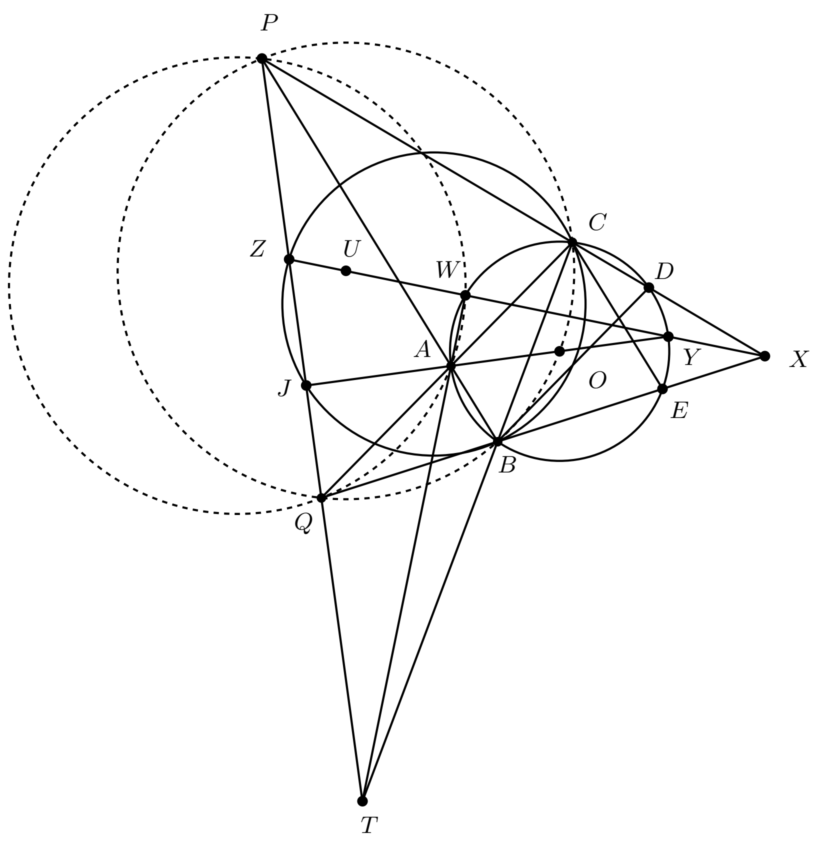
$$K = (r - P(1)) \cdots (r - P(r-1))(r - P(r+1)) \cdots (r - P(n-1)).$$

Es fácil ver que $P(r) = r(r - P(r))K$ y, como $P(r) \neq 0$, se sigue que $K \neq 0$. Si $rK = -1$, entonces $P(r) = rK(r - P(r)) = P(r) - r$, de donde $r = 0$, lo que es una contradicción. Luego, $rK \neq -1$ y $P(r) = \frac{r^2K}{rK+1}$. Como $P(r)$ es entero, se tiene que $rK + 1$ divide a $r^2K$ y esto solo sucede si $rK + 1 = \pm 1$, esto es, $rK = -2$, pues $rK = 0$ no es posible ya que $r \neq 0$ y $K \neq 0$. Esto nos dice que para cada $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, si $P(r) \neq 0$, entonces $P(r) = 2r$. Como $r > 0$ y $r \mid 2$ (recordemos que $rK = -2$), se tiene que $r = 1$ o $r = 2$. Si $r = 1$, entonces $K = -2$ y, como $K = (r - P(1)) \cdots (r - P(r-1))(r - P(r+1)) \cdots (r - P(n-1))$, existe $i$ tal que $1 - P(i) = \pm 2$, en particular, $P(i)$ es impar, lo que contradice que todos los $i$ tales que $P(i) \neq 0$ cumplen que $P(i)$ es par. Análogamente, si $r = 2$, entonces $K = -1$, de donde se sigue que existe $i$ tal que $2 - P(i) = \pm 1$ y nuevamente $P(i)$ sería impar, que no es posible. Concluimos entonces que $P(0) = 0$ tampoco se puede.
Por lo tanto, para $n \geq 3$ no existe polinomio que cumpla lo deseado.
Si $n = 1$, entonces $P(x) = x - P(0)$, de donde $P(0) = -P(0)$ y, en consecuencia, $P(0) = 0$. Por lo tanto, $P(x) = x$ y este polinomio cumple lo deseado.
Si $n = 2$, entonces $P(x) = (x - P(0))(x - P(1))$. Evaluando en 0, obtenemos que $P(0) = -P(0)(-P(1)) = P(0)P(1)$. Si $P(0) \neq 0$, entonces $P(1) = 1$, de donde $1 = P(1) = (1 - P(0))(1 - P(1)) = 0$, lo que es una contradicción. Luego, $P(0) = 0$ y $P(x) = x(x - P(1))$. Evaluando en $x = 1$, obtenemos que $P(1) = 1 - P(1)$, de donde $P(1) = \frac{1}{2}$, lo que es una contradicción ya que $P(1)$ debe ser entero. Concluimos que para $n = 2$ no hay soluciones.
Por lo tanto, el único polinomio que satisface la condición del problema es $P(x) = x$.

**Solución del problema 3.** Demostraremos primero que el cuadrilátero $BCPQ$ es cíclico. En efecto, por la construcción, tenemos que el cuadrilátero $ABDC$ es un trapecio cíclico, por lo tanto es un trapecio isósceles con $AB = CD$. Análogamente, $ABEC$ es un trapecio isósceles con $AC = BE$. De lo anterior, tenemos que $\angle ABD = \angle ACE$ por estar inscritos en cuerdas de igual medida $AD = AE$. Por el cíclico $ABDC$, tenemos que $\angle ABD = \angle ACP$ y, por el cíclico $ABEC$, tenemos que $\angle ACE = \angle ABQ$. Por lo tanto, $\angle ACP = \angle ABQ$ como se quería.

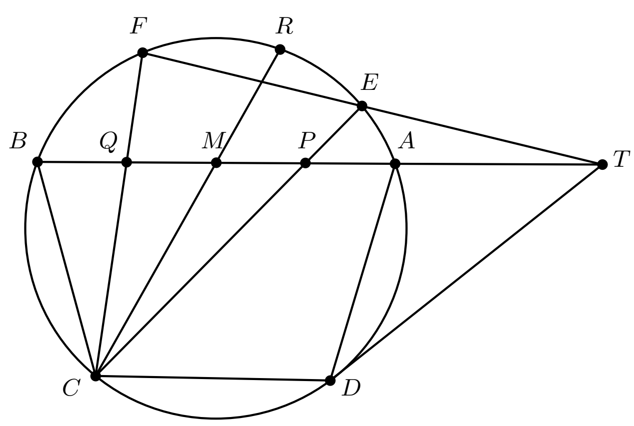
Además, por la igualdad de cuerdas $AD = AE$, tenemos que $AY$ es la mediatriz de la cuerda $DE$ y, como $DE$ y $BC$ son antiparalelas por ser $BCDE$ cíclico, resulta que $DE \parallel PQ$ porque $PQ$ también es antiparalela a $BC$ al ser $BCPQ$ cíclico. Por lo tanto, $AJ \perp PQ$.

Ahora, sea $W$ el punto de corte de $YZ$ con $\Gamma$. Como $AY$ es un diámetro de $\Gamma$, tenemos que $AW \perp YZ$ y, como $AJ \perp PQ$, resulta que el cuadrilátero $AWZJ$ es cíclico. Como los cuadriláteros $ABCW$, $BCZJ$ y $AWZJ$ son cíclicos, es claro que las rectas $BC, AW$ y $ZJ$ concurren (por ser los ejes radicales de esas tres parejas de círculos), lo cual implica que las rectas $BC, AW$ y $PQ$ concurren. Existen dos subcasos para esta concurrencia: primero, cuando $BC \parallel PQ$ ("concurren" en el infinito) y segundo, cuando $BC$ y $PQ$ se cortan en un punto $T$. En el primer caso, si $BC \parallel PQ$, como $BCPQ$ es cíclico, entonces $BCPQ$ es un trapecio isósceles y, por lo tanto, el resultado es trivial por simetría. En el segundo caso, sea $T$ el punto de dicha concurrencia.



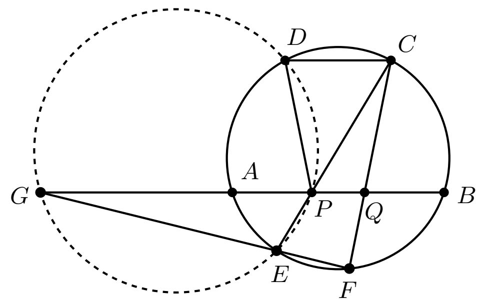
Sea $\Phi$ el circuncírculo de $BCPQ$. Por potencia de $T$ a $\Gamma$, tenemos que $TB \cdot TC = TA \cdot TW$ y, por potencia de $T$ a $\Phi$, tenemos que $TB \cdot TC = TQ \cdot TP$, de donde $TA \cdot TW = TQ \cdot TP$, lo cual implica que el cuadrilátero $AWPQ$ es cíclico.
De este último cíclico tenemos que $\angle AWQ = \angle APQ = \angle ACB = \angle AWB$, por lo que $AW$ es la bisectriz del ángulo $\angle BWQ$. Análogamente, $AW$ es la bisectriz del ángulo $\angle CWP$.
Ahora, sea $U$ el centro de $\Phi$. Entonces, tenemos que $\angle BUQ = 2\angle BPQ = 2\angle AWQ = \angle BWQ$, de donde el cuadrilátero $BWUQ$ es cíclico. Análogamente, el cuadrilátero $CWUP$ es cíclico.
Como los cuadriláteros $BCPQ$, $BWUQ$ y $CUWP$ son cíclicos, se sigue que las rectas $BQ, CP$ y $WU$ concurren (en $X$).
Finalmente, demostraremos que $U$ es parte de la recta $YZ$. En efecto, como $AW$ es la bisectriz del ángulo $\angle BWQ$, tenemos que $W$ y $U$ están en el mismo lado de la recta $BQ$ y $U$ está sobre la mediatriz de $BQ$. Es claro que $WU$ es la bisectriz externa del ángulo $\angle BWQ$, por lo que $UW \perp AW$, esto es, $U$ está sobre la recta $YZ$. Por lo tanto, las rectas $WU$ y $YZ$ son iguales, lo cual implica que $U, W, X, Y, Z$ son colineales como se quería.

**Solución del problema 4. (Solución de Bruno Gutiérrez Chávez).** Sea $M$ el punto medio de $AB$. Notemos que $M$ es también el punto medio de $PQ$, pues $QM = BM - BQ = AM - PA = MP$. Como $AB \parallel CD$ y $PQ \parallel CD$, tenemos que $C(Q, P; M, D) = -1$. Proyectando el haz sobre $\Gamma$, tenemos que si $R = MC \cap \Gamma$, entonces $C(F, E; R, D) = -1$, lo cual implica que $F, R, E, D$ es armónico. Por lo tanto, las tangentes por $R$ y $D$ se intersecan en $T$, que también está en la recta $FE$.



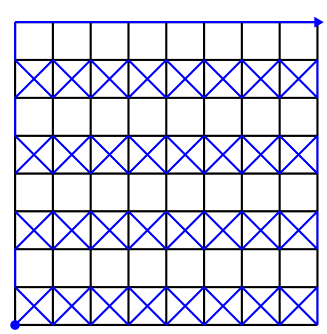

De manera análoga, como $AB \parallel CD$ y $M$ es el punto medio de $AB$, tenemos que $C(B, A; M, D) = -1$. Proyectando el haz sobre $\Gamma$, tenemos que $C(B, A; M, D) = C(B, A; R, D) = -1$, lo que implica que $B, R, A, D$ es armónico. Por lo tanto, las tangentes por $R$ y $D$ se intersecan en $T$ que está en la recta $AB$. Concluimos que $AB, EF$ y la tangente a $\Gamma$ por $D$, concurren en $T$. Como $T = G$ (pues cada uno es la intersección de $AB$ con $EF$), concluimos que $DG$ es tangente a $\Gamma$, como se quería.

**Solución alternativa.** Notemos que el trapecio cíclico $ABCD$ es necesariamente isósceles, siendo $C$ y $D$ puntos simétricos respecto de la mediatriz de $AB$. Dado que $P$ y $Q$ también son puntos simétricos, tenemos que $\angle PDC = \angle DCQ$. Además, por ser paralelas $AB$ y $CD$ se verifica que $\angle PDC = \angle DPG$ y, el hecho de ser $CDEF$ cíclico, implica que $\angle DCF = 180° - \angle FED = \angle DEG$.
Luego, se sigue que $\angle DPG = \angle DPA = \angle PDC = \angle DCQ = \angle DCF = \angle DEG$. Esto muestra que el cuadrilátero $DPEG$ es cíclico, de donde obtenemos que $\angle GDE = \angle GPE = \angle DCE$ y de aquí, concluimos por ángulos seminscritos, que $DG$ es tangente a $\Gamma$.

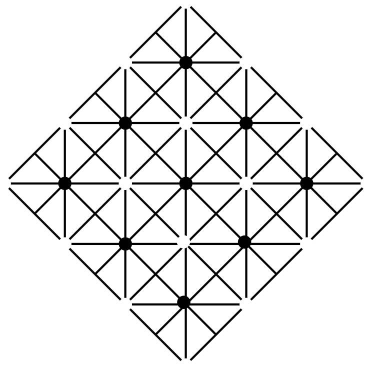



**Solución del problema 5. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz).** Notemos primero que cualquier recorrido tiene exactamente $(n+1)^2 - 1$ movimientos, por lo que el problema es equivalente a minimizar el número de movimientos ortogonales ($\leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow$). Consideramos dos casos.

**Caso 1:** $n$ es par. Afirmamos que el mínimo número de movimientos ortogonales es $2n$. La construcción es la siguiente.

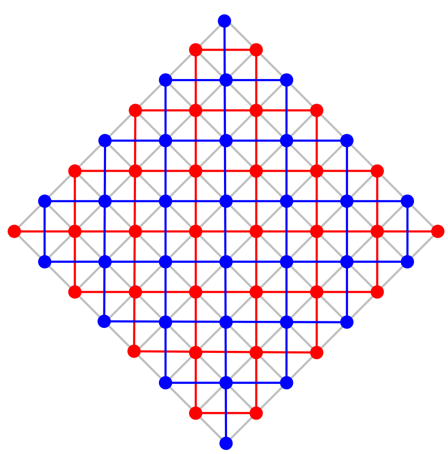


Para probar que es el mínimo, consideremos una gráfica con vértices en los vértices del tablero, donde dos vértices son adyacentes si se puede llegar de uno al otro con un solo movimiento diagonal. En esta gráfica las cuatro esquinas están en la misma componente conexa, que se ve de la siguiente manera (luego de rotar $45°$).

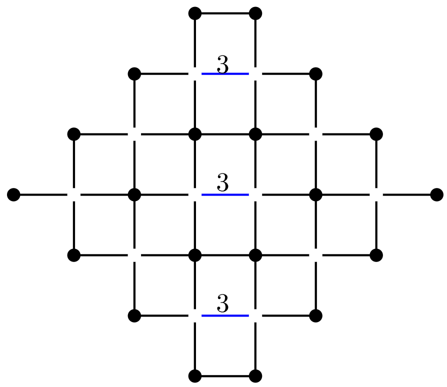


Notemos que al hacer movimientos diagonales, las aristas de la gráfica que recorremos determinan caminos en esta componente conexa. Notemos además que en cada camino, la cantidad de vértices blancos que contiene el camino y la cantidad de vértices negros (según la coloración en el dibujo) difieren a lo más en $1$. En particular el número de vértices blancos excede al de vértices negros en a lo más $1$. Es fácil verificar que el número total de vértices blancos excede al de vértices negros en $n+1$, por lo que debe haber al menos $n+1$ caminos. Finalmente notemos que entre cualesquiera dos caminos consecutivos que utilicemos debe haber al menos dos movimientos ortogonales, por lo que hay al menos $2n$ movimientos ortogonales.

**Caso 2:** $n$ es impar. Afirmamos que el mínimo número de movimientos ortogonales es $n$. La construcción es análoga a la del caso anterior. Para probar que es el mínimo consideremos nuevamente la gráfica que consideramos en el caso anterior. Esta vez la gráfica se divide en dos componentes conexas isomorfas.



Demostraremos que cada una de las componentes debe contener al menos $\frac{n+1}{2}$ caminos distintos, para un total de $n+1$. Como entre cualesquiera dos caminos diagonales consecutivos debe haber un movimiento ortogonal, concluímos que hay al menos $n$ movimientos ortogonales. Enfoquémonos entonces en una de estas componentes.




Notemos que si hay $p$ caminos en esta componente con $x_1, x_2, \ldots, x_p$ vértices, entonces $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = \frac{(n+1)^2}{2}$, mientras que el número total de aristas en los caminos es $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \cdots + (x_p - 1) = \frac{(n+1)^2}{2} - p$. Luego, para probar que $p \geq \frac{n+1}{2}$ basta probar que hay a lo más $\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ aristas que están en algún camino. Es fácil ver que hay en total $n^2$ aristas en la componente, por lo que nos basta con ver que hay al menos $\frac{n^2-n}{2}$ aristas que no están en ningún camino.

Notemos que cada arista de un camino tiene como extremo a algún vértice blanco. Más aún, a menos que la arista sea una de las marcadas con 3, tiene exactamente un extremo blanco. Como cada uno de estos vértices blancos esta en solamente un camino, hay a lo más dos aristas de un camino que lo tienen como extremo, por lo que al menos dos de las aristas que lo tienen como extremo no están en ningún camino. Para los vértices blancos que sí están en una pareja marcada con 3, podemos verificar que al menos 3 de las 7 aristas que inciden en alguno de estos dos vértices no están en alguno de los caminos.

Para finalizar, podemos verificar, ya sea con inducción o contando cuidadosamente, que hay exactamente $\frac{n-1}{2}$ parejas marcadas con 3, y exactamente $\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n^2-4n+3}{4}$ vértices blancos que no pertenecen a ninguna de ellas. Por lo tanto hay al menos

$$3\left(\frac{n-1}{2}\right) + 2\left(\frac{n^2-4n+3}{4}\right) = \frac{n^2-n}{2}$$

aristas que no pertenecen a ningun camino, como queríamos.

**Solución del problema 6. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios).** Demostraremos primero una propiedad acerca de los factores primos que dividen a los valores que toma un polinomio no constante con coeficientes enteros. Con esto, probaremos por contradicción, que $P$ debe ser constante.

**Lema.** Sea $P$ un polinomio no constante con coeficientes enteros y sea $X$ el conjunto de los números primos $p$ tales que para algún entero $n$, $p$ divide a $P(n)$. Entonces, $X$ es infinito.

**Prueba.** Supongamos, por contradicción, que $X$ es finito y sean $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sus elementos. Sea $a$ el coeficiente constante de $P$. Si $a$ fuera 0, entonces podemos tomar un primo $p \notin X$ y dividiría a $P(p)$, lo que es una contradicción. Si $a$ fuera distinto de 0, podríamos tomar $P((p_1p_2\cdots p_k)^r)$, con $r$ lo suficientemente grande, de modo que para $1 \leq i \leq k$, $\nu_{p_i}(a) < r$ (donde $\nu_{p_i}(a)$ denota al mayor entero positivo $m$ tal que $p_i^m$ divide a $a$) y, además, $|P((p_1p_2\cdots p_k)^r)| > |a|$, esta condición es posible ya que $P$ no es constante. Entonces, tenemos que $\nu_{p_i}(P(p_1p_2\cdots p_k)^r) = \nu_{p_i}(a)$ para cada primo $p_i$ de $X$, pero como $|P((p_1p_2\cdots p_k)^r)| > |a|$, concluimos que existe un primo $p$ tal que $p \notin X$ y que divide a $P((p_1p_2\cdots p_k)^r)$, lo que es una contradicción. Concluimos entonces que $X$ es infinito. $\square$

Continuando con la solución del problema, supongamos que $P$ no es constante y sea $p$ un primo tal que:

- Para algún entero $n$, $p$ divide a $P(n)$,
- $p$ no divide a $a_i$ para $1 \leq i \leq 2019$,
- $p$ no divide a 2019.

Esto es posible, ya que por el lema anterior, entre el conjunto de primos solo estamos descartando una cantidad finita.
Ahora, consideremos un entero $k$ que cumpla lo siguiente:

- $p - 1$ divide a $n + k$.
- $pk + n > 0$.

Esto es posible, pues hay enteros arbitrariamente grandes que cumplen la primera condición, en particular, hay uno mayor que $-n$.
Por último, consideremos $P(pk+n)$. Por la condición del problema, $P(pk+n)$ divide a $a_1^{pk+n} + a_2^{pk+n} + \cdots + a_{2019}^{pk+n}$. Como $P(pk+n) \equiv P(n) \equiv 0 \pmod p$, tenemos que $p$ divide a $a_1^{pk+n} + a_2^{pk+n} + \cdots + a_{2019}^{pk+n}$. Además, como $pk+n \equiv k+n \equiv 0 \pmod{p-1}$, tenemos por el teorema pequeño de Fermat, que $p$ divide a $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{2019} = 2019$, lo que es una contradicción, pues habíamos supuesto que $p$ no divide a 2019. Por lo tanto, $P$ debe ser un polinomio constante, como queríamos.

# Apéndice

**Definición 1** (Divisibilidad)**.** *Si $a$ y $b$ son enteros, se dice que $a$ divide a $b$ o que $b$ es múltiplo de $a$ si $b = aq$ para algún entero $q$, y se denota por $a \mid b$.*

**Definición 2** (Congruencias)**.** *Dados dos enteros $a$, $b$ y un entero positivo $m$, decimos que $a$ es congruente con $b$ módulo $m$ si $a - b$ es múltiplo de $m$. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod $m$).*

**Teorema 1** (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean $a, b, c, d, m$ enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod $m$) y $c \equiv d$ (mod $m$), entonces $a \equiv d$ (mod $m$).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod $m$) y $b \equiv d$ (mod $m$), entonces $ab \equiv cd$ (mod $m$).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod $m$), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod $m$) para todo entero positivo $n$.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod $m$), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde $(b, m)$ denota el máximo común divisor de $b$ y $m$.*

**Teorema 2** (Pequeño de Fermat)**.** *Si $p$ es un número primo y $a$ es un entero primo relativo con $p$, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod $p$).*

**Teorema 3** (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde $k_0$ es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

*Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.*

**Teorema 4** (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en $n$ casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

**Teorema 5** (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto $A$ de $n$ elementos, una combinación de $m$ elementos de $A$, es un subconjunto de $A$ formado de $m$ elementos. El número de combinaciones de $m$ elementos de $A$, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

*donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.*

**Teorema 6** (Binomio)**.** *Para $a$ y $b$ números cualesquiera y $n$ un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Teorema 7** (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

*y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

**Teorema 8** (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

**Teorema 9** (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

**Definición 3** (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo $ABC$ son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

**Criterio 1** (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

**Criterio 2** (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

**Definición 4** (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

**Criterio 3** (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

**Teorema 10** (Tales)**.** *Si $ABC$ es un triángulo y $D$, $E$ son puntos sobre los lados $AB$ y $CA$, respectivamente, entonces los segmentos $DE$ y $BC$ son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

**Teorema 11** (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo $ABC$ y un punto $D$ sobre el lado $BC$, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

**Teorema 12** (Ceva)**.** *Si $L$, $M$ y $N$ son puntos sobre los lados (o extensiones) $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente, del triángulo $ABC$, entonces $AL$, $BM$ y $CN$ son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

**Teorema 13** (Menelao)**.** *En un triángulo $ABC$, si $L$, $M$ y $N$ son puntos sobre los lados $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces $L$, $M$ y $N$ son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

**Definición 5** (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

**Teorema 14** (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

**Teorema 15** (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

**Teorema 16** (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas $AB$ y $CD$ de una circunferencia se intersectan en un punto $P$, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si $A$, $B$ y $T$ son puntos sobre una circunferencia y la tangente en $T$ intersecta en un punto $P$ a la prolongación de la cuerda $AB$, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

**Definición 6** (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

**Teorema 17** (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

**Teorema 18** (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si $\Omega$ es el circuncírculo de un triángulo $ABC$, $I$ es el incentro y $M$ es la intersección de $AI$ con $\Omega$, entonces $MI = MB = MC$.*

# Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.