SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Febrero de 2020

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2020, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su duodécimo año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Propiedades básicas de las medianas*, de José Antonio Gómez Ortega y Víctor Hugo Almendra Hernández. En él, se aborda una serie de propiedades que tienen las medianas de un triángulo, así como algunos de los problemas típicos del tema. Esperamos que tanto lectores principiantes y avanzados, disfruten de esta aportación.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este primer número del año 2020, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes de invitación a la OMM del año 2019. También incluimos los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos de los niveles II y III del Concurso Nacional de la 3^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), así como los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2020.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2001. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2020-2021 y, para el 1° de julio de 2021, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 8 al 13 de noviembre de 2020 en la Ciudad de Guanajuato, Guanajuato. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2020 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Washington, Estados Unidos, julio de 2021) y a la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2021).

De entre los concursantes nacidos en 2004 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2021).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la X Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2021.

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2020, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Cuarta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de julio de 2020.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de 2020.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de 2020.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 4^a OMMEB se realizará en Oaxtepec, Morelos, del 1 al 4 de octubre de 2020. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2021.

Propiedades Básicas de las Medianas

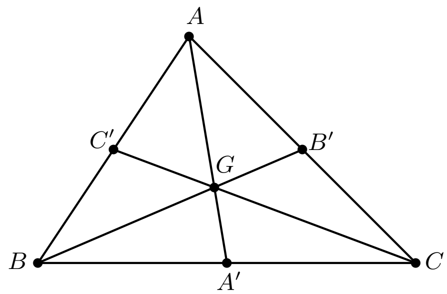
Por José Antonio Gómez Ortega y Víctor Hugo Almendra Hernández

Nivel Intermedio

La configuración de un triángulo y sus medianas está presente en una diversidad de problemas de geometría. Esta configuración ha servido de inspiración para el planteamineto de problemas de olimpiadas de matemáticas. Veremos aquí propiedades básicas de las medianas, al igual que algunos de los problemas típicos del tema.

Sean ABC un triángulo y A', B', C' los puntos medios de BC, CA y AB, respectivamente. Los segmentos AA', BB' y CC' son conocidos como *las medianas* del triángulo ABC. Estos tres segmentos son concurrentes. Para ver esto, sea G la intersección de BB' y CC'. Como $\frac{AB'}{B'C} = \frac{AC'}{C'B}$, por el Teorema de Tales[2], tenemos que $B'C'$ es paralela a BC y $B'C' = \frac{1}{2}BC$. Luego, los triángulos GBC y $GB'C'$ son semejantes en razón $2 : 1$. Esto nos dice que $BG = 2GB'$ y $CG = 2GC'$, por lo que las medianas BB' y CC' se cortan en el punto G que las divide en razón $2 : 1$. De igual forma, la otra mediana AA' cortará a la mediana BB' en un punto que las divide en razón $2 : 1$. Como en BB' solamente hay un punto con tal propiedad, resulta que AA' también pasa por G y, por lo tanto, AA', BB' y CC' son concurrentes en el punto G. Este punto G se conoce como el *centroide*, *baricentro*, *gravicentro* o *centro de gravedad* del triángulo ABC.

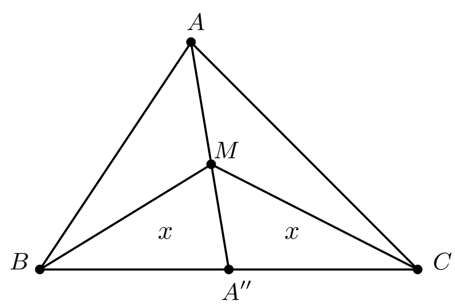
[2] *Teorema de Tales.* Si C' y B' se encuentran en los lados AB y CA del triángulo ABC, respectivamente, entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes.
(i) ABC y $AC'B'$ son semejantes, (ii) $\frac{AC'}{C'B} = \frac{AB'}{B'C}$, (iii) $B'C'$ es paralela a BC.



Las medianas de un triángulo dividen a este en 6 triángulos de la misma área. En efecto, por ser A' punto medio de BC, las longitudes de las bases de los triángulos GBA' y $GA'C$ son iguales y, como los triángulos también tienen la misma altura, resulta que sus áreas[3] (GBA') y $(GA'C)$ son iguales, las denotaremos con x. De igual manera tenemos que $(GCB') = (GB'A) = y$, $(GAC') = (GC'B) = z$. Con el mismo razonamiento tenemos que $(ABA') = (AA'C)$, luego $x + 2z = x + 2y$, por lo que $y = z$. Como también $(CBB') = (B'BA)$, tenemos que $x = z$, por tanto $x = y = z$.

Proposición 1. Un punto M dentro de un triángulo ABC tiene la propiedad de que $(ABM) = (ACM)$ si y solo si M se encuentra en la mediana AA'.

Demostración. Sea A'' el punto donde la recta por A y M corta a BC.



Supongamos que se cumple la igualdad de áreas $(ABM) = (ACM)$. Como los triángulos ABM y ACM tienen a AM como base común, las alturas desde B y C sobre AM son iguales. Además, como MA'' es común a los triángulos $A''BM$ y $A''MC$, tenemos que sus áreas $(BA''M)$ y $(A''CM)$ son iguales, por lo que $BA'' = A''C$, de donde se sigue que A'' es punto medio de BC. Luego, M se encuentra en la mediana AA'.
El recíproco se sigue de que $(BA'M) = (A'MC)$ y $(BA'A) = (A'AC)$. $\square$

Corolario 2. Un punto M dentro de un triángulo ABC tiene la propiedad de que

[3]Como siempre, usaremos la notación (ABC) para denotar el área del triángulo ABC.

la razón de las distancias a los lados AB y AC es inversamente proporcional a las longitudes de los lados AB y AC, si y solo si M está en la mediana AA'.

Demostración. Si la distancia de M al lado AB es m y la distancia de M al lado AC es n, tenemos que M está en la mediana AA' si y solo si $(ABM) = (ACM)$, esto es, si y solo si $mAB = nAC$, lo cual ocurre si y solo si $\frac{m}{n} = \frac{AC}{AB}$. □

Ejercicio 1. Demostrar que el centroide G es el único punto dentro de ABC que tiene la propiedad de que los triángulos BCG, CAG y ABG tienen la misma área.

Ejercicio 2. Encuentra todos los puntos P en el plano del triángulo ABC que cumplan:
(i) Las áreas de los triángulos ABP y CAP son iguales (recuerde que los puntos de la mediana AA' lo cumplen).
(ii) las áreas de los triángulos ABP, BCP y CAP son iguales.

Proposición 3. Si se tienen puntos M en el lado BC del triángulo ABC, P en el lado AB y Q en el lado AC de modo que AM, CP y BQ concurren, muestre que M es el punto medio de BC si y solo si PQ es paralela a BC.

Demostración. Como tenemos tres cevianas que concurren, el teorema de Ceva, garantiza que,

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$

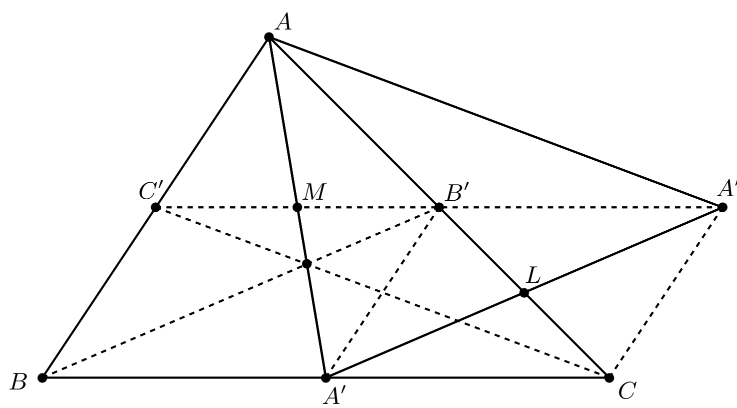
Si M es el punto medio de BC, se cumple que $\frac{BM}{MC} = 1$, de donde $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$, por lo que $\frac{AP}{PB} = \frac{QA}{CQ}$. Luego, por el teorema de Tales se sigue que PQ es paralela a BC. Ahora, si tenemos que PQ paralela a BC, por el teorema de Tales tendemos que $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$. Al dividir la ecuación que nos da Ceva entre esta última, concluimos que $\frac{BM}{MC} = 1$, es decir, M es el punto medio de BC. □

Proposición 4. Los puntos L, M y N, están respectivamente en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, de manera que AL, BM y CN son concurrentes en un punto P. Se tiene que $\frac{AP}{PL} = \frac{BP}{PM} = \frac{CP}{PN}$ si y solo si P es el centroide del triángulo ABC.

Demostración. Notemos que $\frac{BP}{PM} = \frac{CP}{PN}$ garantiza que los triángulos BPC y MPN son semejantes, luego MN y BC son paralelas. Análogamente, NL y CA son paralelas al igual que LM y AB. Luego, $BLMN$ y $MNLC$ son paralelogramos por lo que $BL = MN = LC$ y entonces L es el punto medio de BC. Análogamente, M y N son los puntos medios de CA y AB, por lo que P es el centroide del triángulo ABC. □

Entre los problemas típicos de la geometría del triángulo, se encuentran los que se refieren a construir un triángulo con regla y compás, cuando tres elementos del triángulo están dados. Por ejemplo, si nos dan tres números positivos, ¿se puede construir un triángulo de manera que las longitudes de las medianas sean iguales a los tres números dados?

Para contestar esta pregunta, haremos la construcción siguiente en un triángulo ABC. Prolongamos la recta que une los puntos medios C' y B' hasta un punto A'' de manera que $A''B' = B'C' = \frac{1}{2}BC$. Resulta entonces que $BA'A''B'$ es un paralelogramo, por lo que $A'A'' = BB'$. Como también $A'CA''B'$ es un paralelogramo, tenemos que $A''C = A'B' = \frac{1}{2}AB$. Luego, $AC' = A''C = \frac{1}{2}AB$ y son paralelas por lo que $AC'CA''$ es otro paralelogramo y entonces $AA'' = CC'$. Todo lo anterior se puede resumir diciendo que $AA'A''$ es un triángulo donde sus lados AA', $A'A''$ y $A''A$ son iguales a las medianas del triángulo ABC.



Ahora podemos hacer la siguiente observación: como $A'CA''B'$ es un paralelogramo, sus diagonales se bisecan, esto es, L el punto de intersección de las diagonales $B'C$ y $A'A''$ es punto medio de estas. Por tanto AL es mediana del triángulo $AA'A''$.
También por ser $AC'A'B'$ un paralelogramo, M la intersección de las diagonales AA' y $B'C'$ es punto medio de ellas y, por tanto, $A''M$ es mediana del triángulo $AA'A''$.
Como AL y $A''M$ se cortan en B', resulta que B' es el centroide del triángulo $AA'A''$.
En resumen tenemos que, si tres números m_a, m_b y m_c, representan las longitudes de los lados de un triángulo, entonces puede formarse otro triángulo ABC cuyas medianas tengan longitudes m_a, m_b y m_c. Las longitudes de los lados del triángulo ABC se pueden obtener al multiplicar por $\frac{4}{3}$ las longitudes de las medianas del triángulo de lados m_a, m_b y m_c, ya que hemos observado que $AL = \frac{3}{4}b$.

Algo que también se puede calcular de manera sencilla, es el área del triángulo $AA'A''$. Es fácil ver que si h_a es la altura sobre el lado a del triángulo ABC, el área del triángulo $AA'A''$ es

$$(AA'A'') = \frac{1}{2}A''M \cdot h_a = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}BC\right)h_a = \frac{3}{4}\left(\frac{a \cdot h_a}{2}\right) = \frac{3}{4}(ABC).$$

Ejemplo 1. Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo ABC y m_a, m_b y m_c son las longitudes de sus medianas, demostrar que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

Solución. En la figura anterior observemos que $m_a = AA' < AB' + B'A' = \frac{1}{2}(b+c)$. De manera análoga, tenemos que $m_b < \frac{1}{2}(c+a)$ y $m_c < \frac{1}{2}(a+b)$. Luego,

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c.$$

Ahora, en el triángulo $AA'A''$ podemos aplicar esta última desigualdad y concluir que

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c.$$

Es común encontrar en la geometría, problemas que requieren conocer las longitudes de elementos de un triángulo, de modo que es necesario saber calcular ciertos valores a partir de los datos que proporciona el problema. Por ejemplo, pueden deducirse fácilmente los valores de las longitudes de las medianas en términos de las longitudes de los lados. La deducción se sustenta en la ley del paralelogramo.[4]
Aplicando esta ley al paralelogramo $AC'A'B'$ obtenemos que

$$m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{2}.$$

Luego, la longitud de la mediana m_a cumple que $m_a^2 = \frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

Ejercicio 3. Si dos medianas de un triángulo son iguales, demostrar que el triángulo es isósceles.

Ejercicio 4. En un triángulo ABC, demostrar que $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

Ejercicio 5. Si G es el centroide del triángulo ABC, demostrar que

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Ejemplo 2. Sean ABC un triángulo con $c > b$, y m_b, m_c las medianas desde los vértices B y C, respectivamente. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b).$$

Solución. Las longitudes de las medianas del triángulo ABC satisfacen que

$$\begin{aligned} 4m_b^2 + b^2 &= 2(c^2+a^2), \\ 4m_c^2 + c^2 &= 2(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$m_b^2 - m_c^2 = \frac{2(c^2+a^2) - b^2 - 2(a^2+b^2) + c^2}{4} = \frac{3}{4}(c^2-b^2).$$

[4]**Ley del paralelogramo.** *En un paralelogramo de lados a, b y diagonales x, y, se tiene que* $x^2 + y^2 = 2(a^2+b^2)$.

Luego,

$$(m_b + m_c)(m_b - m_c) = \frac{3(c+b)}{2} \cdot \frac{(c-b)}{2},$$

por lo que[5]

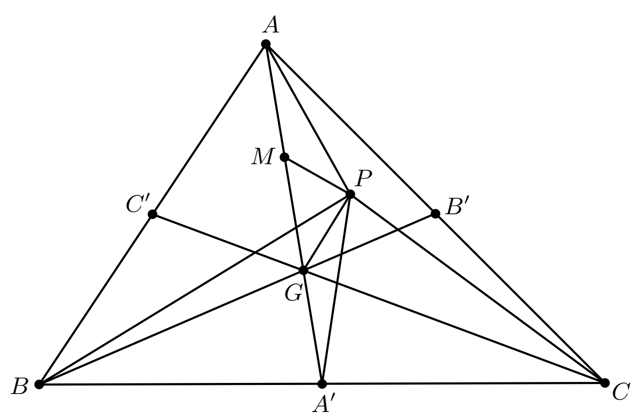
$$\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c \Leftrightarrow m_b + m_c < \frac{3(b+c)}{2},$$

donde la última desigualdad se sigue de aplicar la desigualdad del triángulo a los triángulos ABB' y CAC', que garantiza respectivamente que $m_b < \frac{1}{2}b + c$ y $m_c < \frac{1}{2}c + b$,, de donde, $m_b + m_b < \frac{3}{2}(b+c)$.
La desigualdad $m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b)$, se sigue de aplicar la primera desigualdad, $\frac{1}{2}(c-b) < m_b - m_c$, al triángulo de lados m_a, m_b, m_c. Recordemos que en este triángulo las medianas tienen longitudes $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$ y $\frac{3}{4}c$, respectivamente. Además si $c > b$ tenemos que $m_b > m_c$ y entonces, $\frac{1}{2}(m_b - m_c) < \frac{3}{4}c - \frac{3}{4}b$, de donde, $m_b - m_c < \frac{3}{2}(c-b)$.

Ejemplo 3. Si P es un punto del plano del triángulo ABC y G es su centroide, entonces $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

Solución. Sea M el punto medio de AG. Para los triángulos PBC, PAG y PMA', tenemos que PA', PM y PG son las respectivas medianas desde P, por lo que

$$2(PA')^2 = BP^2 + CP^2 - \frac{1}{2}BC^2,$$
$$2(PM)^2 = AP^2 + PG^2 - \frac{1}{2}AG^2,$$
$$2(PG)^2 = PM^2 + PA'^2 - \frac{1}{2}MA'^2.$$



[5]Para la conclusión utilizamos el siguiente resultado.
Lema. Si a, b, c, d son números positivos con $ab = cd$, entonces $a < c$ si y solo si $b > d$.
Demostración. Supongamos que $a < c$ y que $b \leq d$, entonces al multiplicar estas desigualdades de números positivos tenemos que $ab < cd$, lo que es una contradicción. El recíproco es análogo.

Como $MA' = \frac{2}{3}AA' = AG$, tenemos de la última ecuación que

$$4PG^2 = 2PM^2 + 2PA'^2 - AG^2.$$

De esta última igualdad y las dos primeras identidades, resulta que

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}AG^2 + \frac{1}{2}BC^2.$$

De manera similar se pueden obtener las siguientes dos igualdades

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}BG^2 + \frac{1}{2}CA^2,$$
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2 = \frac{3}{2}CG^2 + \frac{1}{2}AB^2.$$

Al sumar las tres identidades anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned}3(PA^2 + PB^2 + PC^2 - 3PG^2) &= \frac{3}{2}\left(AG^2 + BG^2 + CG^2\right) + \frac{1}{2}(BC^2 + CA^2 + AB^2)\\ &= 3(AG^2 + BG^2 + CG^2),\end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad del Ejercicio 5: $3(AG^2+BG^2+CG^2) = a^2+b^2+c^2$.
Por lo tanto, $PA^2 + PB^2 + PC^2 = AG^2 + BG^2 + CG^2 + 3PG^2$.

Ejemplo 4. Sean ABC un triángulo con centroide G, M un punto en AB y N un punto en AC. Demostrar que la recta MN pasa por G si y solo si

$$(AMN) = (BMN) + (CMN).$$

Solución. Sean X, Y, Z, los pies de las perpendiculares desde A, B, C, respectivamente, a la recta MN. Notemos que $(AMN) = \frac{MN \cdot AX}{2}$, $(BMN) = \frac{MN \cdot BY}{2}$ y $(CMN) = \frac{MN \cdot CZ}{2}$.
Luego, tenemos que $(AMN) = (BMN) + (CMN)$ si y solo si $AX = BY + CZ$.
Bastará probar que MN pasa por G si y solo si $AX = BY + CZ$.
Sea P el pie de la perpendicular desde el punto medio D de BC a la recta MN.
Como BY, PD, CZ son paralelas y D es el punto medio de BC, podemos concluir que $PD = \frac{BY+CZ}{2}$. Ahora, si MN pasa por G, tenemos que

$$2 = \frac{AG}{GD} = \frac{AX}{PD} = \frac{AX}{\frac{BY+CZ}{2}},$$

esto es, $AX = BY + CZ$.
Ahora, si $AX = BY + CZ$ y S es la intersección de AD con MN, tenemos que

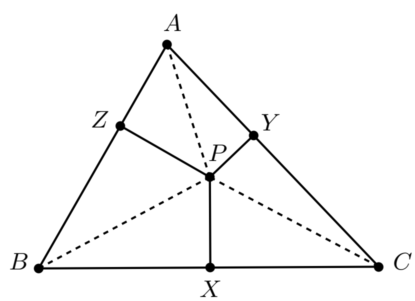
$$2 = \frac{BY + CZ}{\frac{BY+CZ}{2}} = \frac{AX}{PD} = \frac{AS}{SD},$$

por lo que $AS = 2SD$. Finalmente, como AD es mediana y el único punto que corta a la mediana en razón 2 a 1 es el centroide, se sigue que $S = G$.

Ejercicio 6. En un triángulo ABC, con centroide G, circuncentro O y circunradio R, demostrar que
$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{9}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Ejemplo 5. Demostrar que el punto en el interior del triángulo ABC que maximiza el producto de las distancias a los lados BC, CA y AB, es el centroide G.

Solución. Sea $f(P)$ el producto de las distancias de un punto P a los lados del triángulo ABC. Queremos encontrar P tal que $f(P)$ sea máximo. Sean X, Y, Z los pies de las perpendiculares desde P a BC, CA y AB, respectivamente.

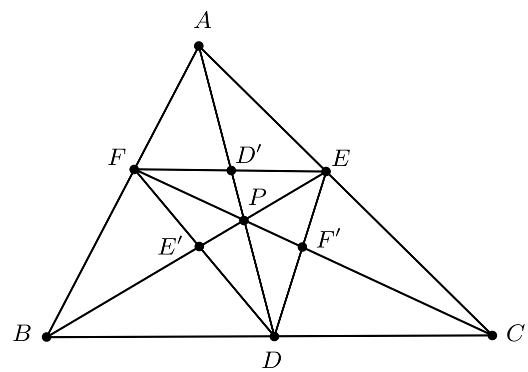


Notemos que
$$abc \cdot f(P) = (a \cdot PX)(b \cdot PY)(c \cdot PZ).$$
Por la desigualdad MA-MG, tenemos que,
$$\sqrt[3]{(a \cdot PX)(b \cdot PY)(c \cdot PZ)} \leq \frac{(a \cdot PX) + (b \cdot PY) + (c \cdot PZ)}{3}.$$
Por lo tanto,
$$f(P) \leq \frac{((a \cdot PX) + (b \cdot PY) + (c \cdot PZ))^3}{27abc}.$$
Como la igualdad se da cuando se da la igualdad entre la media aritmética y la media geométrica, concluimos que para maximizar $f(P)$, debe suceder que $a \cdot PX = b \cdot PY = c \cdot PZ$. Notemos que $a \cdot PX$ es dos veces el área del triángulo BCP, con lo que llegamos a que el punto P con el que $f(P)$ se maximiza cumple que las áreas de los triángulos BCP, CAP y ABP son iguales. Pero el Ejercicio 1 nos dice que el único punto que cumple esto es el gravicentro, luego $P = G$.

Ejemplo 6. Para un punto P dentro de un triángulo ABC, se consideran los triángulos cevianos DEF partiendo del triángulo ABC y $D'E'F'$ partiendo del triángulo DEF. Demostrar que las cantidades
$$f(P) = \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF}, \quad g(P) = \frac{DP}{PD'} + \frac{EP}{PE'} + \frac{FP}{PF'},$$

alcanzan su valor mínimo en el mismo punto P.

Solución. Demostraremos que $f(P)$ es mínimo cuando $P = G$. Sean x, y, z las áreas de los triángulos BCP, CAP, ABP, respectivamente. Como los triángulos CAP y CPD tienen misma altura respcto a C, la razón entre sus áreas es $\frac{AP}{PD}$. Análogamente, la razón entre las áreas de los triángulos ABP y BPD es $\frac{AP}{PD}$, con lo que podemos concluir que $\frac{AP}{PD} = \frac{y+z}{x}$.



De forma análoga obtenemos que $\frac{BP}{PE} = \frac{z+x}{y}$ y $\frac{PC}{PF} = \frac{x+y}{z}$.
Luego,

$$f(P) = \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}.$$

Por la desigualdad MA-MG tenemos que

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \geq 6,$$

con la igualdad si y solo si los seis sumandos son iguales, lo que implica que $x = y = z$. Pero sabemos que el único punto que cumple esto es G, el gravicentro del triángulo ABC. Análogamente, vemos que $g(P)$ alcanza su mínimo cuando P es el gravicentro del triángulo DEF. Como en un triángulo su gravicentro coincide con el gravicentro de su triángulo medial, concluimos que ambas funciones alcanzan su mínimo en el mismo punto P, el gravicentro común de los triángulos ABC y DEF.

Ejemplo 7. Sea ABC un triángulo con gravicentro G. Demostrar que el triángulo pedal[6] de G tiene lados proporcionales a $a \cdot m_a$, $b \cdot m_b$ y $c \cdot m_c$.

Solución. Sean $\alpha = \angle BAC$ y D, E, F los pies de las perpendiculares desde G a BC, CA y AB, respectivamente. Por la ley de senos en el triángulo AFE, tenemos que $\frac{FE}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r$, donde r es el radio de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. Notemos que como $AFGE$ tiene $\angle GFA = \angle AEG = 90°$, entonces es cíclico y su

[6]Si ABC es un triángulo y P es un punto del plano de ABC, el *triángulo pedal* de P es el triángulo cuyos vértices son los pies de las perpendiculares desde P hacia los lados del triángulo ABC.

circunferencia circunscrita tiene diámetro AG. Como G corta a las medianas en razón 2 a 1, $AG = \frac{2}{3}m_a$. Con esto tenemos que

$$\frac{FE}{\operatorname{sen}\alpha} = 2r = AG = \frac{2}{3}m_a.$$

Luego, $FE = \frac{2\cdot\operatorname{sen}\alpha\cdot m_a}{3}$.
Por otro lado, por la ley de senos en el triángulo ABC, $\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$, donde R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Entonces, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$ y sustituyendo esto en la ecuación previa, tenemos que $FE = \frac{2\cdot a\cdot m_a}{3\cdot 2R} = \frac{am_a}{3R}$.
De manera análoga se llega a que $FD = \frac{bm_b}{3R}$ y $DE = \frac{cm_c}{3R}$.
Así, el triángulo pedal de G tiene lados proporcionales a $a\cdot m_a$, $b\cdot m_b$ y $c\cdot m_c$.

Ejercicios

1) Sean P y Q tales que $PG = GQ$, donde G es el centroide de ABC. Demuestra que $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AQ^2 + BQ^2 + CQ^2$.

2) Si N es el punto medio de la mediana AA' del triángulo ABC y BN interseca a CA en M, muestra que $AM = \frac{1}{3}AC$.

3) Si A', B' y C' son los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, muestra que el centroide del triángulo $A'B'C'$ coincide con el del triángulo ABC.

4) Demuestra que la longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{AB+CA-BC}{2}$.

5) La longitud m_a de la mediana AA' de un triángulo ABC cumple que $m_a > \frac{1}{2}BC$. Muestra que $\angle BAC < 90°$.

6) Si AA' es una mediana del triángulo ABC y si $AB < AC$, demuestra que $\angle BAA' > \angle A'AC$.

7) Demuestra que los centroides de los cuatro triángulos determinados por los vértices de un cuadrilátero, al tomarse de tres en tres, forman un cuadrilátero semejante al cuadrilátero dado.

8) Demuestra que los tres segmentos que unen puntos medios de aristas opuestas de un tetraedro, son concurrentes.

9) Sean L, M y N los pies de las perpendiculares desde el centroide del triángulo ABC a los lados BC, CA y AB. Demuestra que $(LMN) = \frac{4(ABC)^3(a^2+b^2+c^2)}{9a^2b^2c^2}$.

10) Para cada punto M del plano del triángulo ABC, sea $E(M) = MA^2 + MB^2 + MC^2$. Muestra que $E(M)$ alcanza un mínimo en el centroide $M = G$ del triángulo ABC y expresa $E(G)$ en términos de los lados del triángulo ABC.

11) Si G, H, O, I son el centroide, ortocentro, circuncentro e incentro de un triángulo ABC, respectivamente, demuestra que este es equilátero si alguna de las siguientes igualdades es cierta:
(a) $G = H$. (b) $G = O$. (c) $G = I$.

12) (Hungría, 1997). Sean R el circunradio, H el ortocentro y G el centroide de un triángulo ABC. Sea F el punto medio de GH. Muestra que $AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3R^2$.

13) ¿En qué punto P del plano, donde se encuentra el triángulo ABC, se tiene que la suma, $AP^2 + BP^2 + CP^2$, es mínima?

14) Sean a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y sean m_a, m_b y m_c las longitudes de las medianas y R el circunradio. Muestra que
(a) $\frac{a^2+b^2}{m_c} + \frac{b^2+c^2}{m_a} + \frac{c^2+a^2}{m_b} \leq 12R$.
(b) $m_a(bc - a^2) + m_b(ca - b^2) + m_c(ab - c^2) \geq 0$.

15) (a) Encuentra el lugar geométrico del centroide G cuando A recorre el circuncírculo del triángulo ABC.

(b) Encuentra el lugar geométrico del centroide de un triángulo ABC, cuando A, B, C se mueven sobre una misma circunferencia.

(c) Encuentra el lugar geométrico del ortocentro de un triángulo ABC, cuando A, B, C se mueven sobre una misma circunferencia.

16) Las medianas de un triángulo ABC, dividen a este en seis triángulos. Muestra que los centroides de los seis triángulos forman un hexágono de lados paralelos a los lados del triángulo ABC.

Bibliografía

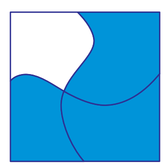
1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

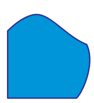
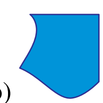
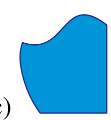
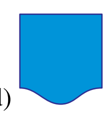
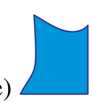
2) H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.

Problemas de práctica

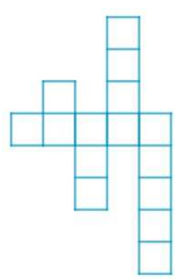
A continuación presentamos los problemas de los exámenes de invitación a la OMM del año 2019. Los problemas del 1 al 12 conformaron la versión A del examen; los problemas del 13 al 21 formaron parte de la versión B del examen (junto con algunos problemas de la versión A) y los problemas del 22 al 28 formaron parte de la versión C del examen (junto con algunos problemas de las versiones A y B).

Problema 1. ¿Cuál es la pieza que completa el cuadrado?



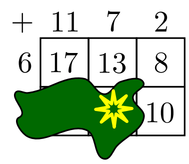
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 2. Cada cuadrado de la siguiente figura tiene área 1 cm^2. ¿Cuál es el perímetro de la figura?



(a) 15 cm (b) 30 cm (c) 32 cm (d) 42 cm (e) 60 cm

Problema 3. La figura muestra una tabla de sumas (de números que están arriba de la tabla con números a la izquierda). A la tabla se le cayó tinta encima. ¿Qué número debe ir en lugar de la estrella?



(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 15

Problema 4. ¿Cuántos valores diferentes puede tener el dígito de las unidades del número que resulta de multiplicar dos números enteros consecutivos?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

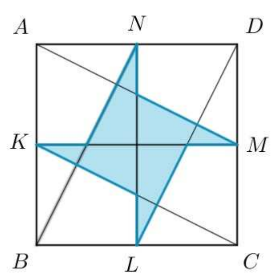
Problema 5. En una escuela de verano, 7 niños comen helado cada día, 9 niños comen helado un día sí y uno no. Los demás niños no comen helado. Ayer, 13 niños comieron helado. ¿Cuántos niños comerán helado hoy?

(a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10 (e) No se puede determinar

Problema 6. ¿Cuál es la suma de los dígitos del producto $\underbrace{111\ldots11}_{2019}\times 1001$?

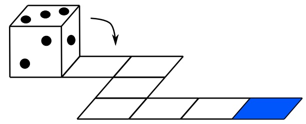
(a) 2019 (b) 2020 (c) 2021 (d) 4038 (e) 6057

Problema 7. El cuadrado $ABCD$ es de lado 4 cm y los puntos K, L, M y N son los puntos medios de los lados. ¿Cuál es el valor del área de la estrella sombreada?



(a) 2 cm^2 (b) 3 cm^2 (c) 4 cm^2 (d) 5 cm^2 (e) 6 cm^2

Problema 8. La suma de los puntos en caras opuestas de un dado siempre es 7. El dado que se muestra en la figura gira sobre el camino de cuadros hasta llegar al cuadro sombreado. Al principio su cara superior muestra 3 puntos. ¿Cuántos puntos muestra la cara superior al final?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

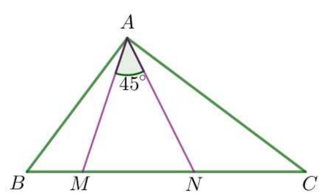
Problema 9. A la fiesta de Pablo, cada persona invitada que llegaba saludaba a Pablo y a las personas que ya estaban en la fiesta, solamente hubo una persona que cuando llegó no saludó a los que ya estaban (tampoco a Pablo), pero si lo saludaron los invitados que llegaron después de él. En la fiesta se contaron 48 saludos. ¿Cuántos invitados asistieron a la fiesta de Pablo y en qué lugar llegó la persona que no saludó al entrar?

(a) $11, 8°$ (b) $11, 7°$ (c) $10, 9°$ (d) $10, 8°$ (e) $10, 7°$

Problema 10. ¿Cuántas parejas de números enteros (m, n) satisfacen la ecuación $mn = m + n$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 11. En la siguiente figura, se cumple que $\angle MAN = 45°$, $BA = BN$ y $CA = CM$. ¿Cuánto mide el ángulo $\angle BAC$?



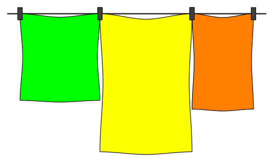
(a) $55°$ (b) $60°$ (c) $75°$ (d) $90°$ (e) $108°$

Problema 12. ¿Cuál es la máxima suma de todos los números que pueden colocarse en los cuadritos de una cuadrícula de 5×5, si solo pueden escribirse números 0 y números 1 y además debe cumplirse la siguiente condición: *En cada cuadrado de* 2×2 *de la cuadrícula debe haber exactamente* 3 *números iguales*? (En la siguiente figura se da un ejemplo en el que la condición se cumple y la suma es 12).

0	1	0	0	1
1	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	0	1	1
1	0	1	1	0

(a) 22 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

Problema 13. Usando la menor cantidad posible de pinzas, el Sr. Rodríguez quiere tender las toallas que lavó. Para 3 toallas necesita 4 pinzas, como se muestra en la figura.



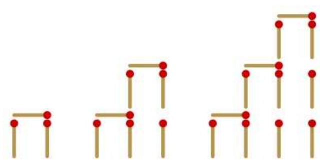
¿Cuántas pinzas necesita para tender 9 toallas?

(a) 9 (b) 10 (c) 12 (d) 16 (e) 18

Problema 14. Raquel sumó algunos números y obtuvo 1234, pero se equivocó y sumó 201 en lugar de 102. ¿Cuál es el resultado correcto?

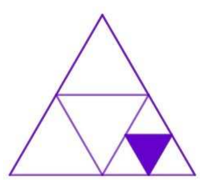
(a) 893 (b) 995 (c) 1103 (d) 1105 (e) 1135

Problema 15. Las siguientes tres figuras se formaron con 3, 7 y 12 cerillos, respectivamente. ¿Cuántos cerillos se necesitan agregar a la novena figura para formar la décima?



(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Problema 16. En la siguiente figura todos los triángulos son equiláteros. Si el triángulo mayor tiene área 16 m^2, ¿cuál es el área del triángulo sombreado?

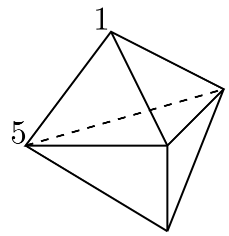


(a) 1 m^2 (b) 2 m^2 (c) 3 m^2 (d) 4 m^2 (e) 6 m^2

Problema 17. ¿Cuántos ceros deberá tener el número $100\ldots01$ para que el número $(111111)\times(100\ldots01)$, sea un número con puros dígitos iguales a 1?
Por ejemplo, 101 no sirve ya que $(111111)\times(101) = 1122211$.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) Más de 6

Problema 18. La figura muestra un sólido formado por 6 caras triangulares.



En cada vértice hay un número. Para cada cara, consideramos la suma de los tres vértices de esa cara. Si todas las sumas son iguales y dos de los números son 1 y 5 como se muestra, ¿cuál es la suma de los 5 números que hay en los vértices?

(a) 9 (b) 12 (c) 17 (d) 18 (e) 24

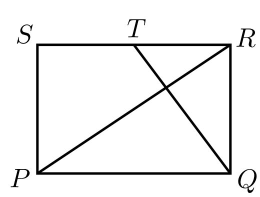
Problema 19. ¿Cuántos números hay de la forma $m^2 + n^2$, con m y n enteros positivos, que sean múltiplos de 3 y menores que 100?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 20. ¿Cuántos enteros positivos de tres dígitos cumplen que el dígito de las unidades divide al número formado con los dígitos de las centenas y de las decenas? Por ejemplo, uno de tales números es 213 ya que 3 divide a 21.

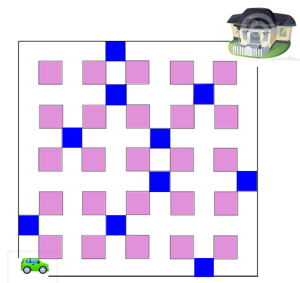
(a) 40 (b) 98 (c) 180 (d) 254 (e) 320

Problema 21. Considera $PQRS$ un rectángulo, donde T el punto medio de RS satisface que QT es perpendicular a la diagonal PR. ¿Cuál es el valor de $\frac{QR}{PQ}$?



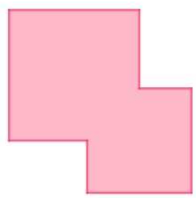
(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{4}{5}$

Problema 22. El coche irá por el camino blanco hasta la casa sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuántas veces dará vuelta a la izquierda?



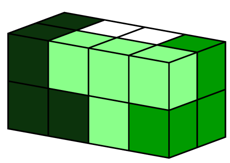
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

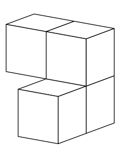
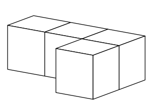
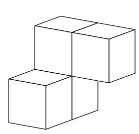
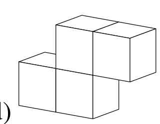
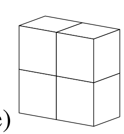
Problema 23. La siguiente figura se formó con dos cuadrados, uno de lado 5 cm y otro de lado 4 cm. Además, un vértice del cuadrado grande coincide con el centro de cuadrado pequeño. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



(a) 41 cm^2 (b) 40 cm^2 (c) 37 cm^2 (d) 36 cm^2 (e) 29 cm^2

Problema 24. Un bloque de 16 cubos está formado por 4 piezas de 4 cubos cada una: Una negra, una gris oscuro, una gris claro y una blanca, como se ve en la figura. ¿Qué forma tiene la pieza blanca?

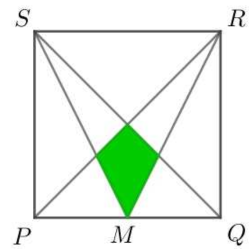


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 25. Emilio y su mamá tienen edades que usan los mismos dos dígitos. Si la diferencia de edades es 27 años y Emilio es menor de edad, ¿cuál es la edad de Emilio?

(a) 25 años (b) 21 años (c) 18 años (d) 14 años (e) 12 años

Problema 26. En la figura, $PQRS$ es un cuadrado y M es el punto medio de PQ.



Si el área del cuadrado es k veces el área sombreada, ¿cuál es el valor de k?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 16

Problema 27. Considera todos los números de tres dígitos que usan solamente las cifras 2, 3 y 4, sin repetir alguna de ellas. ¿Cuál es el promedio de tales números?

(a) 324 (b) 333 (c) 342 (d) 444 (e) 666

Problema 28. Sean a y b números reales distintos de cero tales que $(a+1)(b-1) = -1$. ¿Cuál es el valor de $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$?

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$ (e) 2

Soluciones a los problemas de práctica

Solución del problema 1. La respuesta es (b).

Solución del problema 2. La respuesta es (c). La longitud del lado de cada cuadrado es 1 cm. Lados izquierdos de cuadrados hay $1+1+2+3+4=11$, lados superiores de cuadrados hay 5, lados derechos hay $1+2+3+5=11$ y lados inferiores hay 5. Luego, el perímetro de la figura es $11+5+11+5=32$ cm.

Solución del problema 3. La respuesta es (e). Para obtener 10 (abajo a la derecha), lo que hay que sumar a 2 es 8. De esta manera vemos que lo que va en la estrella es 15, pues es el resultado de sumar 8 a 7.

Solución del problema 4. La respuesta es (c). El dígito de las unidades del producto de dos enteros consecutivos, solamente depende del dígito de las unidades de los números enteros que se multiplican. Como $0\times 1=0$, $1\times 2=2$, $2\times 3=6$, $3\times 4=12$, $4\times 5=20$, $5\times 6=30$, $6\times 7=42$, $7\times 8=56$ y $8\times 9=72$, solo son posibles 0, 2 y 6.

Solución del problema 5. La respuesta es (d). Como ayer 13 niños comieron helado y 7 niños siempre lo comen, entonces hubo 6 que comieron helado de los que solo comen un día sí y otro no. A los otros 3 les toca hoy, así que en total hoy comerán helado 10 niños.

Solución del problema 6. La respuesta es (d). Tenemos que

$$\begin{aligned}\underbrace{111\cdots 11}_{2019}\times 1001 &= \underbrace{111\cdots 11}_{2019}\times 1000+\underbrace{111\cdots 11}_{2019}=\underbrace{111\cdots 11}_{2019}000+\underbrace{111\cdots 11}_{2019}\\ &= 111\underbrace{222\cdots 22}_{2016}111.\end{aligned}$$

Entonces, la suma de los dígitos del producto $\underbrace{111\ldots11}_{2019}\times 1001$ es $2016\times 2+6=4038$.

Solución del problema 7. La respuesta es (c). El área de cada triángulo rectángulo es $\frac{2\times 1}{2}=1$ cm^2. Luego, la estrella sombreada tiene área 4 cm^2.

Solución del problema 8. La respuesta es (e). Los números sucesivos en la cara superior son: 3, 6, 4, 5, 3, 1, 4 y, finalmente, 6.

Solución del problema 9. La respuesta es (e). Si todos saludan, la primera persona al llegar saluda a Pablo, la segunda saluda a dos, la tercera a tres, etcétera. Los números de saludos son: $1, 1+2, 1+2+3, \ldots$; esto es, $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, \ldots$ Como hubo 48 saludos, llegaron 10 o más personas. Como $55-48=7$, entonces la séptima persona no saludó y asistieron 10. Observemos que si asisten más de 10, la diferencia del número de saludos (si saluda a todos) menos 48 es mayor o igual al número de asistentes.

Solución del problema 10. La respuesta es (c). La ecuación es equivalente a la ecuación $mn-m-n+1=(m-1)(n-1)=1$ que tiene por soluciones a $m=n=2$ y $m=n=0$.

Solución del problema 11. La respuesta es (d). Si $x=\angle BAM$, $y=\angle NAC$, tenemos, por ser isósceles el triángulo ABN, que $\angle B=180^\circ-2(45^\circ+x)=90^\circ-2x$ y también por ser isósceles el triángulo AMC, que $C=180^\circ-2(45^\circ+y)=90^\circ-2y$. Luego, por un lado tenemos que $\angle BAC=45^\circ+x+y$ y, por otro lado, tenemos que $\angle BAC=180^\circ-\angle A-\angle B=2x+2y$. Igualando estas expresiones obtenemos que $x+y=45^\circ$, de donde se sigue que $\angle BAC=90^\circ$.

Solución del problema 12. La respuesta es (b). Forzosamente en cada una de las subcuadrículas de 2×2 de las esquinas, debe haber al menos un 0, así que la máxima suma es menor o igual que 21. En la siguiente figura vemos que sí es posible lograr 21.

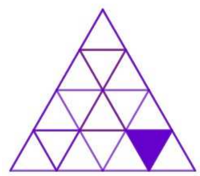
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Solución del problema 13. La respuesta es (b). Podemos pensar que primero ponemos una pinza a la izquierda y, después, por cada toalla se agrega una pinza más. Por lo tanto, el Sr. Rodríguez necesita $1+9=10$ pinzas.

Solución del problema 14. La respuesta es (e). Como $201-102=99$, el nuevo resultado es $1234-99=1135$.

Solución del problema 15. La respuesta es (d). Para pasar de una figura a la siguiente, se necesitan agregar primero dos cerillos: Uno vertical en la orilla de la figura que se agranda y otro horizontal. Después se agregan tantos cerillos como la altura de la nueva figura. En este caso, son necesarios en total 12 cerillos más.

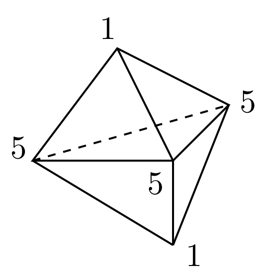
Solución del problema 16. La respuesta es (a). Basta observar que el triángulo mayor se puede dividir en 16 triángulos congruentes al triángulo sombreado, como se muestra en la siguiente figura.



Por lo tanto, el área del triángulo sombreado es $\frac{16}{16} = 1$ m^2.

Solución del problema 17. La respuesta es (c). Con 3 o 4 ceros no es posible ya que se obtienen los números 1111221111 y 11111211111, respectivamente. Con 5 ceros sí es posible, ya que se obtiene el número 111111111111. Con 6 o más ceros no es posible, ya que se obtienen números de la forma $1111110\ldots0111111$.

Solución del problema 18. La respuesta es (c). Dos caras comparten la arista que tiene los vértices numerados con 1 y 5, así que los otros dos vértices de esas caras deben tener el mismo número, digamos a. Ahora nos fijamos en el vértice inferior de la figura. Este forma parte de tres triángulos y los otros extremos de estos son a y 5, o a y a, de donde tenemos que $a = 5$ y, de aquí, el vértice inferior tiene el mismo número que el superior (es decir, 1). La suma de todos es $1 + 5 + 5 + 5 + 1 = 17$.

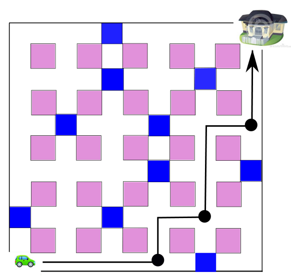


Solución del problema 19. La respuesta es (c). Los cuadrados menores que 100 son $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$. Estos, al dividirse entre 3 dejan residuo 0 o 1 (de hecho, todo cuadrado al dividirse entre 3 deja residuo 0 o 1). Luego, la suma de dos cuadrados es múltiplo de 3 solamente si ambos números son múltiplos de 3. Por lo tanto, las únicas soluciones son $3^2 + 3^2 = 18$, $3^2 + 6^2 = 45$, $3^2 + 9^2 = 90$ y $6^2 + 6^2 = 72$.

Solución del problema 20. La respuesta es (d). Para cada dígito a (diferente de cero) hay que contar cuántos números de dos dígitos son divisibles entre a. Para $a = 1$, hay 90 números, ya que el dígito de las decenas no puede ser cero y todo entero es divisible entre 1. Para $a = 2$, hay 45 números que son los múltiplos de 2. Si $a = 3$, hay 30 múltiplos de 3. Si $a = 4$, hay 22. Si $a = 5$, hay 18. Si $a = 6$, hay 15. Si $a = 7$, hay 13. Si $a = 8$, hay 11. Si $a = 9$, hay 10. En total hay 254 números.

Solución del problema 21. La respuesta es (d). Llamemos O a la intersección de TQ y RP. Como los triángulos OQR y RPQ son rectángulos, tenemos que $\angle TQR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle RPQ = 90°$, de donde $\angle TQR = \angle RPQ$. Por lo anterior, como TQR y PRQ son triángulos rectángulos, resultan ser triángulos semejantes, así que $\frac{QR}{PQ} = \frac{TR}{QR} = \frac{PQ}{2QR}$, lo que implica que $\left(\frac{QR}{PQ}\right)^2 = \frac{1}{2}$, esto es, $\frac{QR}{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución del problema 22. La respuesta es (c). Recorrerá el camino marcado. Se han puesto círculos donde da vuelta a la izquierda.



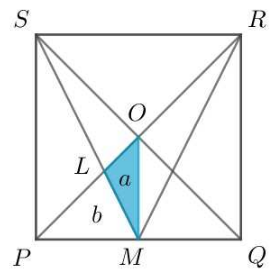
Solución del problema 23. La respuesta es (c). Las áreas de los cuadrados son 25 cm^2 y 16 cm^2. La parte común es un cuadrado de lado 2 cm. Luego, el área de la región sombreada es $25 + 16 - 4 = 37$ cm^2.

Solución del problema 24. La respuesta es (d). De la figura blanca que falta, se ven dos cubos, los otros dos deben estar atrás y abajo junto a los dos cubos de la figura gris oscuro.

Solución del problema 25. La respuesta es (d). Si ab y ba son las edades de la Mamá y de Emilio, entonces $27 = ab - ba = (10a + b) - (10b + a) = (a - b)9$, por lo que $a - b = 3$. Luego, las edades posibles (Mamá, Emilio) son $(96, 69)$, $(85, 58)$, $(74, 47)$, $(63, 36)$, $(52, 25)$ y $(41, 14)$. Como Emilio tiene menos de 18 años por ser menor de edad, él tiene 14 años.
Otra forma. Como Emilio es menor de edad, su edad solamente puede estar entre 11 y 18 años, ahora sumando a cada uno de estos números 27, se puede verificar que 14 es el único número que cumple las condiciones.

Solución del problema 26. La respuesta es (d). Sean O y L las intersecciones de la diagonal PR con SQ y SM, respectivamente. Supongamos que el lado del cuadrado mide 2. Si $a = (OLM)$ y $b = (LPM)$, tenemos que,

$$\frac{OL}{LP} = \frac{a}{b} = \frac{(SOM)}{(SPM)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$



Luego, $2a = b$. Como $a + b = (OPM) = \frac{1}{2}$, se tiene que $a + 2a = \frac{1}{2}$, por lo que $a = \frac{1}{6}$ y, por lo tanto, el área sombreada es $\frac{1}{3}$. Ahora como $k \cdot \frac{1}{3} = 4$, es inmediato que $k = 12$.

Solución del problema 27. La respuesta es (b). Con los dígitos 2, 3 y 4, solamente se pueden formar seis números: $234, 243, 324, 342, 423, 432$. Su promedio es

$$\frac{234 + 243 + 324 + 342 + 423 + 432}{6}.$$

Para simplificar esta fracción, usaremos el truco de Gauss.

$$\begin{array}{rr} & 234 + 243 + 324 + 342 + 423 + 432 \\ + & 432 + 423 + 342 + 324 + 243 + 234 \\ \hline & 666 + 666 + 666 + 666 + 666 + 666 \end{array}$$

Por lo tanto, el promedio es $\frac{\frac{1}{2}(6\times 666)}{6} = 333$.

Solución del problema 28. La respuesta es (e). La relación $(a + 1)(b - 1) = -1$ es equivalente a la relación $ab = a - b$, por lo que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a - b)^2}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2.$$

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2020 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. ¿Cuántos números de 9 dígitos que son una permutación de 123456789 son múltiplos de 11?

Problema 2. Decimos que un entero n es *perfecto* si la suma de todos sus divisores positivos (incluyendo a 1 y a n) es igual a $2n$. Encuentra todos los enteros perfectos n tales que $n-1$ y $n+1$ son primos.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sean P y Q las intersecciones de AB con CD y de AD con BC, respectivamente, y X, Y, Z los puntos medios de AC, BD y PQ, respectivamente. Demuestra que X, Y, Z son colineales.

Problema 4. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002,$$

para todo entero positivo n, donde $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los enteros positivos.

Problema 5. Los enteros del 1 al 2014 están escritos en un pizarrón. Una operación válida es borrar dos números a y b que están escritos en el pizarrón y escribir en su lugar $\text{mcm}(a,b)$ y $\text{mcd}(a,b)$. Muestra que después de cualquier cantidad de operaciones válidas, la suma de los números escritos en el pizarrón es mayor que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$.

Problema 6. Para cada número entero $m > 1$, sea $p(m)$ el menor divisor primo de m. Si a y b son enteros mayores que 1 tales que $a^2 + b = p(a) + (p(b))^2$, demuestra que $a = b$.

Problema 7. Considera una región poligonal regular de n lados ($n \geq 3$). Demuestra que es posible dividir dicha región en n regiones poligonales de igual área, de tal forma que cada una de ellas tenga n lados. (Las regiones poligonales no son necesariamente convexas).

Problema 8. Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{10}$ puntos en el espacio, algunos de ellos están unidos por segmentos que no se intersecan. Un escarabajo que está en el punto P_1 se puede trasladar al punto P_{10} pasando por algunos de los segmentos. Demuestra que al menos una de las siguientes dos condiciones es verdadera:

a) El escarabajo puede ir de P_1 a P_{10} pasando como máximo por dos puntos del conjunto $\{P_2, P_3, \ldots, P_9\}$.

b) Existen dos puntos P_i y P_j, con $2 \leq i < j \leq 9$, tales que cualquier camino del escarabajo que une P_1 con P_{10} pasa por el punto P_i o por el punto P_j.

Problema 9. Demuestra que existen infinitas ternas (x, y, z) de números reales que satisfacen las ecuaciones $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$, tales que x, y, z son distintos dos a dos.

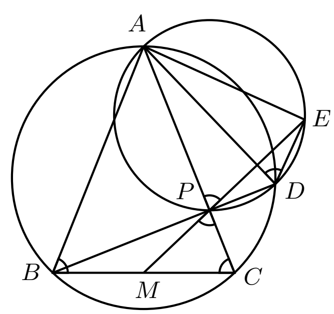
Problema 10. En el congreso se forman 3 comisiones disjuntas de 100 congresistas cada una. Cada pareja de congresistas se conocen o no se conocen entre sí. Demuestra que hay dos congresistas, de comisiones distintas, tales que la tercera comisión contiene 17 congresistas que conocen a ambos, o 17 congresistas que no conocen a ninguno de ellos.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2019 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2019. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a Guillermo Courtade Morales, a Milton Adolfo Lozano Arroyo, a Adrián Jesús Peña Reséndiz, a Yeison Emilio Gómez Noreña y a Luis Francisco Medina Quintero por haber enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2019, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo isósceles con $AB = AC$. Sea P el pie de la altura desde B sobre AC. Se prolonga BP hasta intersecar a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en D. Sea E un punto en la prolongación de CD por D tal que el cuadrilátero $APDE$ es cíclico. Sea M la intersección de EP con BC. Demuestra que M es el punto medio de BC.

Solución de Adrián Jesús Peña Reséndiz. Como $AB = AC$, el triángulo ABC es isósceles. Sea $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Como D es el punto de intersección de BP con el circuncírculo del triángulo ABC, tenemos que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y $\angle ADE = \angle ABC = \alpha$.



Por otro lado, al ser cíclico el cuadrilátero $APDE$, tenemos también que $\angle ADE = \angle APE = \alpha$ y $\angle MPC = \angle APE - \alpha$ por ser ángulos opuestos por el vértice. En el triángulo MPC tenemos que $\angle ACB = \angle PCM = \angle MPC = \alpha$, de donde se sigue que el triángulo MPC es isósceles y de aquí que $MP = MC$. Además, al ser BP altura, resulta que $\angle BPC - 90^\circ$ y $\angle BPM = \angle BPC - \angle MPC = 90^\circ - \alpha$. Finalmente, tenemos que

$$\angle PBC = 180^\circ - \angle BPC - \angle PCM = 90^\circ - \alpha = \angle BPM,$$

de donde se sigue que el triángulo BPM es isósceles y $MB = MP = MC$, esto es, M es el punto medio de BC.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales y Milton Adolfo Lozano Arroyo.

Problema 2. Sea a, b, c, d una permutación de los dígitos de 2017 y sea

$$A = abcdabcd\ldots abcd$$

un número de $4n$ dígitos.
Determina el menor entero positivo n para el cual existe un número A que sea divisible entre todos los enteros del 1 al 12.

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Para que A sea divisible por todos los enteros del 1 al 12, basta que sea divisible entre $5, 7, 8, 9$ y 11. Está claro que para que 5 divida a A, la única posibilidad es $d = 0$. Además, como $a+b+c+d = 1+7+2+0 \equiv 1 \pmod 9$, será necesario tener un múltiplo de 9 bloques $abcd$ para que A sea divisible por 9, según el criterio de divisibilidad por 9, esto es, n debe ser múltiplo de 9. Si 8 divide a A, entonces el número formado por sus últimos tres dígitos debe ser divisible por 8. Las posibilidades son 120 y 720, esto es, las posibilidades para el bloque $abcd$ son 7120 y 1720. Ahora, para que A sea divisible por 11, el criterio de divisibilidad por 11 nos dice que la suma de sus dígitos en posición impar menos la suma de sus dígitos en posición par, debe ser divisible por 11, esto es, $n(a+c)-n(b+d)$ debe ser múltiplo de 11. Como $a+c-b-d = -4$ (si el bloque $abcd$ es 1720) o 8 (si el bloque $abcd$ es 7120), se sigue que $n(a+c-b-d) = -4n$ o $8n$. Por lo tanto, n debe ser múltiplo de 11 y, como n es múltiplo de 9, concluimos que n es múltiplo de 99.
Por otro lado, observemos que el número $m = 712071207120$ es divisible entre 7. Por lo tanto, el número $m + 10^{12}m + 10^{12(2)}m + \cdots + 10^{12(32)}m$ también lo es. En total, estamos repitiendo 33 veces el número m formado por 3 bloques $abcd$. Es decir, si $n = 99$, A es múltiplo de 7. Como además A es múltiplo de $5, 8, 9$ y 11, la respuesta es $n = 99$.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales.

Problema 3. ¿Cuántas parejas (a, b) de números enteros consecutivos entre 1000 y 2000 tienen la propiedad de que en la suma $a + b$ hay acarreo? Por ejemplo, en la suma $9 + 15$ hay acarreo, pues al sumar las unidades se lleva un 1 a sumar con las decenas.

Solución. Veamos que 1999 y su consecutivo no usan acarreo. Además, los números de la forma $1x99$ y sus consecutivos tampoco llevan acarreo si $x = 0, 1, 2, 3$ o 4. De manera similar, los números de la forma $1xy9$ y sus consecutivos no llevan acarreo si ambos $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Por último, los números de la forma $1xyz$ y sus consecutivos tampoco llevan acarreo si todos $x, y, z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tenemos entonces $1 + 5 + 5^2 + 5^3 = 156$ parejas que no llevan acarreo de las 1000 parejas posibles. Por lo tanto, hay $1000 - 156 = 844$ parejas donde sí hay acarreo.

Problema 4. Calcula la suma de todos los números reales x tales que

$$\lfloor\lfloor\cdots\lfloor\lfloor\lfloor x\rfloor + x\rfloor\cdots\rfloor + x\rfloor = 2017 \ \text{ y } \ \{\{\cdots\{\{x\} + x\}\cdots\} + x\} = \frac{1}{2017},$$

donde x aparece 2017 veces en cada expresión.
(Nota: $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$, donde $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución. Es fácil demostrar por inducción en n que

$$\underbrace{\lfloor\lfloor\cdots\lfloor\lfloor\lfloor x\rfloor+x\rfloor\cdots\rfloor+x\rfloor}_{n}=n\lfloor x\rfloor,$$

$$\underbrace{\{\{\cdots\{\{x\}+x\}\cdots\}+x\}}_{n}=\{nx\}.$$

Luego, la primera condición implica que $2017\lfloor x\rfloor = 2017$, de donde $\lfloor x\rfloor = 1$ y, por lo tanto, $x = 1 + r$ con $0 \leq r < 1$. La segunda condición implica que $\{2017x\} = \frac{1}{2017}$. Luego, $2017 + 2017r$ tiene parte fracionaria igual a $\frac{1}{2017}$ y, como 2017 es entero, tenemos que $\{2017r\} = \frac{1}{2017}$. Esto implica que $2017r = n + \frac{1}{2017}$ con n un entero, esto es, $r = \frac{n}{2017} + \frac{1}{2017^2}$. Como $0 \leq r < 1$ se sigue que $n = 0, 1, \ldots, 2016$. Luego $x = 1 + \frac{1}{2017^2} + \frac{n}{2017}$, con n variando entre $0, 1, \ldots, 2016$. Por lo tanto, la suma de estos números es

$$2017+\frac{2017}{2017^2}+\frac{\frac{2017\cdot 2016}{2}}{2017}=3025+\frac{1}{2017}.$$

Problema 5. Determina el número de funciones $f : \{1, 2, \ldots, 9\} \to \{1, 2, \ldots, 9\}$ que satisfacen $f(f(f(f(f(x))))) = x$ para cada x en $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$.

Solución. Demostraremos que la función f es biyectiva. Sea y un elemento arbitrario del contradominio $\{1, 2, \ldots, 9\}$ de f. Es claro que $f(x) = y$, donde $x = f(f(f(f(y))))$, esto es, f es suprayectiva. Supongamos ahora que $f(a) = f(b)$. Entonces,

$$a = f(f(f(f(f(a))))) = f(f(f(f(f(b))))) = b,$$

lo que significa que f es inyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva, esto es, f es una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$. Luego, f es producto de ciclos. Además, la condición del problema dice que todo elemento del conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$ tiene orden un divisor de 5 en los ciclos. Como 5 es primo, esto nos dice que todo elemento tiene orden 1 o 5. Si todos tienen orden 1 entonces f es la función identidad. Si hay elementos de orden 5 solo puede haber un ciclo (pues solo hay 9 elementos en el conjunto), entonces en este caso hay $\binom{9}{5} \cdot 4!$ funciones. Luego, la respuesta es $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 1 = 3025$.

Problema 6. Sean a y b enteros positivos tales que $\lfloor\sqrt{ab}\rfloor = \lfloor\sqrt{a}\rfloor \cdot \lfloor\sqrt{b}\rfloor$. Demuestra que por lo menos uno de los dos enteros debe ser un cuadrado.
(Nota: $\lfloor x\rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Solución de Yeison Emilio Gómez Noreña. Razonemos por reducción al absurdo, suponiendo que ni a ni b son cuadrados. Entonces, existen enteros positivos m y n tales que $m^2 < a < (m+1)^2$ y $n^2 < b < (n+1)^2$, esto es, $a = m^2 + r_1$ y $b = n^2 + r_2$ donde $1 \leq r_1 < 2m + 1$ y $1 \leq r_2 < 2n + 1$. De lo anterior se sigue que $ab = m^2n^2 + r_2m^2 + r_1n^2 + r_1r_2$. Luego, tenemos que $ab > m^2n^2 + m^2 + n^2 + 1$. Además, por la desigualdad MA-MG tenemos que $m^2 + n^2 > 2mn$. Por lo tanto, $ab > m^2n^2 + m^2 + n^2 + 1 > m^2n^2 + 2mn + 1 = (mn+1)^2$, esto es, $\sqrt{ab} > mn + 1$,

lo cual implica que $\lfloor\sqrt{ab}\rfloor \geq mn + 1$.
Por otra parte, tenemos que $m < \sqrt{a} < m + 1$ y $n < \sqrt{b} < n + 1$, lo que significa que $\lfloor\sqrt{a}\rfloor = m$ y $\lfloor\sqrt{b}\rfloor = n$. Así, $\lfloor\sqrt{a}\rfloor \cdot \lfloor\sqrt{b}\rfloor = mn$. Luego $\lfloor\sqrt{a}\rfloor \cdot \lfloor\sqrt{b}\rfloor < \lfloor\sqrt{ab}\rfloor$, lo que es un absurdo. Se concluye que por lo menos uno de los dos enteros es un cuadrado.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales.

Problema 7. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los números enteros positivos. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $m^2 + f(n)$ divide a $mf(m) + n$ para todos los enteros positivos m y n.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Al evaluar la condición del problema con $m = 2$ y $n = 2$, obtenemos que $(4 + f(2))a = 2f(2) + 2$, donde a es un entero. Además, $a \neq 2$ ya que de lo contrario tendríamos que $2(4 + f(2)) = 2f(2) + 2$, esto es, $8 = 2$, que es una contradicción. Entonces podemos despejar, $f(2) = \frac{4a-2}{2-a}$, donde $2 - a \neq 0$ y, como debe ser un entero positivo, $\frac{4a-2}{2-a} > 0$. Aquí hay dos posibilidades:

a) $2 - a < 0$ y $4a - 2 < 0$, esto es, $a > 2$ y $a < \frac{1}{2}$, que no es posible.

b) $2 - a > 0$ y $4a - 2 > 0$, esto es, $a < 2$ y $a > \frac{1}{2}$. Como el único entero entre $\frac{1}{2}$ y 2 es 1, tenemos que $a = 1$, lo cual implica que $f(2) = 2$.

Ahora podemos hacer inducción para probar que $f(k) = k$ para todo $k > 1$, teniendo como caso base $k = 2$. Entonces, para $m = k$ y $n = k+1$ obtenemos que $a(k^2+f(k+1) = kf(k) + k + 1$, donde a es un entero y, por hipótesis de inducción, $f(k) = k$, por lo que $ak^2 + f(k + 1)a = k^2 + k + 1$, esto es, $f(k + 1) = \frac{k^2+k+1-ak^2}{a}$ (a no puede ser 0 ya que $kf(k) + k + 1 > 0$). Como $f(k + 1) > 0$, tenemos dos casos.

a) $a < 0$ y $k^2 + k + 1 - ak^2 < 0$, esto es, $a < 0$ y $a > 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$, lo que no es posible pues k es positivo.

b) $a > 0$ y $k^2 + k + 1 - ak^2 > 0$, esto es, $a > 0$ y $a < 1 + \frac{k+1}{k^2}$. Notemos que $k^2 > k + 1$ cuando $k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pues

$$k^2 - k > 1 \Rightarrow \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 > 5/4 \Rightarrow k - \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y, ya que $k > 2$, tenemos que $\frac{k+1}{k^2} < 1$, lo cual implica que $a < 2$. Como el único entero entre 0 y 2 es 1, se sigue que $a = 1$ y $f(k + 1) = k + 1$.

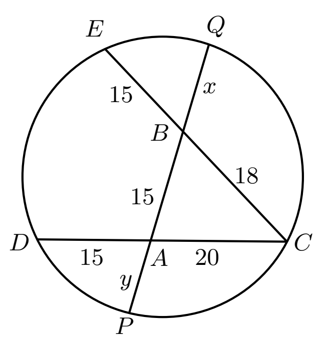
Con lo que termina nuestra inducción. Únicamente resta encontrar el valor de $f(1)$. Poniendo $m = 2$ y $n = 1$ obtenemos que $(f(1) + 4)a = 5$ con a entero. Luego, $f(1) = \frac{5-4a}{a} > 0$ ($a \neq 0$ pues $5 \neq 0$). El caso $a < 0$ y $5 - 4a < 0$ no es posible, por lo que $a > 0$ y $5 - 4a > 0$. De aquí que $a < \frac{5}{4}$ y, por lo tanto, $a = 1$, de donde $f(1) = 1$. Concluimos entonces que $f(n) = n$ para todo entero positivo n es la única solución y es fácil verificar que tal función cumple.

Solución de Adrián Jesús Peña Reséndiz. Primeramente, de $m = 2$ y $n = 2$, tenemos que $4+f(2)$ divide a $2f(2)+2$. Por otro lado, $4+f(2)$ divide a $2(4+f(2)) = 8+2f(2)$.

Luego, $4+f(2)$ divide a la diferencia, es decir, $4+f(2)$ divide a 6, de donde $4+f(2) = 1, 2, 3$ o 6. Como $f(2) > 0$, la única posibilidad es $4 + f(2) = 6$, de donde $f(2) = 2$. Ahora, de $m = 2$ tenemos que $4 + f(n)$ divide a $2f(2) + n$, lo cual implica que $4 + f(n)$ divide a $4 + n$ y, por lo tanto, $4 + f(n) \leq 4 + n$, esto es, $f(n) \leq n$. Finalmente, de $m = n$ tenemos que $n^2 + f(n)$ divide a $nf(n) + n$, lo cual implica que $n^2 + f(n) \leq nf(n) + n$, esto es, $n(n-1) \leq f(n)(n-1)$ y, por lo tanto, $n \leq f(n)$ para $n > 1$. Claramente, si $n = 1$, también se tiene que $n \leq f(n)$. Entonces, para todo entero positivo n tenemos que $n \leq f(n) \leq n$, esto es, $f(n) = n$ y claramente $m^2 + f(n) = m^2 + n$ divide a $m^2 + n = mf(m) + n$. Por lo tanto, la única solución es $f(n) = n$ para todo entero positivo n.
Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo.

Problema 8. El triángulo ABC tiene longitudes de sus lados $AB = 15$ cm, $BC = 18$ cm y $CA = 20$ cm. Considera las prolongaciones de los lados CA (por A) y CB (por B) hasta D y E, respectivamente, tales que $DA = AB = BE$. La recta AB interseca el circuncírculo del triángulo CDE en P y Q. Determina la longitud de PQ.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Sin pérdida de generalidad, supongamos que P está más cerca de A que de B. Sean $QB = x$ y $AP = y$. Por potencia del punto B con respecto al circuncírculo del triángulo CDE, tenemos que $EB \cdot BC = QB \cdot BP$, esto es, $270 = 15(18) = x(AB + AP) = x(15 + y)$, de donde se sigue que $x = \frac{270}{15+y}$. Ahora, por potencia del punto A con respecto al circuncírculo del triángulo CDE, tenemos que $DA \cdot AC = QA \cdot AP$, esto es, $300 = 15(20) = y(AB + QB) = y(15 + x)$.



Luego, tenemos que

$$300 = y\left(15 + \frac{270}{15+y}\right),$$

esto es, $y^2 + 13y - 300 = 0$. Factorizando, obtenemos que $(y - 12)(y + 25) = 0$, de donde la única solución positiva es $y = 12$. Por lo tanto, $x = \frac{270}{15+12} = 10$. Así, concluimos que $PQ = QB + BA + AP = 10 + 15 + 12 = 37$ cm.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales, Adrián Jesús Peña Reséndiz y Milton Adolfo Lozano Arroyo.

Problema 9. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros tal que $P(0)+P(90)=2018$. Determina el valor mínimo de $|P(20)+P(70)|$.

Solución. Primero notemos que el polinomio $P(x)=x^2-3041$ satisface la condición y $|P(20)+P(70)|=782$. Demostraremos que este es el mínimo. Para ello demostraremos que 2800 divide a $P(90)-P(20)-P(70)+P(0)$ para cada P. Esto nos diría que $P(20)+P(70)\equiv 2018 \pmod{2800}$, pero el único residuo que cumple esto en el intervalo $[-782,782]$ es -782.
Basta mostrar que para todo entero no negativo n, 2800 divide a $90^n-70^n-20^n+0^n$ (con la suposición de que $0^0=1$). Sea $Q(n)=90^n-70^n-20^n+0^n$. Tenemos que $Q(0)=Q(1)=0$, $Q(2)=2800$ y $Q(3)=(9^3-7^3-2^3)10^3=378000=135\cdot 2800$. Para cada $n\geq 4$, notemos que 400 divide a 10^4 y que $90^n\equiv 70^n+20^n \pmod{7}$. Por lo tanto, $2800\mid Q(n)$ para todo entero no negativo n.
Este problema fue resuelto por Guillermo Courtade Morales.

Problema 10. Determina todas las parejas (a,b) de enteros positivos tales que $a^{2017}+b$ es múltiplo de ab.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Notemos que si $ab\mid a^{2017}+b$, entonces en particular $a\mid b$, luego $b=ab_1$ para algún entero positivo b_1. Sustituyendo obtenemos que ab_1 divide a $a^{2016}+b_1$. De forma similar, obtenemos que $a\mid b_1$, luego $b_1=ab_2$ para algún entero positivo b_2. Continuando de esta forma, obtenemos que $b=a^{2017}b_{2017}$ para algún entero positivo b_{2017}. Sustituyendo obtenemos que ab_{2017} divide a $b_{2017}+1$, lo cual implica que $ab_{2017}\leq b_{2017}+1$. Pero, si $a\geq 3$, entonces $ab_{2017}>b_{2017}+1$. Luego, $a=1$ o $a=2$.
Si $a=1$, entonces b_{2017} divide a $b_{2017}+1$, de donde $b_{2017}=1$, lo cual da la solución $(1,1)$.
Si $a=2$, entonces $2b$ divide a $b+2^{2017}$, de donde $b\mid 2^{2017}$, luego $b=2^k$ para algún entero k menor o igual que 2017. Sustituyendo una última vez se tiene que 2 divide a $1+2^{2017-k}$, lo cual solo puede pasar si $k=2017$, de donde obtenemos la solución $(2,2^{2017})$.
Este problema también fue resuelto por Adrián Jesús Peña Reséndiz.

3^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 14 al 17 de junio de 2019 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 3^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB), en Oaxtepec, Morelos. Participaron 270 estudiantes de primaria y secundaria, representando a 31 entidades federativas del país. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2020 en algún país del sureste asiático.

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones, de los Niveles II y III de la 3^a OMMEB.

Nombre	Estado	Medalla	Nivel
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México	Oro	II
Tiago Ian Vargas Rivera	Yucatán	Oro	II
Franco Giosef Álvarez González	Chiapas	Oro	II
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro	II
Valeria Yhelenna Oviedo Valle	Morelos	Oro	II
Dayana Ximena Meza Arellano	Zacatecas	Oro	II
Fernando Álvarez Ruiz	Nuevo León	Oro	II
Rogelio Guerrero Reyes	Aguascalientes	Plata	II
Daniel Flores Gómez	Jalisco	Plata	II
Carlos Eduardo Seck Tuoh Cabrera	Hidalgo	Plata	II
Luis Enrique López Hernández	Hidalgo	Plata	II
Emilio Estrada Pérez	Estado de México	Plata	II
Bastian Alejandro López Vásquez	Oaxaca	Plata	II
José Carlos Velazco Escobar	Sinaloa	Plata	II
Said Huizar Dorantes	Guanajuato	Plata	II
Sebastián Escalante Rubio	Yucatán	Plata	II
Ever Juárez Quiñones	Tlaxcala	Plata	II
Saúl Nájera Ávila	Coahuila	Plata	II
Alejandra Muñoz Espin	Morelos	Plata	II
Daniel Ramírez Kuhn	San Luis Potosí	Plata	II
Jacobo	Yucatán	Oro	III
Luis Eduardo Martínez Aguirre	Nuevo León	Oro	III
José Manuel Flores Absalón	Ciudad de México	Oro	III
Omar Farid Astudillo Marbán	Guerrero	Oro	III
David García Maldonado	Oaxaca	Oro	III
Carlos Fernando Amador Mtz. Quintero	Ciudad de México	Oro	III
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México	Oro	III
Cynthia Naely López Estrada	Guanajuato	Plata	III
Victor Manuel Bernal Ramírez	Sinaloa	Plata	III
Alier Sánchez y Sánchez	Quintana Roo	Plata	III
Karol Anette Lozano González	Tlaxcala	Plata	III
José Rafael Gutiérrez Suárez	Colima	Plata	III
Alejandro Oxymandias Cepeda Beltrán	Estado de México	Plata	III
Diego Ocaranza Nuñez	Jalisco	Plata	III
Dariam Samuel Aguilar García	Baja California	Plata	III
Juan Braulio Olivares Rodríguez	Guanajuato	Plata	III
Aylin Ximena Ocampo Vera	Guerrero	Plata	III
Enrique Rabell Talamantes	Querétaro	Plata	III
Valentina Acosta Bueno	San Luis Potosí	Plata	III
Andrea Escalona Contreras	Morelos	Plata	III
Diana Andrea González Díaz	Chiapas	Plata	III
José David Fragoso Aquino	Tamaulipas	Plata	III

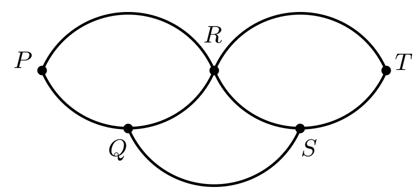
En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Chiapas obtuvo el primer lugar

(con 222 puntos), el Estado de Hidalgo obtuvo el segundo lugar (con 175 puntos) y el Estado de Aguascalientes obtuvo el tercer lugar (con 170 puntos).
En la prueba por equipos en el Nivel III, el Estado de Yucatán obtuvo el primer lugar (con 280 puntos), el Estado de Guanajuato obtuvo el segundo lugar (con 271 puntos) y el Estado de Oaxaca obtuvo el tercer lugar (con 260 puntos).

Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Cinco ciudades se comunican con un sistema de carreteras como se muestra en el dibujo. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir una persona que quiere ir de P a T, siempre con dirección a la derecha?



2) En una dulcería hay una máquina expendedora de dulces que tiene dos botones y un recipiente. Después de insertar una moneda puedes apretar un solo botón, el botón A deja caer 16 dulces en el recipiente y el botón B deja caer en el recipiente el $50\,\%$ de los dulces que hay en el recipiente. Si el recipiente al inicio está vacío, ¿cuál es la mayor cantidad de dulces que se pueden obtener con 5 monedas?

3) Los vértices de un triángulo ABC están en una circunferencia de manera que las medidas de los arcos $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$ son, respectivamente, $x + 75°$, $2x + 50°$ y $4x - 10°$. Encuentra las medidas, en grados, de los ángulos internos del triángulo ABC.
Nota. El arco $\widehat{AB}$ es el que no contiene al vértice C, análogamente $\widehat{BC}$ y $\widehat{CA}$, no contienen a A y B, respectivamente.

4) Benito compró comida para sus 4 gatos, con la idea de que le alcanzará para 12 días. En el camino se encontró otros dos gatos que los llevó a su casa. ¿Cuántos días le durará la comida ahora con los 6 gatos?

5) Encuentra la suma de los dos números capicúas más cercanos a 2019. Recuerda que un número capicúa es aquel que sus dígitos (cifras) se leen de la misma manera de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, por ejemplo 1221 y 212 son capicúas.

6) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

7) Eugenio tiene 4 borregos y una báscula que solo le permite pesar borregos en parejas (esto es, de dos en dos). ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que Eugenio debe usar la báscula para conocer el peso de cada uno de sus borregos?

8) Cuatro amigos intercambian sus libros de olimpiada. Cada amigo tiene un libro para regalar a otro amigo, y recibirá un libro de un amigo diferente al que él regaló, (es decir, dos amigos no se intercambian libros). ¿De cuántas maneras se pueden intercambiar los libros?

9) Sea $\mathcal{K}$ una circunferencia con diámetro AB y centro O. Sea C un punto de $\mathcal{K}$ tal que $\angle ABC = 60°$. Sea D un punto del arco $\widehat{CA}$ (el de menor longitud) tal que $\angle AOD = 30°$. Si BC y DO se intersecan en P, encuentra la razón del área del triángulo ADO entre el área del triángulo BPO.

10) Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras, ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero. Por ejemplo, $36 = 6^2$ *y* $49 = 7^2$ *son cuadrados perfectos.*

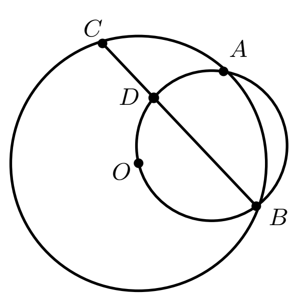
11) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el $60\,\%$ de los chicos está bailando y el $80\,\%$ de las chicas está bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

12) Sean ABC un triángulo con $AB = BC$, $\angle ABC = 90°$ y M el punto medio de AC. Se construye el triángulo equilátero ADM tal que D y B están en lados opuestos con respecto a AC. ¿Cuánto vale, en grados, el ángulo $\angle BDM$?

Parte B

1) En una bolsa hay 9 canicas, de las cuales al menos una de ellas es verde. Además, cuando sacas cualesquiera 4 canicas hay al menos 2 que son del mismo color y, cuando sacas cualesquiera 5 de ellas, hay a lo más 3 del mismo color. ¿Cuántas canicas verdes hay en la bolsa?

2) Sean C_1 una circunferencia con centro en O y C_2 una circunferencia que pasa por O y corta a C_1 en A y B. Sea C un punto en C_1 (O y C del mismo lado respecto de la recta AB) y D la intersección de BC con C_2. Muestre que el triángulo ADC es isósceles.



3) Ana escoge 4 números de entre $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Si Ana le dijera a Beto cuál es el producto de los 4 números que escogió, esta información no sería suficiente para que Beto pueda saber la paridad de la suma de los cuatro números escogidos por Ana. ¿Cuál es el producto de los cuatro números que eligió Ana?

Prueba por Equipos, Nivel II

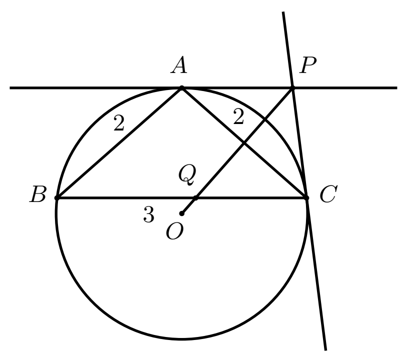
1) Un entero positivo de cuatro dígitos es *bidigital* si su expresión decimal usa solamente dos dígitos y cada uno de ellos es usado dos veces. Por ejemplo, 2020 es bidigital, mientras que 2222 y 2111 no lo son. ¿Cuántos números bidigitales hay?

2) Encuentra los enteros positivos z, para los cuales $\dfrac{5z+64}{z+2}$ es una potencia de 2.

3) Un número es *chido* si la suma de sus dígitos entre el producto de sus dígitos, sin contar el 0, es $\frac{2}{3}$. Por ejemplo, 2019 es chido porque la suma de sus dígitos es $2+1+9=12$, el producto de sus dígitos es $2\times 1\times 9 = 18$ y $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$. Encuentra el número chido más cercano a 2019 (que sea distinto de 2019).

4) ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar números de entre $0, 1, 2$, en cada uno de los cuadritos de un tablero de 5×5, de manera que cada subtablero de 2×2 cumpla que la suma de los cuatro números de sus cuadritos sea un múltiplo de 3?

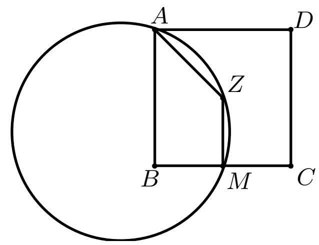
5) Sea ABC un triángulo con $AB = AC = 2$ cm y $BC = 3$ cm. Considera la circunferencia que pasa por los vértices A, B, C y digamos que su centro es O. Se trazan las tangentes a dicha circunferencia que pasan por A y por C, estas tangentes se cortan en P. El segmento PO corta a BC en Q. Calcula, en cm, la longitud de CQ.



6) ¿Cuál es el menor entero positivo que no es divisor común de alguna pareja de enteros distintos de la lista $2, 4, 6, \ldots, 200$?

7) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él. Por ejemplo, el segundo término es $9+7^2=58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

8) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



Prueba Individual, Nivel III

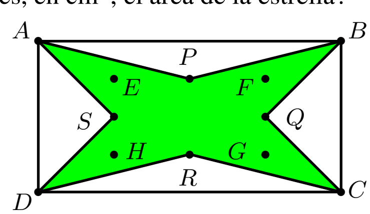
Parte A

1) Las caras de un dado tienen los números $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Lalo forma números siguiendo tres pasos: *Paso 1*. Escoge tres caras y multiplica los tres números de estas caras; *Paso 2*. Encuentra el producto de los números de las otras tres caras; *Paso 3*. El número lo forma sumando los dos resultados anteriores. ¿Cuál es el número más pequeño que puede formar Lalo de esta manera?

2) Sea $ABCDE$ un pentágono regular cuyos vértices están en una misma circunferencia y sean M y N los puntos medios de los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{BC}$. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle BMN$?

3) En una bolsa tengo dos monedas de $\$1$, tres monedas de $\$5$ y cinco monedas de $\$10$. Si saco 5 monedas de la bolsa sin reemplazo (es decir, una vez que tomo una moneda la dejo afuera) y todas las monedas tienen la misma probabilidad de ser escogidas, ¿cuál es la probabilidad de sacar por lo menos $\$40$?

4) En un rectángulo $ABCD$ de área 40 cm^2, considera a E y G, puntos en la diagonal AC de manera que $AE = 2$ cm, $EG = 6$ cm y $GC = 2$ cm. Considera también los puntos F y H en la diagonal BD, de manera que $BF = 2$ cm, $FH = 6$ cm y $HD = 2$ cm. Se construye una estrella de 4 puntas $APBQCRDSA$, de manera que P, Q, R y S son los puntos medios de los segmentos EF, FG, GH y HE, respectivamente. ¿Cuál es, en cm^2, el área de la estrella?

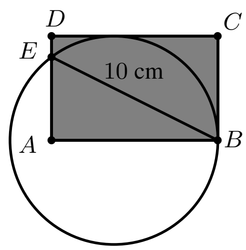


5) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el $60\,\%$ de los chicos está bailando y el $80\,\%$ de las chicas está bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?

6) Rogelio pinta los vértices de un cubo de 8 colores distintos. ¿De cuántas formas se pueden acomodar las letras de la palabra OAXTEPEC en los vértices del cubo de tal manera que no haya 2 letras E unidas por una arista?

7) Considera todos los números que se obtienen de 74477447 al reordenar sus cifras. ¿cuántos de estos números son cuadrados perfectos?
Recuerda que un número es cuadrado perfecto si es el cuadrado de un entero.

8) Encuentra, en cm^2, el área del rectángulo sombreado $ABCD$ de la siguiente figura, si se conoce que la longitud del segmento BE es de 10 cm y la circunferencia es tangente a los lados BC y CD del rectángulo.



9) ¿Cuál es la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de números que sean cuadrados perfectos?

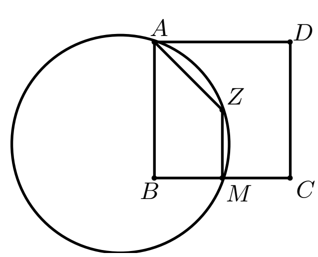
10) Para cada subconjunto de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acomoda los números en orden decreciente (de mayor a menor) y realiza la suma con signos alternados. Por ejemplo, si tomas al conjunto $\{5, 1, 2\}$ su suma alternada es $5 - 2 + 1 = 4$. ¿Cuánto vale la suma de todas las sumas alternadas cuando consideras todos los subconjuntos?

11) Un padre y su hijo cumplen años el mismo día. En tres cumpleaños diferentes, la razón entre sus edades fueron $\frac{7}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{2}{1}$. ¿Cuál es la diferencia de edades entre el padre y su hijo?

12) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado 2 y a, b, c, d números reales tales que $f(a) = 500$, $f(b) = 100$, $f(c) = 1000$, $f(d) = 2015$, $g(a) = 1519$, $g(b) = 1919$ y $g(c) = 1019$. ¿Cuánto vale $g(d)$?

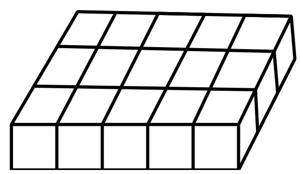
Parte B

1) Sean $ABCD$ un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, M el punto medio del lado BC y Z el centro del cuadrado. Encuentra, en cm, el radio de la circunferencia que pasa por los puntos A, M y Z.



2) Un número natural es una quinta potencia si es de la forma k^5 para algún número natural k. Demuestra que si dos números naturales n y m son tales que $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia, entonces el número $n^3 \cdot m^2$ también es una quinta potencia.

3) Hay 15 cajas, acomodadas en un arreglo rectangular de 3×5, como se muestra en el siguiente dibujo, además en cada caja hay 7 canicas.



Una *tirada* consiste en elegir dos cajas que compartan un lado y sacar 2 canicas, una de cada una de las dos cajas elegidas. ¿Cuál es el menor número de canicas que puede quedar, cuando ya no sea posible realizar una tirada?

Prueba por Equipos, Nivel III

1) Un triángulo acutángulo cumple que sus tres ángulos miden en grados un número entero y la medida del ángulo mayor es seis veces la medida del ángulo menor. Hallar las medidas, en grados, de los ángulos del triángulo.

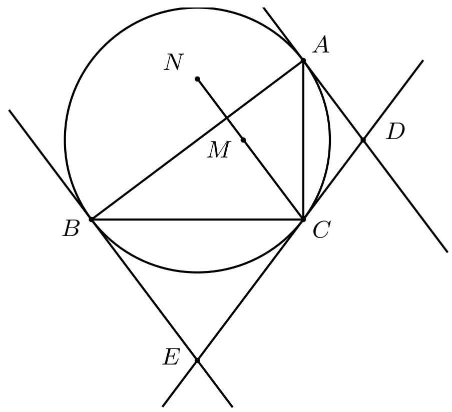
2) El primer término de una sucesión es 97. Cada término subsecuente es la suma del dígito de las decenas y el cuadrado del dígito de las unidades del término anterior a él. Por ejemplo, el segundo término es $9 + 7^2 = 58$. Encuentra el término 2019 de tal sucesión.

3) Carlos estaba jugando con los números y los acomodó de la siguiente manera.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
$$

Empezó a formar caminos uniendo los números 1-2-3-4-5-6-7 mediante segmentos de rectas horizontales o verticales en ese orden y tocando solo una vez cada número. Si continua así, ¿cuántos caminos pudo formar?

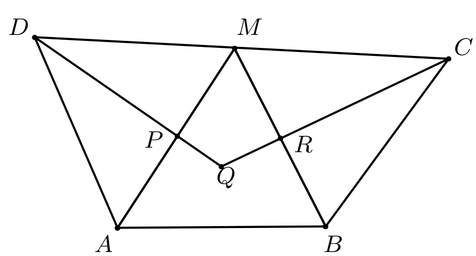
4) Sean ABC un triángulo con circuncírculo Γ, ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 las tangentes a Γ en A, B y C respectivamente. Denota por D la intersección de ℓ_1 y ℓ_3 y por E la intersección de ℓ_2 y ℓ_3. Sean M el reflejado de D con respecto a la recta AC y N el reflejado de E con respecto a la recta BC. Muestra que si M, N y C están alineados, entonces $\angle ACB = 90°$.



5) En una carrera de atletismo, los corredores A, B y C fueron los primeros en llegar a la meta. Cuando A llegó a la meta, los corredores B y C se encontraban a 2 metros y a 2.98 metros de A, respectivamente. Cuando llegó B a la meta el corredor C estaba a 1 metro de la meta. Suponga que cada una de las velocidades de los corredores son constantes durante la carrera. ¿De cuántos metros es la carrera?

6) Una *tripleta Eliana* consiste en tres números enteros positivos distintos que cumplen que la suma de dos de ellos es divisible entre el tercero de ellos. Encuentra el mayor valor que puede tener la suma de los números de una tripleta Eliana, teniendo la restricción de que el producto de sus elementos es a lo más 2019.

7) La figura $ABCD$ es un cuadrilátero. Las rectas AM, BM, CQ y DQ son bisectrices de los ángulos interiores en los vértices A, B, C y D, respectivamente y de manera que M se encuentre en DC. Sea P la intersección de AM con DQ y sea R la intersección de BM con CQ.



Si el cuadrilátero $PQRM$ es un rectángulo, encuentra el valor de $\frac{AB+CD}{BC+DA}$.

8) Muestra que no importa cómo se acomoden todos los números $1, 2, \ldots, 25$ en los cuadritos de un tablero de 5×5, siempre hay un subtablero de 2×2 que satisface que los cuatro números de este subtablero suman más de 41.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) La respuesta es 5. Para ir de P a Q hay solamente un camino. Para ir de P a R hay dos caminos, uno directo desde P y otro pasando por Q. Para ir de P a S hay tres caminos, uno que pasa por Q y dos que pasan por R. Finalmente, para ir de P a T hay cinco caminos, dos que pasan por R y tres que pasan por S.

2) La respuesta es 108. Como al inicio el recipiente está vacío, con la primera moneda y apretando el botón A se tienen 16 dulces. Con la segunda moneda, se pueden obtener otros 16 dulces o incrementar en $50\,\%$ los dulces que se tienen, pero como el $50\,\%$ de 16 es 8, es mejor apretar el botón A. Ahora hay 32 dulces en el recipiente. Con la tercera moneda podemos obtener 16 dulces o el $50\,\%$ de los 32 dulces que es 16, luego en este caso da igual qué botón apretar, al final de este paso se tendrán 48 dulces. Con la cuarta moneda, es mejor apretar el botón B ya que la máquina ahora arrojará 24 dulces que es el $50\,\%$ de los 48 que había en el recipiente, ahora se tienen 72. Con la quinta moneda de nuevo conviene apretar el botón B, que darán 36 dulces, para tener finalmente 108 dulces.

3) La respuesta es $\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$. Sabemos que $\angle C = \frac{1}{2}(x + 75°)$, $\angle A = \frac{1}{2}(2x + 50°)$ y $\angle B = \frac{1}{2}(4x - 10°)$. También sabemos que la suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. Entonces, obtenemos la ecuación

$$\frac{1}{2}(x + 75°) + \frac{1}{2}(2x + 50°) + \frac{1}{2}(4x - 10°) = 180°,$$

cuya solución es $x = 35°$. Con este valor obtenemos que las medidas de los ángulos buscados son $\angle C = 55°$, $\angle A = 60°$ y $\angle B = 65°$.

4) La respuesta es 8. Sea C la cantidad de comida que compró Benito. Cada uno de los 4 gatos come en los 12 días una cuarta parte de C. Como son 12 días, cada gato come al día la doceava parte de $\frac{C}{4}$, esto es, $\frac{C}{48}$. Como ahora tiene 6 gatos, estos comerán al día $6\frac{C}{48} = \frac{C}{8}$. Luego, la comida le durará 8 días.
Otra forma: Si Benito tuviera solamente un gato, la comida que compró le alcanzaría para 48 días. Como ahora tiene 6 gatos, le alcanzará para $\frac{48}{6} = 8$ días.

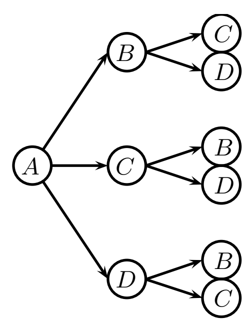
5) La respuesta es 3993. Los dos capicúas anteriores a 2019 son 2002 y 1991; y los dos posteriores son 2112 y 2222. Como $2019 - 1991 = 28$ y $2112 - 2019 = 93$, tenemos que 2002 y 1991 son los dos capicúas más cercanos a 2019 y su suma es $2002 + 1991 = 3993$.

6) La respuesta es 28. Sean p y h las edades del padre y el hijo, respectivamente. Entonces, $x = p - h$ es la diferencia que se desea encontrar. Tenemos que $\frac{p}{h} =$

$\frac{h+x}{h} = \frac{7}{3}, \frac{13}{6}, 2$ en tres momentos diferentes. Luego, para distintas edades del hijo tenemos que $\frac{x}{h_1} = \frac{4}{3}$, esto es, $3x = 4h_1$; $\frac{x}{h_2} = \frac{7}{6}$, esto es, $6x = 7h_2$; y $x = h_3$. De esto, tenemos que x es múltiplo común de 4 y 7. Por lo tanto, $x \in \{28, 56, 84, \ldots\}$. Para el caso $x \geq 56$, el padre tendría el doble de la edad del hijo en el tercer momento, por lo que tendría 112 años o más, lo cual es imposible. Por lo tanto, la única diferencia razonable es de 28 años.

7) La respuesta es 4. Veamos que usando la báscula cuatro veces es posible saber el peso de todos los borregos. Pesemos y llamemos a cada resultado como sigue: $x =$ Borrego 1 y 2, $y =$ Borrego 1 y 3, $z =$ Borrego 1 y 4, $w =$ Borrego 3 y 4. Veamos ahora que Borrego 1 $= (y + z - w)/2$ y ya teniendo este dato, Borrego 2 $= x-$Borrego 1, Borrego 3 $= y-$Borrego 1 y Borrego 4 $= z-$ Borrego 1. Ahora bien, es imposible hacerlo con tres pesadas o menos, pues tendríamos un sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas y tres o menos ecuaciones, lo cuál no siempre tiene solución única.

8) La respuesta es 6. Por las condiciones establecidas en el intercambio, tiene que suceder que los cuatro amigos formen un solo ciclo al momento de darse los libros. Luego, las maneras de acomodar a los cuatro amigos en un ciclo son $\frac{4!}{4} = 3! = 6$.
Otra forma. Si A, B, C, D son los amigos, podemos hacer el siguiente árbol, donde una flecha representa dar el libro del amigo donde sale la flecha al amigo donde llega. Iniciamos con A que puede dar a cualquiera de los otros tres y, después, cada uno de ellos solamente puede dar a los otros dos diferentes de A, el último de ellos deberá dar un libro a A.



9) La respuesta es $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sea M el punto medio del segmento PO. Como $\angle BPO = \angle OBC - \angle POB = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$, entonces el triángulo BPO es isósceles, por lo que BM es perpendicular a PO. Luego, el triángulo BOM es un triángulo rectángulo con ángulos $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, por lo que $OM = \frac{\sqrt{3}}{2}OB = \frac{\sqrt{3}}{2}R$, donde R es el radio de la circunferenca $\mathcal{K}$. Luego, $OP = \sqrt{3}R$.
Se sabe que si dos triángulos comparten un ángulo, entonces la razón de sus áreas es igual a la razón del producto de los lados adyacentes a los ángulos iguales. Esto es, $\frac{(AOD)}{(BOP)} = \frac{OA \cdot OD}{OP \cdot OB} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{3}R \cdot R}$. Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10) La respuesta es 0. El número 74477447 y cualquier otro número que resulte de reordenar sus dígitos, tiene suma de dígitos igual a $4 \times 4 + 4 \times 7 = 16 + 28 = 44$. Como todo número es congruente con la suma de sus dígitos módulo 3, el número y los que resulten de reordenar sus dígitos, son congruentes a 2 módulo 3, pues $44 \equiv 2 \pmod 3$. Pero un cuadrado perfecto es congruente con 0 o 1, módulo 3. Por lo tanto, no hay ningún cuadrado perfecto que se pueda obtener de esta manera.

11) La respuesta es 24. Por cada 4 chicas que bailan, hay una chica que no baila y, por cada 3 chicos que bailan, hay 2 chicos que no bailan. Los números posibles de parejas que bailan son múltiplos de 12. Para el primer múltiplo de 12, tenemos 12 chicas que bailan y 3 que no bailan y 12 chicos que bailan y 8 que no bailan. En este caso tenemos 12 chicas que bailan, 12 chicos que bailan y 11 personas que no bailan, la suma de estos es $12 + 12 + 11 = 35$, luego las personas que bailan son 24.
Otra forma. Sean a el número de chicos que están en la fiesta y b el número de chicas que están en la fiesta. Tenemos que $a + b = 35$. Como el $60\,\%$ de los chicos están bailando con el $80\,\%$ de las chicas, tenemos que $\frac{3}{5}a = \frac{4}{5}b$, por lo que $b = \frac{3}{4}a$. Luego $a + \frac{3}{4}a = 35$, de donde $a = 20$ y $b = 15$. Por lo tanto, hay $\frac{3}{5}20 + \frac{4}{5}15 = 24$ personas bailando.

12) La respuesta es $15°$. Como el triángulo ADM es equilátero, tenemos que $AM = DM$. Como M es punto medio de AC y $AM = DM$, tenemos que $DM = CM$, por lo que el triángulo DMC es isósceles y $\angle DCM = 30°$. Puesto que $\angle DCM = 30°$ y $\angle DAC = 60°$, resulta que $\angle ADC = 90°$, lo que significa que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y $\angle ADB = \angle ACB = 45°$. Por lo tanto, $\angle BDM = \angle ADM - \angle ADB = 60° - 45° = 15°$.
Otra forma. Como ADM es un triángulo equilátero, tenemos que $AM = MD = MC$. Luego, A, D y C están en la circunferencia de centro M y radio MA. Como ABC es un triángulo rectángulo y M es el punto medio de AC, resulta que M es el centro de la circunferencia por A, B y C. Luego, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico y concluimos como en la primera solución.

Parte B

1) Hay al menos una canica verde. Por la condición de cuando se sacan 5 hay a lo más 3 del mismo color, no pueden haber más de 3 del mismo color. Luego, hay otros dos colores de canicas digamos blanco y rojo. No puede haber un cuarto color, ya que si se sacan 4 canicas hay dos del mismo color. Luego, hay tres colores y a lo más hay 3 canicas de un color, pero como son 9 canicas, hay 3 de cada color, en particular hay 3 canicas verdes.

2) Como $\angle AOB$ es un ángulo central del ángulo inscrito $\angle ACB$, si $\angle ACB = \theta$, entonces $\angle AOB = 2\theta = \angle ADB$. Por otra parte, por ser ángulo externo del triángulo ACD, tenemos que $\angle ADB = \angle ACD + \angle DAC$. Luego,

$$\angle DAC = \angle ADB - \angle ACD = 2\theta - \theta = \theta.$$

Por lo tanto, $\angle ACD = \angle DAC = \theta$, por lo que el triángulo ADC es isósceles.

3) Notemos primero que conocer el producto de los cuatro números es equivalente a conocer el producto de los otros dos números. De los 15 productos que hay entre dos de los seis números, solamente hay dos números, el 6 y el 12, que se logran con dos diferentes parejas de números: $1 \times 6 = 2 \times 3 = 6$ y $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$. En el primer caso, la suma de los números elegidos (que son $2, 3, 4, 5$ o $1, 4, 5, 6$) es siempre par. En el segundo caso, la suma de los números elegidos puede ser impar o par (ya que $1+3+4+5 = 13$ o $1+2+5+6 = 14$), que es el caso en que Beto no sabe la paridad. Así que que el producto de los cuatro números elegidos por Ana es $1 \times 3 \times 4 \times 5$ o bien $1 \times 2 \times 5 \times 6$, pero estos dos productos son iguales a 60. Luego, el producto de los cuatro números que eligió Ana es 60.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) El primer dígito del número debe ser diferente de cero, luego tal dígito se puede elegir de 9 maneras. Una vez elegido el primer dígito, hay 3 lugares donde se puede colocar al otro dígito que sea igual al elegido. Los otros dos dígitos que serán iguales entre sí, se pueden elegir de 9 maneras, basta que sea un dígito diferente al primer dígito elegido. Luego hay $9 \times 3 \times 9 = 243$ números bidigitales.
Otra forma. Si el dígito 0 no se usa, hay $\binom{9}{2}$ maneras de elegir los dos valores de los dígitos que usa el número y hay $\binom{4}{2}$ maneras de acomodar estos dígitos en el número. Luego, hay $\binom{9}{2} \times \binom{4}{2} = \frac{72}{2} \times \frac{12}{2} = 216$ números bidigitales que no usan al cero. Si usan al 0, el primer dígito del número debe ser diferente de cero y hay 9 maneras de elegirlo y hay 3 lugares donde se puede colocar al segundo dígito que sea igual al primero; los otros dos dígitos están obligados a ser 0. Luego, en este caso hay 27 números bidigitales. En total, hay $216 + 27 = 243$ de tales números.

2) Si la fracción es un entero, el numerador debe ser par, por lo que $z = 2k$ para algún k natural. Si la expresión $\frac{10k+64}{2k+2} = \frac{5k+32}{k+1}$ es una potencia de 2, de nuevo $k = 2m$ par algún m natural. Entonces, será suficiente encontrar los números naturales m para los cuales $\frac{10m+32}{2m+1} = 5 + \frac{27}{2m+1}$ es una potencia de 2. Primero veremos para cuáles es entero. Debemos tener que $2m+1$ divide a 27, luego $m \in \{0, 1, 4, 13\}$. Como $5+3$ y $5+27$ son potencias de 2, las únicas posibilidades son $m = 4$ o 0, por lo que $z = 0$ o 16, pero solamente $z = 16$ es positivo. Por lo tanto, la única solución es $z = 16$.

3) Si queremos que la suma entre el producto de los dígitos sea $\frac{2}{3}$, entonces el producto de los dígitos debe ser $3k$ y la suma de estos $2k$, por lo que entre los dígitos debe estar al menos un múltiplo de 3 diferente de 0, esto es, un 3 un 6 o un 9 y, la suma de los dígitos debe ser par. Luego, los números cercanos a 2019 que pueden cumplir son $2006, 2013$ y después de 2019 pueden ser $2026, 2033, \ldots$. Entonces, antes de 2019 el más cercano que es chido es el 2006 (pues $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$) y después de 2019 los números 2026 y 2033 no son números chidos. Así que el número chido más cercano a 2019 es 2006.

4) Un tablero de 2×2 donde la suma de sus números es múltiplo de 3 queda determinado por tres números del tablero. En efecto si a, b y c son números de entre $0, 1, 2,$

entonces $a+b+c$ es uno de los números $0,1,2,3,4,5,6$, y cada uno de ellos se puede completar (de manera única) con $0,2,1,0,2,1,0$, respectivamente, para que la suma de los cuatro sea múltiplo de 3.
Luego el tablero de 5×5 quedará determinado por los números que se coloquen en la primera columna y en el primer renglón. Cada uno de estos 9 cuadritos puede ser ocupado por cualquiera de los tres números $0,1,2$, por lo que hay 3^9 maneras de llenar el tablero.

5) Tenemos que $PA=PC$ por ser tangentes y, $OA=OC$ por ser radios. Entonces, PO es mediatriz de AC, de donde $AQ=QC$. Luego, $\angle QAC=\angle ACB=\angle ABC$, por lo que CA es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABQ. Luego, los triángulos isósceles ABC y QCA son semejantes, por lo que $\frac{CQ}{AC}=\frac{AC}{CB}$. Por lo tanto, $CQ=\frac{AC^2}{CB}=\frac{4}{3}$.

6) Si $k\leq 50$ y k es par, los números k y $2k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Si $k\leq 50$ y k es impar, los números $2k$ y $4k$ pertenecen a la lista y tienen como divisor común a k. Luego, $k\geq 51$. Como $51\cdot 4>200$, se sigue que no hay dos números en la lista múltiplos de 51. Por lo tanto, la respuesta es 51.

7) Los primeros términos de la sucesión son

$$97,58,69,87,57,54,21,3,9,81,9,81,\ldots$$

A partir del noveno término se repiten de dos en dos el 9 y el 81. Como 2019 es impar, concluimos que el término 2019 en la sucesión es el 9.

8) Si X es la intersección del lado BC con la circunferencia por A, Z y M, tenemos que A, Z, M y X son concíclicos. Como Z es el centro del cuadrado y M es el punto medio de BC, resulta que $\angle ZMX=90^\circ$. Luego, ZX es un diámetro de la circunferencia, por lo que $ZX=2R$, donde R es el radio buscado.
Es fácil ver que $ZM=1$ y que $\angle AZM=135^\circ$, por lo que $\angle MXA=45^\circ$. Además, $\angle ABX$ es recto, por lo que el triángulo ABX es rectángulo isósceles con $BX=AB=2$. Entonces, $MX=MB+BX=3$ y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo ZXM, tenemos que $ZX^2=ZM^2+MX^2$, esto es, $(2R)^2=1^2+3^2=10$, de donde se sigue que $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

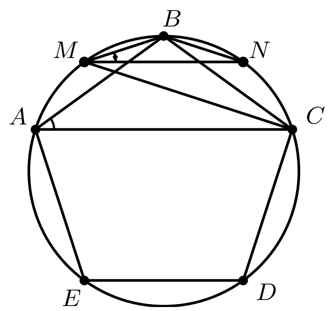
Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) La respuesta es 54. El número más pequeño que se puede obtener es cuando se acomodan de alguna de las siguientes formas:

$$6\times 5\times 1+4\times 3\times 2=54,$$
$$6\times 4\times 1+5\times 3\times 2=54.$$

2) La respuesta es 18°. Si N es el punto medio del arco $\widehat{BC}$ del circuncírculo del triángulo BMC, entonces MN es bisectriz del ángulo $\angle BMC$ y así, $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BMC$.



Como $BMAC$ es cíclico, tenemos que $\angle BMC = \angle BAC$ y, por lo tanto, $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC$. Como $BA = BC$, el triángulo BAC es isósceles, de modo que $\angle BAC = \frac{180^\circ - \angle ABC}{2}$ y, como $\angle ABC = 108^\circ$ (pues el pentágono es regular), se sigue que $\angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ y $\angle BMN = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\cdot 36^\circ = 18^\circ$.
Otra forma: Sean O, P y Q los puntos medios de los arcos $\widehat{CD}$, $\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$, respectivamente, formando un decágono regular $AMBNCODPEQ$. Entonces,

$$\angle MBN = (\text{ángulo de un decágono regular}) = 180^\circ\left(\frac{10-2}{10}\right) = \frac{4}{5}\times 180^\circ.$$

Como el triángulo MBN es isósceles, resulta que

$$\angle BMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBN) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{4}{5}\times 180^\circ\right) = 18^\circ.$$

3) La respuesta es $\frac{2}{9}$. Hay $\binom{10}{5} = 252$ formas de sacar 5 monedas de la bolsa. Para obtener al menos \$40 hay tres posibilidades:
i) Sacar 5 monedas de \$10.
ii) Sacar 4 monedas de \$10 y cualquier otra moneda.
iii) Sacar 3 monedas de \$10 y 2 de \$5.
Para el caso i), hay $\binom{5}{5} = 1$ manera; para el caso ii) hay $\binom{5}{4}\times\binom{5}{1} = 5\times 5 = 25$ maneras y, para el caso iii), hay $\binom{5}{3}\times\binom{5}{2} = 10\times 3 = 30$ maneras. Entonces, la probabilidad de sacar al menos \$40 es $\frac{1+25+30}{252} = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}$.

4) Es fácil ver que EF es paralela a AB. Luego, $(APB) = (AFB)$. Ahora, como $BF = 2$ cm y $BD = 2+6+2 = 10$ cm, tenemos que $\frac{(ABF)}{(ABD)} = \frac{BF}{BD} = \frac{2}{10}$, por lo que $(ABP) = (ABF) = \frac{2}{10}(ABD) = \frac{1}{10}(ABCD) = 4$ cm^2. Análogamente, obtenemos que $(BQC) = (CRD) = (DSA) = 4$ cm^2. Por lo tanto, el área de la estrella es $(ABCD) - (APB) - (BQC) - (CRD) - (DSA) = 40 - 4\times 4 = 24$ cm^2.

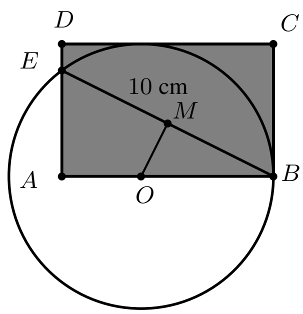
5) Ver la solución del Problema 11 de la Prueba Individual del Nivel II.

6) La respuesta es 11520 formas. Primero vamos a acomodar las letras E. Como hay 8 vértices, hay 8 maneras de acomodar la primera letra E. Luego, estamos ocupando ya 4 vértices (donde colocamos la primera E y los tres vértices que se unen a este vértice por una arista), por lo que la segunda E la podemos acomodar de 4 maneras. Entonces, hay 8×4 maneras de acomodar las letras E, pero como estas son iguales dividimos 8×4 entre 2 para evitar repeticiones. El resto de las letras no tienen restricción, por lo que hay $6!$ maneras de acomodarlas. Por lo tanto, en total son $16 \times 6! = 11520$ maneras de acomodar las ocho letras.

7) Ver la solución del Problema 10 de la Prueba Individual del Nivel II.

8) La respuesta es 50 cm^2. Sean O el centro de la circunferencia y M el punto medio de la cuerda BE. Como los triángulos ABE y MBO son semejantes, tenemos que $\frac{AB}{BE} = \frac{MB}{BO}$ y, por lo tanto,

$$(ABCD) = AB \times BC = AB \times BO = BE \times MB = 10 \times 5 = 50 \ \text{ cm}^2.$$



9) La respuesta es 3. Note que 2019 es divisibe entre 3, pero no es divisible entre 9. La suma de dos cuadrados a^2+b^2 es un múltiplo de 3 solamente en el caso de que tanto a como b sean múltiplos de 3 (ya que el residuo al dividir entre 3 a un cuadrado es 0 o 1), pero entonces $a^2 + b^2$ es múltiplo de 9. Luego 2019 no puede ser la suma de dos cuadrados perfectos. Como $2019 = 5^2 + 25^2 + 37^2$, la menor cantidad de sumandos que se necesitan para escribir a 2019 como suma de cuadrados es 3.

10) La respuesta es 80. Los subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ los dividimos en dos tipos, los que tienen al número 5 y los que no lo tienen. Hay una biyección entre estos dos tipos de conjuntos: A un conjunto A que tenga al 5, le asignamos el conjunto $A - \{5\}$. Por ejemplo, si el conjunto es $A = \{5\}$, entonces $A - \{5\}$ es el conjunto vacío y la suma con signos alternados del conjunto vacío es 0). Conjuntos con el 5 hay 16 y las sumas alternadas de A y $A - \{5\}$, cumplen que al sumarlas da 5. Luego, la suma que nos piden es $16 \times 5 = 80$.

11) Ver la solución del Problema 6 de la Prueba Individual del Nivel II.

12) La respuesta es 4. Formemos el polinomio $p(x) = f(x) + g(x) - 2019$. Como $f(x)$ y $g(x)$ son de grado 2, entonces el grado de $p(x)$ es menor o igual que 2, pero

$p(a) = p(b) = p(c) = 0$, por lo que el polinomio $p(x)$ es el polinomio cero. Luego, $p(x) = f(x) + g(x) - 2019 = 0$, por lo que $g(x) = 2019 - f(x)$, de donde se obtiene que $g(d) = 2019 - f(d) = 2019 - 2015 = 4$.

Parte B

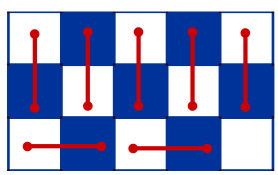
1) Ver la solución del Problema 8 de la Prueba por Equipos del Nivel II.

2) Escribimos $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ y $m = p_1^{b_1} \cdots p_k^{b_k}$, donde $p_1, \ldots, p_k$ son los primos que aparecen en las factorizaciones de n y m y, además los exponentes a_i, b_i son enteros no negativos. Como $n^2 \cdot m^3$ es una quinta potencia, para cada i debemos de tener que $2a_i + 3b_i \equiv 0$ (mod 5). De aquí que para cada i,

$$0 \equiv 5a_i + 5b_i \equiv 2a_i + 3b_i + 3a_i + 2b_i \equiv 3a_i + 2b_i \pmod{5}.$$

Por lo tanto, $m^2 \cdot n^3$ también es una quinta potencia.

3) Coloreamos las cajas como tablero de ajedrez, con las esquinas blancas. El número de cajas blancas es 8 y el de negras es 7. Podemos pensar que las canicas heredan el color de la caja. Luego hay $8 \times 7 = 56$ canicas blancas y $7 \times 7 = 49$ canicas negras. En cada tirada se saca una canica de cada color. Luego, a lo más se pueden hacer 49 tiradas, donde se sacan 49 canicas de cada color, por lo que quedan entre las cajas blancas 7 canicas. Luego, el menor número de canicas que puede quedar es mayor o igual a 7. Se puede tirar de la siguiente manera,



donde cada segmento representa la tirada donde se escogen las dos cajas señaladas. Así se muestra que se sacan las canicas de todas las cajas salvo la de la caja de la esquina inferior derecha, que tiene 7.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) Sea ABC un triángulo acutángulo. Podemos suponer que las medidas de sus ángulos cumplen que $A \leq B \leq C$. Entonces $6A = C < 90°$, pues ABC es acutángulo. Luego, el valor más grande de C es cuando $6A = C = 84$, es decir, $A = \frac{84}{6} = 14°$. Luego, $B = 180 - 14 - 84 = 82°$. Si $C \leq 84 - 6 = 78°$, entonces $A \leq \frac{78}{6} = 13°$ y $B \geq 180 - 78 - 13 = 89°$, lo cual no es posible porque $C \leq 78°$ es el ángulo más grande. Por lo tanto, los ángulos del triángulo ABC miden $14°$, $82°$ y $84°$.

2) Ver la solución del Problema 7 de la Prueba por Equipos del Nivel II.

3) Para $1 \leq j \leq 13$, sea a_j la cantidad de formas de ir del j-ésimo 1 (de izquierda a derecha) al número 7. Entonces, un camino que va del j-ésimo 1 al 7 (para $1 \leq j \leq 7$) tiene que ir $7 - j$ veces a la derecha y $j - 1$ veces hacia abajo (es fácil ver que no puede ir hacia arriba ni hacia la izquierda por como son los caminos). Es decir, en total debe hacer 6 movimientos. Esto se puede hacer de $\binom{6}{j-1}$ maneras, esto es, $a_j = \binom{6}{j-1}$ para $1 \leq j \leq 7$. Por la simetría de la figura, tenemos que $a_j = \binom{6}{13-j}$ para $8 \leq j \leq 13$. Luego, el número total de caminos que van de algún 1 al 7 es

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{13} = \sum_{j=1}^{7} \binom{6}{j-1} + \sum_{j=8}^{13} \binom{6}{13-j} = 2^6 + (2^6 - 1) = 2^7 - 1,$$

esto debido a la identidad $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$ y a que $\binom{6}{6} = 1$.
Por lo tanto, el número total de caminos es $2^7 - 1 = 127$.

4) Como M es el reflejado de D con respecto a la recta AC, tenemos que AC y DM son perpendiculares y $CD = CM$. Por ser DA y DC las tangentes desde D a Γ, tienen la misma longitud. De aquí, obtenemos que $\angle MCA = \angle ACD = \angle DAC$ y, por lo tanto, las rectas AD y CM son paralelas. Análogamente, obtenemos que las rectas CN y EB son paralelas.
Si C, M y N están alineados, entonces AD y BE son paralelas. Pero como AD y BE son tangentes a Γ, tenemos que AB es un diámetro de Γ y, por lo tanto, $\angle ACB = 90°$.

5) Supongamos que v_A, v_B y v_C son las velocidades de los corredores A, B y C, respectivamente. Sean t_A, t_B y t_C los tiempos en que tardan en llegar a la meta (desde un punto inicial común) los corredores A, B y C, respectivamente. Si d es la distancia de la carrera, tenemos que

$$\begin{aligned} v_A t_A &= v_B t_B = d, \\ v_B t_A &= d - 2, \\ v_C t_A &= d - 2.98, \\ v_C t_B &= d - 1. \end{aligned}$$

Como $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_B t_A}{v_B t_B} = \frac{d-2}{d}$ y $\frac{t_A}{t_B} = \frac{v_C t_A}{v_C t_B} = \frac{d-2.98}{d-1}$, tenemos que

$$(d-2)(d-1) = (d-2.98)d,$$

de donde $0.02d - 2 = 0$. Por lo tanto, $d = 100$ metros.

6) Observemos que la suma de dos números de una tripleta Eliana es divisible entre el otro si y solo si la suma de los tres números es divisible entre cada uno de los tres números de la tripleta. Si llamamos n a la suma de los números de la tripleta, entonces debemos encontrar tres divisores de este número cuya suma sea igual a n. Ahora, si expresamos a esos divisores como fracción de n, tenemos que encontrar tres enteros positivos mayores o iguales a 2 de tal forma que sus recíprocos sumen 1 (ya que, $\frac{n}{a} + \frac{n}{b} + \frac{n}{c} = n \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$). Si el menor de ellos fuera mayor o

igual a 3, la suma de los tres sería a lo más $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$. Por lo tanto, el menor es 2 y uno de los números debe ser la mitad de n. Si el segundo menor fuera 4 o mayor, la suma no podría ser 1 pues $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<1$, por lo cual el segundo número debe ser 3. Luego, el último número debe ser 6. Ahora, el número n debe ser múltiplo de 6. Luego, el producto de esos tres números es $\frac{n}{2}\times\frac{n}{3}\times\frac{n}{6}=\frac{n^3}{36}$. Como $\frac{n^3}{36}$ debe de ser menor o igual a 2019 y, como queremos maximizar n, tomando en cuenta que n debe de ser múltiplo de 6, se observa que $\frac{42^3}{36}=7\times 7\times 42=2058>2019$ y que $\frac{36^3}{36}=36\times 36=1296<2019$. Por lo tanto, la máxima suma posible es 36.

7) Notemos que $\angle QPM=90^\circ=\angle APD$. Sean $\alpha=\angle PAD$ y $\beta=\angle PDA$. Entonces, $\alpha+\beta=90^\circ$. Además, $\angle MAB=\angle MAD=\alpha$ por la bisectriz AM y $\angle AMB=90^\circ$, por lo que $\angle ABM=90^\circ-\alpha=\beta=\angle MBC$ por la bisectriz BM. Como $\angle DAB=2\alpha$ y $\angle ABC=2\beta$, tenemos que $\angle DAB+\angle ABC=180^\circ$, por lo que AD y BC son paralelas. Análogamente, AB y DC son paralelas. Por lo tanto, el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo y, $AD=BC$ y $AB=CD$. También tenemos que $\angle DPM=90^\circ$ y $\angle PDM=\beta$, por lo que $\angle PMD=\alpha$. Luego, el triángulo ADM es isósceles, de donde $AD=DM$. Análogamente, obtenemos que $BC=CM$, por lo que $CD=2AD$. Por lo tanto,

$$\frac{AB+CD}{BC+DA}=\frac{2CD}{2AD}=\frac{2\cdot(2AD)}{2AD}=2.$$

8) Notemos que cuando hacemos la suma de todos los subtableros de 2×2 (de los cuales hay 16), los números de las esquinas del tablero de 5×5 se cuentan una sola vez (hay solamente un subtablero que lo cubre), los números de los cuadritos de las orillas que no son esquinas se cuentan dos veces (solamente hay dos subtableros que lo cubren) y los números de los otros cuadritos se cuentan cuatro veces (hay cuatro subtableros que lo cubren). La suma S de los 16 subtableros de 2×2 es mayor o igual a

$$\begin{aligned}&(25+24+23+22)+2(21+20+\cdots+10)+4(9+8+\cdots+1)\\&=94+2(186)+4(90)\\&=666,\end{aligned}$$

esto es, $666\leq S$.
Ahora, si en cada subtablero de 2×2 la suma de los números de sus cuadritos es menor o igual a 41, la suma de los números de los 16 subtableros de 2×2 será menor o igual a $16\times 41=656$, esto es $S\leq 656$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, hay un subtablero de 2×2 cuyos números suman más de 41.

33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas Concurso Nacional

Del 10 al 15 de noviembre de 2019 se llevó a cabo en la Ciudad de México, el Concurso Nacional de la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 192 alumnos provenientes de todos los estados del país.

Los 17 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Bryan Calderón Rivera (Chihuahua).
Mauricio Elías Navarrete Flores (Chihuahua).
Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato).
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
José Alejandro Reyes Gónzalez (Morelos).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).
Carlos Alberto Páez De la Cruz (Querétaro).
Alfredo Hernández Estrada (San Luis Potosí).
Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa).
Crisanto Salazar Verástica (Sinaloa).
Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).

Los 9 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
Dariam Samuel Aguilar García (Baja California).
Alejandro Ozymandias Cepeda Beltrán (Estado de México).
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
David García Maldonado (Oaxaca).
Alier Sánchez y Sánchez (Quintana Roo).
Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa).
Luis Ángel Gabriel Jiménez Iturbide (Tabasco).

Las 8 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Mirena Flores Valdez (Ciudad de México).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Katia García Orozco (Chihuahua).
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato).
Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro).
Itzanami Berlanga Contreras (San Luis Potosí).
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 33^a OMM.

1. Ciudad de México.
2. Nuevo León
3. Chihuahua.
3. Guanajuato.
5. Sinaloa.
6. Morelos.
7. Jalisco.
8. Querétaro.
9. San Luis Potosí.
10. Tlaxcala.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "**Copa Ocachicualli**" y fue ganado por Baja California Sur. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Guerrero y Quintana Roo, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del 33 Concurso Nacional de la OMM. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Un número entero $m \geq 1$ es *mexica* si es de la forma $n^{d(n)}$, donde n es un entero positivo y $d(n)$ es la cantidad de enteros positivos que dividen a n. Encuentra todos los números mexicas menores que 2019.
Nota. Los divisores de n incluyen a 1 y a n; por ejemplo $d(12) = 6$, ya que 1, 2, 3, 4, 6 y 12 son todos los divisores positivos de 12.

(Problema sugerido por Cuauhtémoc Gómez Navarro).

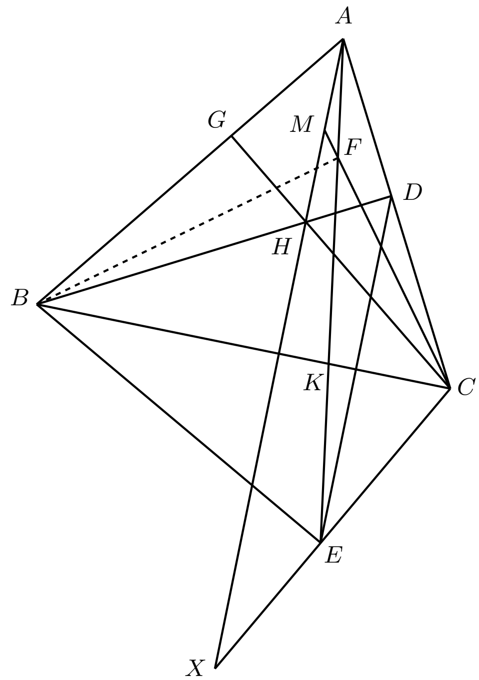
Solución de Emilio Toscano Oneto. Si n es un número primo, entonces $n^{d(n)} = n^2$. Como $\sqrt{2019} < 45$, entonces los números de la forma n^2 con n primo menor que 45, son mexicas.
Si n tiene tres divisores positivos, entonces $n = p^2$ con p primo. Como $n^3 < 2019$, tenemos que $n \leq 12$. Por lo tanto, $p^2 \leq 12$ y solo cumplen el 4 y el 9. Por lo tanto, en este caso 4^3 y 9^3 son mexicas.
Si n tiene tiene cuatro divisores positivos, entonces $n = pq$ o $n = p^3$ con p y q primos. Como $n^4 < 2019$, tenemos que $n \leq 6$. Es fácil ver que el único número menor o igual a 6 con cuatro divisores positivos, es el 6. Por lo tanto, en este caso 6^4 es mexica.
Si n tiene cinco divisores positivos, entonces $n = p^4$ con p primo. Como $n^5 < 2019$, tenemos que $n \leq 4$. Es fácil ver que no hay ningún número menor o igual que 4 con cinco o más divisores positivos. Por lo tanto, en este caso no hay números mexicas.
Con esto solo falta el caso $n = 1$, el cual solo tiene un divisor positivo y claramente, $1^1 = 1$. Por lo tanto, 1 es mexica.
Por lo tanto, los números mexicas menores que 2019 son: 2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2, 19^2, 23^2, 29^2, 31^2, 37^2, 41^2, 43^2, 4^3, 9^3, 6^4 y 1.

Problema 2. Sean H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y M el punto medio de AH. La recta BH corta a AC en D. Considera un punto E de manera que BC sea mediatriz del segmento DE. Los segmentos CM y AE se cortan en F. Muestra que BF es perpendicular a CM.

(Problema sugerido por Germán Puga Castillo).

Solución de Ricardo Balam Ek. Es fácil ver que E es la reflexión de D con respecto a BC, solo así puede pasar que BC sea mediatriz de DE. Ahora, supongamos que X es la reflexión de A con respecto a BC. Como C, D, A son colineales, tenemos que C, E, X también lo son, porque solo es una simetría axial con respecto a la recta BC. Por lo tanto, BC es mediatriz de DE y de AX, lo cual implica que $CD = CE$ y $CA = CX$, de donde se sigue que $\angle CDE = \angle CED$ y $\angle CAX = CXA$. Pero por la simetría tenemos que DE es perpendicular a BC y que AX es perpendicular a BC. Luego, DE es paralela a AX y $\angle CDE = \angle CED = \angle CAX = \angle CXA$, por lo que $AXED$ es un trapecio isósceles. Supongamos que sus diagonales AE y DX se cortan en K. Es conocido que los triángulos KED, KAX son isósceles porque $AXED$ es un trapecio isósceles. Como $KD = KE$ y $KA = KX$, tenemos que K está sobre la mediatriz de DE que es BC y, por lo tanto, XD, AE y BC concurren en K.
Como M es punto medio de AH y $\angle HDA$ es recto (porque BD es altura), tenemos que M es el centro de la circunferencia que pasa por A, D y H. Luego, $MA = MD =$

MH y el triángulo MAD es isósceles. Por lo tanto, sabemos que $\angle MAD = \angle MDA$, pero $\angle MAD = \angle XAC$ y como $CA = CX$, entonces el triángulo CAX es isósceles. De aquí que $\angle XAC = \angle AXC$, de donde $\angle MAD = \angle MDA = \angle XAC = \angle AXC$. En particular, como $\angle MDA = \angle AXC$, entonces el cuadrilátero $MXCD$ es cíclico, lo cual implica que $\angle DXM = \angle DCM$.



Como $AXDE$ es un trapecio isósceles, tenemos que es cíclico, por lo que $\angle DXA = \angle DEA$ pero $\angle DEA = \angle DEF$ y $\angle DXA = \angle DXM$, de donde $\angle DXM = \angle DEF$. Además, como $\angle DXM = \angle DCM = \angle DCF$ se sigue que $\angle DEF = \angle DCF$. Por lo tanto, el cuadrilátero $DCEF$ es cíclico. Como E es la reflexión de D con respecto a BC, es un hecho conocido que los triángulos CDB y CEB son congruentes. Pero como $\angle CDB = 90°$, tenemos que $\angle CEB = 90°$ y $DBEC$ es cíclico. Como $DCEF$ también es cíclico y comparte los puntos D, C y E con $DBEC$, se sigue que los puntos D, F, B, E, C son concíclicos ya que tres puntos determinan una única circunferencia. Por lo tanto, $CDFB$ es cíclico, de donde $\angle CDB = \angle CFB = 90°$. Tenemos entonces que CF y BF son perpendiculares, lo que nos permite concluir que CM y BF son perpendiculares.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un número entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestra que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil n/2 \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

Nota. Para cada número real x, $\lceil x \rceil$ denota el menor entero mayor o igual que x. Por ejemplo, $\lceil 3.6 \rceil = 4$ y $\lceil 2 \rceil = 2$.

(Problema sugerido por Víctor Domínguez Silva).

Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega. a) Si n es par, entonces $n = 2m$ y $\lceil \frac{n}{2} \rceil = m$. Consideremos los puntos con etiqueta menor o igual a m como puntos verdes y los puntos con etiqueta mayor a m como rosas. Hay m enteros positivos menores o iguales a m y m enteros positivos mayores a m y menores o iguales a $2m = n$. Entonces, habrán $2m = n$ puntos verdes y n puntos rosas. Procederemos por inducción sobre m. El caso base es $m = 1$, $n = 2m = 2$, entonces las etiquetas con 1 pueden estar adyacentes o estar separadas por las etiquetas 2. En cualquier caso, podemos encontrar dos segmentos que no se intersequen, cada uno con un extremo 1 y un extremo 2, es decir, Isabel puede escoger las parejas de manera que cada punto rosa quede con uno verde y cada punto verde quede con uno rosa, de forma que no se intersequen los segmentos. Ahora veamos el paso inductivo. Sabemos que se cumple lo deseado para m y queremos demostrarlo para $m+1$. Consideremos la secuencia más larga de puntos verdes consecutivos sobre la circunferencia, es decir, que entre cualesquiera 2 puntos verdes de la secuencia no haya ningún punto rosa. Los 2 puntos verdes de los extremos los llamaremos A y B. Como elegimos la secuencia más larga posible, los vecinos de A y B que no están en la secuencia son rosas, entonces podemos unir a A con ese vecino. Nos quedarán $2m + 2 - 2 = 2m$ puntos sin emparejar en la circunferencia, los cuales por hipótesis de inducción, podemos emparejarlos rosa con verde de modo que no haya intersecciones. Con lo que concluimos que para cualquier m podemos emparejar puntos rosas con verdes de modo que los segmentos respectivos no se intersequen. Ahora, notemos que cualquier etiqueta de un punto rosa es mayor que cualquier etiqueta de un punto verde. Esto muestra que Isabel puede usar exactamente m etiquetas distintas.

Ahora, si n es impar, entonces $n = 2m + 1$ y $\lceil \frac{n}{2} \rceil = m + 1$. Procederemos de manera análoga al caso par. Los puntos verdes serán los etiquetados con números del 1 al m y los puntos rosas los etiquetados del $m + 1$ al $2m + 1$. Tenemos entonces $2m$ puntos verdes y $2(m + 1)$ puntos rosas. Procedemos nuevamente con inducción sobre m. Para el caso base, es fácil ver que Isabel puede elegir las parejas de manera que cada punto verde quede con uno rosa y haya exactamente una pareja con ambos puntos rosas. El paso inductivo es considerar la secuencia más larga de puntos verdes, que exhibe una pareja de adyacentes uno verde y otro rosa que puede tomar. Van a quedar

$2(m+1)+1-2=2m+1$ puntos que cumplen las condiciones para poder aplicarles la hipótesis de inducción, con lo que concluimos la inducción. Al igual que en el caso par, todos los puntos rosas son etiquetados con números mayores que los puntos verdes, por lo que cada número asignado a segmentos es mayor que m y menor que $2m+1$ y, cada uno, aparece al menos una vez, por lo que se usan exactamente $m+1$ números distintos, como se quería.

b) Si el número de puntos entre 2 puntos (excluyéndolos) es impar, entonces no se puede escoger esa pareja de puntos, porque se tendría alguna intersección de segmentos. Volvemos a colorear los puntos, de rosa si tienen etiqueta mayor a $\frac{n}{2}$ y de verde los de etiqueta menor a $\frac{n}{2}$ (iguales solo si n es par). Lo que buscamos es que entre cualesquiera dos puntos verdes haya un número impar de puntos, para que un punto verde solo se pueda unir a uno rosa. Llamamos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ a los puntos verdes y $B_1, B_2, \ldots, B_p$ a los puntos rosas. Notemos que $p \geq k$, pues $p = k$ o $p = k+2$. Comenzamos a poner los puntos en sentido horario, de manera intercalada: $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_k, B_k$ y, al final, ponemos a B_{p-1}, B_p en caso de que $p = k+2$. Este acomodo cumple que entre cualesquiera dos puntos verdes hay una cantidad impar de vértices, por lo que las parejas verde con verde no son aceptadas, pues formarían intersecciones de segmentos. Entonces, todo punto verde está con uno rosa y, en caso de que $p = k+2$, habrá exactamente una pareja rosa con rosa. En cualquier caso, es fácil verificar que los segmentos usarán exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números distintos sin importar la división que haga Isabel.

Problema 4. Una lista de enteros positivos es *buena* si el elemento máximo de la lista aparece exactamente una vez. Una sublista es una lista formada por varios elementos consecutivos de la lista. Por ejemplo, en la lista $10, 34, 34, 22, 30, 22$, la sublista $22, 30, 22$ es buena, mientras que la sublista $10, 34, 34, 22$ no es buena. Una lista es *muy buena* si todas sus sublistas son buenas.
Encuentra el menor entero positivo k tal que es posible crear una lista muy buena con 2019 elementos, en la cual se usen exactamente k valores distintos.

(Problema sugerido por Gustavo Meza).

Solución. Es claro que cualquier lista muy buena es buena, y que cualquier sublista de una lista muy buena es a su vez muy buena. Denotamos por $f(n)$ al mínimo número de valores distintos que puede contener una lista muy buena con n elementos.

Lema. Para todo entero positivo $n \geq 2$, $f(n) \geq 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$.

Demostración. Consideremos al elemento máximo M de la lista, que por hipótesis aparece exactamente una vez en la lista. Al suprimir este elemento, obtenemos dos listas, una a la izquierda y una a la derecha (posiblemente alguna de ellas vacía). Estas listas tienen en total $n-1$ elementos, y por lo tanto alguna de ellas tiene al menos $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ elementos. Esta sublista es muy buena, y por lo tanto debe usar al menos $f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos. Ya que M es mayor que todos los elementos de esta sublista, concluimos que la lista original tiene al menos $1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos. □

Lema. Para todo entero positivo $n \geq 2$, $f(n) \leq 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$.

Demostración. Consideremos una lista L muy buena de longitud $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ que use exactamente $f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos. Elegimos un entero M, mayor que todos los elementos de L, y creamos una nueva lista L' colocando L en orden, luego M, y luego otra copia de L. Si n es par, eliminamos el último elemento de la segunda lista. Afirmamos que L' es una lista muy buena. Como L' tiene n elementos y $1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$ valores distintos, esto es suficiente para demostrar el lema. En efecto, si una sublista de L' contiene a M, entonces su máximo es M, que por construcción aparece una única vez en L', y por lo tanto aparece a lo más una vez en cualquier sublista de L'. Si una sublista de L' no contiene a M, entonces es a su vez sublista de alguna de las copias de L, y como L es muy buena se sigue que esta sublista es buena. Concluimos que L' es muy buena. $\square$

De los dos lemas obtenemos que $f(n) = 1 + f\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil\right)$. Para terminar, observemos que $f(1) = 1$, por lo cual

$$\begin{aligned} f(2019) &= 1 + f(1009) = 2 + f(504) = 3 + f(252) \\ &= 4 + f(126) = 5 + f(63) = 6 + f(31) \\ &= 7 + f(15) = 8 + f(7) = 9 + f(3) = 10 + f(1) \\ &= 11. \end{aligned}$$

Problema 5. Sean $a > b$ dos números enteros positivos, primos relativos entre sí. En un camino recto, en el cual está marcado cada centímetro n, para todo entero n, un saltamontes hará algunos saltos comenzando en la marca de 0 cm y siguiendo las siguientes reglas:

- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y no múltiplo de b, saltará a centímetros hacia adelante.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de b y no múltiplo de a, saltará b centímetros hacia atrás.
- Cuando cierto minuto sea múltiplo de a y múltiplo de b, saltará $a - b$ centímetros hacia adelante.
- Cuando un minuto no es múltiplo de a ni de b, el saltamontes no se mueve del lugar en el que está.

Determina todas las marcas a las que puede llegar el saltamontes.

(Problema sugerido por Manuel Alejandro Espinoza García).

Solución de Jesús Liceaga Martínez. Veamos la posición a la que se encuentra el saltamontes en el minuto t. En este minuto, en total se habrá movido $\left\lfloor \frac{t}{a} \right\rfloor$ veces hacia adelante y $\left\lfloor \frac{t}{b} \right\rfloor$ veces hacia atrás, pues cada uno de estos pisos representa todos los múltiplos de a y b menores o iguales a t sin contar el 0, respectivamente. Nótese que cuando hay un tiempo t' en el que ab divide a t', el movimiento equivale a moverse una vez hacia adelante y luego sin que pase el tiempo, una vez hacia atrás, por lo que

los pisos cuentan de manera correcta todos los movimientos.
Entonces, como cada vez que avanza lo hace a cm y al retroceder b cm, en el minuto t se encontrará en la marca $a\left\lfloor \frac{t}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{t}{b}\right\rfloor$.
Ahora, si expresamos t como $t = q_1ab + r_1$ con $0 \leq r_1 < ab$ y si $d(t)$ es la posición del saltamontes en el segundo t, tenemos que

$$\begin{aligned} d(t) &= a\left\lfloor \frac{t}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{t}{b}\right\rfloor = a\left\lfloor \frac{q_1ab+r_1}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{q_1ab+r_1}{b}\right\rfloor \\ &= a\left\lfloor q_1b + \frac{r_1}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor q_1a + \frac{r_1}{b}\right\rfloor = aq_1b + a\left\lfloor \frac{r_1}{a}\right\rfloor - bq_1a - b\left\lfloor \frac{r_1}{b}\right\rfloor, \end{aligned}$$

pues q_1a y q_1b son enteros no negativos. De aquí que $d(t) = a\left\lfloor \frac{r_1}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{r_1}{b}\right\rfloor$. Ahora, sea $r_1 = q_2a + r_2$ con $0 \leq r_2 < a$ y $r_1 = q_3b + r_3$ con $0 \leq r_3 < b$. Tenemos que

$$\begin{aligned} d(t) &= a\left\lfloor \frac{r_1}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{r_1}{b}\right\rfloor = a\left\lfloor \frac{q_2a+r_2}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor \frac{q_3b+r_3}{b}\right\rfloor \\ &= a\left\lfloor q_2 + \frac{r_2}{a}\right\rfloor - b\left\lfloor q_3 + \frac{r_3}{b}\right\rfloor = aq_2 + a\left\lfloor \frac{r_2}{a}\right\rfloor - bq_3 - b\left\lfloor \frac{r_3}{b}\right\rfloor, \end{aligned}$$

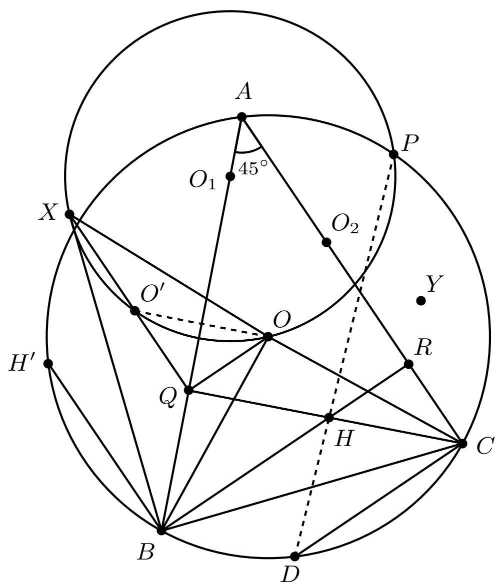
pues q_2 y q_3 son enteros no negativos.
De aquí que, $d(t) = aq_2 - bq_3$ ya que al ser $r_2 < a$ y $r_3 < b$, resulta que $\left\lfloor \frac{r_2}{a}\right\rfloor = 0 = \left\lfloor \frac{r_3}{b}\right\rfloor$. Como $q_2a + r_2 = r_1 = q_3b + r_3$, obtenemos que $q_2a - q_3b = r_3 - r_2$ y, por lo tanto, $d(t) = r_3 - r_2$.
Por otra parte, notemos que para cualesquiera enteros r_2 y r_3, por el teorema chino del residuo existe un entero x tal que $x \equiv r_2 \pmod{a}$ y $x \equiv r_3 \pmod{b}$, ya que a y b son primos relativos. Entonces si hacemos $r_1 = x$, tenemos que en los tiempos $t = q_1ab + r_1$ el saltamontes estará en la marca $r_3 - r_2$. Sin embargo, como $0 \leq r_3 < b$ y $0 \leq r_2 < a$, resulta que $-(a-1) \leq r_3 - r_2 \leq b - 1$. Por lo tanto, el saltamontes puede llegar a cualquier marca entre $-(a-1)$ y $b-1$, inclusive.

Problema 6. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 45^\circ$ con ortocentro H, circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea P un punto de Γ tal que el circuncírculo del triángulo PHB es tangente a BC en B. Sean X y Y los circuncentros de los triángulos PHB y PHC, respectivamente. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos PXO y PYO, respectivamente. Muestra que O_1 y O_2 son puntos de las rectas AB y AC, respectivamente.

(Problema sugerido por Maximiliano Sánchez Garza).

Solución de Carlos Alberto Páez de la Cruz. Veamos primero que es suficiente con probar que O_1 está sobre AB. Para esto, notemos que basta con ver que el circuncírculo del triángulo PHC es tangente a BC. Sea D la intersección de PH con el circuncírculo del triángulo ABC. Por la tangencia, tenemos que $\angle HBC = \angle HPB = \angle DPB = \angle DCB$, lo que implica que BH y DC son paralelas. Luego, D es el punto diametralmente opuesto a A, con lo que $\angle HPC = \angle DPC = \angle DAC = \angle OAC = \angle HAB = \angle HCB$ (aquí usamos que AO y AH son isogonales) y, por lo tanto, BC es tangente al circuncírculo del triángulo HPC.

Ahora demostraremos que O_1 está sobre AB. Sean Q y R los pies de las alturas desde C y B, respectivamente, y H' la intersección de CH con el circuncírculo del triángulo ABC.



Notemos que $\angle HBA = 45°$, pues $\angle BAC = 45°$ y BR es perpendicular a AC. Entonces, el triángulo QHB es rectángulo e isósceles, por lo que Q está sobre la mediatriz de BH, de donde QX es la mediatriz de BH (pues X es el circuncentro del triángulo BHP). Observemos que BH' y XQ son paralelas, ya que ambas rectas son perpendiculares a BH (pues $\angle H'BA = \angle H'CA = \angle QCA = 45°$), de donde $\angle AQX = 45°$. Notemos también que OX es la mediatriz de PB y que OQ es perpendicular a AC pues es su mediatriz (el triángulo AQC es rectángulo e isósceles) por lo que $\angle AQO = 45°$.
Sea O' la reflexión de O respecto a AB. Si probamos que $POO'X$ es cíclico terminamos, pues O_1 tendrá que estar sobre la mediatriz de OO', que es AB.
Como $\angle BAC = 45°$, tenemos que $\angle BOC = 90°$ y entonces $BQOC$ es cíclico, de donde $\angle OBQ = \angle OCQ$. Por tangencia del circuncírculo del triángulo PHB con BC, tenemos que $\angle XBC = 90°$, por lo que si Z es la intersección de BX con el circuncírculo del triángulo ABC, entonces CZ es diámetro de dicha circunferencia. Tenemos que

$$\angle XBH' = \angle ZBH' = \angle ZCH' = \angle OCQ = \angle OBQ$$

y, como $\angle ABH' = \angle ACQ = 45°$, resulta que $\angle OBX = 45°$.
Notemos que $BX = XP$ y $OB = OP$, entonces por el criterio LLL, tenemos que los triángulos XOB y XOP son congruentes, lo cual implica que $\angle OPX = \angle OBX =$

45°. Observemos que los puntos X, O' y Q son colineales, pues $\angle AQO = 45^\circ$ por ser $BCOQ$ cíclico y $\angle BCO = 45^\circ$, por lo que $XQ \perp OQ$ (ya teníamos que $\angle AQX = 45^\circ$), entonces AB es bisectriz del ángulo $\angle XQO$, de donde la reflexión de O por AB cae sobre PQ. Finalmente, como $O'Q = OQ$ y $\angle OQO' = 90^\circ$, se sigue que $\angle OO'Q = 45^\circ = \angle XPO$, lo que muestra que $POO'X$ es cíclico, como queríamos probar.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ $(mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $c \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv d$ $(mod\ m)$.*

2. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $b \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd$ $(mod\ m)$.*

3. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n$ $(mod\ m)$ para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv c$ $(mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ $(mod\ p)$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Mauricio Adrián Che Moguel

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Isabel Alicia Hubard Escalera

Leonardo Martínez Sandoval

Mónica Mateos Cisneros

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez