SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Agosto de 2020

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2020, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Eugenio Daniel Flores Alatorre, quien se integró a este Comité a partir del número 1 del año 2018. Le deseamos el mayor de los éxitos en sus nuevos proyectos. ¡Muchas gracias Uge!

Pasando al contenido, destaca el artículo *Tableros y Gráficas*, de Oriol Andreu Solé Pi. En él, se abordan aplicaciones de la Teoría de gráficas en la solución de problemas de tableros que aparecen frecuentemente en las olimpiadas de matemáticas. Estamos seguros que esta aportación será de mucha utilidad para todos los lectores, principalmente

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

para los lectores avanzados familiarizados con la teoría de gráficas.

De especial interés para todos, en este tercer número del año 2020, incluimos los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos en el nivel Secundaria de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2019. También hemos incluido los exámenes con soluciones de la Cyberspace Mathematical Competition (CMC) que se llevó a cabo a distancia en el mes de julio; los exámenes de esta competencia, junto con otro examen, sirvieron para elegir a la delegación mexicana que participará en la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas a celebrarse de manera virtual en el mes de septiembre.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2001. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2020-2021 y, para el 1° de julio de 2021, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará de forma virtual durante la segunda semana de noviembre de 2020. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2020 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (2021) y a la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (2021).

De entre los concursantes nacidos en 2004 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2021).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la X Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2021.

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2020, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Cuarta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de julio de 2020.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de 2020.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de 2020.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 4^a OMMEB se realizará de forma virtual, del 15 al 18 de octubre de 2020. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2021.

Tableros y Gráficas

Por Oriol Andreu Solé Pi

Nivel Avanzado

La teoría de gráficas tiene un sinfín de aplicaciones en distintas ramas de las matemáticas y en muchos problemas de olimpiada, en este pequeño artículo exploraremos algunas de las formas en las que puede utilizarse para resolver problemas de tableros. Los ejemplos que discutiremos incluyen problemas que han aparecido en olimpiadas tanto nacionales como internacionales en años recientes.

Definiciones básicas

Antes de continuar, se le recomienda al lector haber leído el capítulo 8 del libro Principio de las Casillas [1] o algún otro texto introductorio de teoría de gráficas. Comenzaremos por dar un compendio de las definiciones esenciales.

1. **Gráfica.** Una **gráfica** $G = (V, E)$ es una colección V de **vértices** y E de **aristas**, que son parejas no ordenadas de vértices. Durante todo este texto trabajaremos únicamente con gráficas cuyo conjunto de vértices es finito. Dada una gráfica G, $V(G)$ y $E(G)$ denotan al conjunto de vértices y al conjunto de aristas de G, respectivamente.

2. **Adyacencia e incidencia.** Diremos que dos vértices v y u son **adyacentes** (o vecinos) si forman una arista, si este es el caso, escribiremos vu (o uv) para referirnos a la arista y diremos que v y u son **incidentes** a vu.

3. **Grado de un vértice.** El **grado** de un vértice v, que se denota por $d(v)$, es la cantidad de aristas que son incidentes a v.

4. **Subgráfica.** Dadas dos gráficas G y H, diremos que H es **subgráfica** de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset V(G)$.

5. **Camino.** Un **camino** de longitud k es una secuencia $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices distintos tal que v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

6. **Ciclo.** Un **ciclo** de longitud k es una secuencia $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices en la que los únicos iguales son el primero y el último tal v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

7. **Gráfica conexa.** Una gráfica es **conexa** si cualesquiera dos de sus vértices están conectados por un camino.

8. **Componente conexa.** Una **componente conexa** de una gráfica es un conjunto de vértices tal que cualesquiera dos de ellos están conectados por un camino. Una componente conexa es **maximal** si ningún vértice de la componente es adyacente a un vértice fuera de la componente. Por comodidad, a las componentes conexas maximales las llamaremos simplemente componentes conexas. Toda gráfica puede descomponerse en componentes conexas (maximales).

9. **Árboles.** Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

10. **Árbol generador.** Dada una gráfica G, un **árbol generador** de G es una subgráfica T que, además de ser un árbol, cumple que $V(T) = V(G)$.

11. **Gráfica completa.** La **gráfica completa** con n vértices, que se denota por K_n, es aquella en la que cada pareja de vértices está unida por una arista. K_n tiene $\binom{n}{2}$ aristas.

12. **Número cromático.** El **número cromático** de una gráfcica G, que se denota por $\chi(G)$, es el menor entero positivo k tal que los vértices de G pueden colorearse con k colores sin que haya dos vértices adyacentes del mismo color.

13. **Gráfica bipartita.** Se dice que una gráfica G es **bipartita** si $\chi(G) \leqslant 2$. Los vértices de una gráfica bipartita pueden separarse en dos **clases** de modo que no haya aristas entre vértices de la misma clase.

14. **Emparejamiento.** Dada una gráfica G, un **emparejamiento** es un subconjunto de las aristas tal que cada vértice es incidente a lo más a una de ellas. Diremos que un emparejamiento **satura** a un conjunto de vértices $S \subset V(G)$ si cada vértice de S es incidente a alguna arista del emparejamiento. Un emparejamiento es **perfecto** si satura a $V(G)$.

15. **Paseo Euleriano.** Un **paseo** es una secuencia $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ de vértices (no necesariamente distintos) tal que v_i es adyacente a v_{i+1} para toda $i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$, diremos que un paseo es **cerrado** si su vértice inicial y su vértice final coinciden. Un paseo es **Euleriano** si pasa por cada arista de la gráfica exactamente una vez y usa todos los vértices de la gráfica.

Resultados importantes

Ahora recordaremos algunos resultados que nos serán útiles más adelante.

1. **Suma de grados.** Para toda gráfica G se cumple que

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

Como consecuencia, toda gráfica tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

Demostración. Eliminar una arista reduce la suma de los grados en 2, el resultado se sigue. $\square$

2. **Propiedades importantes de árboles.** a) Todo árbol con n vértices tiene exactamente $n-1$ aristas.
b) Todo árbol con $n > 2$ vértices contiene al menos dos hojas, es decir, vértices de grado 1.
c) Toda gráfica conexa tiene un árbol generador.

Demostración. a) Por inducción sobre n. Eliminamos una arista arbitraria, esto divide al árbol en dos árboles más pequeños. Aplicando la hipótesis a cada uno de los dos árboles se obtiene que, entre los dos, tienen $n-2$ aristas, así que el árbol original tenía $n-1$ aristas.
b) La suma de los grados de los vértices es dos veces el número de aristas, es decir, $2(n-1)$. El árbol no tiene vértices de grado 0, así que el resultado se sigue por casillas.
c) Consideramos un ciclo arbitrario de la gráfica y eliminamos una de sus aristas, esto resulta en una nueva gráfica que sigue siendo conexa. Podemos repetir este proceso hasta obtener una gráfica conexa y sin ciclos, es decir, un árbol. $\square$

3. **Aristas, conexidad y ciclos.** a) Toda gráfica conexa con n vértices tiene al menos $n-1$ aristas.
b) Toda gráfica con n vértices que no contenga ciclos tiene a lo más $n-1$ aristas.

Demostración. a) Toda gráfica conexa con n vértices tiene un árbol generador y, como consecuencia, al menos $n-1$ aristas.
b) Si una gráfica no contiene ciclos, cada una de sus componentes conexa forma un árbol. Sumando sobre todas las componentes, se sigue que la gráfica tiene $n-k$ aristas, donde k es el número de componentes conexas que la conforman. $\square$

4. **Caracterización de las gráficas bipartitas.** Una gráfica es bipartita si y solo si no contiene ningún ciclo de longitud impar.

Demostración. Una gráfica bipartita no puede contener ciclos de longitud impar, pues se necesitarían al menos 3 colores para colorear los vértices de dicho ciclo sin que haya dos adyacentes del mismo color. Ahora, consideremos una gráfica sin ciclos de longitud impar y coloreemos de blanco un vértice arbitrario de cada una de sus componentes conexas. Los vecinos de todos los vértices blancos son coloreados de negro y, después, los vecinos de todos los vértices negros son coloreados de blanco. Repetiremos este proceso hasta que cada vértice haya sido coloreado. Como no hay ciclos de longitud impar, no habrá ningún vértice coloreado de ambos colores ni dos vértices adyacentes del mismo color. Esto prueba que la gráfica es bipartita. (Haz un dibujo para entender mejor la prueba). $\square$

5. **Teorema de Hall.** Dada una gráfica bipartita con clases de vértices A y B, existe un emparejamiento que satura a A si y solo si para cada $S \subset A$ se cumple que $S \leqslant |N(S)|$, donde $N(S) \subset B$ es el conjunto de vértices que son adyacentes con al menos un vértice de S.

6. **Teorema de Euler (para paseos Eulerianos).** Una gráfica conexa contiene un paseo Euleriano si y solo si a lo más dos de sus vértices tienen grado impar. Más aún, una gráfica contiene un paso Euleriano cerrado si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

Las demostraciones de los teoremas de Hall y de Euler, así como pruebas más detalladas de algunos de los resultados anteriores, pueden encontrarse en el libro Principio de las Casillas [1]. Todos los resultados que acabamos de enunciar son válidos también para multigráficas[2].

Ejemplos sencillos

Los tres ejemplos siguientes, aunque son bastante sencillos y pueden resolverse de varias maneras, ilustran algunas de las formas en las que la teoría de gráficas puede ayudarnos a atacar problemas de tableros. Le recomendamos al lector intentar cada uno de estos problemas durante al menos cinco minutos antes de leer la solución.

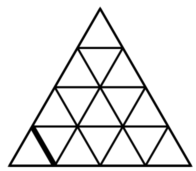
Ejemplo 1.1. Un caballo de ajedrez se mueve dando saltos en un tablero de 1001×1001. ¿Será posible que después de 1001^2 saltos el caballo haya visitado cada casilla una vez y se encuentre nuevamente en su posición original? (Nota: Un salto del caballo consiste en desplazarse una casilla en una coordenada y dos casillas en la otra coordenada).

Solución. Demostraremos que no es posible. Se construye una gráfica G cuyos vértices representan a las casillas del tablero, dos vértices estarán unidos por una arista si es posible moverse de una de las casillas correspondientes a la otra mediante un salto de caballo. Coloreando el tablero de blanco y negro alternadamente (como tablero de ajedrez), obtenemos una coloración de los vértices de G en la que no hay vértices adyacentes del mismo color, así que G es bipartita. Se sigue que G no contiene ningún ciclo de longitud impar y, en particular, no contiene un ciclo que pase por cada uno de los 1001^2, es decir, el caballo no puede realizar 1001^2 saltos con las propiedades que se piden.

Ejemplo 1.2. Una hormiga puede moverse entre vértices adyacentes de un tablero triangular de lado n (dos vértices son adyacentes si están unidos por un segmento

[2]En una multigráfica puede haber más de una arista formada por la misma pareja de vértices.

de longitud 1). Demuestra que la hormiga puede realizar una ruta cerrada que pase exactamente una vez por cada uno de los segmentos de longitud 1. La siguiente figura muestra un tablero triangular de lado 4.



Solución. Podemos ver al tablero triangular como una gráfica cuyos vértices son los vértices del tablero y cuyas aristas corresponden a los segmentos de longitud 1. En esta gráfica, todo vértice tiene grado 6, 4 o 2, por lo que existe un paseo Euleriano cerrado, que se traduce en una ruta cerrada que pasa por cada segmento exactamente una vez.

Ejemplo 1.3. Un tablero de $n \times n$ se cubre con fichas de dominó de modo que cada ficha cubre exactamente dos casillas y cada casilla es cubierta por exactamente dos fichas. Demuestra que n es par.

Solución. Se construye una gráfica con un vértice por cada casilla y, por cada dominó, añadimos una arista entre las dos casillas que cubre (es posible que haya dos aristas uniendo la misma pareja de vértices). Como cada casilla está cubierta por dos dominós, cada vértice de la gráfica tiene grado 2. Probaremos que G está compuesta por ciclos (posiblemente de longitud 2) que no comparten vértices.

G tiene n^2 vértices y $2n^2/2 = n^2$ aristas, por lo que contiene al menos un ciclo y, como cada vértice tiene grado 2, los vértices del ciclo son incidentes únicamente a las aristas del ciclo. Ahora, podemos ignorar los vértices de este ciclo y repetir este argumento con los vértices restantes. Como G es finita, este proceso debe concluir tras un número finito de iteraciones, con lo que se obtiene una descomposición de G en ciclos que no comparten vértices.

Todo ciclo en G es de longitud par (¿por qué?). Esta observación, junto con el hecho de que G puede descomponerse en ciclos ajenos, implica que el número de vértices, que es n^2, es par y el resultado se sigue.

Observación. Construir una gráfica que tenga un vértice por cada casilla del tablero, como se hizo en las soluciones de los ejemplos 1.1 y 1.3, es una de las maneras más comunes de atacar problemas de tableros con teoría de gráficas.

Ejemplos variados

En su mayoría, los ejemplos que aparecen en esta sección provienen olimpiadas nacionales e internacionales. Por simplicidad, a partir de aquí evitaremos hacer distinción entre los vértices de una gráfica y los objetos que representan.

Ejemplo 2.1. (ELMOSL 2010) Hay una torre de ajedrez en alguna casilla de un tablero de $n \times m$. La torre tiene permitido moverse con la condición de que después de cada movimiento vertical debe realizar uno horizontal y después de cada movimiento horizontal uno vertical. ¿Para que parejas de enteros (m, n) es posible, tras haber realizado de secuencia permitida de movimientos, que la torre haya estado en cada casilla del tablero exactamente una vez? (Nota: un movimiento de la torre de ajedrez consiste en desplazarse de una casilla a otra que se encuentre en la misma fila o columna).

Solución. Sea G una gráfica bipartita que en una de las clases tiene un vértice por cada columna mientras que en la otra clase tiene un vértice por cada fila, cada pareja de vértices en clases distintas estará unida por una arista, cada una de las mn aristas de G representa una casilla del tablero. Una secuencia de movimientos permitidos de la torre corresponde a un paseo en G, más aún, la torre habrá estado exactamente una vez en cada casilla si y solo si el paseo es Euleriano. Se sigue que la torre puede llevar a cabo una secuencia de movimientos como la que se pide si y solo si hay a lo más dos vértices de grado impar en G. Observemos que G tiene n vértices de grado m y m vértices de grado n, así que las parejas buscadas son las que están formadas por dos números pares o un número cualquiera y un 2.

Para resolver el ejemplo anterior se construyó una gráfica bipartita con un vértice por cada fila y otro por cada columna, esta es otra de las técnicas que debemos recordar a la hora de atacar problemas de tableros. Los dos ejemplos siguientes se resolverán utilizando el teorema de Hall.

Ejemplo 2.2. Sean m y n enteros positivos con $n > m$. Se tiene un tablero de $n \times n$ con un entero entre 1 y n escrito en cada una de las casillas de las primeras m columnas. Se sabe que cualesquiera dos casillas en la misma fila o columna tienen números distintos. Demuestra que es posible escribir un entero entre 1 y n en cada una de las casillas vacías de modo que se siga cumpliendo la propiedad anterior.

Solución. Probaremos que es posible escribir un entero entre 1 y n en cada casilla de la columna $m + 1$ de modo que no haya dos casillas en la misma fila o columna con el mismo número. Sea G una gráfica bipartita con $2n$ vértices que en una de las clases tiene un vértice por cada fila mientras que en la otra tiene un vértice por cada entero entre 1 y n, una fila y un número serán adyacentes si la fila no contiene ninguna casilla marcada con ese número; notemos que todo vértice de G tiene grado $n - m$. Sea S un subconjunto arbitrario de las filas, hay un total de $|S|(n - m)$ aristas incidentes a elementos de S y estas aristas deben ser incidentes al menos a $|S|(n-m)/(n-m) = |S|$ vértices de la clase opuesta (pues cada vértice es incidente a $n-m$ aristas), se sigue, por el teorema de Hall, que G tiene un emparejamiento que satura a la clase de las filas. Este emparejamiento, que de hecho es perfecto, nos indica cómo asignar números a las casillas de la columna $m + 1$ de modo que se cumpla la propiedad deseada. Para terminar, repetimos este argumento con las columnas $m + 2, m + 3, \ldots, n$.

Acabamos de demostrar algo interesante y que también nos será útil en el siguiente ejemplo: Cualquier gráfica bipartita regular[3] tiene un emparejamiento perfecto.

Ejemplo 2.3. (IMOSL 2012) Las filas y columnas de un tablero de tamaño $3n \times 3n$ son enumeradas $1, 2, \ldots, 3n$. Cada casilla (x, y) es coloreada de rojo, azul o verde dependiendo de si el residuo que deja $x + y$ al dividirse entre 3 es 0, 1 o 2. En cada casilla se coloca una ficha de color rojo, azul o verde de modo que se haya $3n^2$ fichas de cada color. Supongamos que es posible permutar las fichas de manera que cada una de ellas se encuentra a distancia a lo más d de su posición original y cada ficha roja fue remplazada por una azul, cada azul por una verde y cada verde por una roja. Demuestra que es posible permutar las fichas de modo que cada una de ellas se encuentra a distancia a lo màs $d + 2$ de su posición original y cada casilla contiene una ficha de su color.

Solución. Sin pérdida de generalidad, basta con demostrar que las fichas rojas pueden moverse a casillas rojas distintas de modo que cada ficha es desplazada a lo más $d + 2$ (se puede repetir este procedimiento con cada uno de los colores para concluir). Dicho de otro modo, debemos probar que es posible emparejar a las $3n^2$ fichas rojas con las $3n^2$ casillas rojas de modo que cada ficha roja se encuentre a distancia a lo más $d + 2$ de su pareja.
Para encontrar el emparejamiento, se construye una gráfica bipartita que en una de las clases tiene un vértice por cada ficha roja, mientras que en la otra tiene un vértice por cada casilla roja.
Dividimos al tablero en $3n^2$ triminós horizontales de 3×1, notemos cada triminó contiene exactamente una casilla roja. Sea π la permutación que mueve cada ficha a lo más d y sustituye a las fichas rojas por azules, las azules por verdes y las verdes por rojas. Una casilla roja C y una ficha roja F estarán conectadas por una arista por cada ficha del conjunto $\{F, \pi(F), \pi^{-1}(F)\}$[4] que originalmente se encuentre en el triminó que contiene a C (puede haber hasta tres aristas entre F y C). Cualquier arista en está gráfica une una ficha roja con una casilla roja que se encuentra a distancia a lo más $d + 2$. Probaremos que G es regular.
Cada ficha roja es incidente a 3 aristas. Cada casilla roja pertenece a algún triminó y es incidente a una arista por cada una de las tres fichas en el triminó. Entonces, todo vértice de G tiene grado 3 y, al igual que en el ejemplo anterior, podemos utilizar el teorema de Hall para concluir que la gráfica tiene un emparejamiento perfecto, que es justo lo que buscábamos.

Ejemplo 2.4. (USAMO 2007) Un *animal* de tamaño n es una figura conectada formada por n casillas de un tablero infinito. Un *dinosaurio* es un animal de tamaño al menos 2020. Diremos que un dinosaurio es *primitivo*, si las casillas que lo conforman no pueden partirse en dos o más dinosaurios. Encuentra el mayor número de casillas por las que puede estar compuesto un dinosaurio primitivo.

[3]Una gráfica es regular si todos sus vértices tienen el mismo grado.

[4]$\pi(F)$ denota a la ficha que es sustituida por F al hacer la permutación, mientras que $\pi^{-1}(F)$ denota a la ficha que sustituye a F.

Solución. Sea D un dinosaurio compuesto por $n > 8077$ casillas, probaremos que D puede partirse en dos o más dinosaurios. Sea G una gráfica cuyos vértices representan a las casillas de D, dos vértices serán adyacentes si las casillas correspondientes son adyacentes. La gráfica es conexa, así que podemos tomar un árbol generador H de G. Notemos que todo vértice de H tiene grado a lo más 4. La clave es el siguiente resultado de teoría de gráficas.

Proposición. Sea T un árbol con n vértices y grado máximo $\Delta > 1$ entre todos sus vértices. Para cada vértice $v \in V(T)$, sea T_v la gráfica que se obtiene a partir de T al eliminar a v y todas sus aristas y sean $V_{v,1}, V_{v,2}, V_{v,3}, \ldots, V_{v,k}$ las componentes conexas de T_v. Se define $f(v) = \max\{|V_{v,1}|, |V_{v,2}|, \ldots, |V_{v,k}|\}$. Existe un vétice $u \in V(T)$ tal que $\lceil \frac{1}{\Delta}(n-1) \rceil \leqslant f(u) \leqslant \lceil \frac{\Delta-1}{\Delta}(n-1) \rceil$.

Demostración. Por casillas, la desigualdad de la izquierda se cumple para todo vértice de T, así que basta con probar que existe un vértice que cumple la desigualdad de la derecha. De entre todos los elementos de $V(T)$, consideremos un vértice u para el cual $f(u)$ alcanza su valor mínimo y supongamos que $f(u) \geqslant \lceil \frac{\Delta-1}{\Delta}(n-1) \rceil + 1$. Sea i tal que $f(u) = |V_{u,i}|$ y sea u' el único vértice de $V_{u,i}$ que es adyacente a u. La componente conexa de $T_{u'}$ que contiene a u tiene cardinalidad $n - |V_{u,i}| \leqslant \frac{1}{\Delta}(n-1) < f(u)$, mientras que cada una de las otras componentes conexas de $T_{u'}$ está contenida en $V_{u,i} \setminus \{u'\}$ y, por lo tanto, tiene carindalidad a lo más $f(u) - 1$. Se sigue que $f(u') < f(u)$, lo que contraice la minimalidad de $f(u)$. (Haz un dibujo para entender mejor la prueba.) □

Aplicando la proposición anterior a H, obtenemos que hay un vértice $u \in V(H)$ tal que $\frac{1}{4}(n-1) \leqslant f(u) < \frac{3}{4}(n-1) + 1$, así que tanto $f(u)$ como $n - f(u)$ son al menos $\frac{1}{4}(n-1) > 2019$. Sea i tal que $f(u) = |H_{u,i}|$, entonces $H_{u,i}$ y $V(H) \setminus H_{u,i}$ inducen una partición de H en dos subgráficas conexas con al menos 2020 vértices cada una. Como H es un árbol generador de G, se sigue que las casillas de D pueden partirse en dos dinosaurios.

Lo anterior demuestra que todo dinosaurio primitivo está compuesto por a lo más 8077 casillas, se deja como ejercicio al lector construir un dinosaurio primitivo de tamaño 8077.

La proposición que acabamos de utilizar es interesante por sí misma y vale la pena recordarla, pues nos permite probar fácilmente que toda gráfica con n vértices y grado máximo Δ puede partirse en dos gráficas conexas con al menos $\lceil \frac{n-1}{\Delta} \rceil$ vértices cada una, como se hizo en el ejemplo anterior para $\Delta = 4$.

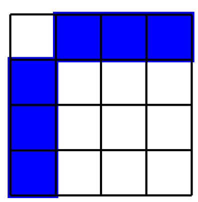
Ahora veremos dos ejemplos en los que se debe acotar el número de aristas de una gráfica utilizando información sobre sus componentes conexas.

Ejemplo 2.5. Se seleccionan algunas casillas de un tablero de $n \times n$ y en cada una de ellas se hace un corte a través de alguna de sus dos diagonales. Suponiendo que los cortes no dividen al tablero en dos o más fragmentos, demuestra que al menos $2n-1$ casillas no fueron seleccionadas.

Solución. Supongamos que se seleccionan y cortan k casillas de modo que el tablero no queda dividido. Consideremos los $(n+1)^2$ vértices del tablero, diremos que uno de estos vértices es exterior si se encuentra en la orilla del tablero. Se construye una gráfica con un vértice por cada vértice del tablero en la que dos vértices son adyacentes si el segmento que los une es una diagonal a través de la cual se hizo un corte, de este modo, hay una arista por cada una de las k casillas seleccionadas. Como los k cortes no dividen al tablero, es fácil ver que la gráfica no tiene ciclos y que cualesquiera dos vértices en la orilla pertenecen a componentes conexas distintas pues, de lo contrario, el ciclo o el camino que une los vértices dividiría al tablero. Se sigue que la gráfica está compuesta por $r \geqslant 4n$ componentes conexas, cada una de las cuales es un árbol. Sumando sobre todas las componentes conexas obtenemos que la gráfica tiene $k = (n+1)^2 - r =\leqslant (n-1)^2$ aristas y, entonces, hay al menos $n^2 - k \geqslant n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$ casillas que no fueron seleccionadas.

Ejemplo 2.6. (EGMO 2016) Se dice que dos casillas distintas de un tablero de $4n \times 4n$ son *amigas* si pertenecen a la misma fila o a la misma columna. Algunas de las casillas del tablero se colorean de azul. ¿Cuál es la menor cantidad de casillas que pueden haberse coloreado si cada casilla del tablero es amiga de al menos dos casillas azules?

Solución. La respuesta es $6n$. Una manera de colorear $6n$ casillas es copiar el siguiente patrón en cada uno de los n subtableros de 4×4 que se encuentran en la diagonal principal.



Para probar que $6n$ efectivamente es el mínimo, consideremos una coloración arbitraria que cumpla la condición requerida. Ahora, construimos una gráfica bipartita G que en una de las clases tiene un vértice por cada columna y en la otra tiene un vértice por cada fila. Una fila y una columna serán adyacentes si la casilla en su intersección está coloreda de azul. Que cada casilla sea amiga de dos casillas azules es equivalente a que para cada pareja de vértices (u, v) en clases distintas, existan al menos dos aristas distintas de uv que son incidentes a u o a v.

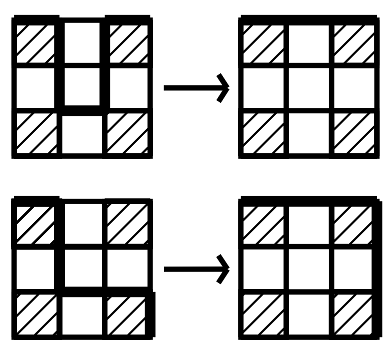
Si hay un vértice de grado 0 en G, entonces cada vértice en la clase opuesta debe tener grado al menos 2 y el número de casillas azules será al menos $8n$. Supongamos que no hay vértices de grado 0 y consideremos una componente conexa arbitraria de G. Como no hay vértices de grado 0, esta componente contiene dos vértices adyacentes u y v que claramente se encuentran en clases distintas y, entonces, hay al menos dos aristas distintas de uv que son incidentes a u o a v. Esto implica que la componente contiene al menos otros dos vértices. Por lo anterior, podemos suponer que cada componente conexa de G contiene al menos 4 vértices.

G está compuesta por no más de $8n/4 = 2n$ componentes conexas y en cada una de ellas la cantidad de aristas es al menos la cantidad de vértices menos 1. Sumando sobre todas las componentes conexas obtenemos que G tiene al menos $8n - 2n = 6n$ aristas, es decir, hay al menos $6n$ casillas azules, como deseábamos probar.

Los últimos dos ejemplos, aunque no corresponden a una técnica o teorema en particular, ilustrarán varias ideas interesantes que no hemos utilizado todavía.

Ejemplo 2.7. (ARMO 1997) Sean n y m enteros positivos impares. Un tablero de $n \times m$ se cubre con dominós de modo que la única casilla que queda sin cubrir es una de las esquinas (cada una de las otras casillas está cubierta por exactamente un dominó y los dominós no se salen del tablero). Un movimiento consiste en deslizar un dominó hacia el hueco que hay en el tablero. Demuestra que es posible, mediante una secuencia finita de movimientos, hacer que el hueco termine en cualquiera de las esquinas del tablero.

Solución. Asignamos coordenadas al tablero de la manera usual. Sea C el conjunto de casillas con ambas coordenadas impares, nótese que las equinas del tablero pertenecen a C. Se construye una gráfica dirigida[5] D cuyos vértices representan a las casillas de C, habrá una flecha desde la casilla u a la v si hay exactamente una casilla del tablero entre u y v y, además, el dominó que cubre a v también cubre a la casilla entre u y v. A cada casilla de C que no sea la esquina vacía llega exactamente una flecha. Probaremos por contradicción que D no contiene ningún ciclo.
Supongamos que hay un ciclo en D. Las aristas del ciclo corresponden a un ciclo de dominós que encierra una región del tablero, cada cambio de dirección en el ciclo de dominós ocurre en una casilla de C. Consideremos el polígono ortogonal[6] P formado por la unión de las casillas en el ciclo de dominós y en la región encerrada, cada esquina de este polígono es una casilla de C. Siempre y cuando P no sea un rectángulo, tendrá un vértice donde el ángulo interno es de $270°$, así que podemos aplicarle alguna de las dos modificaciones siguientes, dependiendo del caso.



[5]En una gráfica dirigida, en lugar de aristas se tienen flechas, que son parejas ordenadas de vértices.
[6]Un polígono es *ortogonal* si cualesquiera dos de sus lados son paralelos o perpendiculares entre sí.

Esto resulta en un nuevo polígono ortogonal que está compuesto por 2 o 4 casillas más que el original, está contenido en el tablero y cuyas esquinas son casillas de C. Si repetimos este proceso suficientes veces, como la cantidad de casillas que forman al polígono está acotada por nm, entualmente obtendremos un rectángulo que está compuesto por una cantidad impar de casillas, pues sus esquinas son elementos de C. Se sigue que el polígono original P está compuesto por una cantidad impar de casillas y, por lo tanto, no puede teselarse con dominós, lo cual es una contradicción.
Ahora, sean c una casilla arbitraria de C y $c = c_0, c_1, c_2, ..., c_m$ la cadena más larga de elementos distintos de C tal que hay una flecha desde c_i a c_{i-1} para toda $1 \leqslant i \leqslant m$. Supongamos que c_m no es la esquina vacía, entonces existe exactamente una casilla c_{m+1} tal que de c_{m+1} a c_m hay una flecha. Por la maximalidad de la cadena, tenemos que $c_{m+1} = c_j$ para algún $0 \leqslant j \leqslant m$, pero esto es una contradicción, pues D no contiene ningún ciclo. Se sigue que c_m es la esquina vacía, es decir, para toda casilla de c hay una secuencia de flechas que va desde la esquina vacía hasta c, esto se traduce en una secuencia de movimientos con los cuales podemos llevar el hueco hasta la casilla c. En particuar, podemos llevar el hueco a cualquiera de las esquinas del tablero.

Ejemplo 2.8. (ARMO 2018) Se tiene un tablero de 2020×2020. Inicialmente, hay un saltamontes rojo en la casilla inferior derecha y un saltamontes azul en la casilla inferior izquierda. R y A juegan alternadamente por turnos y R comienza. Cada turno consiste en desplazar al saltamontes correspondiente (R mueve al saltamontes rojo mientras que A mueve al azul) 17 casillas en una coordenada y 20 en la otra, simultáneamente, para caer en una casilla vacía. Si pierde el primero en verse forzado a dejar a los saltamontes en una posición que ya había ocurrido antes, ¿quién tiene estrategia ganadora?

Solución. Se construye una gráfica con un vértice por cada casilla del tablero en la que dos casillas serán adyacentes si es posible llegar de una a la otra mediante un movimiento de los saltamontes. G es bipartita y conexa (¿por qué?), además, los saltamontes comienzan en clases distintas de la gráfica. Probaremos que A tiene estrategia ganadora.

Proposición. Se tienen una ficha roja y una ficha azul en vértices de clases distintas de una gráfica bipartita y conexa. R y A juegan alternadamente por turnos y R comienza. Cada turno consiste en mover la ficha correspondiente a una casilla adyacente vacía. Si pierde el primero en verse forzado a dejar a las fichas en una posición que ya había ocurrido antes, entonces A tiene estrategia ganadora.

Demostración. Sean r y a los vértices donde se encuentran la ficha roja y la ficha azul, respectivamente. Como la gráfica es conexa, existe un camino $a = v_0, v_1, \ldots, v_m = r$ que conecta a a y r. Las fichas comienzan en clases opuestas y R tira primero, por lo que cada vez que sea el turno de A, no hace falta preocuparnos por mover a la ficha azul a una casilla ocupada. Con esto en mente, probaremos que la siguiente estrategia para A le asegura ganar.
Si la ficha azul se encuentra en v_i con i par, la moverá a v_{i+1}.
Si la ficha azul se encuentra en v_i con i impar y la ficha roja no se encuentra en $v_m = r$, moverá la ficha azul a v_{i-1}.

Si la ficha azul se encuentra en v_i con i impar y la ficha roja se encuentra en $v_m = r$, moverá la ficha azul a v_{i+1}.
En resumen, esta estrategia consiste en ir moviendo la ficha azul alternadamente entre v_{2i} y v_{2i+1} hasta que R vuelva a poner la ficha roja en v_m, en este momento sucederá una de las dos cosas siguientes: si la ficha azul se encuentra en v_{2i+i}, A la moverá a v_{2i+2} y repetirá este proceso con v_{2i+2} y v_{2i+3}, si la ficha azul se encuentra en v_{2i}, R pierde y el juego termina. Si eventualmente la ficha azul se encontrara en v_m y nos vieramos forzados a moverla más allá de de este vértice, se daría alguna de las dos situaciones siguientes: m es par y en el turno anterior de A se tuvo que mover la ficha azul de v_{m-1} a v_m porque la ficha roja se encontraba en v_m, lo cual es imposible porque antes de cada turno de A las fichas se encuentran en la misma clase, o m es impar y tanto la ficha la ficha roja como la azul se encuentra en v_m, que también es imposible. Nos falta probar que A no perderá y que el juego eventualmente termina.
Claramente esta estrategia nos asegurá no repetir posiciones en las que la ficha roja se encuentra en v_m. Además, tampoco repetiremos posiciones mientras la ficha azula vaya alternando entre v_{2i} y v_{2i+1}, pues para cada vértice u por el que pasa la ficha roja la estrategia de A asegura que ocurran las posiciones roja: u, azul: v_{2i} y roja: u, azul: v_{2i+1}, así que R no puede volver a mover la ficha roja al vértice u hasta que la ficha azul haya pasado a moverse entre v_{2i+2} y v_{2i+3}. Por último, observemos que no pueden transcurrir más de $|V(G)|^2$ turnos sin que se repita una posición, así que el juego eventualmente termina. Esto demuestra que la estrategia descrita es ganadora. $\square$

Para concluir, dejamos una lista de 10 problemas para que practique el lector.

Problemas

1) Inicialmente hay una ficha en una esquina de un tablero de $n \times n$. En cada paso movemos la ficha a cualquiera de las casillas adyacentes (dos casillas son adyacentes si comparten un lado). ¿Será posible que despues de n^2 pasos la ficha haya visitado cada casilla una vez y se encuentre nuevamente en su posición original?

2) **(OMM 2013)** Se construye un cubo de $n \times n \times n$ utilizando n^3 cubos de $1 \times 1 \times 1$. Algunos de los cubos unitarios se colorean de negro y el resto de blanco de modo que cada tira de $n \times 1 \times 1$, $1 \times n \times 1$ o $1 \times 1 \times n$ contiene exactamente dos cubos negros que, además, están separados por una cantidad par de cubos unitarios (posiblemente 0). Demuestra que es posible recolorear algunos de los cubos negros de color gris de modo que cada tira de $n \times 1 \times 1$, $1 \times n \times 1$ o $1 \times 1 \times n$ contenga exactamente un cubo gris.

3) En cada fila y cada columna de un tablero de $n \times n$ hay una cantidad par de casillas coloreadas de negro. En alguna casilla negra hay una torre de ajedrez que solo tiene permitido moverse entre las casillas negras. Si se sabe que la torre puede llegar a cualquier casilla negra mediante una serie de movimientos permiditos, demuestra que la torre puede realizar un recorrido cerrado que pase por cada casilla negra exactamente una vez.

4) **(OIM 2016)** Determina la mayor cantidad posible de alfiles que se pueden acomodar en casillas distintas de un tablero de ajedrez (de 8×8) de modo que cada alfil sea amenazado por a lo más uno de los otros alfiles. Nota: dos alfiles se amenazan si se encuentran en la misma diagonal.

5) **(OMM 2016)** Los números del 1 al n^2 se escriben en orden en un tablero de $n \times n$, de modo que la primera fila contiene los números del 1 al n, la segunda del $n+1$ al $2n$ y así sucesivamente. Un movimiento permitido consiste en tomar dos casillas adyacentes y sumar o restar el mismo entero a los números escritos en dichas casillas.

   Encuentra todos los valores de n para los cuales es posible, mediante una secuencia finita de movimientos permitidos, que todas las casillas tengan escrito el número 0 y, en estos casos, determina la menor cantidad de movimientos con los que es posible lograr esto.

6) **(IR3rd 2013)** Dados dos enteros positivos k y n con $k < n$, determina la mayor cantidad posible de torres que se pueden acomodar en casillas distintas de un tablero de $n \times n$ de modo que cada torre sea amenazada por a lo más $2k$ de las otras torres.

7) **(ARMO 2005)** Una cantidad finita casillas de un tablero infinito se colorean de negro y el resto del tablero se colorea de blanco de modo que cada casilla negra es adyacente a una cantidad par de casillas blancas (0, 2 o 4). demuestra que es posible colorear las casillas blancas de amarillo y rosa de modo que cada casilla negra sea adyacente a la misma cantidad de casillas amarillas que rosas.

8) **(IMOSL 2006)** Un n-triángulo perforado es un tablero triangular de lado n al cual se le han recortado n casillas triangulares que apuntan hacia arriba (hay dos tipos de casillas: las que apuntan hacia arriba, al igual que el tablero, y las que apuntan hacia abajo). Un diamante es un rombo unitario con ángulos de 60 y 120. Prueba que un n-triángulo perforado se puede teselar con diamantes si y solo si se cumple la siguiente condición: cada subtablero triangular de lado k que apunte hacia arriba contiene a lo más k casillas recortadas, para todo $1 \leqslant k \leqslant n$.

9) Una hormiga se mueve entre casillas adyacentes de un tablero de $n \times n$ (con $n \geqslant 2$). La ruta de la hormiga forma una trayectoria cerrada que pasa por cada casilla del tablero exactamente una vez. Demuestra que existen dos casillas adyacentes que al ser eliminadas dividen a la ruta de la hormiga en dos tramos de longitud al menos $\frac{n^2}{4} - 1$.

10) **(IMOSL 2016)** Dado un entero positivo n, encuentra el menor entero positivo k con la siguiente propiedad: es posible marcar k casillas de un tablero de $2n \times 2n$ de modo que exista una única manera de teselar el tablero con dominós que contengan a lo más una casilla marcada cada uno.

Siglas de las fuentes de los problemas

OMM: Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Nacional.

IMOSL: IMO Shortlist.

EGMO: European Girls'Mathematical Olympiad.

ARMO: All-Russian Math Olympiad.

OIM: Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

USAMO: United States of America Mathematical Olympiad.

ELMOSL: ELMO Shortlist (concurso de E.U.).

IR3rd: Iranian Mathematical Olympiad, Third round.

Bibliografía

1) J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM.

2) P. Soberón Bravo. *Combinatoria para Olimpiadas Internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, primera edición, 2010.

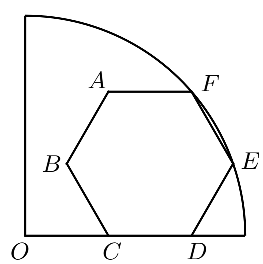
3) A. Tang. *IMO Training 2008: Graph Theory, Canada IMO Training 2008 Summer Camp*. https://sites.google.com/site/imocanada/2008-summer-camp.

4) Art of Problem Solving: https://artofproblemsolving.com/

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2020. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. En la figura, el hexágono $ABCDEF$ es regular y cada lado mide 2 cm. Los puntos E y F están sobre un cuarto de circunferencia con centro en O y radio r. Además, los puntos O, C y D son colineales. Determina el área de la región que está dentro del sector circular pero fuera del hexágono $ABCDEF$.



Problema 2. Determina una solución (real) de la ecuación $x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0$.

Problema 3. Sean a, b y c números reales distintos de cero tales que

$$a^2 + a = b^2,$$
$$b^2 + b = c^2,$$
$$c^2 + c = a^2.$$

Determina el valor de $(a - b)(b - c)(c - a)$.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $\angle BAC = 60°$. Sean O el circuncentro, I el incentro y H el ortocentro del triángulo ABC. Demuestra que los puntos B, H, I, O y C son concíclicos.

Problema 5. Determina el mayor entero positivo n tal que $3^{1024} - 1$ sea múltiplo de 2^n.

Problema 6. Sean x y y números reales tales que

$$\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = 1.$$

Demuestra que $x + y = 0$.

Problema 7. Sea n un entero positivo tal que $2n+1$ y $3n+1$ son cuadrados perfectos. ¿Es posible que $5n+3$ sea un número primo?

Problema 8. Sean A y B dos puntos distintos en el plano. Sea M el punto medio del segmento AB y sea ω una circunferencia que pasa por A y M. Sea T un punto en ω tal que la recta BT es tangente a ω. Sea X un punto (distinto de B) en la recta AB tal que $TB = TX$ y sea Y el pie de la perpendicular trazada desde A sobre la recta BT. Demuestra que las rectas AT y XY son paralelas.

Problema 9. En una reunión de 201 personas de 5 diferentes países, para cualquier grupo de 6 personas se cumple que al menos dos de ellas tienen la misma edad. Prueba que hay al menos 5 personas que tienen la misma edad, el mismo sexo y son del mismo país.

Problema 10. Sean a, b y c enteros positivos primos relativos dos a dos. Determina todos los valores enteros positivos de la suma

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}.$$

Problema 11. Sea S un subconjunto del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ tal que todas las sumas de dos elementos distintos de S son diferentes. Por ejemplo, el subconjunto $\{1, 2, 3, 5\}$ cumple esta propiedad pero el subconjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ no la cumple pues $1 + 4 = 2 + 3$. Encuentra la mayor cantidad posible de elementos en S.

Problema 12. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo de perímetro 4. Demuestra que $a^2 + b^2 + c^2 + abc < 8$.

Problema 13. Sean a y b enteros positivos. Demuestra que el número

$$[a, b] + (a, b) - a - b$$

es un entero no negativo par, donde $[a, b]$ y (a, b) denotan al mínimo común múltiplo y al máximo común divisor de a y b, respectivamente.

Problema 14. Sea ABC un triángulo acutángulo. Su incírculo ω es tangente a los lados AB y AC en D y E, respectivamente. Sean X y Y puntos sobre la recta BC tales que $XB = BD$, $EC = CY$ y los puntos X, B, C y Y están, en ese orden, en la recta BC. Demuestra que el punto de intersección de las rectas XD y YE está sobre ω.

Problema 15. Sea n un entero positivo. Demuestra que la ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$ tiene solución en los enteros positivos si y solo si n es divisible por el cuadrado de un entero mayor que 1.

Problema 16. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(f(m) + n) + f(f(n)) = f(m + f(n)) + f(m + 1)$$

para cualesquiera enteros positivos m y n.

Problema 17. Sean n y k enteros positivos tales que $k \leq 2^n$. Banana y Corona juegan la siguiente variante del *juego de la adivinanza*. Primero, Banana en secreto escoge un entero x tal que $1 \leq x \leq n$. Corona va a tratar de adivinar x haciendo algunas preguntas, como se explica a continuación. En cada turno, Corona escoge k subconjuntos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y, para cada conjunto S escogido, hace la pregunta "¿Está x en S?"

Banana toma una de estas k preguntas y le dice tanto la pregunta como la respuesta a Corona, quien entonces comienza un nuevo turno.

Encuentra todos los pares (n, k) tales que, sin importar cómo juegue Banana, Corona puede encontrar x en una cantidad finita de turnos con absoluta certeza.

Problema 18. Sean a, b y c números reales tales que

$$\lceil a \rceil + \lceil b \rceil + \lceil c \rceil + \lfloor a + b \rfloor + \lfloor b + c \rfloor + \lfloor c + a \rfloor = 2020.$$

Demuestra que

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor c \rfloor + \lceil a + b + c \rceil \geq 1346.$$

Problema 19. Sea k un entero positivo fijo. Una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisface que para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de enteros positivos distintos, existe una permutación de ella $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tal que

$$\frac{f(a_1)}{b_1} + \frac{f(a_2)}{b_2} + \cdots + \frac{f(a_k)}{b_k}$$

es un entero positivo.

Demuestra que $f(n)$ es divisible por n para cada entero positivo n.

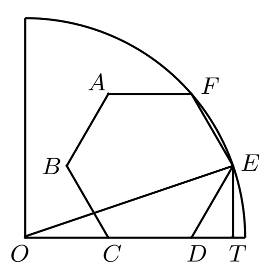
Problema 20. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$ enteros positivos cuya suma es 59. Demuestra que

$$\frac{a_1}{a_1 + 1} + \frac{a_2}{a_2 + 1} + \cdots + \frac{a_{22}}{a_{22} + 1} < 16.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. De la información dada, se cumple que O está en la mediatriz del segmento EF y, por simetría de la figura, como O, C y D son colineales, tenemos que O, B y A también lo son. Luego, el triángulo OBC es equilátero, esto es, $OC = BC = 2$ cm. Sea T el pie de altura desde E sobre CD.



El triángulo EDT es la mitad de un triángulo equilátero de lado 2 cm, por lo que $DT = 1$ cm y $ET = \sqrt{3}$ cm. Así, el triángulo OET es un triángulo rectángulo con $OT = OC + CD + DT = 5$ cm y $ET = \sqrt{3}$ cm. Por el teorema de Pitágoras en el triángulo OET, tenemos que $OE = \sqrt{OT^2 + TE^2} = 2\sqrt{7}$ cm. Luego, el área del

sector circular es $\frac{\pi OE^2}{4} = 7\pi$ cm^2.
Por otro lado, el área del hexágono es 12 veces el área del triángulo EDT, por lo que área$(ABCDEF) = 6\sqrt{3}$ cm^2. Por lo tanto, el área buscada es igual a $7\pi - 6\sqrt{3}$ cm^2.

Solución del problema 2. La ecuación se puede reescribir como $2x^3 - (x+1)^3 = 0$. Claramente $x \neq 0$, por lo que $(\frac{x+1}{x})^3 = 2$ y, por lo tanto, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$, el cual es un número real. Es fácil verificar que, en efecto, es una solución, lo que concluye el problema.

Solución del problema 3. Sumando las tres ecuaciones y simplificando, obtenemos que $a+b+c=0$. Esto implica que

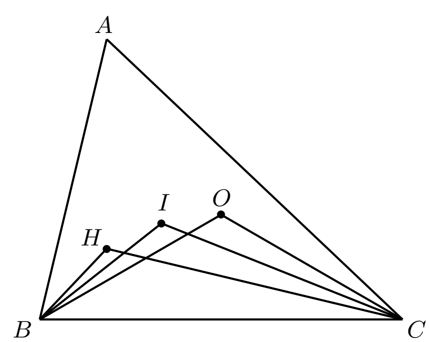
$$
\begin{aligned}
(-c)(a-b) &= (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 = -a,\\
(-a)(b-c) &= (b+c)(b-c) = b^2 - c^2 = -b,\\
(-b)(c-a) &= (a+c)(c-a) = c^2 - a^2 = -c.
\end{aligned}
$$

Multiplicando estas tres ecuaciones, obtenemos que $-abc(a-b)(b-c)(c-a) = -abc$. Como ninguno de los números a, b y c es igual a cero, podemos dividir por $-abc$ en la igualdad anterior, obteniendo que $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Solución del problema 4. Observemos que

$$\angle BHC = \angle BAC + \angle HBA + \angle ACH = 90^\circ + \angle HBA = 120^\circ,$$

pues HB y HC son perpendiculares a AC y AB, respectivamente.



Por otro lado, tenemos que $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$. Además,

$$\angle BIC = \angle BAC + \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CBA) = \angle BAC + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 120^\circ.$$

Entonces, $\angle BHC = \angle BIC = \angle BOC = 120^\circ$, lo cual implica que los puntos B, H, I, O y C son concíclicos, como se quería.

Solución del problema 5. Factorizando la diferencia de cuadrados, obtenemos que

$$3^{1024} - 1 = (3^{512}+1)(3^{256}+1)(3^{128}+1)\cdots(3+1)(3-1).$$

Los 11 factores son todos pares y el factor $3+1$ es múltiplo de 4. Claramente, $3-1$ no es múltiplo de 4. Demostraremos que ninguno de los otros 9 factores es múltiplo de 4. En efecto, como el cuadrado de todo entero impar es congruente con 1 módulo 4, tenemos que $3^{2n} \equiv 1 \pmod 4$ para todo entero positivo n y, por consiguiente, $3^{2n}+1 \equiv 2 \pmod 4$ para todo entero positivo n, esto es, $3^{2n}+1$ no es múltiplo de 4 para todo entero positivo n.
Por lo tanto, el mayor valor de n es 12.

Solución del problema 6. Es claro que ninguno de los factores del lado izquierdo de la ecuación dada es cero. Podemos reescribir la ecuación de dos maneras:

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \sqrt{y^2+1}-y$$

y

$$y+\sqrt{y^2+1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}-x.$$

Luego, tenemos que

$$y+\sqrt{y^2+1} = \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-2x = \sqrt{y^2+1}-y-2x,$$

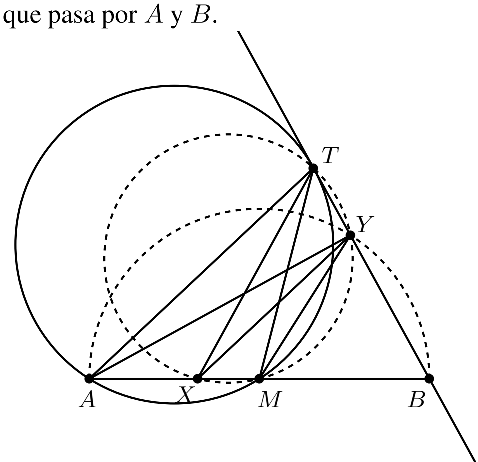
esto es, $2x+2y=0$, de donde se sigue que $x+y=0$.

Solución del problema 7. No es posible. Supongamos lo contrario y sean $2n+1=l^2$ y $3n+1=k^2$ con k y l enteros positivos. Entonces,

$$5n+3 = (8n+4)-(3n+1) = 4l^2-k^2 = (2l-k)(2l+k)$$

debe ser un número primo. Como $0<2l-k<2l+k$, tenemos que $2l-k=1$, esto es, $k=2l-1$. Luego, tenemos que $2k^2=6n+2=3(2n+1)-1=3l^2-1$, de donde $3l^2-1=2(2l-1)^2$. Simplificando, obtenemos que $5l^2-8l+3=(5l-3)(l-1)=0$. Como l es un entero positivo, la única solución posible es $l=1$ y, por lo tanto, $n=0$, lo que es una contradicción, pues n es un entero positivo.

Solución del problema 8. Como $\angle AYB = 90^\circ$, el punto Y está en la circunferencia con centro en M y que pasa por A y B.



Luego, $\angle MYB = \angle TBM = \angle MXT$, lo cual implica que los puntos M, Y, T y X son concíclicos y, por consiguiente, $\angle MXY = \angle MTY = \angle MAT$, donde la última igualdad se obtiene de la tangencia de BT al circuncírculo del triángulo AMT. Por lo tanto, AT y XY son paralelas.

Solución del problema 9. Observemos que hay a lo más cinco edades distintas entre los asistentes de la reunión ya que, de no ser así, habría seis personas con distintas edades y eso sería una contradicción a la hipótesis del problema. Entonces, hay $5 \cdot 5 \cdot 2 = 50$ posibles combinaciones de edad, género y país. Por el principio de las casillas, debe haber al menos $\lceil \frac{201}{50} \rceil = 5$ personas que coinciden en edad, género y país, como se quería.

Solución del problema 10. Queremos que

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)}{abc}$$

sea un entero positivo. Entonces, abc debe dividir a $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$. Esto implica que $c \mid ab(a+b)$, $a \mid bc(b+c)$ y $b \mid ac(a+c)$. Como a, b y c son primos relativos por parejas, podemos asegurar que $c \mid (a+b)$, $a \mid (b+c)$ y $b \mid (a+c)$. Por lo tanto, cada uno de a, b y c es divisor de $a+b+c$ y, por consiguiente, abc divide a $a+b+c$, pues a, b y c son primos relativos dos a dos. De aquí, obtenemos que $abc \leq a+b+c$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq b \geq c$. Entonces, $a+b+c \leq 3a$ y, por consiguiente, $abc \leq 3a$, esto es, $bc \leq 3$. Como $b \geq c$, resulta que $c^2 \leq bc \leq 3$, lo cual implica que $c = 1$ y $b \leq 3$.

Si $b = 1$, entonces $a \mid (a+2)$, esto es, $a \mid 2$, de donde $a = 1$ o 2 y tenemos las ternas $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ y $(2, 1, 1)$.

Si $b = 2$, entonces $2a \mid (a+3)$, en particular, $a \mid (a+3)$, lo cual implica que $a \mid 3$. Como $a \geq b$, la única opción es $a = 3$ y tenemos la terna $(a, b, c) = (3, 2, 1)$.

Si $b = 3$, entonces $3a \mid (a+4)$, en particular, $a \mid (a+4)$, lo cual implica que $a \mid 4$. Como $a \geq b$, la única opción es $a = 4$. Pero también tenemos que 3 divide a $a + 4 = 4 + 4 = 8$, lo que es una contradicción. Luego, no hay soluciones con $b = 3$.

En conclusión, las soluciones son: $\frac{1+1}{1} + \frac{1+1}{1} + \frac{1+1}{1} = 6$, $\frac{2+1}{1} + \frac{1+1}{2} + \frac{1+2}{1} = 7$ y $\frac{3+2}{1} + \frac{2+1}{3} + \frac{1+3}{2} = 8$.

Solución del problema 11. Demostraremos que el máximo es 5 elementos.

Notemos que con los elementos de $\{1, 2, \ldots, 9\}$ se pueden generar 15 sumas distintas: $3, 4, \ldots, 17$. Supongamos que S tiene k elementos. Entonces, la cantidad de sumas que generan los elementos de S debe ser menor o igual que 15, esto es, $\binom{k}{2} \leq 15$, lo cual se cumple para $k \leq 6$. Para ver que $k = 6$ no es posible, observemos que $\binom{6}{2} = 15$, por lo que deben estar todas las sumas. En particular, deben estar 3 y 17, que tienen una única forma de generarse: $3 = 1 + 2$ y $17 = 8 + 9$. Entonces, 1, 2, 8 y 9 deben estar en S, lo cual es una contradicción pues $1 + 9 = 2 + 8 = 10$. Por lo tanto, $k \leq 5$. Para ver que $k = 5$ es posible, basta ver que $S = \{1, 2, 3, 5, 8\}$ cumple con la propiedad buscada. Esto concluye la prueba.

Solución del problema 12. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $a+b > c$, lo cual implica que $4 = a+b+c > 2c$, esto es, $2 > c$. De manera análoga, la desigualdad $b + c > a$ implica que $2 > a$ y la desigualdad $a + c > b$ implica que $2 > b$. Por lo tanto, $(2-a)(2-b)(2-c) > 0$, esto es,

$$8 - 4(a + b + c) + 2(ab + bc + ac) - abc > 0.$$

Usando la identidad $ab + bc + ac = \frac{1}{2}[(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)]$ y la hipótesis $a + b + c = 4$, obtenemos que

$$8 - 4(4) + 2\left[\frac{1}{2}(4^2 - (a^2 + b^2 + c^2))\right] - abc > 0,$$

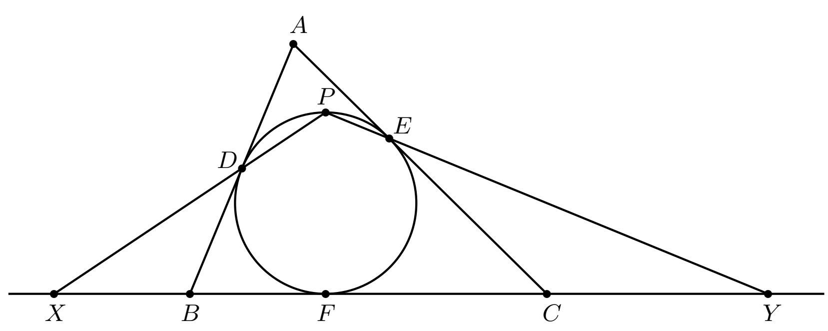
de donde se sigue el resultado.

Solución del problema 13. Primero demostraremos el siguiente resultado.
Lema. *Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y $b \neq d$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$.*
Demostración. Tenemos que $ad = bc$. Luego, $a(b-d) = ab-ad = ab-bc = b(a-c)$, lo cual implica el resultado. □
Ahora, demostraremos que la expresión dada siempre es par. Si a y b tienen la misma paridad, entonces tanto $[a, b]$ como (a, b) tienen esa misma paridad, por lo que $[a, b] + (a, b) - a - b$ es par. En caso de que a y b tengan distinta paridad, entonces (a, b) es impar y $[a, b]$ es par, por lo que la conclusión es la misma.
Para probar que $[a, b] + (a, b) - a - b \geq 0$, notemos que $ab = (a, b)[a, b]$ (es un hecho conocido). Si $a = b$, el resultado es claro. Supongamos que $a < b$. Entonces,

$$1 \leq \frac{a}{(a, b)} = \frac{[a, b]}{b} = \frac{[a, b] - a}{b - (a, b)},$$

donde la última igualdad se da por el lema. Se sigue que $[a, b] - a \geq b - (a, b)$ y, por lo tanto, se concluye el resultado.

Solución del problema 14. Sean P el punto de intersección de XD con YE y F el punto de tangencia de ω y BC.



Notemos que $BD = BF$ pues son las tangentes desde B hasta ω. Entonces, $XB = BD = BF$, por lo que B es el circuncentro del triángulo XDF. Como X, B y F

son colineales, se sigue que $\angle XDF = 90°$, es decir, $\angle FDP = 90°$. Análogamente, obtenemos que $\angle PEF = 90°$. Como $\angle FDP = 90° = \angle PEF$, se sigue que los puntos P, E, F y D son concíclicos, esto es, P pertenece a ω.

Solución del problema 15. Supongamos primero que n es divisible por el cuadrado de un entero mayor que 1, esto es, $n = d^2m$ con $d > 1$. Entonces, $x = (d-1)^2m$ y $y = m$ satisfacen la ecuación, pues $\sqrt{x} + \sqrt{y} = (d-1)\sqrt{m} + \sqrt{m} = d\sqrt{m} = \sqrt{n}$.
Para el recíproco, supongamos que (x, y) es una solución de la ecuación. Elevando al cuadrado ambos lados de la ecuación y reacomodando términos, obtenemos que $\sqrt{xy} = \frac{n-x-y}{2}$ el cual es un número racional. Esto implica que xy debe ser el cuadrado de un número racional y, como x y y son enteros positivos, necesariamente xy es el cuadrado de un entero. Sea $d = (x, y)$, donde $x = dx_1$ y $y = dy_1$ con $(x_1, y_1) = 1$. Entonces, $xy = d^2x_1y_1$, por lo que x_1y_1 también es un cuadrado perfecto. Como x_1 y y_1 son primos relativos, entonces los dos deben ser cuadrados perfectos. Sean $x_1 = x_2^2$ y $y_1 = y_2^2$. Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos que

$$n = \left(\sqrt{dx_2^2} + \sqrt{dy_2^2}\right)^2 = d(x_2 + y_2)^2,$$

donde $x_2 + y_2 \geq 2$. Esto completa la prueba.

Solución del problema 16. Haciendo $m = n$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(f(n)) = f(n+1)$$

para todo número natural n.
Si $f(a) = f(b)$, entonces $f(a+1) = f(f(a)) = f(f(b)) = f(b+1)$. Una fácil inducción muestra que $f(a+k) = f(b+k)$ para cualesquiera enteros positivos a, b, k tales que $f(a) = f(b)$. En particular, esta relación se da para $a = f(n), b = n+1$, por lo cual lo anterior implica que

$$f(f(n) + k) = f(n + 1 + k) \tag{1}$$

para cualesquiera enteros positivos n, k. Una doble aplicación de la relación (1) implica que

$$f(f(n) + m) = f(n + 1 + m) = f(m + 1 + n) = f(f(m) + n) \tag{2}$$

para cualesquiera números naturales m, n.
Así, por (2), la ecuación funcional se simplifica a $f(f(n)) = f(m+1)$. Fijando n y variando m, esto inmediatamente implica que $f(m)$ es constante para $m \geq 2$, así que para algunos $c, d \in \mathbb{N}$, tenemos $f(n) = c$ si $n \geq 2$ y $f(1) = d$. Como $f(f(1)) = f(m+1)$, vemos que si c o d es igual a 1, entonces la otra es 1 también, y la función constante 1 claramente satisface la ecuación funcional. En otro caso, si $f(1) = d > 1$ y $f(n) = c > 1$ para $n \geq 2$, ambos lados de la ecuación funcional son iguales a $2c$. Por lo tanto, las funciones que satisfacen el problema son la función constante igual a 1 y la función $f(n) = c$ si $n \geq 2$ y $f(1) = d$, donde c y d son enteros mayores o iguales que 2.

Solución del problema 17. Corona gana si y solo si $k \leq 2^{n-1}$. Dividimos la solución en dos partes.

Parte 1. Si $k > 2^{n-1}$, entonces Banana gana. Hay exactamente 2^{n-1} subconjuntos S tales que $S \cap \{1,2\}$ es $\{1\}$ o bien $\{2\}$. Entonces Banana puede siempre evitar esos conjuntos, eligiendo una pregunta tal que $S \cap \{1,2\}$ es $\emptyset$ o bien $\{1,2\}$. De esta forma, las respuestas serán las mismas para $x = 1$ que para $x = 2$. Se sigue que Corona no será nunca capaz de distinguir entre 1 y 2, y así no puede determinar x con certeza.

Parte 2. Si $k \leq 2^{n-1}$, entonces Corona gana. De hecho, mostraremos que Corona puede garantizar a victoria en a lo más n turnos. Sea T_i el conjunto de todos los posibles candidatos de x después del i-ésimo turno donde $T_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Afirmación. Siempre que $|T_{i-1}| \geq 2$, Corona puede jugar el i-ésimo turno para lograr $|T_i| \leq |T_{i-1}| - 1$.

Demostración. Construimos las i-ésimas preguntas como sigue. Sea $r = |T_i|$. Observemos que hay $2^n - 2^{n-r+1} \geq 2^{n-1}$ subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $S \cap T_{i-1}$ no es ni el conjunto vacío ni T_{i-1}. Entonces, podemos elegir k de ellos y formar un conjunto de preguntas. De esta forma, sin importar la pregunta que responda Banana, podrá descartarse algún elemento de T_{i-1} como candidato a x. Luego, Corona puede eliminar algún número de T_{i-1} y así $|T_i| < |T_{i-1}|$, como se quería. $\square$

Corona puede entonces reducir el número de candidatos de n a 1, eventualmente encontrando x.

Solución del problema 18. Demostraremos más generalmente que si

$$\lceil a \rceil + \lceil b \rceil + \lceil c \rceil + \lfloor a+b \rfloor + \lfloor b+c \rfloor + \lfloor c+a \rfloor = 3k+1$$

para algún entero k, entonces $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + \lfloor c \rfloor + \lceil a+b+c \rceil \geq 2k$.
En efecto, notemos que al sumar (restar) 1 a cualquiera de las variables, el lado izquierdo de la ecuación aumenta (dismunuye) en 3 y el lado izquierdo de la desigualdad aumenta (disminuye) en 2. Así que basta tratar el caso en que $a, b, c \in [0, 1)$. En este caso, tenemos que $k = 0$ o $k = 1$. Si $k = 0$, no hay nada que demostrar. Por lo que podemos suponer $k = 1$, esto es,

$$\lceil a \rceil + \lceil b \rceil + \lceil c \rceil + \lfloor a+b \rfloor + \lfloor b+c \rfloor + \lfloor c+a \rfloor = 4.$$

Así que exactamente cuatro de los sumandos deben ser distintos de 0. Entonces ninguna de las variables puede ser cero. Luego, los tres primeros sumandos son 1 y sin pérdida de generalidad, $a+b \geq 1$. Entonces, $a+b+c > 1$ y, por consiguiente, $\lceil a+b+c \rceil \geq 2$, como se quería.

Solución del problema 19. Sea $P_k(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ la aserción del problema.

Afirmación. Considera $2k+1$ enteros positivos $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_k, p$ tales que p es primo, $p \mid y_1$, $p \nmid x_i$, y $p \nmid y_i$ para cada $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Si

$$\frac{x_1}{y_1'} + \frac{x_2}{y_2'} + \cdots + \frac{x_k}{y_k'} = m$$

es un entero para alguna permutación $y_1', y_2', \ldots, y_k'$, entonces $y_1' = y_1$ y $p \mid x_1$.

Demostración. Sea l el índice tal que $y_l' = y_1$ y sea

$$\frac{x_l}{y_1} = m - \left(\frac{x_1}{y_1'} + \cdots + \frac{x_{l-1}}{y_{l-1}'} + \frac{x_{l+1}}{y_{l+1}'} + \cdots + \frac{x_k}{y_k'}\right) = \frac{q}{r}$$

para algunos enteros primos relativos q y r. Como $p \nmid y_i$ para $i \neq 1$, r tampoco puede ser divisible por p. Ahora, $x_l/y_1 = q/r$, y $p \mid y_1$, $p \nmid r$, y así $p \mid x_l$. Dado que p no divide a ninguno de los enteros $x_2, x_3, \ldots, x_n$, la única forma en que esto puede pasar es que $l = 1$ y $p \mid x_1$, como se deseaba. $\square$

Para cualesquiera enteros positivos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, escojamos un primo p más grande que a_i y $f(a_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Por la afirmación anterior, $P_k(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, p)$ implica que $b_k = p$ y $p \mid f(p)$. Por lo tanto,

$$\frac{f(a_1)}{b_1} + \frac{f(a_2)}{b_2} + \cdots + \frac{f(a_{k-1})}{b_{k-1}}$$

es un entero, donde $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$. Esto muestra que $P_{k-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ también debe ser cierto.
Iterando este argumento repetidamente, obtenemos $P_1(a_1)$, lo que significa exactamente que $a_1 \mid f(a_1)$ para todo entero positivo a_1, que es lo que queríamos demostrar.

Solución del problema 20. Supongamos que $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{22}$. Si $a_4 \geq 3$, entonces

$$59 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{22} \geq 1 \cdot 3 + 3 \cdot 19 = 60,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 2$ y, por consiguiente, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 + x$ con $0 \leq x \leq 4$.
Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a_1+1} + \frac{a_2}{a_2+1} + \cdots + \frac{a_{22}}{a_{22}+1} &= \frac{(a_1+1)-1}{a_1+1} + \frac{(a_2+1)-1}{a_2+1} + \cdots + \frac{(a_{22}+1)-1}{a_{22}+1} \\ &= 22 - \left(\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{22}+1}\right). \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad media aritmética - media armónica, tenemos que

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \frac{1}{a_3+1} + \frac{1}{a_4+1} \geq \frac{4^2}{(a_1+1) + \cdots + (a_4+1)} = \frac{4^2}{(4+x)+4}$$

y

$$\frac{1}{a_5+1} + \cdots + \frac{1}{a_{22}+1} \geq \frac{18^2}{(a_5+1) + \cdots + (a_{22}+1)} = \frac{18^2}{59-(4+x)+18}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_{22}}{a_{22}+1} &\le 22-\left(\frac{4^2}{(4+x)+4}+\frac{18^2}{59-(4+x)+18}\right)\\
&= 16+6-\frac{16}{8+x}-\frac{324}{73-x}\\
&= 16-\frac{-6(8+x)(73-x)+16(73-x)+324(8+x)}{(8+x)(73-x)}\\
&= 16-\frac{2(3x^2-41x+128)}{(8+x)(73-x)}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $0 \le x \le 4$, tenemos que $(8+x)(73-x) > 0$. Además, $3(x-4)^2 \ge 0$, esto es, $3x^2-24x+48 \ge 0$, lo cual implica que $3x^2-41x+128 \ge 80-17x > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\cdots+\frac{a_{22}}{a_{22}+1} \le 16-\frac{2(80-17x)}{(8+x)(73-x)} < 16.$$

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2020 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Determina todos los enteros x, y tales que $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Problema 2. Determina todos los números reales q tales que la ecuación

$$x^4 - 40x^2 + q = 0$$

tenga cuatro raíces reales en progresión aritmética.

Problema 3. Demuestra que la ecuación $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ tiene una infinidad de soluciones en los enteros.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D y E puntos sobre los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $BD = CE$. Los segmentos BE y CD se cortan en P y las circunferencias circunscritas a los triángulos BDP y CEP se cortan por segunda vez en Q. Demuestra que AQ es bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Problema 5. Demuestra que $\dfrac{1}{\varphi(n)}+\dfrac{1}{\sigma(n)} \geq \dfrac{2}{n}$ para todo entero positivo n y determina cuándo se da la igualdad.
(Nota: $\sigma(n)$ denota a la suma de los divisores positivos de n y $\varphi(n)$ denota al número de enteros positivos menores o iguales que n y primos relativos con n).

Problema 6. Sea $a_0 = 1$ y $a_n = a_{n-1}\left(4 - \frac{2}{n}\right)$ para $n \geq 1$. Para cada entero $n \geq 1$, demuestra que

a) a_n es un entero positivo.

b) a_n es divisible por cada número primo p tal que $n < p \leq 2n$.

c) Si n es primo, entonces $a_n - 2$ es divisible entre n.

Problema 7. Considera la sucesión

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots, 2022, 2022,$$

donde cada entero positivo entre 1 y 2022 inclusive, aparece exactamente dos veces. Determina si es posible reordenar los términos de la sucesión, de tal manera que para cada $1 \leq k \leq 2022$, haya exactamente k números entre los dos términos que son iguales a k.

Problema 8. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H. Sean A_1, B_1 y C_1 los pies de las alturas del triángulo ABC opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Sean B_2 y C_2 los puntos medios de BB_1 y CC_1, respectivamente. Sea O la intersección de las rectas BC_2 y CB_2. Demuestra que O es el circuncentro del triángulo ABC si y solo si H es el punto medio de AA_1.

Problema 9. Determina todas las parejas (m, n) de enteros positivos tales que $\dfrac{n^2+1}{2m}$ y $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ sean números enteros.

Problema 10. Sea n un entero mayor que 1. Cierta escuela tiene $1+2+\cdots+n$ alumnos y cuenta con n salones, con espacio para $1, 2, \ldots, n$ personas, respectivamente. Los niños juegan un juego en k rondas como sigue: en cada ronda, cuando suena la campana, los alumnos se distribuyen en los salones de tal forma que no excedan su capacidad y, si dos alumnos compartían salón en alguna ronda, ya no pueden hacerlo en esta. Para cada n, determina el máximo valor posible de k.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2019 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2019. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a: Guillermo Courtade Morales, Milton Adolfo Lozano Arroyo, Adrián Jesús Peña Reséndiz y Luis Francisco Medina Quintero por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2020, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean a, b, c y d números reales distintos entre sí. Si a y b son las soluciones de $x^2 - 10cx - 11d = 0$ y, c y d son las soluciones de $x^2 - 10ax - 11b = 0$, determina el valor de la suma $a + b + c + d$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Como a y b son soluciones de la ecuación $x^2 - 10cx - 11d = 0$, tenemos que $a + b = 10c$. De manera análoga, como c y d son soluciones de la ecuación $x^2 - 10ax - 11b = 0$, tenemos que $c + d = 10a$. Luego, obtenemos que $a + b + c + d = 10(a + c)$.
Por otro lado, como a es solución de la ecuación $x^2 - 10cx - 11d = 0$ y $d = 10a - c$, tenemos que

$$0 = a^2 - 10ac - 11d = a^2 - 10ac - 11(10a - c) = a^2 - 110a + 11c - 10ac.$$

De manera análoga, como c es solución de la ecuación $x^2 - 10ax - 11b = 0$ y $b = 10c - a$, tenemos que

$$0 = c^2 - 10ac - 11b = c^2 - 10ac - 11(10c - a) = c^2 - 110c + 11a - 10ac.$$

Restando estas dos últimas ecuaciones, obtenemos que $(a - c)(a + c - 121) = 0$ y, como $a \neq c$, necesariamente $a+c = 121$. Por lo tanto, $a+b+c+d = 10(121) = 1210$.

Problema 2. Para cada entero $k > 1$, definimos $p(k)$ como el mayor divisor primo de k. Una sucesión a_n de enteros positivos satisface que $a_1 > 1$ y $a_{n+1} = a_n + p(a_n)$ para todo entero $n \geq 1$. Demuestra que hay al menos un cuadrado en la sucesión a_n.

Solución. Consideremos la sucesión b_n definida por $b_n = \frac{a_n}{p(a_n)}$ para $n \geq 1$. Notemos que si $p(a_k) = p(a_{k+1})$, entonces $b_{k+1} = b_k + 1$, y si no, tenemos que $p(a_k) < p(a_{k+1})$, por lo que $b_{k+1} \leq b_k + 1$. Ahora mostraremos que la sucesión b_n no está acotada. Supongamos por contradicción que sí lo está. Claramente, la sucesión $p(a_n)$ no está acotada. Entonces, $p(a_N) > \text{máx}\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ para todo entero N suficientemente grande.
Afirmación. Si para algún entero k, $p(a_k) > b_k$, entonces $p(a_{k+1}) = p(a_k)$ y, por lo tanto, $b_{k+1} = b(k) + 1$.
Demostración. Tenemos que $a_{k+1} = (b_k + 1)p(a_k)$. Luego, $b_k + 1 \leq p(a_k)$, por lo que $p(a_k)$ es el mayor divisor primo de a_{k+1}. $\square$
Por esta afirmación, tenemos que

$$b_{N+1} = b_N + 1, b_{N+2} = b_{N+1} + 1, \ldots, b_{N+k} = b_{N+k-1} + 1,$$

donde para k se satisface $b_{N+k} = p(a_{N+k}) = p(a_N) > \text{máx}\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se sigue que la sucesión b_n no está acotada y, como b_n solo aumenta de 1 en 1, debe recorrer todo entero suficientemente grande; en particular debe haber un número primo. Así, existe un entero positivo j tal que b_j es primo. De esta manera, $a_j = b_j p(a_j)$. Si $b_j = p(a_j)$ terminamos. Si $b_j \neq p(a_j)$, consideremos los números $p = \text{máx}\{b_j, p(a_j)\}$ y $r = \text{mín}\{b_j, p(a_j)\}$. En este caso, tenemos que

$$a_{j+1} = p(r+1), a_{j+2} = p(r+2), \ldots, a_{j+(p-r)} = p(r+(p-r)) = p^2,$$

con lo que concluimos.

Problema 3. Sean a, b y c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Multiplicando la desigualdad a demostrar por $(a+b)(b+c)(c+a)$, se busca demostrar que

$$(b+c)(c+a)[a^2b(b-c)] + (a+b)(c+a)[b^2c(c-a)] + (a+b)(b+c)[c^2a(a-b)] \geq 0.$$

Simplificando, obtenemos que $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b$. Aplicando la desigualdad MA-MG, obtenemos que $a^3b^3 + a^3b^3 + c^3a^3 \geq 3\sqrt[3]{a^9b^6c^3} = 3a^3b^2c$, $b^3c^3 + b^3c^3 + a^3b^3 \geq 3\sqrt[3]{b^9c^6a^3} = 3b^3c^2a$ y $c^3a^3 + c^3a^3 + b^3c^3 \geq 3\sqrt[3]{c^9a^6b^3} = 3c^3a^2b$. Sumando estas últimas tres desigualdades y dividiendo entre 3, se obtiene el resultado deseado.

Solución alternativa. Consideremos las sustituciones $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$. Debemos probar que $\frac{x-z}{y+z} + \frac{y-x}{z+x} + \frac{z-y}{x+y} \geq 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x \geq y \geq z$. Entonces, $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{x+z} \geq \frac{1}{x+y}$ y, por la desigualdad del reacomodo, obtenemos que $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y}$, de donde se sigue el resultado.

Problema 4. Determina todos los enteros positivos n tales que $7^n - 1$ sea divisible entre $6^n - 1$.

Solución de Adrián Jesús Peña Reséndiz. Supongamos que $6^n - 1$ divide a $7^n - 1$ para algún entero positivo n. Como $6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \cdots + 6 + 1)$, necesariamente 5 también divide a $7^n - 1$. Observemos que las potencias de 7 dejan residuos $2, 4, 3, 1, \ldots$ al dividirse por 5 y estos residuos se repiten periódicamente. Luego, $7^n - 1$ es divisible entre 5 si y solo si n es divisible entre 4, esto es, $n = 4k$. Es claro que $6^4 - 1$ divide a $6^{4k} - 1$, ya que $6^{4k} - 1 = (6^4 - 1)(6^{4(k-1)} + \cdots + 6^4 + 1)$. Además, 7 divide a $6^4 - 1 = (6^2 - 1)(6^2 + 1) = 35 \cdot 37 = 5 \cdot 7 \cdot 37$, lo que implica que 7 divide a $6^n - 1$ y, en consecuencia, 7 divide a $7^n - 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existen enteros positivos n tales que $7^n - 1$ sea divisible entre $6^n - 1$. Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo.

Problema 5. En un tablero de 8×8 se escriben los números $1, 2, \ldots, 64$, uno en cada casilla. Después se colocan cuadrados de 2×2 sobre el tablero, de modo que no se traslapen entre sí y que cada cuadrado cubra exactamente cuatro casillas del tablero, con la propiedad de que la suma de las casillas que cubre sea menor que 100. Encuentra el mayor número de cuadrados de 2×2 que se pueden poner en el tablero y, para dicho máximo, da un ejemplo de un tablero al que se le puedan colocar tal cantidad de cuadrados.

Solución de Adrián Jesús Peña Reséndiz. El mayor número de cuadrados posible de 2×2 es 12. Para el acomodo, basta con agrupar $1, 2, 47, 48$ en el subtablero de 2×2 de la esquina superior izquierda del tablero, en el siguiente subtablero de 2×2 colocar $3, 4, 45, 46$, y así sucesivamente, hasta colocar $23, 24, 25, 26$ en un mismo subtablero de 2×2. Con esto logramos que se puedan colocar 12 cuadrados de 2×2, donde la suma correspondiente de cada uno es 98.
Ahora, supongamos que existe una forma de colocar los números en el tablero de modo que se pueden colocar 13 cuadrados de 2×2. La menor suma posible entre estos 13 cuadrados es $1 + 2 + \cdots + 52 = 26 \cdot 53 = 1378$. Como tenemos 13 cuadrados, por el principio de las casillas existe un cuadrado con suma mayor que 100, lo que es una contradicción. Con esto concluimos que 12 es el máximo buscado.
Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo.

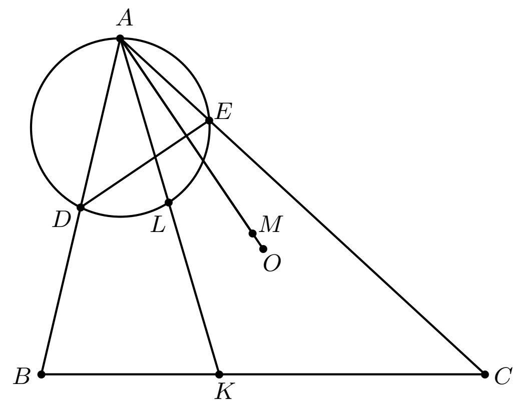
Problema 6. Cada punto del plano con coordenadas enteras se colorea con uno de tres colores, de manera que todos los colores son usados al menos una vez. Demuestra que siempre puedes encontrar un triángulo rectángulo con todos sus vértices de coordenadas enteras y de distinto color.

Solución. Procederemos por contradicción, supongamos que existe una coloración de manera que no existe tal triángulo. Dado un punto A, diremos que un punto B es su vecino si este se encuentra a distancia 1 de A. De esta manera es claro que cada punto tiene 4 vecinos. Ahora veamos que debe haber dos puntos A y B vecinos que son de distinto color, esto es fácil puesto que si no hubiera dos vecinos de distinto color entonces todo el plano estaría pintado de un color, por lo tanto hay dos vecinos de diferente color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que estos vecinos son $A(0, 0)$ de color rojo y $B(1, 0)$ de color azul. Si existe $C(a, 0)$ distinto de A y B de color verde, es fácil ver que los puntos $P(0, y)$ deben ser rojos, los puntos $Q(1, y)$ deben ser azules y los puntos $R(a, y)$ deben ser verdes para que no se forme ningún triángulo tricolor. Pero entonces el punto $D(a, 1)$ es verde y el punto $E(0, a - 1)$ es rojo, lo que implica que el triángulo DBE es rectángulo y tricolor, lo que es una contradicción. Si no existe tal C consideremos el punto verde $P(a, b)$ con $b \neq 0$ y $a \neq 0, 1$ (esto se necesita para no formar un triángulo rectángulo tricolor). Por hipótesis, el punto $Q(a, 0)$ no es verde. Si Q es azul, el triángulo AQP es tricolor; si Q es rojo, entonces el triángulo BQP es tricolor, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe un triángulo rectángulo tricolor.

Problema 7. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncentro O. Una recta perpendicular a AO, corta a AB y a AC en D y E, respectivamente. Sea K un punto en el lado BC, distinto de la intersección de AO con BC. La recta AK corta al circuncírculo del triángulo ADE en L que es diferente de A. Sea M la reflexión de A por DE.

Demuestra que los puntos K, L, M y O son concíclicos.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Claramente el cuadrilátero $BCED$ es cíclico y, por consiguiente, $\angle DLA = \angle DEA = \angle KBD$, lo cual implica que el cuadrilátero $DLKB$ también es cíclico.



Además, como el triángulo ADM es isósceles, tenemos que $\angle DAM = \angle AMD$ lo que implica que el cuadrilátero $BDMO$ es cíclico. Por último, por los cíclicos $DLKB$ y $BDMO$, tenemos que $AK \cdot AL = AD \cdot AB = AO \cdot AM$, de donde se sigue que los puntos K, L, M y O son concíclicos.
Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo.

Problema 8. Sean p y q números primos tales que $p + q^2$ es un cuadrado. Demuestra que $p^2 + q^n$ no es un cuadrado para todo entero positivo n.

Solución de Adrián Jesús Peña Reséndiz. Supongamos, por contradicción, que existe un entero positivo n tal que p^2+q^n es un cuadrado. Por hipótesis, tenemos que $p+q^2 = x^2$ para algún entero x, esto es, $p = (x + q)(x - q)$. Claramente, $x > q$ y, como p es primo y $x + q > 2$, necesariamente $x - q = 1$ y, por consiguiente, $p = 2q + 1$.
También tenemos que $p^2 + q^n = y^2$ para algún entero y, esto es, $q^n = (y + p)(y - p)$. Si $y - p = 1$, entonces $y + p = 4q + 3 = q^n \geq q$, de donde se sigue que q divide a 3. Como q es primo, la única posibilidad es $q = 3$ y así, $4q + 3 = 15$ que no es potencia de 3. Esto muestra que el caso $y-p = 1$ no es posible. Ahora, si $y-p = q^\alpha$ para algún entero $\alpha > 0$, entonces $y+p = q^{n-\alpha}$ y $2p = q^{n-\alpha} - q^\alpha$. Como q divide a $q^{n-\alpha} - q^\alpha$, se sigue que q divide a $2p$. Dado que $\text{mcd}(p, q) = \text{mcd}(2q + 1, q) = 1$, concluimos que $q \mid 2$ y, como q es primo, la única posibilidad es $q = 2$. Luego, $p = 2q + 1 = 5$ y $2^n = (y + 5)(y - 5)$, de donde cada uno de $y + 5$ y $y - 5$ es una potencia de 2, lo cual es fácil ver que no es posible.
Este problema también fue resuelto por Milton Adolfo Lozano Arroyo y Luis Francisco Medina Quintero.

Problema 9. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

para cualesquiera números reales x, y.

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Sustituyendo $x = y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0)^2 = 0$, esto es, $f(0) = 0$. Sustituyendo ahora $x = y = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(1)(1 + f(1)) = 2f(1)$, esto es, $f(1)^2 = f(1)$, de donde se sigue que $f(1) = 0$ o $f(1) = 1$.
Si $f(1) = 0$, con $x = 1$ obtenemos que $f(y)(1 + f(y)) = f(y)$ para todo número real y, esto es, $f(y)^2 = 0$ para todo número real y, lo que significa que $f(y) = 0$ para todo número real y.
Si $f(1) = 1$, con $y = 1$ obtenemos que $f(x)(x + 1) = x^2 + f(x)$ para todo número real x, esto es, $xf(x) = x^2$ para todo número real x. Si $x \neq 0$, entonces $f(x) = x$ y, como $f(0) = 0$, se sigue que $f(x) = x$ para todo número real x.
Finalmente, es fácil ver que las funciones $f(x) = 0$ y $f(x) = x$ satisfacen la ecuación funcional y, por lo tanto, son las únicas soluciones.
Este problema también fue resuelto por Adrián Jesús Peña Reséndiz.

Problema 10. Sea n un entero positivo. Determina todos los números reales positivos x tales que

$$\frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \cdots + \frac{(n+1)^2}{x+n} + nx^2 = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

Solución de Milton Adolfo Lozano Arroyo. Observemos primero que $\frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} + n = (\sum_{k=1}^{n} k) + n$. Entonces, la ecuación dada es equivalente a la ecuación

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{x+k} + nx^2 - \sum_{k=1}^{n} x - \sum_{k=1}^{n} k - n = 0,$$

esto es,

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(k+1)^2}{x+k} - (x+k)\right] + nx^2 - n = 0.$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{(k+1)^2}{x+k} - (x+k) = \frac{(k+1)^2 - (x+k)^2}{x+k} = (1-x)\left(1 + \frac{k+1}{x+k}\right).$$

Luego, la ecuación que debemos resolver es

$$(1-x)\left(n + \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{x+k}\right) + n(x^2-1) = 0,$$

esto es,

$$(1-x)\left[n + \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n}\right) - n(1+x)\right] = 0.$$

Claramente, $x = 1$ es solución. Supongamos que $x \neq 1$. Entonces, la ecuación anterior es equivalente a la ecuación

$$n + \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n} \right) = n(1+x),$$

esto es,

$$\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} + \cdots + \frac{n+1}{x+n} = nx.$$

Si $0 < x < 1$, entonces cada una de las n fracciones del lado izquierdo en la igualdad anterior es mayor que 1 y, en consecuencia, el lado izquierdo es mayor que n. Sin embargo, el lado derecho es menor que n. Luego, en este caso, no hay soluciones.
Si $x > 1$, entonces cada una de las n fracciones del lado izquierdo en la igualdad anterior es menor que 1 y, en consecuencia, el lado izquierdo es menor que n. Sin embargo, el lado derecho es mayor que n. Luego, en este caso, no hay soluciones.
Por lo tanto, la única solución positiva es $x = 1$.

Competencia Internacional de Matemáticas 2019 (Nivel Secundaria)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2019 (SAIMC 2019), se celebró en Durban, Sudáfrica, del 1 al 6 de agosto de 2019. En esa ocasión, México participó con un equipo de Primaria y un equipo de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, dos medallas de plata, tres medallas de bronce y dos menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de oro y una medalla de bronce.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. Es decir, solo el 6 % recibe una medalla de oro, por lo que no es extraño que se necesiten al menos 13 respuestas correctas para conseguirla. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso nacional que se toma muy en serio el concurso, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años: el proceso Nacional empieza en junio con el Concurso Nacional de la OMMEB y concluye en agosto del siguiente año con el viaje a la IMC: 14 meses de proceso selectivo. En esa ocasión, el equipo de Secundaria estuvo integrado por

- Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
- Jacobo (Yucatán).
- Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
- Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).

Mikel obtuvo medalla de plata mientras que Karla, Jacobo y Luis Eduardo obtuvieron medallas de bronce. Como equipo obtuvieron medalla de oro.

A continuación presentamos los enunciados y las soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel secundaria de la IMC del año 2019.

Examen Individual, Nivel Secundaria

Sección A

Problema 1. Al aplicarle la función F a cualquier entero positivo de cuatro dígitos $\overline{abcd}$, se obtiene otro entero positivo, de acuerdo a la regla:

$$F(\overline{abcd}) = a^4 + b^3 + c^2 + d^1.$$

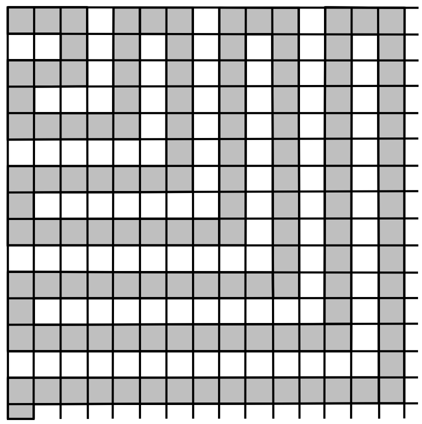
Por ejemplo, $F(2019) = 2^4 + 0^3 + 1^2 + 9^1 = 26$. Encuentra el valor de

$$F(2019) - F(2018) + F(2017) - F(2016) + \cdots - F(2000).$$

Problema 2. ¿Cuál es el menor entero positivo n tal que $55n^3$ tiene exactamente 55 divisores positivos (incluyendo al 1 y a sí mismo)?

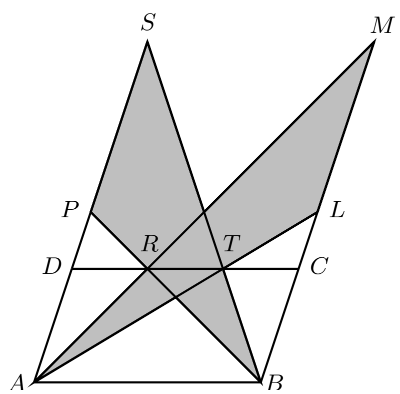
Problema 3. Tres cajas A, B y C contienen 100, 50 y 80 canicas, respectivamente, todas del mismo tamaño, de las cuales algunas son negras. En la caja A hay 15 canicas negras. Se selecciona una caja al azar y se toma una canica de la caja, de nuevo al azar. La probabilidad de obtener una canica negra de esta manera es $\frac{101}{600}$. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de canicas negras en la caja C?

Problema 4. Se comienza con una cuadrícula de 101×101 cuadritos blancos. Una cadena se forma coloreando cuadritos grises como en la figura (se muestra la esquina superior izquierda de la cuadrícula). La cadena empieza en la esquina superior izquierda y termina cuando ya no se puedan colorear más cuadritos siguiendo la regla. En total, ¿cuántos cuadritos son de color gris en la cuadrícula completa de 101×101 cuadritos?



Problema 5. ¿Cuántos enteros positivos diferentes de tres dígitos existen tales que se pueden escribir como una suma de exactamente nueve potencias de 2 diferentes?

Problema 6. En la figura de abajo, los puntos R y T están sobre el lado CD del paralelogramo $ABCD$ tales que $DR = RT = TC$. Las rectas AR y AT intersecan a la extensión de BC en los puntos M y L, respectivamente, y las rectas BT y BR intersecan a la extensión de AD en los puntos S y P, respectivamente. Si el área del paralelogramo $ABCD$ es de $48\,\text{cm}^2$, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



Problema 7. Existen algunas parejas de enteros positivos (x, y) tales que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{20}}.$$

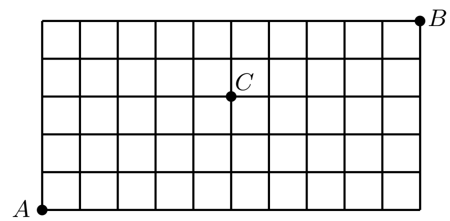
¿Cuántos valores distintos puede tomar el producto de x y y?

Problema 8. Existen algunas parejas de enteros (m, n) tales que

$$\frac{(m^2 + mn + n^2)}{(m + 2n)} = \frac{13}{3}.$$

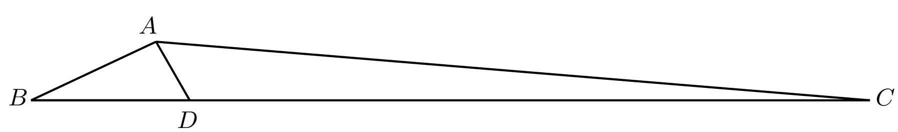
Encuentra el valor de $m + 2n$.

Problema 9. En la figura de abajo, una hormiga empieza en el punto A y se mueve por las líneas de la cuadrícula de tamaño 10×5. Solo se permite que vaya hacia arriba o hacia la derecha y no se permite pasar por el punto C. ¿De cuántas maneras puede la hormiga ir del punto A al punto B?

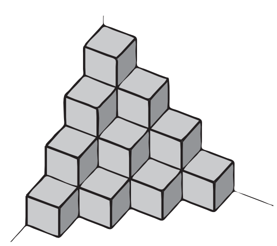


Problema 10. Se tiene una función f que va de los reales no negativos a los reales no negativos y que cumple que $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) = 3f(a)f(b)f(c)$ y que $f(1) \neq 1$, para cualesquiera reales no negativos a, b y c. Encuentra $f(2019)$.

Problema 11. En la figura de abajo, ABC es un triángulo tal que $\angle BAC = 150°$, $BC =$ 74 cm y el punto D está sobre BC tal que $BD = 14$ cm. Si $\angle ADB = 60°$, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?



Problema 12. En la figura de abajo, se tiene una cierta cantidad de cubitos apilados uno encima de otro para formar una torre triangular que cabe en la esquina de una habitación. Si se usan exactamente 1330 cubitos idénticos, ¿cuántos niveles tiene la torre? Note que no todos los cubitos se pueden observar desde este punto de vista.



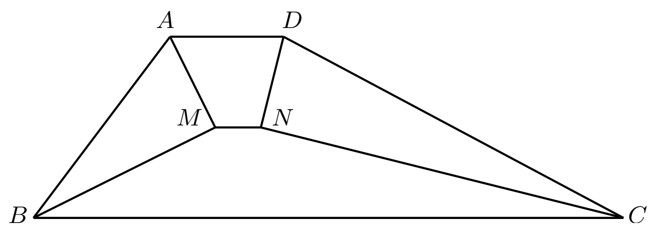
Sección B

Problema 1. La sucesión creciente $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$ consiste de todos los enteros positivos que pueden ser expresados como potencias de 3 o como suma de potencias distintas de 3. Encuentra el 100° término de la sucesión.

Problema 2. Encuentra todas las parejas de enteros (x, y) que satisfacen la ecuación

$$7x^2 - 40xy + 7y^2 = (|x-y|+2)^3.$$

Problema 3. En el cuadrilátero $ABCD$, $BC \parallel AD$, $BC = 26$ cm, $AD = 5$ cm, $AB = 10$ cm y $CD = 17$ cm. Las bisectrices de $\angle A$ y $\angle B$ se intersecan en M mientras que las bisectrices de $\angle C$ y $\angle D$ se intersecan en N. Encuentra la medida, en cm, de MN.

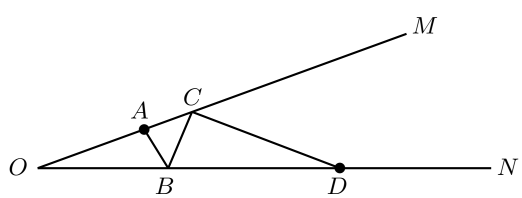


Examen por Equipos, Nivel Secundaria

Problema 1. Encuentra todas las tripletas de enteros positivos (I, M, C), donde I, M y C son números primos y $I \leq M \leq C$, tales que $IMC = I + M + C + 1007$.

Problema 2. Se eligen N enteros de 2021 enteros positivos consecutivos tales que la diferencia entre cualesquiera dos de ellos no sea un número primo. Encuentra el mayor valor posible de N.

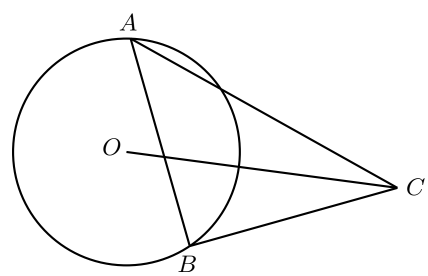
Problema 3. En la figura de abajo, los puntos A y C se encuentran en el rayo OM y los puntos B y D están en el rayo ON. Se sabe que $OA = 6$ cm, $OD = 16$ cm y que $\angle NOM = 20^\circ$. ¿Cuál es el menor valor posible, en cm, de $AB + BC + CD$?



Problema 4. Determina el número de parejas ordenadas de dígitos (a, b) tales que el número $\overline{2a1b9}^{2019}$ deja residuo 1 al dividirse entre 13. ($\overline{2a1b9}$ es un número de cinco dígitos).

Problema 5. Se tienen 10 pelotas rojas idénticas, 15 pelotas negras idénticas y 20 pelotas blancas idénticas. Se quieren distribuir todas las pelotas a dos niños y una niña. Cada uno de los niños debe recibir al menos 2 pelotas de cada color y la niña debe recibir al menos 3 pelotas de cada color. ¿De cuántas maneras distintas se pueden distribuir las pelotas a los tres niños?

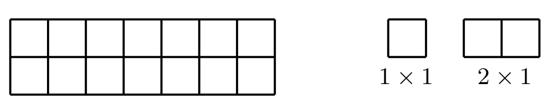
Problema 6. El punto B es un punto arbitrario en una circunferencia de centro O y radio 1 cm. ABC es un triángulo con A sobre la circunferencia tal que $AB = BC$ y $\angle ABC = 90°$. Determina la mayor longitud posible, en cm, de OC.



Problema 7. Cada niña de un grupo de 14 niñas tiene una pieza jugosa diferente de un buen chisme, y es tentador el compartirlo con las otras niñas. En cada ronda, algunas o todas las niñas se agrupan en parejas y se comparten por teléfono todas las piezas distintas que saben en ese momento.
a) ¿Cuál es el mínimo número de rondas que se requieren para que todas las niñas sepan todas las piezas del chisme?
b) Muestra todas las llamadas por ronda para alcanzar el mínimo número posible de rondas.

Problema 8. En el plano, se eligen 5 puntos X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5, y cada pareja de estos puntos es conectada por una recta azul. Supóngase que no hay dos rectas azules paralelas o perpendiculares. Ahora, para cada punto X_i $(1 \leq i \leq 5)$ y cada recta azul L que no pase por X_i, se dibuja una recta roja que pase por X_i y que sea perpendicular a L. ¿Cuál es el máximo número de intersecciones que puede haber entre las rectas rojas?

Problema 9. Una pared de dimensiones 2×7 cuadritos se tiene que cubrir con piezas de cerámica. Se tienen dos tipos de piezas de cerámica disponibles: de tamaño 1×1 (idénticas) y de tamaño 2×1 (idénticas). La pieza de tamaño 2×1 puede ser rotada antes de ser colocada. Se tienen tantas piezas de cada tipo como sean necesarias. ¿De cuántas maneras se puede cubrir la pared con tales piezas de cerámica?



Problema 10. Para cualquier entero positivo x, sea $S(x)$ la suma de los dígitos de x en su representación decimal. Encuentra todas las soluciones de la ecuación

$$x = (S(x) + 9)^2.$$

Soluciones del Examen Individual

Sección A

Solución del Problema 1. Observemos que si $0 \leq d \leq 8$, entonces $d + 1$ también es un dígito y

$$F(\overline{abc(d+1)}) - F(\overline{abcd}) = (d+1) - d = 1.$$

Luego, la suma buscada la podemos calcular sumando por parejas como sigue

$$\begin{aligned} & [F(2019) - F(2018)] + [F(2017) - F(2016)] + \cdots + [F(2001) - F(2000)] \\ = & \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{10} = 10. \end{aligned}$$

Solución del Problema 2. Supongamos que $n = 5^{a_1}11^{a_2}p_3^{a_3}\cdots p_k^{a_k}$ con $p_3, \ldots, p_k$ primos distintos entre sí y distintos de 5 y 11 y, además, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ enteros no negativos. Como el número de divisores positivos de $55n^3$ es $55 = 5 \cdot 11$, aplicando la fórmula para el número de divisores positivos obtenemos que

$$(3a_1 + 2)(3a_2 + 2)(3a_3 + 1)\cdots(3a_k + 1) = 5 \cdot 11.$$

Como $3a_1 + 2 > 1$ y $3a_2 + 2 > 1$, existen primos q_1 y q_2 tales que q_1 divide a $3a_1 + 2$ y q_2 divide a $3a_2 + 2$. Luego, q_1 y q_2 dividen al lado derecho de la ecuación anterior, esto es, dividen a $5 \cdot 11$. Como q_1 y q_2 son primos, uno de ellos es 5 y el otro es 11. Por lo tanto, para que la iguadad anterior se sostenga necesariamente $a_3 = \cdots = a_k = 0$, lo que significa que los únicos divisores primos de n son 5 y 11. Así, $n = 5^{a_1}11^{a_2}$ y $(3a_1+2)(3a_2+2) = 5\cdot 11$. Como queremos el menor entero positivo n, necesariamente $3a_1 + 2 = 11$ y $3a_2 + 2 = 5$, de donde $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ y $n = 5^3 \cdot 11 = 1375$.

Solución del Problema 3. Sea y el número de canicas negras en la caja B y sea x el número de canicas negras en la caja C. La probabilidad de elegir una canica negra es

$$\frac{1}{3} \times \frac{15}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{y}{50} + \frac{1}{3} \times \frac{x}{80} = \frac{101}{600}.$$

Simplificando, obtenemos que $60 + 8y + 5x = 202$, de donde $8y + 5x = 142$. De aquí que $x = \frac{142-8y}{5} = 28 - y + \frac{2-3y}{5}$. Como x es un entero no negativo, $\frac{2-3y}{5}$ debe ser un entero, esto es, $3y \equiv 2 \pmod 5$. Multiplicando esta congruencia por 2, obtenemos que $y \equiv 4 \pmod 5$, esto es, $y = 5z + 4$. Si $z = 0$, entonces $y = 4$ y $x = 22$; si $z = 1$, entonces $y = 9$ y $x = 14$; si $z = 2$, entonces $y = 14$ y $x = 6$; si $z \geq 3$, entonces

$y \geq 19$ y $x < 0$. Por lo tanto, el mayor valor posible de x es 22, esto es, hay a lo más 22 canicas negras en la caja C.

Solución del Problema 4. Vamos a subdividir la cuadrícula de 101×101 cuadritos como sigue. En la esquina superior izquierda tenemos un cuadrito gris. Abajo de él tenemos dos piezas en forma de L, de las cuales una tiene 3 cuadritos (uno de los cuales es gris) y la otra tiene 5 cuadritos (los cuales son todos grises). Abajo de ellas hay otras dos figuras en forma de L, de las cuales una tiene 7 cuadritos (uno de los cuales es gris) y la otra tiene 9 cuadritos (los cuales son todos grises). Continuando de esta forma, de las últimas dos piezas en forma de L la primera tiene 199 cuadritos (uno de los cuales es gris) y la segunda tiene 201 cuadritos (los cuales son todos grises).
Por lo tanto, en la cuadrícula de 101×101 cuadritos hay un cuadrito gris junto con 50 pares de piezas en forma de L las cuales contienen

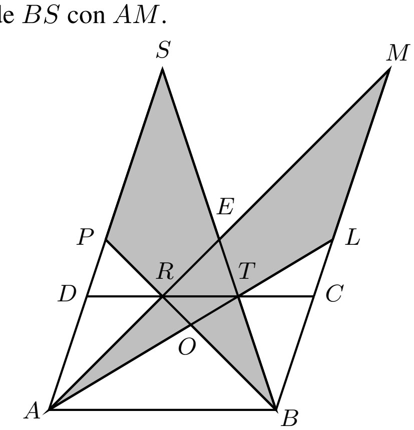
$$\begin{aligned}(1+5)+(1+9)+(1+13)+\cdots+(1+201) &= 6+10+14+\cdots+202\\ &= \frac{1}{2}\times 50\times(6+202) = 5200\end{aligned}$$

cuadritos grises, haciendo un total de 5201 cuadritos grises.

Solución alternativa. Observemos que el número de cuadritos blancos en la cuadrícula de 101×101 es igual a $2+6+10+14+\cdots+198 = \frac{1}{2}\times 50\times(2+198) = 5000$. Por lo tanto, el número de cuadritos grises en la cuadrícula es igual a $101\times 101 - 5000 = 5201$.

Solución del Problema 5. Las potencias de 2 menores que 999 son $2^0, 2^1, \ldots, 2^9$ cuya suma es igual a $2^{10} - 1 = 1023$. Como en total son 10 potencias de 2, debemos quitar exactamente una de estas de tal manera que la suma de las restantes sea un número de tres dígitos. La menor potencia de 2 que cumple esto es $2^5 = 32$. Luego, después de quitar consecutivamente cada una de las potencias $2^5, 2^6, 2^7, 2^8$ y 2^9 de la suma $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^9$, obtendremos cinco números de tres dígitos los cuales satisfacen la condición del problema.

Solución del Problema 6. Sea O el punto de intersección de AL con BP y sea E el punto de intersección de BS con AM.



Observemos que los triángulos ADR y MCR son semejantes, con $\frac{AD}{MC} = \frac{DR}{CR} = \frac{1}{2}$. Luego, si $AD = 2x$, entonces $MC = 4x$. Además, los triángulos TAD y TLC también son semejantes con $\frac{LC}{DA} = \frac{TC}{DT} = \frac{1}{2}$. Como $AD = 2x$, entonces $LC = x$. Luego, $MC - LC = 4x - x = 3x$. Por lo tanto, el área del triángulo MLA es igual a $\frac{3}{4}$ del área del paralelogramo $ABCD$ pues tiene $\frac{3}{2}$ de la base y la misma altura. Es decir, $(MLA) = 36$ cm^2. Análogamente, obtenemos que $(BPS) = 36$ cm^2.
Por otro lado, como $DR = TC = \frac{1}{3}CD$, el área de cada uno de los triángulos ADR y BCT es $\frac{1}{6}$ del área del paralelogramo $ABCD$, esto es, 8 cm^2. Luego, el área del trapezoide $ABTR$ es $48 - 8 - 8 = 32$ cm^2. Como $RT = \frac{1}{3}AB$ y $RT \parallel AB$, tenemos que $\frac{(ERT)}{(EAB)} = \frac{1}{9}$. Dicho de otra manera, $8(ERT) = (ABTR) = 32$ cm^2, esto es, $(ERT) = 4$ cm^2.
Por último, tenemos que los triángulos RTO y BAO también son semejantes con $\frac{RT}{AB} = \frac{1}{3}$. Luego, la altura del triángulo RTO sobre RT es un tercio de la altura del triángulo BAO sobre AB, esto es, un cuarto de la altura del paralelogramo $ABCD$ sobre AB. Por lo tanto, $(RTO) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{4}(ABCD) = \frac{1}{24}(ABCD) = 2$ cm^2.
Concluimos que el área de la región sombreada es igual a $36 + 36 - 4 - 2 = 66$ cm^2.

Solución del Problema 7. Tenemos que $\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{20}}{\sqrt{20x}}$ y, después de elevar al cuadrado, resulta que $\frac{1}{y} = \frac{x+20-4\sqrt{5x}}{20x}$, lo cual implica que $\sqrt{5x}$ es un número racional, pues x y y son enteros positivos. Ahora, como x es entero positivo y $\sqrt{5x}$ es racional, $5x$ es el cuadrado de un entero divisible por 5, esto es, $5x = (5a)^2$ para algún entero positivo a. Por lo tanto, $x = 5a^2$ para algún entero positivo a.
Un argumento análogo al anterior muestra que $y = 5b^2$ para algún entero positivo b. Entonces, la ecuación original es equivalente a la ecuación $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$, esto es, $2a + 2b = ab$. Esta ecuación la podemos reescribir en la forma $(a-2)(b-2) = 4$. Como $4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$, obtenemos que $(a, b) = (3, 6), (4, 4), (6, 3)$ y, por lo tanto, $(x, y) = (45, 180), (80, 80), (180, 45)$. Concluimos que hay dos valores distintos del producto xy, a saber, $45 \times 180 = 8100$ y $80 \times 80 = 6400$.

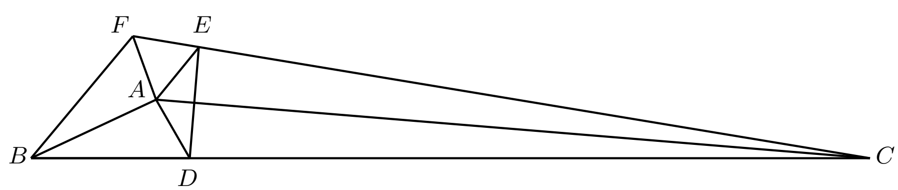
Solución del Problema 8. De la ecuación original tenemos que $m + 2n \neq 0$. La ecuación se puede reescribir como $3(m^2 + mn + n^2) = 13(m + 2n)$. Multiplicando por 4 obtenemos la ecuación $12(m^2+mn+n^2) = 52(m+2n)$ que se puede reescribir en la forma $3(3m^2 + (m + 2n)^2) = 52(m + 2n)$. Como 3 y 52 son primos relativos, se sigue que 3 divide a $m + 2n$, esto es, $m + 2n = 3k$ para algún entero k. Luego, $3(3m^2+(3k)^2) = 52(3k)$, esto es, $3(m^2+3k^2) = 52k$, lo cual implica que $3 \mid k$. Así, $k = 3t$ para algún entero t. Entonces, tenemos que $3(m^2 + 3(3t)^2) = 52(3t)$, esto es, $m^2 = 52t - 27t^2 = t(52-27t)$. Como $m^2 \geq 0$, tenemos que $t(52-27t) \geq 0$. Es fácil ver que si $t \geq 2$, entonces $52 - 27t < 0$ y, en consecuencia, $t(52 - 27t) < 0$, lo que es una contradicción. Análogamente, si $t < 0$, entonces $52 - 27t > 0$ y $t(52 - 27t) < 0$, lo que es una contradicción. Como t es entero, los únicos valores posibles de t son 0 y 1. Si $t = 0$, entonces $m + 2n = 3k = 9t = 0$, lo que es una contradicción. Si $t = 1$, entonces $m + 2n = 3k = 9t = 9$. Por lo tanto, la respuesta es $m + 2n = 9$.

Solución del Problema 9. Contemos los caminos que pasan por C y los restamos del

total de caminos que van de A a B. Recordemos que el número de caminos desde el punto $(0,0)$ hasta el punto (m,n) que solo van hacia arriba o hacia la derecha es igual a $\binom{m+n}{n}$.
Luego, el número de caminos que van de $A(0,0)$ a $B(10,5)$ que solo van hacia arriba o hacia la derecha es igual a $\binom{15}{5} = \frac{15!}{10!\times 5!} = 3\times 7\times 11\times 13 = 3003$.
Análogamente, el número de caminos de $A(0,0)$ a $C(5,3)$ que solo van hacia arriba o hacia la derecha es igual a $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!\times 3!} = 8\times 7 = 56$ y el número de caminos de $C(5,3) = C'(0,0)$ a $B(10,5) = B'(5,2)$ que solo van hacia arriba o hacia la derecha es igual a $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\times 5!} = 7\times 3 = 21$.
Por lo tanto, el número de caminos de A a B que solo van hacia arriba o hacia la derecha y que no pasan por C, es igual a $\binom{15}{5} - \binom{8}{3}\times\binom{7}{2} = 3003 - (56\times 21) = 1827$.

Solución del Problema 10. Si $a = b = c = 0$, entonces $3f(0) = 3f(0)^3$, esto es, $f(0)^3 - f(0) = 0$. Factorizando tenemos que $f(0)(f(0)+1)(f(0)-1) = 0$, lo cual implica que $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$ o $f(0) = -1$. Como $f(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, las posibilidades son $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 1$, entonces haciendo $a = 1$ y $b = c = 0$, obtenemos que $f(1) + 1 + 1 = 3f(1)$, lo cual implica que $f(1) = 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(0) = 0$. Haciendo $b = c = 0$, obtenemos que $f(a^3) = 0$ para todo número real $a \geq 0$ y, por lo tanto, $f(x) = 0$ para todo $x \geq 0$ (pues todo número real no negativo es el cubo de otro número real no negativo). En particular, tenemos que $f(2019) = 0$.

Solución del Problema 11. Sean BF y CF las reflexiones de BC por AB y CA, respectivamente. Entonces, A es el incentro del triángulo FBC.



Como $\angle BAC = 150°$, tenemos que $\angle ABC + \angle ACB = 30°$ y, en consecuencia, $\angle FBC + \angle FCB = 60°$. Luego, $\angle BFC = 120°$ y $\angle BFA = 60° = \angle ADB$. Por lo tanto, $AF = AD$ y $BF = BD = 14$ cm. Sea E el punto sobre FC tal que $AF = AE$. Entonces, $\angle AEF = \angle AFE = 60°$ y, por consiguiente, $AF = AE = EF$ y $\angle AEC = 120° = \angle ADC$. De aquí que $CE = CD = 60$ cm.
Ahora, si $AD = AF = AE = EF = x$ cm, entonces $CF = CE + EF = 60 + x$ cm. Aplicando ahora la ley de los cosenos en el triángulo BFC, tenemos que

$$\begin{aligned} BC^2 &= BF^2 + CF^2 - 2\times BF\times CF\times\cos(120°) \\ &= BF^2 + CF^2 + BF\times CF, \end{aligned}$$

esto es, $74^2 = 14^2 + (60+x)^2 + 14\times(60+x)$, de donde obtenemos que $x = 6$.
Por lo tanto, la altura del triángulo ABC sobre BC mide $\frac{\sqrt{3}}{2}AD = 3\sqrt{3}$ cm, de donde se sigue que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}\times 74\times 3\sqrt{3} = 111\sqrt{3}$ cm^2.

Solución del Problema 12. Para cada $n \geq 1$, sea L_n el número de cubos en el n-ésimo nivel de la torre. Observemos que $L_{n+1} = L_n + (n+1)$ para todo $n \geq 1$. Luego,

$$\begin{aligned} L_n &= L_{n-1} + n, \\ L_{n-1} &= L_{n-2} + n - 1, \\ &\vdots \\ L_2 &= L_1 + 2, \\ L_1 &= 1, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$L_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$

para todo $n \geq 1$.
Por lo tanto, el número de cubos en una torre con N niveles es igual a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 + \sum_{n=1}^{N} n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{N(N+1)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}\left(\frac{2N+1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{1}{6}N(N+1)(N+2). \end{aligned}$$

Para contestar la pregunta del problema, basta resolver la ecuación

$$\frac{1}{6}N(N+1)(N+2) = 1330 = 2 \times 5 \times 7 \times 19,$$

esto es, $N(N+1)(N+2) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 19 = 19 \times 20 \times 21$. Es fácil ver que $N = 19$ es la respuesta.

Sección B

Solución del Problema 1. Todos los números en la sucesión son potencias de 3 o sumas de potencias distintas de 3, de manera que se pueden expresar de la forma

$$3^n \times a_n + 3^{n-1} \times a_{n-1} + \cdots + 3^2 \times a_2 + 3^1 \times a_1 + 3^0 \times a_0,$$

donde cada a_i es igual a 0 o a 1. Luego, podemos pensarlo como si fuera un número binario. Como 100 en base 2 es $(1100100)_2$, el 100° término de la sucesión es el número

$$1 \times 3^6 + 1 \times 3^5 + 0 \times 3^4 + 0 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 0 \times 3^1 + 0 \times 3^0 = 729 + 243 + 9 = 981.$$

Solución del Problema 2. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x \geq y$. Sea $a = x - y$. Claramente, $a \geq 0$. Sustituyendo $x = a + y$ en la ecuación original, obtenemos que $7y^2 + 14ay + 7a^2 - 40y^2 - 40ay + 7y^2 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, esto es, $26y^2 + 26ay + a^3 - a^2 + 12a + 8 = 0$. Completando el cuadrado en y, obtenemos que

$$26\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + a^3 - \frac{15a^2}{2} + 12a + 8 = 0.$$

Observemos que

$$a^3 - \frac{15a^2}{2} + 12a + 8 = \frac{2a^3 - 15a^2 + 24a + 16}{2} = \frac{(a-4)^2(2a+1)}{2}.$$

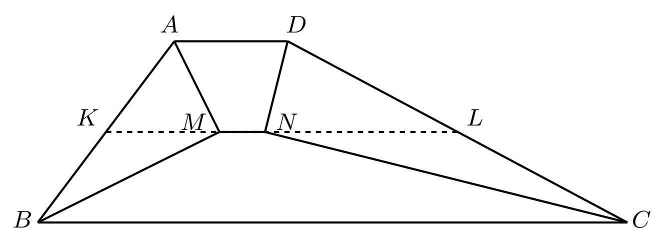
Luego, la ecuación es $26\left(y + \frac{a}{2}\right)^2 + (a-4)^2\frac{(2a+1)}{2} = 0$. Como $\frac{2a+1}{2} > 0$ (pues $a \geq 0$) y $26(y + \frac{a}{2})^2 \geq 0$, necesariamente, $(a-4)^2 = 0$, esto es, $a = 4$. Entonces, $26(y + \frac{a}{2})^2 = 0$, de donde se sigue que $y + \frac{a}{2} = 0$, esto es, $y = -\frac{a}{2} = -\frac{4}{2} = -2$. Esto implica que $x = a + y = 2$. Por lo tanto, tenemos la única solución $x = 2$, $y = -2$ con $x \geq y$. Intercambiando los papeles de x y y, obtenemos la solución $x = -2$, $y = 2$.

Solución alternativa. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \geq y$. La ecuación original se puede reescribir como

$$13(x+y)^2 + (x-y-4)^2(2(x-y)+1) = 0,$$

donde $2(x-y)+1 > 0$ y $13(x+y)^2 \geq 0$. Luego, debemos tener que $(x-y-4)^2 = 0$ y, por consiguiente, $13(x+y)^2 = 0$. Por lo tanto, tenemos que $x - y = 4$ y $x + y = 0$. Es fácil ver que la única solución de este sistema de ecuaciones es $x = 2$, $y = -2$. Intercambiando los papeles de x y y, obtenemos la solución $x = -2$, $y = 2$.

Solución del Problema 3. Sean K y L los puntos medios de AB y CD, respectivamente.



Como $\angle DAB + \angle ABC = 180°$, tenemos que $\angle MAB + \angle MBA = 90°$, de manera que $\angle AMB = 90°$. Por lo tanto, K es el circuncentro del triángulo AMB. Más aún, tenemos que $\angle AKM = \angle ABM + \angle KMB = 2\angle ABM = \angle ABC$. Se sigue que KM es paralela a BC, de manera que M está sobre KL. Análogamente, obtenemos que L es el circuncentro del triángulo CND y N también está sobre KL. Por lo tanto,

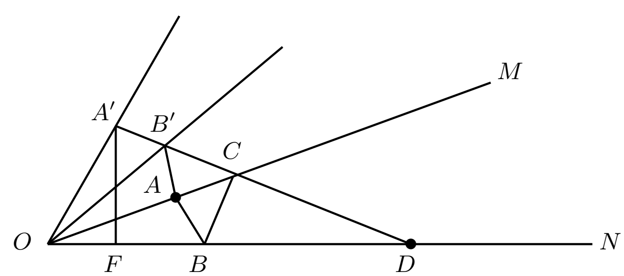
$$MN = KL - LM - LN = \frac{AD + BC}{2} - AK - DL = \frac{AD + BC - AB - CD}{2}$$
$$= 2 \text{ cm}.$$

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Si los tres números fueran impares, entonces el lado izquierdo de la ecuación sería impar y el lado derecho sería par, lo cual no es posible. Por lo tanto, uno de los números es par y, como el único primo par es 2, uno de ellos es 2. Por el orden de los números, necesariamente $I = 2$.
Ahora, si M y C fueran impares, el lado izquierdo de la ecuación sería par y el lado derecho sería impar, lo que no es posible. Luego, uno de los dos números es 2 y, necesariamente, $M = 2$.
Tenemos entonces la ecuación $4C = 1011 + C$, esto es, $3C = 1011$, de donde obtenemos que $C = \frac{1011}{3} = 337$.

Solución del Problema 2. Supongamos que tomamos un entero n. Entonces, ninguno de los enteros $n+2, n+3, n+5, n+7$ puede ser tomado. Tampoco podemos tomar a $n+1$ y $n+4$, pues difieren en 3 que es primo. Tampoco podemos tomar a $n+1$ y $n+6$, pues difieren en 5 que es primo. Tampoco podemos tomar a $n+4$ y $n+6$, pues difieren en 2 que es primo. Por lo tanto, podemos tomar a lo más uno de los siguientes 7 números, a saber, $n+1, n+4$ o $n+6$. Por lo tanto, podemos tomar a lo más 2 enteros de entre 8 enteros consecutivos. Como $2021 = 8 \times 252 + 5$, podemos tomar a lo más $N = 2 \times 252 + 2 = 506$ números. Por ejemplo, tomamos todos los 506 enteros positivos de la forma $4k+1$ entre los números: $1, 2, 3, \ldots, 2021$.

Solución del Problema 3. Reflejemos ON a través de OM tal que B', la imagen de B, esté sobre la imagen de ON. Reflejemos OM a través de la imagen de ON tal que A', la imagen de A, esté sobre la imagen de OM.



Por las reflexiones, podemos observar que $BA = AB' = A'B'$ y que $CB = CB'$, por lo que $AB + BC + CD = A'B' + B'C + CD$. Como se busca minimizar esta suma, es claro que se alcanza cuando A', B', C y D están en una misma línea recta. Entonces, podemos asumir que B' y C son los puntos de intersección del segmento $A'D$ con las imágenes de ON y OM, respectivamente.
Sea F un punto sobre OD tal que $A'F$ es perpendicular a OD. Como $\angle A'OF = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$, se sigue que $\angle A'FO = 90^\circ$ y $OA' = OA = 6$ cm, lo cual implica que $OF = \frac{A'O}{2} = 3$ cm y $A'F = \sqrt{3}OF = 3\sqrt{3}$ cm.
Por lo tanto, $FD = OD - OF = 16 - 3 = 13$ cm y $A'D^2 = 13^2 + (3\sqrt{3})^2 = 196 = 14^2$ cm^2, esto es, $A'D = 14$ cm.

Solución del Problema 4. Sea $\overline{2a1b9} = m$. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $m^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ para todo entero positivo m primo relativo con 13. Luego, $m^{2019} = m^{2016} \times m^3 = (m^{12})^{168} \times m^3 \equiv m^3 \pmod{13}$.
En la siguiente tabla mostramos los posibles residuos módulo 13 de cualquier cubo.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m^3	0	1	8	1	12	8	8	5	5	1	12	5	12

Como el problema nos pide que $m^3 \equiv 1 \pmod{13}$, de la tabla anterior podemos concluir que $m \equiv 1, 3$ o 9 módulo 13.
Por otro lado, observemos que un número de 5 dígitos $\overline{rstuv}$ es divisible por 13 si y solo si

$$\begin{aligned} &10^4 \times r + 10^3 \times s + 10^2 \times t + 10 \times u + v \\ \equiv\ & (3 \times r) + (-s) + (-4 \times t) + (-3 \times u) + v \\ \equiv\ & 0 \pmod{13}. \end{aligned}$$

Analizaremos en casos las posibilidades para m.

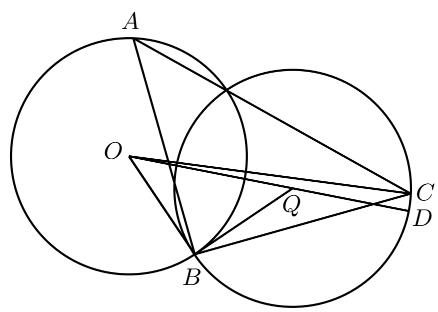
(i) Si $m = \overline{2a1b9} \equiv 1 \pmod{13}$, entonces $\overline{2a1b8}$ es divisible entre 13. Por lo tanto, $3(2)+(-a)+(-4)+(-3)b+8 = 13n$ para algún entero n, de donde $a+3b = 10-13n$. Como a y b son dígitos, tenemos que $0 \leq a+3b \leq 36$ y, por consiguiente, $-2 \leq n \leq 0$.
Si $n = 0$, entonces $a + 3b = 10$ y las parejas que cumplen son $(1, 3)$, $(4, 2)$ y $(7, 1)$.
Si $n = -1$, entonces $a + 3b = 23$ y las parejas que cumplen son $(2, 7)$, $(5, 6)$ y $(8, 5)$.
Si $n = -2$, entonces $a + 3b = 36$ y la única pareja que cumple es $(9, 9)$.
En este caso tenemos 7 parejas que satisfacen el problema.

(ii) Si $\overline{2a1b9} \equiv 3 \pmod{13}$, entonces $\overline{2a1b6}$ es divisible entre 13. Por lo tanto, $3(2)+(-a)+(-4)+(-3)b+6 = 13n$ para algún entero n, de donde $a+3b = 8-13n$. Como a y b son dígitos, tenemos que $0 \leq a+3b \leq 36$ y, por consiguiente, $-2 \leq n \leq 0$.
Si $n = 0$, entonces $a + 3b = 8$ y las parejas que cumplen son $(2, 2)$, $(5, 1)$ y $(8, 0)$.
Si $n = -1$, entonces $a + 3b = 21$ y las parejas que cumplen son $(0, 7)$, $(3, 6)$, $(6, 5)$ y $(9, 4)$.
Si $n = -2$, entonces $a + 3b = 34$ y la única pareja que cumple es $(7, 9)$.
En este caso tenemos 8 parejas que satisfacen el problema.

(iii) Si $\overline{2a1b9} \equiv 9 \pmod{13}$, entonces $\overline{2a1b0}$ es divisible entre 13. Por lo tanto, $3(2) + (-a)+(-4)+(-3)b+0 = 13n$ para algún entero n, de donde $a+3b = 2-13n$. Como a y b son dígitos, tenemos que $0 \leq a + 3b \leq 36$ y, por consiguiente, $-2 \leq n \leq 0$.
Si $n = 0$, entonces $a + 3b = 2$ y la única pareja que cumple es $(2, 0)$.
Si $n = -1$, entonces $a + 3b = 15$ y las parejas que cumplen son $(0, 5)$, $(3, 4)$, $(6, 3)$ y $(9, 2)$.
Si $n = -2$, entonces $a + 3b = 28$ y las parejas que cumplen son $(1, 9)$, $(4, 8)$ y $(7, 6)$.
En este caso tenemos 8 parejas que satisfacen el problema.
Tenemos en total $7 + 8 + 8 = 23$ parejas que satisfacen el problema.

Solución del Problema 5. Si un niño recibe 2 pelotas de cada color y una niña recibe 3 pelotas de cada color, entonces se entregan $2\times 2+3=7$ pelotas de cada color y quedan $10-7=3$ pelotas rojas, $15-7=8$ pelotas negras y $20-7=13$ pelotas blancas. Para repartir las restantes 3 pelotas rojas a los 3 niños, hay $\binom{3+3-1}{2}=10$ formas de hacerlo. Para repartir las restantes 8 pelotas negras hay $\binom{8+3-1}{2}=45$ formas de hacerlo. Para repartir las restantes 13 pelotas blancas hay $\binom{13+3-1}{2}=105$ formas de hacerlo. Por lo tanto, hay $10\times 45\times 105=47250$ formas de repartir las pelotas a los tres niños.

Solución del Problema 6. Observemos que el lugar geométrico que describe C al mover el punto A en la circunferencia de centro O, es otra circunferencia de centro Q, la cual se obtiene de rotar 90° en sentido antihorario a la circunferencia de centro O respecto al punto B. Observemos que $OQ=\sqrt{OB^2+QB^2}=\sqrt{2}$ cm.



Demostraremos que esto nos da el mayor valor posible de OC. Sea D el punto de intersección de la prolongación de OQ con la circunferencia de centro Q. Por la desigualdad del triángulo, tenemos que $OC\leq OQ+QC=OQ+QD=\sqrt{2}+1$ cm, con la igualdad si y solo si C y D son el mismo punto.

Solución del Problema 7. a) Se requieren al menos 4 rondas. Después de cada ronda, la niña que escuchó más piezas del jugoso chisme habrá escuchado a lo más el doble de piezas del chisme en total. Al principio, cada una de ellas conoce una pieza del chisme. Sin embargo, $2^3=8<14$, de manera que necesitan al menos 4 rondas para escuchar todas las piezas.

b) Llamemos a las niñas $A_1,A_2,\ldots,A_7,B_1,B_2,\ldots,B_7$. En la primera ronda, B_i llama a A_i para $1\leq i\leq 7$. Las dos piezas del chisme que conocen inicialmente queda denotada por g_i. El proceso y su resultado se resume en la siguiente tabla, donde listamos las llamadas y la información recién adquirida.

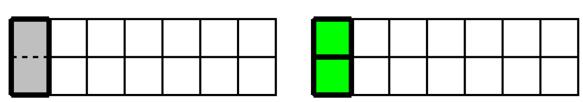
Niñas	Ronda 1		Ronda 2		Ronda 3		Ronda 4	
A_1	B_1	g_1	B_2	g_2	B_4	g_3,g_4	B_1	g_5,g_6,g_7
A_2	B_2	g_2	B_3	g_3	B_5	g_4,g_5	B_2	g_6,g_7,g_1
A_3	B_3	g_3	B_4	g_4	B_6	g_5,g_6	B_3	g_7,g_1,g_2
A_4	B_4	g_4	B_5	g_5	B_7	g_6,g_7	B_4	g_1,g_2,g_3
A_5	B_5	g_5	B_6	g_6	B_1	g_7,g_1	B_5	g_2,g_3,g_4
A_6	B_6	g_6	B_7	g_7	B_2	g_1,g_2	B_6	g_3,g_4,g_5
A_7	B_7	g_7	B_1	g_1	B_3	g_2,g_3	B_7	g_4,g_5,g_6

Niñas	Ronda 1		Ronda 2		Ronda 3		Ronda 4	
B_1	A_1	g_1	A_7	g_7	A_5	g_5, g_6	A_1	g_2, g_3, g_4
B_2	A_2	g_2	A_1	g_1	A_6	g_6, g_7	A_2	g_3, g_4, g_5
B_3	A_3	g_3	A_2	g_2	A_7	g_7, g_1	A_3	g_4, g_5, g_6
B_4	A_4	g_4	A_3	g_3	A_1	g_1, g_2	A_4	g_5, g_6, g_7
B_5	A_5	g_5	A_4	g_4	A_2	g_2, g_3	A_5	g_6, g_7, g_1
B_6	A_6	g_6	A_5	g_5	A_3	g_3, g_4	A_6	g_7, g_1, g_2
B_7	A_7	g_7	A_6	g_6	A_4	g_4, g_5	A_7	g_1, g_2, g_3

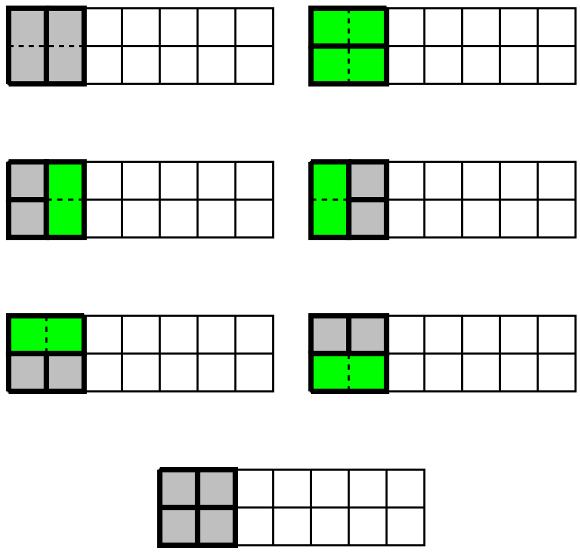
Esto muestra que es posible que las niñas conozcan todo después de la cuarta ronda.

Solución del Problema 8. Para cada X_i, hay $\binom{4}{2} = 6$ líneas azules que no pasan por X_i. Por lo tanto, hay $5 \times 6 = 30$ líneas rojas en total las cuales forman $\binom{30}{2} = 435$ "intersecciones" (incluyendo intersecciones de líneas paralelas y contando repeticiones cuando tres o más rectas concurren en un mismo punto). Descontamos las siguientes:
Para cada X_i, hay 6 líneas rojas que pasan a través de X_i. Las $\binom{6}{2} = 15$ intersecciones que forman estas líneas coinciden. Por lo tanto, descontamos $5 \times (15 - 1) = 70$ intersecciones.
Para cada una de las $\binom{5}{2} = 10$ líneas azules, hay 3 líneas rojas perpendiculares a cada una de estas líneas azules. Estas tres líneas rojas son paralelas entre sí y, por lo tanto, no se intersecan. Luego, debemos descontar $10 \times \binom{3}{2} = 30$ intersecciones.
Por último, las tres alturas de un triángulo concurren. Hay $\binom{5}{3} = 10$ triángulos que se forman con los 5 puntos X_1, X_2, X_3, X_4, X_5. Por lo tanto, es necesario descontar $10 \times 2 = 20$ intersecciones adicionales.
Las otras intersecciones no coinciden en general. Por lo tanto, el máximo número de intersecciones es de $435 - 70 - 30 - 20 = 315$.

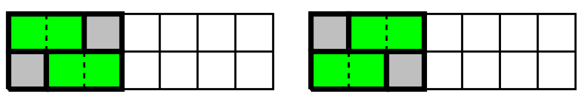
Solución del Problema 9. Buscaremos una relación de recurrencia para resolver este problema. Para cada entero positivo n, sea T_n la cantidad de maneras en que podemos cubrir un tablero de $2 \times n$ con las piezas de cerámica.
Podemos ver que la primera columna, la cual es un tablero de 2×1, puede cubrirse de 2 maneras: una manera es con una pieza de 2×1 y otra manera es con dos piezas de 1×1. El resto del tablero es un rectángulo de $2 \times (n - 1)$, que puede cubrirse de T_{n-1} maneras.



Tratamos ahora de cubrir las primeras dos columnas, las cuales forman un tablero de 2×2. Este puede cubrirse de 7 maneras en total: de 2 maneras usando dos fichas de 2×1, de 4 maneras usando una ficha de 2×1 y dos fichas de 1×1, y de una manera usando cuatro fichas de 1×1. De estas, solo 3 maneras no se obtienen del caso anterior (las restantes 4 maneras no serán consideradas, ya que fueron contadas en el caso anterior). El resto del tablero es un rectángulo de $2 \times (n - 2)$, que puede cubrirse de T_{n-2} maneras.



Tratamos ahora de cubrir las primeras tres columnas, las cuales forman un tablero de 2×3. Este puede cubrirse en total de 22 maneras. De estas, únicamente 2 maneras no se obtienen de alguno de los dos casos anteriores. El resto es un rectángulo de $2 \times (n-3)$, que puede cubrirse de T_{n-3} maneras.



A partir de este momento, en cada paso aparecerán otras dos configuraciones que no fueron cubiertos en los casos previos.
Para cubrir el rectángulo de $2 \times n$, podemos cubrir la primera columna de 2 maneras y el rectángulo restante de $2 \times (n-1)$ de T_{n-1} maneras, o podemos cubrir las primeras dos columnas de 3 maneras y el rectángulo restante de $2 \times (n-2)$ de T_{n-2} maneras, o podemos cubrir las primeras tres columnas de 2 maneras y el rectángulo restante de $2 \times (n-3)$ de T_{n-3} maneras y así sucesivamente. Luego, obtenemos la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_{n-1} + 3T_{n-2} + 2(T_{n-3} + T_{n-4} + T_{n-5} + \cdots) \\ &= 2T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-3} + 2T_{n-2} + 3T_{n-3} + 2T_{n-4} + 2T_{n-5} + \cdots \\ &= 2T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-3} + T_{n-1} \\ &= 3T_{n-1} + T_{n-2} - T_{n-3} \end{aligned}$$

para $n \geq 4$.
Sabemos que $T_1 = 2$, $T_2 = 7$ y $T_3 = 22$. Como necesitamos obtener el valor de T_7, calculamos sucesivamente: $T_4 = 71$, $T_5 = 228$, $T_6 = 733$ y $T_7 = 2356$.

Solución del Problema 10. Sea n el número de dígitos de x. Tenemos que $S(x) \leq 9n$, lo cual implica que $10^{n-1} \leq x = (S(x)+9)^2 \leq (9n+9)^2 = 81(n+1)^2$. Luego, tenemos que $10^{n-1} \leq 81(n+1)^2$ lo cual se verifica para $n \leq 4$. Supongamos que $n = 4$, esto es, que x tiene cuatro dígitos. Como $S(x) \leq 4(9) = 36$, resulta que $x = (S(x)+9)^2 \leq 45^2 = 2025$. De los números de cuatro dígitos menores o iguales que 2025, el que tiene mayor suma de dígitos es 1999, por lo que $S(x) \leq 28$, lo cual implica que $x = (S(x)+9)^2 \leq 37^2 = 1369$. Ahora, de los números de cuatro dígitos menores o iguales que 1369, el que tiene mayor suma de dígitos es 1299, por lo que $S(x) \leq 21$ y, por consiguiente, $x = (S(x)+9)^2 \leq 30^2 = 900$, lo que contradice que x tiene cuatro dígitos. Por lo tanto, $n \leq 3$.
Por otro lado, como $x = (S(x)+9)^2 \geq (1+9)^2 = 100$, tenemos que x tiene al menos 3 dígitos, esto es, $n \geq 3$. Por lo tanto, $n = 3$, de donde, $(S(x)+9)^2 = x < 1000$. Esto implica que $S(x) \leq 22$. En las siguientes tablas analizamos cada caso.

$S(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$S(x)+9$	10	11	12	13	14	15	16	17
$(S(x)+9)^2$	100	121	144	169	196	225	256	289
¿$x = (S(x)+9)^2$?	Sí	No	No	No	No	No	No	No

$S(x)$	9	10	11	12	13	14	15	16
$S(x)+9$	18	19	20	21	22	23	24	25
$(S(x)+9)^2$	324	361	400	441	484	529	576	625
¿$x = (S(x)+9)^2$?	Sí	Sí	No	No	No	No	No	No

$S(x)$	17	18	19	20	21	22		
$S(x)+9$	26	27	28	29	30	31		
$(S(x)+9)^2$	676	729	784	841	900	961		
¿$x = (S(x)+9)^2$?	No	Sí	Sí	No	No	No		

Por lo tanto, las soluciones son: $100, 324, 361, 729$ y 784.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

Cyberspace Mathematical Competition

El 13 y 14 de julio de 2020 se llevó a cabo la Cyberspace Mathematical Competition (CMC) en 75 países. México obtuvo el lugar 22, con los siguientes resultados individuales:

- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León): medalla de oro.
- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México): medalla de bronce.
- Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México): medalla de bronce.
- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México): medalla de bronce.
- Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León): medalla de bronce.
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas): medalla de bronce.
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero): medalla de bronce.
- José Alejandro Reyes González (Morelos): mención honorífica.

Los líderes del equipo mexicano fueron Enrique Treviño y Víctor Almendra.

El examen de la CMC junto con otro examen sirvió para elegir a la delegación mexicana que participará en la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) la cual se realizará de manera virtual en el mes de septiembre. La delegación mexicana quedó integrada de la siguiente manera:

1. Pablo Alhui Valeriano Quiroz del Estado de Nuevo León. Esta será su tercera participación en una IMO.

2. Ana Paula Jiménez Díaz de la Ciudad de México, ganadora de 4 medallas en la EGMO de las cuales dos son de oro. Esta será su segunda participación en una IMO.

3. Tomás Francisco Cantú Rodríguez de la Ciudad de México. Esta será su segunda participación en una IMO.

4. Omar Farid Astudillo Marbán del Estado de Guerrero. Es el primer concursante de Guerrero en llegar a una IMO.

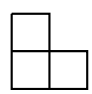
5. Carlos Emilio Ramos Aguilar del Estado de Sinaloa. Es el segundo representante de Sinaloa en llegar a una IMO.

6. Daniel Alejandro Ochoa Quintero del Estado de Tamaulipas. Es el primer concursante de Tamaulipas en llegar a una IMO.

A continuación presentamos los problemas de la Cyberspace Mathematical Competition. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 5 horas cada una para resolverlos.

Día 1

Problema 1. Considere un tablero $n \times n$ de cuadrados unitarios. La diagonal principal del tablero consiste de los n cuadrados unitarios en la diagonal desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha. Tenemos un número ilimitado de fichas de la forma



Estas fichas pueden ser rotadas. Queremos poner las fichas en el tablero de tal manera que cada ficha cubre exactamente tres cuadrados unitarios, que las fichas no se superpongan, que cada cuadrado unitario en la diagonal principal no sea cubierto y que todos los demás cuadrados unitarios se cubran exactamente una vez. ¿Para cuáles $n \geq 2$ es esto posible?

Problema 2. Sea $f(x) = 3x^2 + 1$. Demuestra que para cualquier entero positivo n, el producto $f(1) \cdot f(2) \cdots f(n)$ tiene a lo más n divisores primos distintos.

Problema 3. Sea ABC un triángulo tal que $AB > BC$ y sea D un punto variable sobre el segmento BC distinto de B y C. Sea E el punto en el circuncírculo del triángulo ABC del lado opuesto a A con respecto a BC tal que $\angle BAE = \angle DAC$. Sea I el incentro del triángulo ABD y sea J el incentro del triángulo ACE. Demuestra que la línea recta IJ pasa por un punto fijo que es independiente de D.

Problema 4. Sea n un entero impar positivo. Algunos de los cuadrados unitarios de un tablero de $n \times n$ cuadrados unitarios son coloreados de verde. Resulta que un rey de ajedrez puede moverse de cualquier cuadrado unitario verde a cualquier otro cuadrado unitario verde usando un número finito de movidas que visitan solo cuadrados unitarios verdes en el trayecto. Demuestra que siempre lo puede hacer en a lo más $\frac{n^2-1}{2}$ movidas. (En una movida, un rey de ajedrez puede moverse de un cuadrado unitario a otro cuadrado unitario si y solo si los dos cuadrados unitarios comparten un lado o un vértice).

Día 2

Problema 5. Hay 2020 enteros positivos escritos en un pizarrón. Cada minuto, Zuming borra dos de los números y los reemplaza por su suma, diferencia, producto o cociente. Por ejemplo, si Zuming borra los números 6 y 3, los puede reemplazar con uno de los números del conjunto $\{6+3, 6-3, 3-6, 6\times 3, 6\div 3, 3\div 6\} = \{9, 3, -3, 18, 2, \frac{1}{2}\}$. Después de 2019 minutos, Zuming escribe el único número -2020 en el pizarrón. Demuestra que es posible para Zuming terminar con el número 2020 usando las mismas reglas de reemplazo y empezando con los mismos 2020 enteros.

Problema 6. Encuentra todos los enteros $n \geq 3$ para los cuales el siguiente enunciado es verdadero: Si $\mathcal{P}$ es un polígono convexo de n lados tales que $n-1$ de sus lados tienen la misma longitud y $n-1$ de sus ángulos miden lo mismo, entonces $\mathcal{P}$ es un polígono regular. (Nota: Un polígono regular es un polígono cuyos lados tienen todos la misma longitud y todos sus ángulos miden lo mismo).

Problema 7. Cada uno de los n^2 cuadrados unitarios en un tablero de $n \times n$ cuadrados unitarios es coloreado de blanco o negro. Sea a_i el número de cuadrados unitarios blancos en la i-ésima fila y sea b_i el número de cuadrados negros en la i-ésima columna. Determina el máximo valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ sobre todas las coloraciones posibles del tablero.

Problema 8. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una secuencia infinita de números reales positivos tales que para cada entero positivo n tenemos que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n+1}^2}{n+1}}.$$

Demuestra que la secuencia $a_1, a_2, \ldots$ es constante.

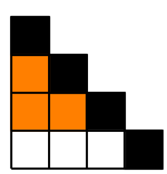
Soluciones de Olimpiadas Internacionales

Cyberspace Mathematical Competition

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la Cyberspace Mathematical Competition.

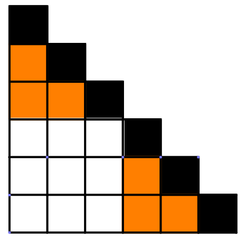
Día 1

Solución del problema 1. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). El tablero consiste de n^2 cuadrados unitarios, de los cuales n no deberían ser cubiertos. Como cada ficha cubre exactamente tres cuadrados, tenemos que $3 \mid n(n-1)$. Luego, si $n \equiv 2 \pmod 3$, el tablero no puede ser cubierto. De aquí en adelante solo consideraremos los casos $n \equiv 0$ o $1 \pmod 3$.
El tablero puede fácilmente ser cubierto para $n = 3$. Para $n = 4$, la siguiente figura muestra la diagonal principal de color negro y la esquina inferior izquierda del tablero.

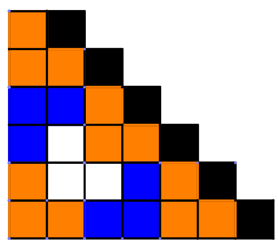


Para cubrir el cuadrado unitario de la esquina superior izquierda, una de las fichas debe colocarse sobre los cuadrados naranjas. Sin embargo, esto implica que los otros cuadrados unitarios en esta mitad del tablero no pueden ser cubiertos. Por lo tanto, $n = 4$ no es posible.
Para $n = 6$, la siguiente figura muestra la diagonal principal de color negro y la esquina

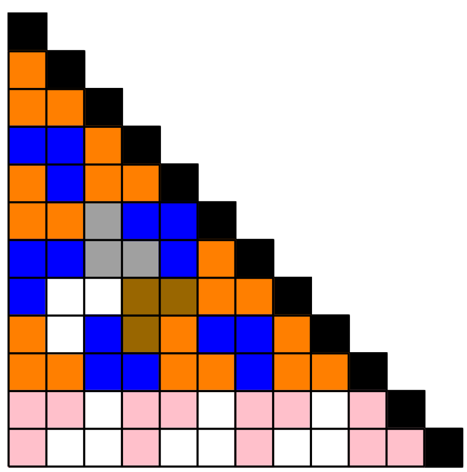
inferior izquierda del tablero.



Nuevamente, dos figuras deben ser colocadas exactamente sobre los cuadrados unitarios naranjas. Para el tablero de 3×3 que está a la izquierda, necesitamos tres fichas; sin embargo, cada ficha cubre a lo más una de las cuatro esquinas. Luego, esto es imposible.
Ahora demostraremos que todos los otros casos de la forma $n \equiv 0$ o $1 \pmod 3$ son posibles. La siguiente figura muestra una solución para $n = 7$, donde la segunda mitad del tablero puede ser cubierta de manera análoga.



La siguiente figura muestra una solución para $n = 10$, incluyendo una manera de extender esta solución para $n = 12$.



En general, podemos extender la solución para $n = 3k + 1$ a una solución para $n = 3k + 3$ agregando dos renglones en la parte inferior y poniendo una ficha en el extremo derecho de esos dos renglones. De esta manera tenemos un rectángulo de tamaño $2 \times 3k$ del lado izquierdo, el cual puede cubrirse formando un rectángulo de tamaño 2×3 con dos fichas y poniendo k de ellos uno al lado del otro. Luego, si $n = 3k + 1$ es posible, entonces $n = 3k + 3$ también es posible.
También, podemos extender la solución para $n = 3k+1$ a una solución para $n = 3k+7$ agregando seis renglones a la parte inferior. De esta manera, en el extremo derecho de estos renglones, podemos poner la construcción para $n = 7$ (ver figura anterior). Entonces, tenemos un rectángulo de tamaño $6 \times 3k$ del lado izquierdo, el cual puede cubrirse usando $3k$ rectángulos de tamaño 2×3 formados por dos fichas.
Luego, comenzando con $n = 7$ y $n = 10$ podemos hallar construcciones para todo $n \equiv 1 \pmod 3$ con $n \geq 7$ y, a partir de ellas, podemos hallar construcciones para todo $n \equiv 0 \pmod 3$ para $n \geq 9$. Concluimos que los valores de n posibles son $n = 3$, $n \equiv 0 \pmod 3$ con $n \geq 9$, y $n \equiv 1 \pmod 3$ con $n \geq 7$.

Solución del problema 2. (Solución de Eric Iván Hernández Palacios). Llamemos a un factor primo p de $f(n)$ *primitivo* si para todo entero positivo k menor que n, $p \nmid f(k)$. Para cada entero positivo n, demostraremos que $f(n)$ tiene a lo más un factor primo primitivo.
Supongamos, por contradicción, que existe un entero $n \geq 1$ tal que $f(n)$ tiene dos factores primos primitivos p y q, con $p < q$. Si $p < n$, entonces $f(n-p) = 3(n-p)^2+1 = 3n^2 + 1 + p(3p - 6n)$ es un múltiplo de p, lo que contradice la primitividad de p. Si $p > 2n$, entonces $pq > 4n^2 \geq 3n^2 + 1$, que es una contradicción. Evidentemente, $n \nmid 3n^2 + 1$ y $2n$ no es primo, por lo que $n < p < 2n$. Escribimos entonces $p = n + k$ con $0 < k < n$. Tenemos que p divide a $3n^2 + 1$, lo cual implica que p divide a $3n^2 + 1 - 3(n + k)(n - k)$, esto es, p divide a $3k^2 + 1 = f(k)$, lo cual vuelve a contradecir la primitividad de p. Es decir, cada $f(n)$ tiene a lo más un factor primo primitivo, como queríamos probar.
Para concluir el problema, haremos una inducción en n. Para $n = 1$, $f(1) = 2^2$ tiene exactamente un factor primo. Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$. Como $f(n)$ tiene a lo más un factor primo primitivo y, por hipótesis de inducción, $f(1)f(2)\cdots f(n-1)$ tiene a lo más $n - 1$ factores primos distintos, se sigue que $f(1)f(2)\cdots f(n)$ tiene a lo más n factores primos distintos.

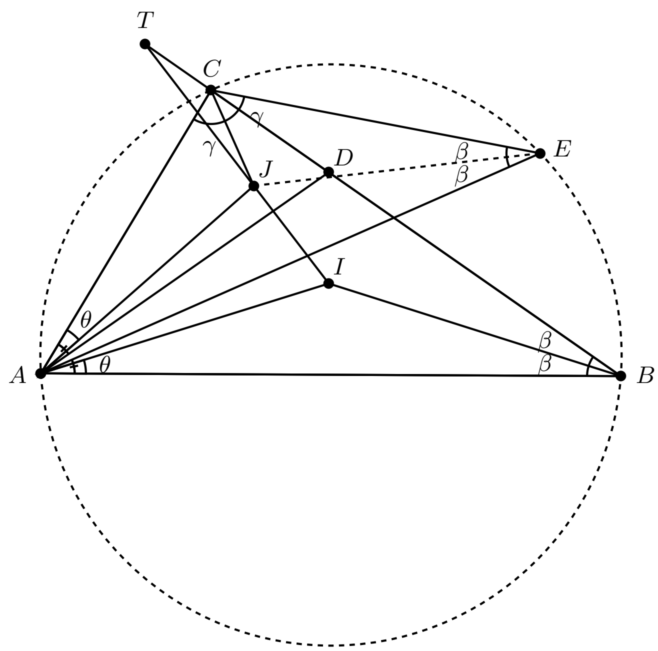
Solución del problema 3. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz). Como $\angle BAE = \angle DAC$, tenemos que

$$\angle BAD = \angle BAE + \angle EAD = \angle DAC + \angle EAD = \angle EAC = 2\theta.$$

Como I y J son incentros de los triángulos ADB y ACE, respectivamente, tenemos que $\angle BAI = \angle IAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2}\angle EAC = \angle EAJ = \angle JAC = \theta$. Dado que $CEBA$ es cíclico, $\angle CEA = \angle CBA = 2\beta$, por lo que los triángulos CAE y DAB son semejantes por el criterio AA (ambos tienen ángulos de 2θ y 2β). Entonces también son semejantes los triángulos AIB y AJE (tienen ángulos de β y $\frac{1}{2}\angle BAD$). En consecuencia, $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AE}$, y, como $\angle BAI = \angle EAJ$, se sigue que

$$\angle BAE = \angle BAI + \angle IAE = \angle EAJ + \angle IAE = \angle IAJ,$$

por lo que también son semejantes los triángulos AIJ y ABE.
Similarmente obtenemos que los triángulos ADI y ACJ son semejantes, así como también los triángulos AIJ y ADC. Sea $\angle ADI = \angle ACJ = \gamma$.



Sea T la intersección de JI con BC. Veremos que T no depende de D. Por la semejanza de los triángulos AIJ y ADC, tenemos que $\angle TDA = \angle CDA = \angle JIA = \angle TIA$, lo cual implica que $ATDI$ es cíclico. Se sigue que $\angle ATI = \angle ADI = \gamma = \angle ACJ$ y así $\angle ATJ = \angle ACJ$, por lo que $TCJA$ también es cíclico. Luego, $\angle IAT = \angle IDB = \gamma$ y $\angle JTC = \angle JAC = \theta$. Entonces, $\angle BAT = \angle BAI + \angle IAT = \theta + \gamma$ y $\angle ATB = \angle ATJ + \angle JTC = \theta + \gamma$. Se sigue que el triángulo BAT es isósceles con $AB = BT$. Independiente de dónde esté D, JI pasará por T, que es el único punto en el rayo BC tal que $BA = BT$.

Solución del problema 4. Identificamos a cada uno de los n^2 cuadrados unitarios en la cuadrícula por sus coordenadas (x, y) para $0 \leq x \leq n-1$ y $0 \leq y \leq n-1$. Definimos la *gráfica del rey* G_n como la gráfica con vértices correspondientes a los cuadrados unitarios, donde dos vértices (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están unidos por una arista si y solo si el rey de ajedrez puede moverse de uno al otro (esto es, si $\max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = 1$). Definimos un camino de *serpiente en la caja* de longitud ℓ en G_n como una sucesión a_1, a_2, $\ldots$, $a_{\ell+1}$ tal que a_i y a_j están unidos por una arista de G_n si y solo si $|i - j| = 1$. Para cualesquiera dos cuadrados unitarios verdes p y q, se considera el camino de menor longitud de p a q en la gráfica G_n, donde todos los vértices del camino corresponden a cuadrados unitarios verdes. Como tal camino debe tener longitud

mínima, necesariamente corresponde a un camino de serpiente en la caja. Entonces, el problema se reduce a (y es de hecho equivalente a) probar que la longitud de cualquier camino de serpiente en la caja en G_n es a lo más $\frac{n^2-1}{2}$.
Decimos que un vértice (x, y) de G_n es *especial* si tanto x como y son impares, de lo contrario decimos que es *regular*. Dado un camino de serpiente en la caja $\mathcal{P}$, sea $S(\mathcal{P})$ como el número de vértices especiales en el camino, y sea $R(\mathcal{P})$ el número de aristas en $\mathcal{P}$ que conectan dos vértices regulares (una arista que cumple esto es llamada una *arista regular*). Como cada vértice especial está conectado con a lo más dos aristas en $\mathcal{P}$, vemos que la longitud de $\mathcal{P}$ es a lo más $2S(\mathcal{P}) + R(\mathcal{P})$.
Para acotar la cantidad $2S(\mathcal{P}) + R(\mathcal{P})$, cubrimos los vértices especiales y las aristas regulares en G_n con un número de *bloques* (conjuntos pequeños de vértices y aristas). Los bloques serán de dos tipos:

- Un bloque *pequeño* consiste de cuatro vértices, de los cuales exactamente uno es especial y hay tres aristas regulares. Los vértices son de la forma $\{(x + i, y + j) : 0 \leq i, j \leq 1\}$. Nótese que exactamente uno de los vértices debe ser especial. Las aristas son aquellas que conectan los tres vértices regulares restantes en el bloque, como se ilustra en la Figura 1-(a).

- Un bloque *grande* consiste de nueve vértices, de los cuales hay exactamente dos especiales y ocho aristas regulares. Describimos una posible orientación de un bloque grande: los vértices son de la forma $\{(x + i, y + j) : 0 \leq i, j \leq 2\}$, donde x es par y y es impar. Entonces, para esta orientación $(x + 1, y)$ y $(x + 1, y + 2)$ son los dos vértices especiales. Las aristas son todas las aristas regulares incidentes a $(x, y + 1)$ o $(x + 1, y + 1)$, como se ve en la Figura 1-(b). También se permiten las otras tres orientaciones obtenidas por rotaciones de $90°$.

(a) Un bloque pequeño (b) Un bloque grande

Figura 1: Tanto para el bloque pequeño como para el bloque grande, las figuras solo muestran una de cuatro posibles orientaciones. Los puntos blancos sirven de ayuda visual para identificar los bloques en los diagramas siguientes.

Lema. Escribimos $n = 2k+1$. Existe un conjunto de $4\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ bloques pequeños y $4\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor$ bloques grandes tales que cada vértice especial está en al menos dos bloques y cada arista regular está en al menos un bloque.

Demostración. Damos una construcción explícita. Las construcciones se pueden entender más fácilmente viendo las Figuras 2 y 3 para los casos $n = 13$ y $n = 15$, respectivamente.

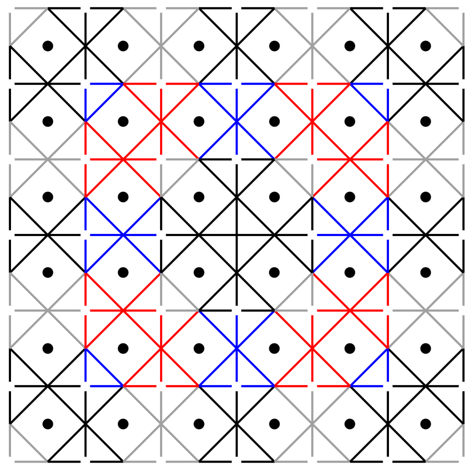


Figura 2: Cubierta de bloques para $n = 13$ con 12 bloques pequeños y 36 bloques grandes. Los bloques se muestran en cuatro colores para ayuda visual; los colores no ayudan en la solución.

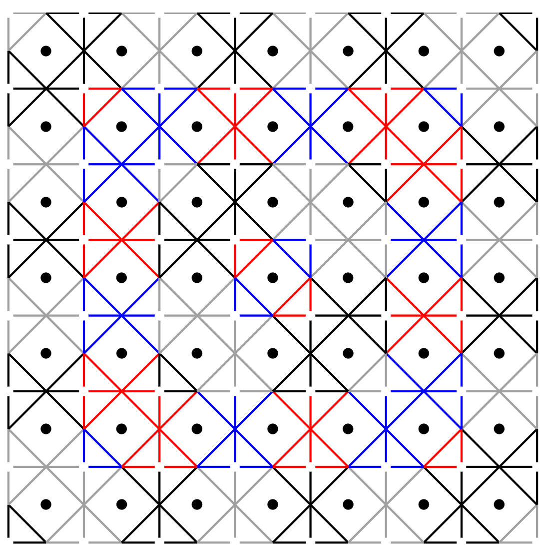


Figura 3: Cubierta de bloques para $n = 15$ con 16 bloques pequeños y 48 bloques grandes. Los bloques se muestran en cuatro colores para ayuda visual; los colores no ayudan en la solución.

Para describirlo formalmente, para cada $a < k$ donde a es par, poner un bloque pequeño con vértices $\{(a+i, a+j) : 0 \leq i, j \leq 1\}$, donde $(a+1, a+1)$ es un vértice especial. Hay $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ bloques pequeños de este tipo.
Para cada (x, y) donde x y y son ambos pares, $x > y$ y $x + y < 2k$, ponemos un bloque grande con vértices $\{(x-1+i, y+j) : 0 \leq i, j \leq 2\}$, donde $(x-1, y+1)$

y $(x+1, y+1)$ son los dos vértices especiales (y las aristas son incidentes a (x, y) y $(x, y+1)$). Hay

$$(k-1)+(k-3)+\cdots=\left\lfloor\frac{k^2}{4}\right\rfloor$$

bloques grandes de este tipo.
Finalmente, repetimos esta construcción tres veces más aplicando una rotación de $90°$ para la cuadrícula. Esto lleva a la cuenta final buscada de $4\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ bloques pequeños y $4\left\lfloor\frac{k^2}{4}\right\rfloor$ bloques grandes.
Más aún, se puede ver fácilmente en la construcción que cada vértice especial pertenece a al menos 2 bloques (cuando k es impar, el vértice (k, k) está en 4 bloques pequeños), y cada arista regular pertenece a al menos un bloque (algunas aristas regulares que cruzan las diagonales principales de la cuadrícula pertenecen a 2 bloques).

Podemos usar la construcción dada para acotar $S(\mathcal{P})$ y $R(\mathcal{P})$, con la ayuda del siguiente lema.

Lema. Sea $\mathcal{P}$ un camino de serpiente en la caja. En cualquier bloque pequeño, el número total de vértices especiales y aristas regulares en $\mathcal{P}$ es a lo más 1. Para cualquier bloque grande, este es a lo más 2.

Demostración. La afirmación se puede verificar al revisar los casos. Decimos que un vértice o una arista en un bloque es *activo* si está en $\mathcal{P}$ y es *inactivo* de lo contrario. Definimos el *puntaje* del bloque como el número de vértices especiales activos más el número de aristas regulares activas.
Para un bloque pequeño, nótese que al ser $\mathcal{P}$ un camino de serpiente en la caja, a lo más dos vértices pueden ser activos. Entonces, a lo más una arista regular puede ser activa. Se concluye que el puntaje es a lo más 1.
Para un bloque grande, supóngase que lo trasladamos y orientamos de tal manera que los vértices sean $\{(1+i, j) : 0 \leq i, j \leq 2\}$, por lo que $(1,1)$ y $(3,1)$ son los vértices especiales y las aristas son las aristas regulares incidentes a $(2,0)$ y $(2,1)$.
Si $(2,1)$ es activo, nótese que $(2,1)$ es adyacente a todos los demás vértices del bloque. Luego, a lo más 2 de los otros dos vértices son activos y estos dos no pueden ser adyacentes entre ellos. Si v es un vértice diferente al $(2,1)$ que sea activo, entonces puede contribuir al puntaje del bloque siendo un vértice especial o compartiendo una arista regular con $(2,1)$. Pero estos dos casos son mutuamente exclusivos, por lo que el puntaje total del bloque es a lo más 2.
Si $(2,1)$ es inactivo, entonces las únicas aristas regulares que pueden ser activas son $(1,0)-(2,0)$ y $(2,0)-(3,0)$. Pero a lo más uno entre el vértice especial $(3,1)$ y la arista regular $(1,0)-(2,0)$ puede ser activo y, similarmente, a lo más uno de $(3,1)$ y $(2,0)-(3,0)$ puede ser activo. Por lo tanto, el puntaje total es de nuevo a lo más 2.
Como cada vértice especial es cubierto al menos dos veces y cada arista regular es cubierta al menos una vez, la cantidad $2S(\mathcal{P})+R(\mathcal{P})$ puede ser acotada por la suma

de los puntajes de todos los bloques. Entonces se tiene que

$$\text{longitud}(\mathcal{P}) \leq 2S(\mathcal{P}) + R(\mathcal{P}) \leq 4\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 8\left\lfloor \frac{k^2}{4} \right\rfloor = 2k + 2k^2 = \frac{n^2-1}{2},$$

que es la cota buscada. □

Día 2

Solución del problema 5. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Demostraremos por inducción que si en algún momento Zuming tiene escritos los números $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, entonces Zuming podría haber operado para llegar a tener escritos los siguientes números en el pizarrón: $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$. Como al principio todos los números son positivos, en ese momento se cumple lo que queremos, por lo que esa es la base de inducción.
Supongamos que para cierto entero $k+1$ tenemos que $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ son los números que quedan escritos en el pizarrón en el proceso que usa Zuming para llegar a -2020 cuando solo quedan $k+1$ de ellos y sabemos que Zuming puede llegar a tener escritos los números $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k+1}|)$. Demostraremos que sin importar qué números tome y qué operación haga Zuming a los números $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$, Zuming va a poder hacer que en el siguiente paso que haga a los números $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{k+1}|)$, se obtengan los siguientes valores absolutos de cada número que obtuvo al hacer un paso en $(a_1, a_2, \ldots, a_{k+1})$.
Sean a_j y a_w los números que Zuming sustituyó por otro. Si los sustituyó por su producto o cociente, entonces se pueden tomar los números $|a_j|$ y $|a_w|$ y hacer lo mismo que hizo con a_j y a_w y claramente quedaría el valor absoluto que hizo, pues $|a_w a_j| = |a_w||a_j|$, $|\frac{a_w}{a_j}| = \frac{|a_w|}{|a_j|}$ y $|\frac{a_j}{a_w}| = \frac{|a_j|}{|a_w|}$.
Ahora, si Zuming hizo resta o suma, tenemos tres casos.
Caso 1. $a_w = -|a_w|$ y $a_j = -|a_j|$. Entonces,

a) $|a_w - a_j| = |a_j - a_w| = ||a_w| - |a_j|| = |a_w| - |a_j|$ o $||a_w| - |a_j|| = |a_j| - |a_w|$,

b) $|a_w + a_j| = |-(|a_w| + |a_j|)| = ||a_w| + |a_j|| = |a_w| + |a_j|$.

Caso 2. $a_w = |a_w|$ y $a_j = |a_j|$. Entonces,

a) $|a_w - a_j| = |a_j - a_w| = ||a_j| - |a_w|| = |a_j| - |a_w|$ o $||a_j| - |a_w|| = |a_w| - |a_j|$,

b) $|a_w + a_j| = ||a_w| + |a_j|| = |a_w| + |a_j|$.

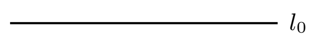
Caso 3. $a_w = |a_w|$ y $a_j = -|a_j|$ (el caso $a_w = -|a_w|$ y $a_j = |a_j|$ es análogo). Entonces,

a) $|a_j - a_w| = |a_w - a_j| = ||a_w| + |a_j|| = |a_w| + |a_j|$,

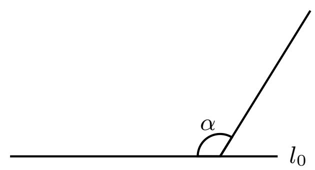
b) $|a_w + a_j| = ||a_w| - |a_j|| = |a_w| - |a_j|$ o $||a_w| - |a_j|| = |a_j| - |a_w|$.

Con esto concluimos la inducción. Por lo tanto, en todo momento, si Zuming llega a tener los números $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ escritos en el pizarrón, también puede obtener los números $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|)$. Como al final llego al número -2020, Zuming puede terminar con el número $|-2020| = 2020$, tal y como queríamos probar.

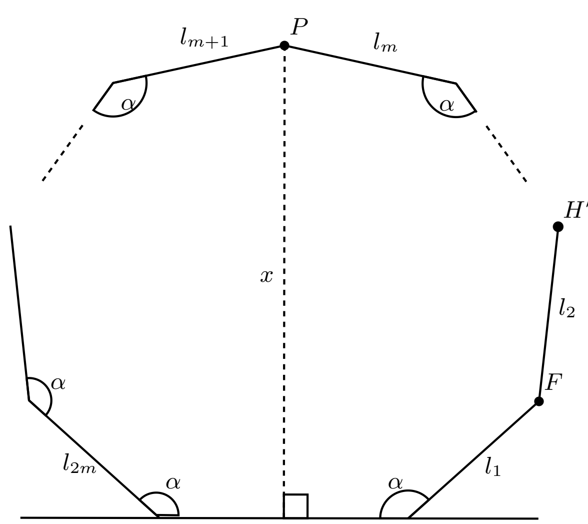
Solución del problema 6. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Demostraremos primero que si n es impar, el enunciado no es verdadero. Sea $n = 2m + 1$. Primero, vamos a construir la recta por la que pasa el lado desigual, se va a llamar l_0.



Luego vamos a trazar una semirrecta que abra un ángulo α así:



Vamos a tomar α con $\frac{180(m-1)}{m} < \alpha < \frac{180(2m-1)}{2m+1}$, esto se puede porque $\frac{180(m-1)}{m} < \frac{180(2m-1)}{2m+1}$. Ahora vamos a construir m lados $l_1, l_2, \ldots, l_m$ de manera que midan lo mismo y l_i y l_{i+1} abran un ángulo de α para $1 < i + 1 < m$.

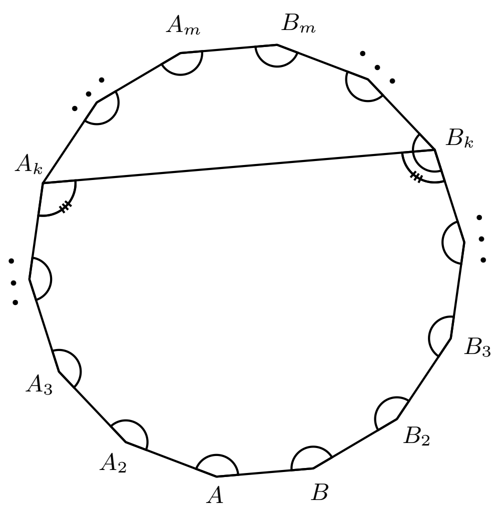


En la figura, P es uno de los extremos de l_m (el que no toca a l_{m-1}) y x es la perpendicular a l_0 que pasa por P.
Ahora, vamos a reflejar $l_1 l_2 \ldots l_m$ en x de manera que nos queden otros m lados

$l_{m+1}, l_{m+2}, \ldots, l_{2m}$. P está más a la izquierda que la intersección de l_1 con l_0 con respecto a l_0, porque entre más chico es α, más a la izquierda está P, siempre y cuando el ángulo que se forma en P con l_m y x sea menor a $90°$. Esto pasa si y solo si el ángulo que se forma en P en nuestro polígono es menor a $180°$.
La suma de los ángulos es $180°(n-2) = 180°(2m-1)$. Esta suma es igual a $2m \cdot \alpha + \angle P$. Entonces, $\angle P = 180°(2m-1) - 2m \cdot \alpha$. Como $\alpha > \frac{180(m-1)}{m}$, tenemos que $-\alpha < -\frac{180(m-1)}{m}$, de donde $-2m \cdot \alpha < -180 \cdot 2(m-1)$. Por lo tanto,

$$\angle P = 180°(2m-1) - 2m \cdot \alpha < 180(2m-1) - 180 \cdot 2(m-1) = 180°,$$

por lo que el polígono es convexo.
Si el polígono fuera regular, todos sus ángulos serían iguales a $\frac{180(n-2)}{n} = \frac{180(2m-1)}{2m+1}$ y P estaría más a la izquierda que la intersección de l_1 y l_0 con respecto a l_0. Como $\alpha < \frac{180(2m-1)}{2m+1}$, P sigue estando más a la izquierda. Este polígono tiene $n-1 = 2m$ lados iguales ($l_1 = l_2 = \cdots = l_{2m}$) y $2m$ ángulos iguales a α, pero no es regular (sus ángulos no miden $\frac{180(2m-1)}{2m+1}$).
Demostraremos ahora que si n es par, el enunciado es verdadero. Sea $n = 2m$. Sea AB el lado —posiblemente— desigual. A partir de A, vamos a llamar a los vértices $A_2, A_3, \ldots, A_m$, y haremos lo mismo con B, como se ve en el dibujo.



Si $\angle B_k$ es el ángulo —posiblemente— desigual (con $\angle A_k$ es análogo), vamos a ver que la figura $AA_2 \ldots A_k B_k \ldots B_2 B$ es simétrica, y esto es porque todos los ángulos, excepto posiblemente A_k y B_k, son iguales en la figura, y los $k-1$ lados del lado de A con respecto a la mediatriz de AB son iguales a los $k-1$ lados del lado de B. En particular, $\angle A_{k-1} A_k B_k = \angle A_k B_k B_{k-1}$. La figura $A_k A_{k+1} \ldots A_m B_m \ldots B_k$ es simétrica por las mismas razones, y por consiguiente, $\angle A_{k+1} A_k B_k = \angle B_{k+1} B_k A_k$. Sumando con la igualdad anterior obtenemos que $\angle A_k = \angle B_k$ en $\mathcal{P}$, entonces todos los ángulos son iguales y por lo tanto iguales a los de un polígono regular de n lados. Como $n-1$ de sus lados son iguales, el que queda tiene que ser igual y $\mathcal{P}$ es regular.

Solución del problema 7. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Veamos que la respuesta es $0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n=\frac{n^3-n}{3}$. Haremos esto por inducción. Con $n=1$ tenemos un 1×1 con una casilla blanca o negra. Pero $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i=a_1b_1=1\cdot 0$ en cualquier caso. Con esto se cumple la base de inducción.

Ahora supongamos que para $n>1$, para $n-1$ el máximo valor de la suma es $0\cdot 1+1\cdot 2+\cdots+(n-2)(n-1)$ y demostraremos que el máximo para n es $0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(n-1)n$.

Consideremos una coloración que maximice la suma $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$. Afirmamos que podemos suponer $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$. Para esto, notemos que si tenemos un acomodo, si cambiamos las comlumnas i,j de lugar y las filas i,j de lugar, la nueva suma $\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'$ donde a_i' es la nueva cantidad de casillas blancas en la i-ésima fila y b_i' es la nueva cantidad de casillas negras en la i-ésima columna, es igual a $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$. En efecto, para cada cada $k\neq i,j$, $a_k'=a_k$, pues en la k-ésima fila solo estamos intercambiando dos casillas entre sí, y análogamente, $b_k'=b_k$. Entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)-(a_ib_i+a_jb_j)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'\right)-(a_i'b_i'+a_j'b_j').$$

Además, $a_i'=a_j, a_j'=a_i, b_i'=b_j, b_j'=b_i$, y se sigue que $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i=\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i'$, es decir, la suma se mantiene igual.

Haciendo varios de estos cambios de filas y columnas i,j, podemos hacer que la primera columna sea la que tenga más casillas negras, la segunda columna sea la segunda que tenga más casillas negras, ..., la n-ésima columna sea la que tenga menos casillas negras, y la suma seguirá siendo máxima.

Ahora, sea $(a_1',a_2',\ldots,a_n')$ una permutación de $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. Podemos cambiar las filas de lugar de lugar entre sí de manera que ahora la k-ésima fila tenga a_k' casillas blancas. Esto no altera la cantidad de casillas negras en cada columna. Entonces, la nueva suma es $\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i$, y dado que el acomodo que escogimos maximiza la suma, debemos tener $\sum_{i=1}^{n} a_i'b_i\leq\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$. Como $b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$, por la desigualdad del reacomodo, entre todas las permutaciones de las a_is, la que maximiza la suma debe ser aquella que cumple que $a_1'\geq a_2'\geq\cdots\geq a_n'$, pero esta debe ser igual a $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ por como escogimos nuestro acomodo máximo. Entonces debemos tener $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $b_1\geq a_1$. Supongamos que en la primera fila hay una casilla negra distinta de $(1,1)$. Veremos que podemos cambiarla de color de tal forma que la nueva suma sea mayor o igual.

En efecto, supongamos que esta casilla está en la j-ésima columna. Ignoremos por un momento el color de esta casilla, es decir, no la contamos en b_j ni a_1. Obtenemos una suma $S=\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$. Si volvemos el color de esta casilla a negro, el único término en la suma que se modifica es a_jb_j, que se vuelve $a_j(b_j+1)=a_jb_j+a_j$, es decir, la suma sería $S+a_j$. En cambio, si volvemos el color de esta casilla a blanco, el único término en la suma que se modifica es a_1b_1, que se vuelve $(a_1+1)b_1=a_1b_1+b_1$, es decir, la suma sería $S+b_1$. Como $b_1\geq a_1\geq a_2\cdots\geq a_k$, $S+b_1\geq S+a_j$, y la suma se vuelve mayor o igual si cambiamos el color de esta casilla a blanco. Entonces podemos cambiar a blanco el color de cada casilla en la primera fila distinta de $(1,1)$ y la nueva suma debería seguir siendo máxima. Con esto llegamos a que $a_1\geq n-1$ y

$n-1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \cdots \geq b_n$, ya que la primera fila tiene al menos $n-1$ casillas blancas y $b_2, b_3, \ldots, b_n$ tienen al menos una casilla que no es negra. Luego, con el mismo argumento, podemos cambiar a negro el color de cada casilla en la primera columna distinta de $(1,1)$. Sea cual sea el color de $(1,1)$, tendremos $a_1 b_1 = (n-1)n$ y la suma será $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=2}^{n-1} a_i b_i + (n-1)n$. Además, para $j > 1$, a_j y b_j solamente contarán casillas contenidas en el subtablero inferior derecho de $(n-1) \times (n-1)$.
Si en un tablero de $(n-1) \times (n-1)$ definimos a_i' como la cantidad de casillas blancas en la i-ésima fila y b_j' como la cantidad de casillas blancas en la j-ésima columna, el máximo valor de $\sum_{i=2}^{n} a_i b_i$ es el máximo valor de $\sum_{i=1}^{n-1} a_i' b_i'$. Pero por hipótesis sabemos que este máximo es $0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \cdots + (n-2)(n-1)$, así que la máxima suma para n será $\sum_{i=1}^{n} (i-1)i = \frac{n^3-n}{3}$, lo que completa la inducción.

Solución del problema 8. Definamos $S_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ y $Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$. Sea $k \geq 1$ un entero fijo. Para todo $n \geq k$ la condición del problema implica que

$$\begin{aligned} Q_n^2 - Q_{n+1}^2 \geq Q_n^2 - S_n^2 &= \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)^2}{n^2} \\ &\geq \frac{\sum_{k \leq j \leq n} (a_k - a_j)^2 + (a_j - a_1)^2}{n^2} \\ &\geq \frac{\sum_{k \leq j \leq n} \frac{1}{2}((a_k - a_j) + (a_j - a_1))^2}{n^2} \\ &= \frac{(n-k+1)}{2n^2}(a_k - a_1)^2. \end{aligned}$$

Sumando estas desigualdades para $n \geq k$, obtenemos que

$$Q_k^2 \geq (a_k - a_1)^2 \sum_{n \geq k} \frac{n-k+1}{2n^2}.$$

Como la suma $\sum_{n \geq k} \frac{n-k+1}{2n^2}$ diverge, concluimos que $a_k = a_1$, de donde se sigue el resultado.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad). *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias). *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias). *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $c \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv d \ (mod\ m)$.*

2. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$ y $b \equiv d \ (mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd \ (mod\ m)$.*

3. *Si $a \equiv c \ (mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (mod\ m)$ para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc \ (mod\ m)$, entonces $a \equiv c \ (mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat). *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.*

Teorema 3 (Inducción). *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas). *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Mauricio Adrián Che Moguel

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Isabel Alicia Hubard Escalera

Leonardo Martínez Sandoval

Mónica Mateos Cisneros

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez