TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2019, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán

Coordinador editorial: José Antonio Gómez Ortega
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

Impreso y hecho en México.
Febrero de 2019.

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2019, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su undécimo año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Isabel Cristina Martínez Alvarado quien ahora se integra al Comité Editorial de la revista. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a nuestro amigo Julio César Díaz Calderón, quien participó en este comité en los años 2016, 2017 y 2018 y, a quien le deseamos mucho éxito en sus nuevos proyectos.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Ajedrez y Matemáticas*, de Victor Manuel Grijalva Altamirano. En él, se aborda una selección de problemas que involucran un tablero de ajedrez y se muestran algunas técnicas de combinatoria para resolverlos.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2019.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

33ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2000. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2019-2020 y, para el 1° de julio de 2020, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 33^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 10 al 15 de noviembre de 2019 en la Ciudad de México. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2019 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (Rusia, julio de 2020) y a la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Perú, septiembre de 2020).

De entre los concursantes nacidos en 2003 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (Panamá, junio de 2020).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la IX Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2020.

3ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2019, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Tercera Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 12 años al 1 de julio de 2019.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 14 años al 1 de julio de 2019.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 15 años al 1 de julio de 2019.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 3^a OMMEB se realizará en Oaxtepec, Morelos, del 14 al 17 de junio de 2019. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2020.

Ajedrez y Matemáticas

Por Victor Manuel Grijalva Altamirano

Nivel Intermedio

En la olimpiada de matemáticas, es muy común encontrar problemas que involucren un tablero de ajedrez. Dicho tablero, puede ser el clásico de 8×8 o de $n \times m$, donde n y m son números naturales. Es mucha la variedad de este tipo problemas, que para resolverlos necesitamos saber distintas técnicas de combinatoria tales como: Principio de casillas, Invarianza, Coloreado, Teoría de juegos, Teoría de grafos, entre otros. En este artículo, abordaremos una selección de ejemplos resueltos con el objetivo de que el lector adquiera familiaridad con este tipo de problemas y ponga en práctica muchas de las técnicas previamente mencionadas.

Un posible origen

El origen del ajedrez es muy incierto, y hasta el día de hoy no hay una versión oficial. Muchos historiadores opinan que el ajedrez nació en la india en el siglo VI, y además, de que el ajedrez proviene de otro juego llamado *Chaturanga*. Aunque hay una leyenda muy popular sobre su origen: *La leyenda del ajedrez.* Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo en un reino de la india gobernaba un rey llamado Sheram, un día, ordenó a uno de sus sirvientes, Sissa, que creara un juego que consiguiera divertirle. Después de un tiempo, Sissa, le presentó a su rey el juego que le había pedido: el ajedrez. Luego de entender el juego y jugar varias veces, el rey Sheram quedó sorprendido ante el maravilloso juego, así que en agradecimiento le djo a Sissa que como recompensa le pidiera lo que deseara. Después de la insistencia del rey, Sissa dijo lo siguiente:

¡Oh, gran rey! Dame tantos granos de trigo como quepan en las 64 casillas del tablero de ajedrez, de tal manera que se ponga un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, ocho para la cuarta y que siga duplicándose hasta la casilla 64.

El rey sorprendido por la “modesta” petición de Sissa aceptó y mandó a los matemáticos de la corte a que calcularan la cantidad de granos de trigo que Sissa había pedido, es decir: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63}$. Después de que sus sirvientes hicieron las cuentas, el rey Sheram se dio cuenta de que ni con todo el trigo de su reino alcanzaría dicha cifra: 18,446,744,073,709,551,615 granos de trigo. El rey Sheram sonrió, pues la petición de Sissa era todo menos “modesta”.

Quizás nunca conozcamos el verdadero origen del ajedrez, lo que sí es un hecho es que ha causado una gran pasión desde su invención, pues el ajedrez es: Un juego, un deporte y un arte.

Ajedrez y matemáticos

Grandes matemáticos como George Polya, Carl Gauss, L. Euler, Donald E. Knuth, Legendre, etc., se interesaron por problemas matemáticos en el ajedrez. A continuación, mencionamos algunos de esos problemas.

El problema de las ocho damas

El *problema de las ocho damas* es un pasatiempo que consiste en contar todas las maneras posibles de poner 8 damas en el tablero de ajedrez de 8×8 sin que ninguna dama amenace a otra. En la actualidad se sabe que hay 92 maneras de hacer dicha tarea, pero por mucho tiempo fue un reto que cautivó a muchas personas.

Fue propuesto por primera vez por el ajedrecista alemán Maxx Bezzel en septiembre de 1848 en el periódico de ajedrez *Schachzeitung*. Dos soluciones fueron publicadas en enero de 1849 y un total de 40 soluciones aparecieron en *Schachzeitung* entre los años 1849 y 1854. El problema fue otra vez propuesto por Franz Nauck el 1 de junio de 1850 en el periódico *Illustrirte Zeitung*, este periódico contaba con mayor número de lectores y entre ellos el matemático Gauss. Nauck también consideró una variante del problema: encontrar todas las soluciones con damas colocadas en las casillas $b4$ y $d5$. El 29 junio de 1850, Nauck afirmó en *Illustrirte Zeitung*, que el problema principal tenía 60 soluciones. Unos meses después, el 21 de septiembre, Nauck hace una corrección y da las 92 soluciones en *Illustrirte Zeitung*.

El problema del caballo

El *problema del caballo* es un problema antiguo, el cual consiste que dado un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas y un caballo de ajedrez colocado en alguna de las casillas, el caballo pase por todas las casillas una sola vez siguiendo el movimiento usual del caballo. Se han encontrado muchas soluciones a este problema; a continuación mostramos la solución del matemático Leonhard Euler.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

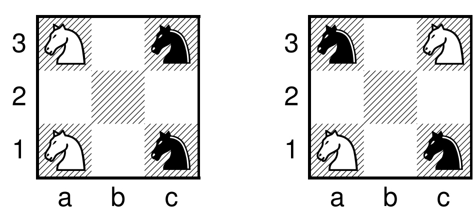
En el tablero anterior, cada casilla tiene un número, dicho número indica el orden del movimiento que debe seguir el caballo para recorrer el tablero. El problema del caballo tiene algunas variaciones, tales como:

1) Buscar soluciones, en las cuales se debe llegar a la misma casilla de la cual se partió.

2) Tableros de diferente número de columnas o diferente número de filas.

Ejemplos resueltos

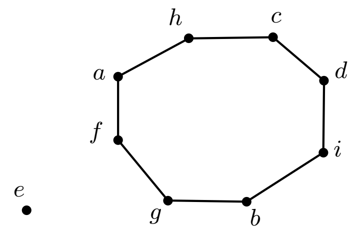
Problema 1. *Considere los dos tableros de ajedrez de* 3×3 *que se muestran a continuación, en cada uno de ellos hay dos caballos blancos y dos caballos negros. Moviendo una pieza a la vez tantas veces como queramos y siguiendo el movimiento estándar del caballo en el juego de ajedrez, ¿es posible mover las piezas del tablero izquierdo de tal forma que nos quede el tablero derecho? (Nota: No puede haber dos caballos en un mismo cuadrito).*



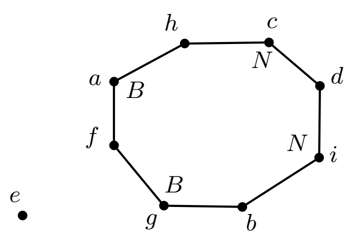
Solución. Resolveremos este problema con ayuda de un grafo. A cada casilla del tablero le asignaremos una letra como muestra el siguiente diagrama:

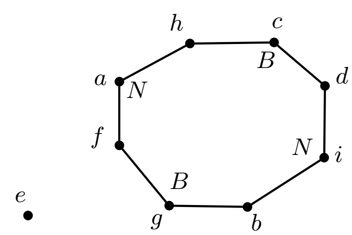
a	b	c
d	e	f
g	h	i

Cada una de estas letras formarán los vértices de un grafo. Los vértices X y Y serán unidos con una arista, si es posible moverse con el caballo de la casilla marcada con la letra X a la casilla marcada con la letra Y en un movimiento. Si aplicamos esta regla a cada una de las casillas obtenemos el siguiente grafo:



Ahora le asignaremos un grafo a cada uno de los dos tableros, agregaremos la etiqueta N a los vértices en donde se encuentre un caballo negro y B a los vértices en donde se encuentre un caballo blanco. Quedando así, los siguientes dos grafos:





Comparando ambos grafos podemos observar que el orden de las piezas negras y blancas son diferentes. De lo cual podemos concluir que no es posible cambiar el orden de los caballos, pues un caballo solo puede moverse sobre los vértices vacíos. De aquí, es imposible mover las piezas del tablero izquierdo de tal forma que nos quede el tablero derecho. $\square$

Problema 2. *Sobre un tablero de ajedrez de* 2020×2018*, A y B juegan por turnos a mover un caballo sobre el tablero (movimiento en forma de L). Inicialmente, el tablero no tiene ninguna pieza. En un principio, el jugador A coloca una pieza del caballo en cualquiera de las 4076360 casillas libres. Luego, le toca el turno al jugador B, quien solo puede mover el caballo a una nueva casilla no visitada antes. Después, le toca mover al jugador A, el cual debe mover el caballo a otra casilla no visitada antes en ninguno de los turnos anteriores, y así, sucesivamente. En este juego, pierde el primer jugador que no pueda mover el caballo a una nueva casilla. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora.*

Solución. Mostraremos que el jugador B tiene estrategia ganadora, es decir, sin importar el movimiento que realice el jugador A, el jugador B ganará este juego. Para ello, observemos el comportamiento del caballo sobre un tablero de 4×2. En un tablero de 4×2, enumeramos las 4 casillas de la primera columna con los números $1, 2, 3$ y 4. Si colocamos un caballo en la casilla con el número 1 y realizamos un movimiento legal del caballo, en el mismo tablero de 4×2 encontraremos otra casilla al que podemos llegar. Esta nueva casilla lo enumeramos con el mismo número 1. Este mismo procedimiento lo haremos para los tres números restantes. El tablero quedará como el que se muestra a continuación:

1	3
2	4
3	1
4	2

Observemos que en cada tablero de 4×2, a cada casilla X le corresponde una única casilla Y a la cual podemos llegar moviendo el caballo apartir de X. Ahora dividamos el tablero de ajedrez 2020×2018, en tableros de 4×2 (nos quedarán exactamente 509545 tableros de 4×2 y no sobra ninguna casilla). Procederemos a probar que el jugador B tiene la estrategia ganadora. Al inicio el jugador A coloca el caballo en una casilla al azar. Sin importar cual elige A, colocó el caballo en una casilla de algún tablero de 4×2. La estrategía del jugador B, es mover el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Esto obligará al jugador A a buscar otro movimiento en otro tablero de 4×2 y nuevamente B mueve el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Si continua con esta estrategia el jugador B, el jugador A tiene dos posibilidades.
Caso 1. En algún momento el jugador A no puede mover a una casilla no visitada.
Caso 2. El jugador A juega de forma muy acertada y realiza el movimiento número 4076359 (el penúltimo movimiento del juego). Luego, el jugador B solo tiene que mover el caballo a la otra casilla a la cual se puede llegar y que está en el mismo tablero de 4×2. Así, el jugador B realiza el último movimiento del juego.
En ambos casos el jugador A pierde, por lo cual el jugador B gana el juego. $\square$

En muchos problemas de combinatoria es muy útil aplicar el *Principio de las Casillas*, a continuación enunciamos dicho principio:

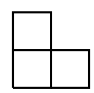
Proposición 1 (Principio de las Casillas)**.** *Si n objetos son acomodados en k lugares, entonces hay al menos $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ objetos en el mismo lugar.*

Problema 3. *(1^a Olimpiada Matemática de Colorado, 1984) En un tablero de ajedrez de 10×10, se han colocado 41 torres. Pruebe que entre esas 41 torres hay 5 torres que no se atacan mutuamente (es decir, no hay dos de ellas en la misma columna o fila).*

Solución. En este problema, necesitamos encontrar 5 torres que no estén colocadas en la misma fila y no estén colocadas en la misma columna. El uso adecuado del principio de las casillas en este problema nos garantizará la existencia de las 5 torres deseadas. Observemos que los objetos a acomodar son las 41 torres, y deseamos acomodarlas en 10 filas. Luego, por el principio de las casillas, hay una fila con al menos $\lceil \frac{41}{10} \rceil = 5$ torres. Hasta aquí, no hemos resuelto el problema, pues las 5 torres se encuentran en la misma fila. Necesitamos seguir trabajando con las filas restantes. Notemos que cada fila puede tener a lo más 10 torres, así, si eliminamos la fila en donde se encuentran las 5 torres, nos quedarán 9 filas y como mínimo 31 torres. Ahora, deseamos acomodar

31 torres en 9 filas; por el principio de las casillas, se sigue que hay una fila con al menos $\lceil \frac{31}{9} \rceil = 4$ torres. Si eliminamos dicha fila, nos quedarán 8 filas y como mínimo 21 torres. Nuevamente, aplicando el principio de casillas, se tiene que hay una fila con al menos $\lceil \frac{21}{8} \rceil = 3$ torres. Continuando con este procedimiento, podemos encontrar que hay 5 filas especiales que tienen al menos 1, 2, 3, 4, 5 torres, respectivamente. Ahora, busquemos las 5 torres deseadas en estas 5 filas teniendo en cuenta que solo resta cuidar que se encuentren en distintas columnas. Seleccionemos la torre que se encuentra en la fila que tiene al menos una torre. Luego, en la fila que tiene al menos dos torres, seleccionemos una de esas dos torres tal que no esté en la misma columna que la primera torre elegida. Después, en la fila que tiene al menos 3 torres, seleccionemos una de esas tres tal que no está en la misma columna que la primera torre y tampoco en la misma columna de la segunda torre elegida. Continuando con este procedimiento, elegiremos la dos torres restantates. Eureka! Hemos encontrado las 5 torres buscadas. □

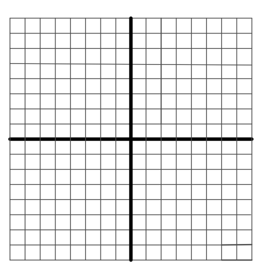
Problema 4. *Encuentre todos los enteros positivos n tal que si se remueve una casilla de un tablero de $2^n \times 2^n$, el tablero resultante se puede cubrir completamente usando las veces que queramos la siguiente figura que llamaremos L.*



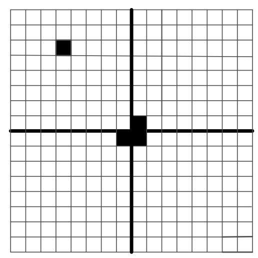
Solución. Después de hacer unos ejemplos sencillos podemos observar que todos los enteros $n \geq 1$ satisfacen el problema. Procederemos a demostrar dicha afirmación por inducción en n.

1) Caso base. Consideremos el caso cuando $n = 1$, así, el tablero es de 2×2. Al remover una casilla, queda exactamente la misma figura con la que se nos pide cubrir (salvo rotación). Luego, solo hacemos uso de una figura *L* y listo.

2) Paso inductivo. Sea $k \geq 2$ un entero, supongamos que podemos cubrir el tablero de $2^k \times 2^k$ con una casilla removida. Tenemos que usar de alguna manera nuestra hipótesis de inducción para probar que podemos cubrir el tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con una casilla removida. Para ello, dividamos el tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ en cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$, como se muestra en la siguiente figura:



Del tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ eliminaremos una casilla (es la condición del problema), dicha casilla tendrá que estar en alguno de los cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$. Para terminar el problema, eliminemos una casilla en cada uno de los otros tres subtableros de $2^k \times 2^k$, de tal manera que formen la figura *L*, tal como se muestra en la siguiente figura:



Luego, observemos que cada uno de los cuatro subtableros de $2^k \times 2^k$ tiene una casilla removida. Así, por nuestra hipótesis inductiva, cada uno de los cuatro tablero se puede cubrir completamente. Recordemos que hemos removido 4 casillas y en el problema se nos pide remover solo una. Observemos que tres casillas de las cuatro removidas se pueden cubrir completamente si hacemos uso de solo una figura *L*. De aquí, hemos demostrado que es posible cubrir completamente con figuras *L* un tablero de $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ con una casilla removida.

Luego, concluimos por el pricipio de inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, todo tablero de $2^n \times 2^n$ con una casilla removida se puede cubrir completamente con figuras *L*. $\square$

Problema 5. *(Concurso Nacional, 26^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas) Algunas ranas, unas de ellas rojas y otras verdes, se van a mover en un tablero de 11×11, de acuerdo a las siguientes reglas. Si una rana está ubicada, digamos, en la casilla marcada con # en la siguiente figura, entonces:*

1) Si es roja, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con X,

2) Si es verde, puede saltar a cualquiera de las casillas marcadas con O.

		X		*O*		
	O				*X*	
			#			
	X				*O*	
		O		*X*		

Diremos que dos ranas (de cualquier color) se pueden encontrar en una casilla si ambas pueden llegar hasta ella saltando una o más veces, no necesariamente con el mismo número de saltos.

a) *Muestra que si ponemos* 6 *ranas (de cualquier color), entonces hay al menos* 2 *que se pueden encontrar.*

b) *¿Para qué valores de* k *es posible poner una rana roja y una rana verde de manera que haya exactamente* k *casillas en las que estas ranas se puedan encontrar?*

Solución. Analicemos primero el movimiento de las ranas rojas sobre el tablero. Para ello, enumeremos las 5 primeras casillas de la primera fila con los números del 1 al 5. Si colocamos una rana roja en la casilla que tiene el número 1 y realizamos movimientos permitidos de la rana roja, en el tablero encontraremos varias casillas a las que podemos llegar, dichas casillas las enumeramos con el número 1. Repetiremos este procedimiento para las casillas que tienen los números 2,3,4 y 5, respectivamente. El tablero que resulta de seguir estos pasos es el siguiente:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1

Por la manera en que se construyó el tablero anterior, si una rana roja empieza en la casilla con el número X, esta rana puede visitar todas las casillas enumeradas con el mismo número X, donde $X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Además, una rana puede visitar cualquier fila y columna del tablero.

Ahora, analicemos la interacción de las ranas verdes con las ranas rojas. Para ello, coloquemos una rana verde sobre alguna casilla del tablero que hemos construido previamente. Por ejemplo, coloquemos una rana verde sobre la casilla superior izquierda (la casilla que tiene el número 1). Realicemos movimientos permitidos de la rana verde a partir de dicha casilla. Si marcamos todas las casillas que visitamos, el tablero quedará como el que se muestra a continuación:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1

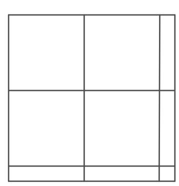
Observemos que una rana verde visita en cada columna y fila sólo un tipo de número. Notemos que en cada tablero de 5×5 la rana verde visita los 5 números distintos (vea la figura de arriba). Con estas observaciones, procederemos a demostrar las dos partes del problema:

Parte (a). Si colocamos 6 ranas en el tablero, puede ocurrir los siguientes dos casos:

Caso 1. En el tablero hay ranas de distintos colores. En este caso, las ranas de distintos colores se encuentran en cada tablero de 5×5.

Caso 2. Todas las ranas son del mismo color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que todas las ranas son rojas. Así, por el principio de las casillas, hay al menos $\lceil \frac{6}{2} \rceil = 2$ ranas rojas que al colocarlas en el tablero caen en el mismo número. Luego, esas dos ranas se pueden encontrar.

Parte (b). Teniendo en cuenta que en cada tablero de 5×5 una rana roja y una verde se encuentran exactamente una vez, dividiremos el tablero de 11×11 en 9 regiones: 4 tableros de 5×5 (las 4 regiones comparten un lado en común), 4 tableros de 5×1 (las orillas) y una casilla (la esquina), tal como se muestra a continuación:



Dado que tenemos 4 tableros de 5×5 y ahí ya sabemos que se tienen que encontrar las dos ranas y además, como tenemos 9 regiones en total en todo el tablero se sigue que $4 \leq k \leq 9$. Sabemos que en cada tablero de 5×5 ambas ranas se tienen que encontrar, así que solo nos enfocaremos en el tablero de 5×5 que se encuentra en la parte superior izquierda. Si en ese tablero de 5×5 colocamos ambas ranas sobre la casilla superior izquierda (el que tiene el número 1), ambas ranas se encontrarán en las 9 regiones en las que hemos dividido el tablero de 11×11. Si colocamos ambas ranas en otra casilla del tablero de 5×5 que no sea la que ya hemos analizado, solo podremos visitar 4 o 6 regiones. Esto se debe a que no siempre es posible visitar las 5 regiones que se encuentran en la orilla (vea la figura de arriba). Por lo tanto, $k = 4$, 6 o 9. $\square$

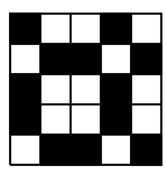
Problema 6. *(Olimpiada Matemática Rusa, 2000) Considere un tablero de* 200×200. *Cada casilla del tablero es coloreado de color blanco o negro, de tal manera que el número de casillas negras menos el número de casillas blancas en el tablero es 404. Pruebe que sin importar como se coloree el tablero siempre y cuando se cumpla con la condición mencionada, existe un cuadrado de* 2×2 *sobre el tablero tal que tiene un número impar de casillas negras.*

Solución. Procederemos por contradicción. Supongamos que todos los cuadrados de 2×2 sobre el tablero tienen un número par de casillas negras. Denotaremos por B y N al número de casillas blancas y casillas negras de la primera columna, respectivamente. Observemos que $B + N = 200$. Como estamos bajo el supuesto que todos los cuadrados de 2×2 sobre el tablero tienen un número par de casillas negras, notemos que una vez coloreado la primera columna, la forma de colorear la segunda columna solo tiene dos posibilidades:

1) Lo pintamos de la misma manera en que pintamos la primera columna.

2) Lo pintamos de la forma opuesta en que hemos pintado la primera columna.

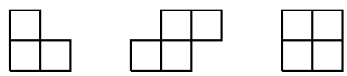
De forma similar, una vez coloreado la segunda columna, la tercera columna solo tiene dos formas de colorearse. En general, la forma en que coloreemos la primera columna nos dice las dos opciones que tienen las demás columnas de colorearse. El siguiente ejemplo, muestra un tablero de 5×5. En el tablero, la segunda columna está coloreada en forma opuesta a la manera que se coloreó la primera columna. La tercera columna está coloreado de la misma manera en que se coloreó la segunda columna, y así, sucesivamente.



Retomando nuestro problema, denotaremos por x al número de columnas del tablero coloreado exactamente en la misma manera que la primera columna, y denotaremos por y al número de columnas del tablero coloreado exactamente de la forma opuesta al de la primera columna. Observemos que $x + y = 200$. Notemos que $Nx + By$ es igual al número casillas negras en todo el tablero y $Bx + Ny$ es igual al número casillas blancas en todo el tablero. Por las condiciones del problema, tenemos que $(Nx + By) - (Bx + Ny) = 404$. Haciendo el uso adecuado del álgebra deducimos que $(x - y)(N - B) = 404$. Por otro lado, dado que $x + y = 200$, se sigue que x y y

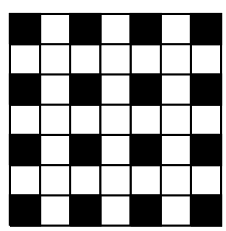
tienen la misma paridad (par + par= par e impar + impar=par). De forma similar, B y N tienen la misma paridad. De aquí, $x - y = 2m$ y $B - N = 2n$, para algún entero m y n. Observemos que $1 \leq x \leq 200$ y $0 \leq y \leq 199$, luego $-200 \leq x - y = 2m \leq 200$, es decir, $|m| \leq 100$. De forma análoga, se tiene que $|n| \leq 100$. Por otro lado, $(x - y)(N - B) = 4nm = 404$. Así, $mn = 101$. Lo cual es una contradicción, pues 101 es primo y además $|m| \leq 100$ y $|n| \leq 100$. $\square$

Problema 7. *(Lista corta, Olimpiada Internacional, 2002) Dado un entero positivo n, un tablero de $(2n+1) \times (2n+1)$ será cubierto por piezas de los tipos que se muestran a continuación:*



donde rotaciones y reflexiones de las piezas son permitidas. Pruebe que por lo menos $4n + 3$ piezas del primer tipo serán usadas.

Solución. Dado el tablero de $(2n + 1) \times (2n + 1)$, numeremos las filas y columnas del 1 al $2n + 1$. Las casillas que se encuentren en una fila impar y columna impar se van a colorear de negro y las otra casillas se dejarán en blanco. Por ejemplo, para el caso $n = 3$, tenemos un tablero de 7×7 y queda coloreado como se muestra a continuación:



Si coloreamos el tablero de $(2n + 1) \times (2n + 1)$ como se ha indicado, dicho tablero tendrá $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ casillas negras y $3n^2+2n$ casillas blancas (al número total de casillas del tablero restele el número de casillas negras). Al colocar una pieza del primer tipo, notemos que esta pieza cubre dos casillas blancas y una negra, o cubre tres casillas blancas. Las otras dos piezas, siempre cubren 3 casillas blancas y una negra. Sea A el número de piezas del primer tipo que cubre dos casillas blancas y una negra, B el número de piezas del primer tipo que cubre tres casillas blancas y C el número de piezas de los otros dos tipos. Contando las casillas negras, tenemos que $A + C = n^2 + 2n + 1$. Contando las casillas blancas, tenemos que $2A + 3B + 3C = 3n^2 + 2n$. Ahora, notemos que:

$$\begin{aligned} 4n + 3 &= 3(n^2 + 2n + 1) - (3n^2 + 2n) = 3(A + C) - (2A + 3B + 3C) \\ &= A - 3B \leq A + B. \end{aligned}$$

En consecuencia, para cubrir el tablero necesitamos al menos $4n+3$ piezas del primer tipo.

Problema 8. *Considere un tablero de $2\times 2n$. Encuentre el número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero tal que estos no se ataquen mutuamente (un rey ataca a una pieza si este se encuentra en una casilla adyacente). El siguiente diagrama, muestra un ejemplo de 4 piezas de rey que no se atacan mutuamente en un tablero de 2×8 (la letra R indica que se ha colocado una pieza del Rey en dicha casilla).*

R						R	
		R		R			

Solución. Este problema lo resolveremos por recursión. Denotaremos por t_n al número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero de $2\times 2n$ tal que estos no se ataquen mutuamente. Empezaremos analizando los casos cuando $n=1$ y $n=2$.

	R		
		R	

Cuando $n=1$, podemos notar que solo hay 4 posibilidades para colocar a un rey en un tablero de 2×2, así, $t_1=4$. Lo interesante del problema surge cuando analizamos el caso cuando $n=2$. Debemos tener cuidado al colocar las piezas del rey, de no hacerlo, puede ocurrir el caso que muestra el diagrama de arriba (el rey de la columna 2 ataca al rey de la columna 3). Después de intentar muchos casos, podemos convencernos que $t_2=12$. Por la naturaleza del problema, nos conviene dividir el tablero de $2\times 2n$ en n cuadrados de 2×2. Estudiaremos el caso cuando $n=3$ y de ahí generalizaremos. Recordemos que hemos dividido el tablero de 2×6 en 3 cuadrados de 2×2 (vea el diagrama de abajo). El primero cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: a, b, c y d. El segundo cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: e, f, g y h. El tercer cuadrado de 2×2 es el que tiene las letras: i, j, k y l. Hallaremos el valor de t_3 teniendo en cuenta que $t_1=4$ nos dice el número de formas de colocar a una pieza del rey en un tablero de 2×2 y $t_2=12$ nos dice el número de formas de colocar a dos piezas del rey en un tablero de 2×4.

a	c	e	g	i	k
b	d	f	h	j	l

Fijemos nuestra atención en el tercer cuadrado de 2×2. Dado que ya conocemos la solución para el tablero de 2×4 (el valor de t_2) y como en el tercer cuadrado de 2×2 podemos colocar a una pieza del rey en cualquiera de sus 4 casillas, nuestra primera estimación para t_3 sería $t_3=4t_2$. Pero como mencionamos previamente, hay que tener cuidado al colocar una pieza del rey en la segunda columna del segundo cuadrado (g

y h) y al colocar una pieza del rey en la primera columna del tercer cuadrado (i y j). Hay 4 maneras de colocar al mismo tiempo las dos piezas del rey en las dos columnas que no queremos y, cada una de esas maneras, dejan fijo a un rey en el segundo y en el tercer cuadrado de 2×2. Así, en cada uno de esos 4 casos, estamos agregando a nuestra primera estimación de t_3, la solución del primer cuadrado de 2×2, esto es, t_1. Para eliminar aquellos casos que no son de nuestro interés (el que acabamos de mencionar) basta con notar que $t_3 = 4t_2 - 4t_1$. En general, para $n \geq 3$, $t_n = 4t_{n-1} - 4t_{n-2}$ nos da el número total de maneras de colocar n piezas del rey en el tablero de $2 \times 2n$ tal que estos no se ataquen mutuamente. Ahora, procederemos a obtener una fórmula cerrada para t_n. Como $t_n = 4t_{n-1} - 4t_{n-2}$, se sigue que:

$$t_n - 2t_{n-1} = 2(t_{n-1} - 2t_{n-2}) = 2(2(t_{n-2} - 2t_{n-3})) = \cdots = 2^{n-2}(t_2 - 2t_1) = 2^n.$$

De aquí, $t_n - 2t_{n-1} = 2^n$, lo cual implica que

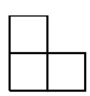
$$\begin{aligned} t_n - 2t_{n-1} &= 2^n \\ 2t_{n-1} - 4t_{n-2} &= 2^n \\ 4t_{n-2} - 8t_{n-3} &= 2^n \\ &\vdots \\ 2^{n-2}t_2 - 2^{n-1}t_1 &= 2^n. \end{aligned}$$

Sumando todos los términos del lado izquierdo y del lado derecho, se sigue que $t_n - 2^{n-1}t_1 = 2^n(n-1)$. De lo cual deducimos que $t_n = 2^n(n+1)$. $\square$

Ahora, dejamos unos ejercicios para el lector.

Ejercicios

1) Sea k un entero no negativo. ¿Para qué enteros positivos n de la forma $6k+3$ es posible cubrir un tablero de $n \times n$ completamente, usando solamente piezas como la siguiente figura?



2) Sobre un tablero de 8×8, A y B juegan por turnos a colocar caballos negros y caballos blancos, respectivamente. Un jugador pierde si el coloca un caballo sobre una casilla el cual se encuentra atacado por algún caballo de su oponente, o si no ya no hay casillas libres para colocar su caballo. Si el jugador A empieza, ¿quién tiene la estrategia ganadora?

3) Determine el número de maneras de cubrir un tablero de 4×4 usando 8 fichas de dominó (2×1).

4) En cada cuadrado de una cuadrícula de 6×6 hay una luciérnaga apagada o encendida. Una movida es escoger tres cuadrados consecutivos, ya sean los tres verticales o

los tres horizontales, y cambiar de estado a las tres luciérnagas que se encuentran en dichos cuadrados. Cambiar de estado a una luciérnaga significa que si está apagada se enciende y viceversa. Muestre que si inicialmente hay una luciérnaga encendida y las demás apagadas, no es posible hacer una serie de movidas tales que al final todas las luciérnagas estén apagadas.

5) Dado un tablero de 8×8, ¿de cuántas formas es posible colocar en cada casilla el número -1 o el número 1, de tal forma que la suma de cada tablero de 2×2 sea igual a 0?

6) Sea n un número entero mayor que 1. ¿De cuántas formas se pueden acomodar todos los números $1, 2, 3, \ldots, 2n$ en las casillas de una cuadrícula de $2 \times n$, uno en cada casilla, de manera que cualesquiera dos números consecutivos se encuentren en casillas que comparten un lado en la cuadrícula?

7) Los enteros del 1 al $n^2 (n \geq 2)$ son colocadas arbitrariamente sobre un tablero de $n \times n$. Pruebe que existen dos casillas adyacentes (comparten un vértice en común o un lado en común) tal que la diferencia de los números colocadas en ellas no es menor que $n + 1$.

8) Considere un tablero de 4×1995. ¿Puede un caballo moverse sobre todas las casillas del tablero (puede visitar una casilla solo una vez) de tal forma que la última casilla de su recorrido sea la primera en donde empezó?

9) En un tablero de ajedrez de 2017×2017, se han colocado en la primera columna 2017 caballos de ajedrez, uno en cada casilla de la columna. Una tirada consiste en elegir dos caballos distintos y de manera simultánea moverlos como se mueven los caballos de ajedrez. Encuentra todos los posibles valores enteros de k con $1 \leq k \leq 2017$, para los cuales es posible llegar a través de varias tiradas, a que todos los caballos estén en la columna k, uno en cada casilla.

10) En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un foco. Inicialmente todos los focos están apagados. En un paso, se permite cambiar el estado de todos los focos en una fila o de todos los focos en una columna (los focos prendidos se apagan y los focos apagados se prenden). Muestra que si después de cierta cantidad de pasos hay uno o más focos prendidos, entonces en ese momento hay al menos n focos prendidos.

Bibliografía

1) Alexander Soifer. *The Colorado Mathematical Olympiad: The Third Decade and Further Explorations.* Springer, 2011.

2) Bin Xiong, Zhongyi Zheng. *Graph Theory*. Mathematical Olympiad Series, Vol. 3. East China Normal University Press, 2010.

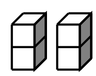
3) Vlad Matei, Elizabeth Reiland. *112 Combinatorial Problems from the Awesome-Math Summer Program.* Vol. 21, XYZ Press, 2016.

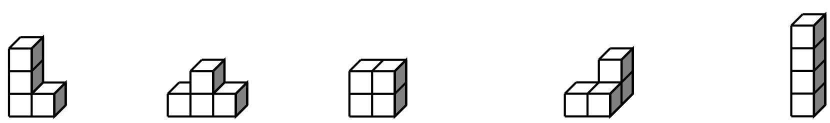
4) Yao Zhang. *Combinatorial problems in mathematical competitions.* Vol. 4, Mathematical Olympiad Series, 2011.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los problemas del examen de invitación a la OMM del año 2018. Los problemas del 1 al 12 conformaron la versión A del examen y los problemas del 13 al 25 conformaron la versión B del examen.

Problema 1. ¿Qué construcción no puede hacerse usando las dos piezas que se muestran?



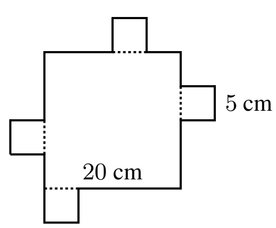


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 2. Jacobo quiere insertar el dígito 3 en el número 2018 de manera que el número de 5 dígitos que forme sea lo más pequeño posible. ¿Dónde debe colocarlo?

(a) antes del 2 (b) entre el 2 y el 0 (c) entre el 0 y el 1
(d) entre el 1 y el 8 (e) después del 8

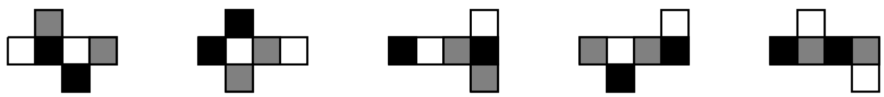
Problema 3. Sobre cada lado de un cuadrado de lado 20 cm, se coloca en su exterior un cuadrado de lado 5 cm.



¿Cuál es el perímetro de la figura que se formó?

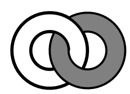
(a) 80 cm (b) 100 cm (c) 110 cm (d) 120 cm (e) 140 cm

Problema 4. Las caras de un cubo están pintadas con tres colores de manera que caras opuestas son del mismo color. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al desarrollo del cubo?

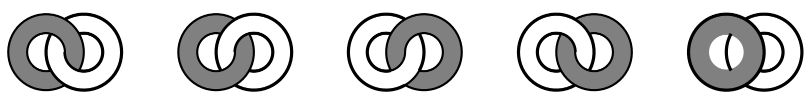


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 5. En la figura se muestran entrelazados un anillo gris y uno blanco. Pedro, que está enfrente de los anillos, los ve como se muestra en la figura.

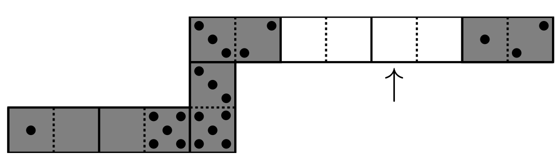


¿Cómo los ve Pablo si está detrás de los anillos?



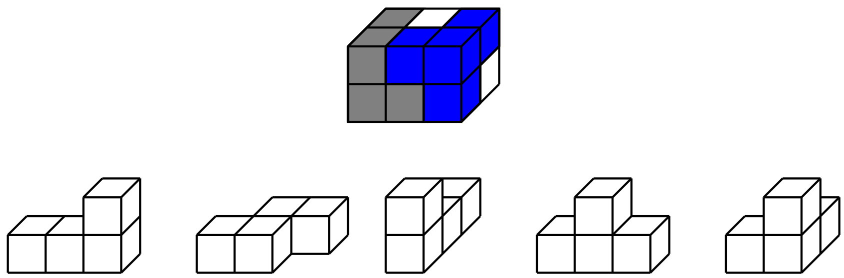
(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 6. Pancho hizo una hilera con 7 fichas de dominó de manera que los lados con el mismo número de puntos quedaran uno al lado del otro. Originalmente la hilera tenía un total de 33 puntos, pero el hermanito de Pancho se llevó dos de las fichas. ¿Qué cantidad de puntos había en el lugar que señala la flecha en la figura?



(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Problema 7. Flora construyó el paralelepípedo que se muestra en la figura usando 3 piezas de distintos colores, de 4 cubitos cada una. En el dibujo se ven los cuatro cubitos de dos de las piezas; de la tercera pieza se ven solo 2 de los 4 cubitos. ¿Qué forma tiene la tercera pieza?

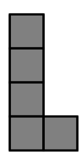


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 8. Pablo y Emilio tomaron agua de una jarra que estaba llena. Emilio tomó primero cierta cantidad, Pablo tomó después una cuarta parte de lo que quedaba. Si los dos tomaron la mitad del agua de la jarra, ¿qué fracción de la jarra tomó Pablo?

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) $\frac{1}{3}$ (e) $\frac{1}{2}$

Problema 9. ¿Cuál es el menor número de piezas en forma de L, como la de la figura, que se necesitan para formar un tablero cuadrado? (Las piezas pueden girarse, pero no se pueden recortar).

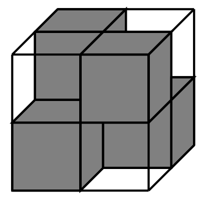


(a) 5 (b) 10 (c) 15 (d) 20 (e) 25

Problema 10. Ana, Bebe y Cici se deben de sentar en alguna de 7 sillas que están en fila, de manera que entre cada dos de ellas quede al menos una silla vacía. ¿De cuántas maneras se puede hacer este acomodo?

(a) 6 (b) 7 (c) 36 (d) 42 (e) 60

Problema 11. Un cubo que mide $2 \times 2 \times 2$ está formado por cuatro cubos transparentes de $1 \times 1 \times 1$ y cuatro cubos opacos (no transparentes) de $1 \times 1 \times 1$ como se muestra en la figura. Están colocados de tal manera que el cubo grande completo no es transparente (es decir, no es posible ver de adelante hacia atrás, ni de arriba hacia abajo, ni de lado a lado).



Al menos, ¿cuántos cubos opacos de dimensiones $1 \times 1 \times 1$ deben ponerse en un cubo de $3 \times 3 \times 3$ para asegurar que el cubo completo no es transparente?

(a) 6 (b) 9 (c) 10 (d) 12 (e) 18

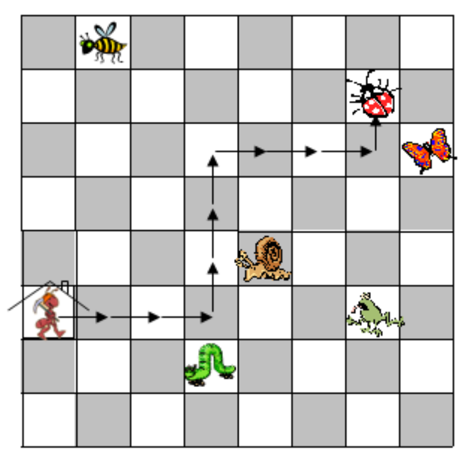
Problema 12. Sean a, b, c números reales diferentes de cero, que satisfacen:

$$a + \frac{1}{b} = 2, \quad b + \frac{1}{c} = 3, \quad c + \frac{1}{a} = 5.$$

¿Cuál es el valor de $abc + \dfrac{1}{abc}$?

(a) 1 (b) 5 (c) 10 (d) 15 (e) 20

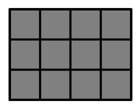
Problema 13. Cuando la hormiga  va desde la casa  siguiendo las flechas $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 1$, llega a la catarina .



¿A qué animal llega si sale de la casa y sigue las flechas: $\rightarrow 2$, $\downarrow 2$, $\rightarrow 3$, $\uparrow 3$, $\rightarrow 2$, $\uparrow 2$?

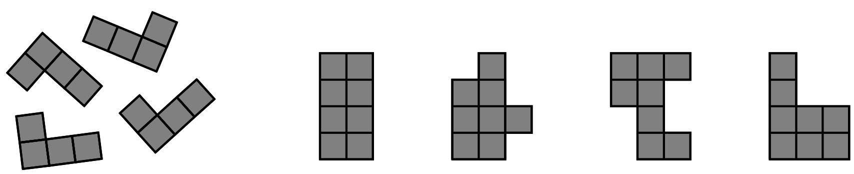
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 14. ¿Cuántos rectángulos que contengan un número impar de cuadritos de 1×1 se pueden encontrar dentro del tablero de 3×4?



(a) 12 (b) 16 (c) 18 (d) 24 (e) 32

Problema 15. Rocío tiene los 4 mosaicos en forma de L que se muestran en la figura de la izquierda y quiere tomar dos de ellos para formar figuras como las que se muestran a la derecha.



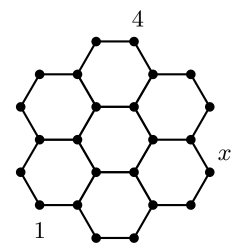
¿Cuántas de esas 4 figuras puede formar?

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1 (e) 0

Problema 16. Ana, Blanca, Ceci y Diana practican cada una deportes distintos: karate, fútbol, volibol y yudo. A Ana no le gustan los deportes de pelota. Blanca practica yudo. Solo una de las afirmaciones siguientes puede ser verdadera, ¿cuál es?

(a) Ana es volibolista (b) Blanca es futbolista (c) Ceci es volibolista
(d) Diana practica karate (e) Ana practica yudo

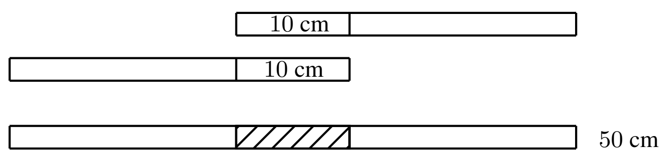
Problema 17. En cada uno de los puntos $\bullet$ de la figura debes poner un número, de manera que la suma de los números en los extremos de cada segmento sea la misma.



Dos de los números ya se escribieron. ¿Qué número va en el lugar de x?

(a) 1 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) falta información

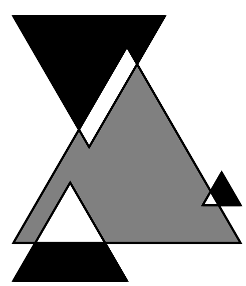
Problema 18. Azucena tiene 4 tiras de madera de la misma longitud. Pega dos de ellas con un traslape de 10 cm y así obtiene una tira de 50 cm de longitud.



Con las otras dos quiere hacer una tira de 56 cm de longitud. ¿Cuánto debe medir el traslape?

(a) 4 cm (b) 6 cm (c) 8 cm (d) 10 cm (e) 12 cm

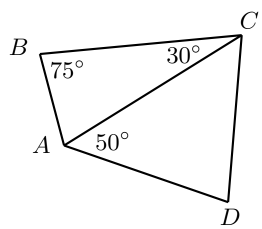
Problema 19. La figura se formó con un triángulo equilátero gris de lado 3 cm, dos triángulos equiláteros negros de lado 2 cm y otro triángulo equilátero negro de lado 1 cm. La parte común de dos triángulos se colorea de blanco.



¿Cuánto vale la diferencia del valor del área gris menos el valor del área negra?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

Problema 20. En la figura, se muestra un cuadrilátero $ABCD$.



Si $BC = AD$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle ADC$?

(a) $30°$ (b) $50°$ (c) $55°$ (d) $65°$ (e) $70°$

Problema 21. En un torneo de fútbol participan 5 equipos. Cada equipo juega exactamente una vez con cada uno de los otros equipos. En un juego, el ganador obtiene 3 puntos y el perdedor 0 puntos, pero si empatan, cada equipo obtiene 1 punto. Si al final del torneo se suman los puntos de todos los equipos, ¿cuántos valores distintos puede tener esta suma?

(a) 5 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 15

Problema 22. Emilia quiere llenar un tanque para su tortuga y necesita 4 cubetas de agua para llenarlo. En cada viaje llena la cubeta desde una fuente y camina hacia el tanque, pero en el camino derrama $\frac{1}{3}$ del contenido de la cubeta. ¿Cuántos viajes tiene que hacer para llenar el tanque?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Problema 23. En cada partido de fútbol de un torneo, al ganador se le otorgaron 3 puntos, al perdedor 0 y, si hubo empate, entonces cada equipo ganó 1 punto. En 38 partidos un equipo tenía acumulados 80 puntos. ¿Cuál es el máximo número de partidos que pudo haber perdido?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11 (e) 12

Problema 24. ¿Cuántos números de tres cifras abc hay que cumplan, $8 > a > b > c > 0$?

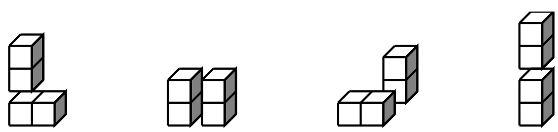
(a) 8 (b) 35 (c) 42 (d) 70 (e) 210

Problema 25. Un número entero es *bicuadrado* si se escribe de manera única como la suma de dos cuadrados. Por ejemplo, $25 = 4^2 + 3^2$ es bicuadrado, pero $65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2$ no lo es. ¿Cuál de los siguientes números es bicuadrado?

(a) 85 (b) 125 (c) 130 (d) 170 (e) 180

Soluciones a los problemas de práctica

Solución del problema 1. La respuesta es (b). Las demás figuras se pueden construir como se muestra:



(a) (c) (d) (e)

Solución del problema 2. La respuesta es (d). Los números más pequeños deben ir a la izquierda de los grandes; así, 0, 1 y 2 deben estar a la izquierda de 3 y 3 debe estar a la izquierda de 8.

Solución del problema 3. La respuesta es (d). Cada vez que se coloca un cuadrado chico sobre un lado del grande, se restan 5 cm del perímetro del cuadrado original y este contribuye con 15 cm al perímetro de la nueva figura. Luego, el perímetro de la nueva figura es $80 - 4(5) + 4(15) = 120$ cm.

Solución del problema 4. La respuesta es (e). En el cubo, cuadrados del mismo color no pueden compartir un vértice, así que esto mismo debe ocurrir al desarrollar el cubo. Entonces, las únicas posibilidades son (d) o (e); sin embargo, al formar el cubo a partir de (d), las caras más oscuras quedan compartiendo un vértice. En la opción (e) quedan bien.

Otra forma. Las tapas superior e inferior deben ser del mismo color, la (e) es la única que lo cumple y también sus caras laterales opuestas son del mismo color.

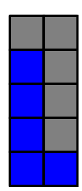
Solución del problema 5. La respuesta es (a). El anillo gris debe estar a la izquierda, ya que de frente está a la derecha, y debe pasar por arriba del anillo blanco en su parte izquierda.

Solución del problema 6. La respuesta es (c). La suma que se ve es 22 por lo que faltan 11 puntos. Junto al 2 va otro 2 y junto al 1 va otro 1, de donde los números que faltan en la posición marcada con la flecha y el de al lado a la izquierda (que son iguales) deben sumar $33 - 25 = 8$. Luego, la respuesta es $\frac{8}{2} = 4$.

Solución del problema 7. La respuesta es (d). Los cubitos de la tercera pieza deben cubrir de la parte de atrás, los tres cubitos de abajo y, de la parte de arriba, el cubito central.

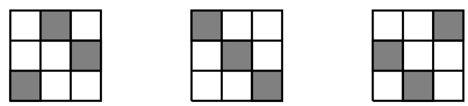
Solución del problema 8. La respuesta es (b). Denotemos por j, e, p las cantidades de agua que hay en la jarra, que toma Emilio y que bebe Pablo, respectivamente. Tenemos por los datos que, $\frac{1}{2}j = e + p$ y $4p = (j - e)$, luego al despejar e se tiene que $\frac{1}{2}j - p = e = j - 4p$, por lo que $\frac{1}{2}j = 3p$, de donde $p = \frac{1}{6}j$.
Otra forma. Pablo y Emilio toman media jarra. La otra media jarra equivale a tres veces lo que bebió Pablo, ya que él tomó la cuarta parte de lo que Emilio dejó. Luego, si media jarra es tres veces lo que Pablo tomó, entonces Pablo bebió una sexta parte de la jarra.

Solución del problema 9. La respuesta es (d). Como cada pieza tiene 5 cuadritos, necesitamos el menor entero positivo n tal que $5n$ sea un cuadrado. Tal cuadrado debe ser divisible entre 5, por lo que n es múltiplo de 5. Su otro factor debe ser un cuadrado diferente de 1 y, como queremos el menor, la respuesta es $n = 5 \cdot 2^2 = 20$.
Para formar el cuadrado con las 20 piezas, tomamos primero dos de las piezas y las unimos como en la figura para formar un rectángulo de 5×2. Con 10 de estos rectángulos colocando 5 en una fila y 5 más sobre dicha fila, se obtiene el cuadrado de 10×10.



Solución del problema 10. La respuesta es (e). Sentadas las 3 hay 4 espacios entre ellas donde pueden estar las sillas: $\_\_A\_\_B\_\_C\_\_$ pero entre A y B debe haber una silla y, entre B y C, debe haber otra silla. Luego, las otras 2 sillas deben de acomodarse en los 4 espacios, lo cual se puede hacer de 6 maneras si solamente acomodamos una silla en el espacio correspondiente. Pero también podemos acomodar las 2 sillas en uno de los 4 espacios, por lo que hay 10 maneras de acomodar las sillas. Como las personas se pueden acomodar de $3! = 6$ maneras, resulta que hay $10 \cdot 6 = 60$ maneras de acomodarse.

Solución del problema 11. La respuesta es (b). Hay 9 filas de cubos en cada una de las tres direcciones, así que es necesario tapar 27 direcciones. Como cada cubito tapa 3 direcciones, al menos se necesitan 9. Veamos que un acomodo con 9 es posible. En el siguiente esquema ponemos tres cuadrículas de 3×3, cada una de ellas representando un "piso" del cubo de $3 \times 3 \times 3$ y sombreamos el lugar donde puede ponerse un cubo, de manera que se tapen todas las direcciones en el cubo grande. Como el esquema contiene 9 cuadritos sombreados, entonces 9 es precisamente el mínimo.

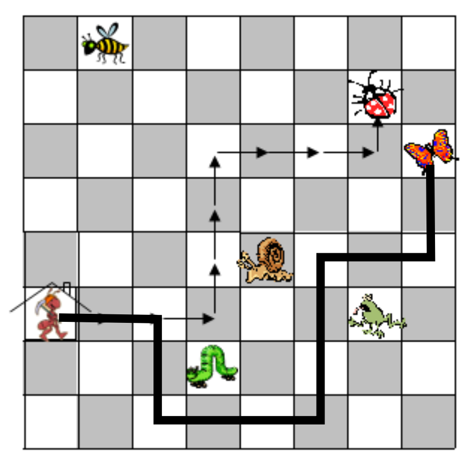


Solución del problema 12. La respuesta es (e). Tenemos que

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 \cdot 5 &= \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) = abc + \frac{1}{abc} + \left(a + \frac{1}{b}\right) + \left(b + \frac{1}{c}\right) + \left(c + \frac{1}{a}\right) \\ &= abc + \frac{1}{abc} + 2 + 3 + 5. \end{aligned}$$

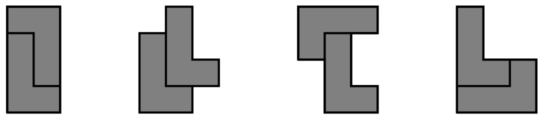
Luego, $abc + \frac{1}{abc} = 2 \cdot 3 \cdot 5 - (2 + 3 + 5) = 30 - 10 = 20$.

Solución del problema 13. La respuesta es (a). En la figura se muestra con línea gruesa el camino que sigue la hormiga.



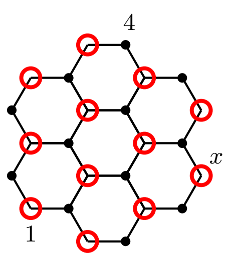
Solución del problema 14. La respuesta es (d). Los rectángulos con un número impar de cuadritos son solamente de los siguientes tamaños: 1×1, 1×3, 3×1 y 3×3 de los que hay 12, 6, 4 y 2, respectivamente. Luego, la respuesta es 24.

Solución del problema 15. La respuesta es (a). Todas las formas son posibles.



Solución del problema 16. La respuesta es (c). Como a Ana no le gustan los deportes de pelota, sabemos que debe practicar yudo o karate. Pero Blanca practica yudo, así que Ana es la que practica karate. Luego, (a), (b) y (e) son falsas. Como las cuatro practican deportes distintos y Ana practica karate, (d) también es falsa. Por lo tanto, Ceci es volibolista.

Solución del problema 17. La respuesta es (a). Cuando dos segmentos tienen un punto en común, los otros extremos deben tener el mismo valor; así podemos observar que todos los puntos marcados con una circunferencia deben llevar el número 1.



Solución del problema 18. La respuesta es (a). Las dos tiras juntas miden 50 cm y el traslape es de 10 cm, así que cada regla mide 30 cm. Para lograr 56 cm, el traslape debe de ser de 4 cm pues $56 = 30 + 30 - 4$.

Solución del problema 19. La respuesta es (c). El área gris menos el área negra es igual al área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros, ya que las partes comúnes se suman y restan.
Ahora, notemos que el triángulo gris de lado 3 cm, se puede dividir en 9 triángulos de lado 1 cm y, el triángulo de lado 2 cm, se puede dividir en 4 triángulos de lado 1 cm. Como $9 = 4 + 4 + 1$, se tiene que la diferencia del área del triángulo gris menos las áreas de los triángulos negros es 0.
Otra manera de terminar. El área de un triángulo equilátero es igual $\frac{\sqrt{4}}{3}\ell^2$, donde ℓ es la longitud del lado, por lo que la diferencia de las áreas es, $\frac{\sqrt{4}}{3}\cdot 3^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{4}}{3}\cdot 2^2 - \frac{\sqrt{4}}{3}\cdot 1^2 = 0$.

Solución del problema 20. La respuesta es (d). Tenemos que $\angle BAC = 180° - 75° - 30° = 75°$, así que $AC = BC = AD$; es decir, el triángulo ACD es isósceles y entonces $\angle ACD = \angle ADC$. Por lo anterior, $\angle ADC = (180° - 50°)/2 = 65°$.

Solución del problema 21. La respuesta es (d). El número de partidos del torneo es 10. En un partido se dan 3 puntos entre los dos equipos si hay un ganador y se dan 2

puntos si hay empate. El máximo de puntos es 30 y sucede cuando no hay empates. La menor suma es 20 y ocurre cuando hay empate en cada uno de los 10 partidos. Luego, hay 11 posibles sumas que son $30 - x \cdot 1$, donde x es el número de empates en el torneo que puede ser cualquiera de los valores $0, 1, 2, \ldots, 10$.

Solución del problema 22. La respuesta es (b). En cada viaje, Emilia llena $\frac{2}{3}$ de la cubeta. Como $6 \times \frac{2}{3} = 4$, Emilia necesita hacer 6 viajes para completar 4 cubetas.
Otra forma: Cada 3 viajes completa 2 cubetas, luego necesita hacer 6 viajes.

Solución del problema 23. La respuesta es (c). Llamemos g al número de partidos ganados, e al de empatados y p al de perdidos. Tenemos que $80 = 3g + e$ y $38 = g+e+p$. Multiplicando la segunda ecuación por 3, obtenemos que $114 = 3g+3e+3p$. Si a esta ecuación le restamos la primera ecuación, obtenemos que $34 = 2e+3p$. Como ambos e y p son no negativos, tenemos que $p \leq 11$ pero si $p = 11$, entonces e no es entero; para $p = 10$ tenemos $e = 2$ y, sustituyendo en la primera ecuación, $g = 26$. Esta es la solución de ambas ecuaciones que tiene la máxima p.

Solución del problema 24. La respuesta es (b). Números de tres cifras distintas y con cifras menores a 8, hay $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$. Pero de estos números hay 6 que se forman con las mismas cifras y solamente hay uno que cumple que $a > b > c$. Luego, la respuesta es $\frac{210}{6} = 35$.

Solución del problema 25. La respuesta es (e). Tenemos que $180 = 12^2 + 6^2$. Los cuadrados menores a 180 son $1^2, 2^2, \ldots, 12^2, 13^2$. Para $a = 1, 2, \ldots, 13$, se tiene que $180 - a^2$ es cuadrado solamente cuando $a = 6$ o $a = 12$.
Los otros números no son bicuadrados, ya que $85 = 6^2 + 7^2 = 2^2 + 9^2$, $125 = 2^2 + 11^2 = 5^2 + 10^2$, $130 = 3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$ y $170 = 1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2019 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

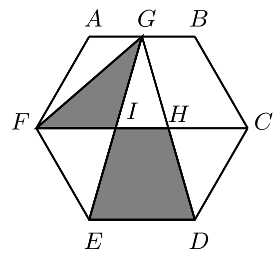
Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Esteban vende galletas en cajas pequeñas de 5 galletas y en cajas grandes de 12 galletas. Tiene muchas cajas de cada tipo, pero no hay cajas de distintos tamaños y no vende galletas sueltas. Si, por ejemplo, un cliente quiere 39 galletas, Esteban puede despachar el pedido exactamente con tres cajas pequeñas y dos grandes, ya que $3\times 5+2\times 12=39$. Pero hay pedidos que no se pueden despachar de manera exacta, por ejemplo, cuando un cliente quiere 7, 16 o 23 galletas. ¿Cuál es el pedido más grande que no se puede despachar de manera exacta?

Problema 2. Determina todos los números primos p, q y r, distintos entre sí, tales que $p^3-q^2=r$ y $\frac{p+q+r}{q}=r$.

Problema 3. Sean a y b números reales distintos entre sí y distintos de cero tales que $\frac{a-2010}{b}+\frac{b+2010}{a}=2$. Determina el valor de $a-b$.

Problema 4. En la figura, $ABCDEF$ es un hexágono regular de área 2018 y G es el punto medio del lado AB. Calcula el valor del área sombreada.



Problema 5. Un torneo de 215 jugadores es de eliminación directa, esto es, en cuanto un jugador pierde un juego, sale del torneo. Así, en la primera ronda hay 107 juegos y un jugador pasa directamente. En la segunda ronda hay 108 jugadores y por tanto hay 54 juegos sin que nadie pase directamente, y así sucesivamente. ¿Cuántos juegos hay?

Problema 6. Sean x, y, z números reales positivos. Demuestra que

$$x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4.$$

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean K, L, M, N los puntos medios de los lados AB, BC, CD, DA, respectivamente. Si BD parte a KM por la mitad en Q, $QA = QB = QC = QD$ y $\frac{LK}{LM} = \frac{CD}{CB}$, demuestra que $ABCD$ es un cuadrado.

Problema 8. Determina si existen 2019 enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2019}$ tales que mcd$(a_i, a_j) = a_j - a_i$ para cualesquiera i, j con $1 \leq i < j \leq 2019$.

Problema 9. Sean ABC un triángulo y M el punto medio de AC. La circunferencia tangente a BC por B que pasa por M interseca a la recta AB de nuevo en P. Demuestra que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Problema 10. Los enteros positivos del 1 al 49 se colocan al azar en las casillas de un tablero de ajedrez de 7×7. Demuestra que hay un subtablero de 2×2 tal que la suma de los cuatro números en sus casillas es por lo menos 81.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2018 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2018. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2018, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sea O el centro del plano cartesiano. Se toma un punto A en el primer cuadrante con coordenadas (a, b) y se traza el segmento OA. Se gira OA en dirección contraria a las manecillas del reloj hasta un punto B con coordenadas (b, a). Si $\angle AOB = 30°$, encuentra el valor de $\frac{a}{b}$.

Solución. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a > b$. Marcamos a y b en los ejes x, y y llamamos P y Q a los puntos $(a, 0)$ y $(0, a)$, respectivamente. Por el criterio de congruencia LLL, los triángulos AOP y BOQ son congruentes, pues ambos tienen lados que miden OA, a y b. Luego, los ángulos $\angle AOP, \angle BOQ$ son iguales y suman $60°$. Como $\angle APO = \angle BQO = 90°$, los triángulos AOP y BOQ son medios equiláteros y $AO = 2b$. Por el teorema de Pitágoras, $a = \sqrt{4b^2 - b^2} = \sqrt{3}b$, de donde obtenemos que $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

Problema 2. Encuentra todas las ternas (x, y, z) de enteros no negativos tales que $x^2 + yz = 1$, $y^2 + xz = 2$ y $z^2 + xy = 4$.

Solución. Duplicamos cada una de las tres ecuaciones y las sumamos para obtener $2x^2 + 2yz + 2y^2 + 2xz + 2z^2 + 2xy = 14$. Si separamos de manera conveniente, obtenemos que $x^2 + 2xy + y^2 + x^2 + 2xz + z^2 + y^2 + 2yz + z^2 = 14$, que puede escribirse como $(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 = 14$. Como los cuadrados son no negativos y $4^2 = 16$, nuestras opciones son 1, 4 y 9. Pero $4 + 4 + 4 < 14$, de modo que la única solución es $1 + 4 + 9 = 14$. Suponemos que $a + b = 1, b + c = 2, c + a = 3$. Resolvemos el sistema de ecuaciones y obtenemos que $b = 0, a = 1, c = 2$. Para que esto tenga sentido en el sistema original, tenemos $x = 1, y = 0, z = 2$, que es la única solución posible.

Problema 3. Andrea tiene 7 cuyos de los cuales 3 son hembras y 4 son machos. Ella quiere repartirlos en 4 jaulas distintas (ninguna jaula quedará vacía). ¿De cuántas maneras puede hacer esto si quiere que, donde haya al menos una hembra, no haya ningún macho? Nota: Los cuyos son diferentes entre sí.

Solución. Separamos en 3 casos según la cantidad de jaulas que ocupan las hembras.

a) Caso 1. Si las hembras ocupan solo una jaula, quedan 3 jaulas para los machos. Las hembras tienen una única manera de acomodarse. Hay 4 maneras de elegir la jaula de las hembras, hay 3 maneras de elegir cuál jaula tendrá 2 machos, hay 6 maneras de elegir cuál pareja de machos la compartirá, y hay 2 maneras en que los otros dos machos ocupen las jaulas restantes. Son $4 \times 36 = 144$ maneras en este caso.

b) Caso 2. Si las hembras ocupan 2 jaulas, quedan 2 jaulas para los machos. Hay 6 maneras de elegir cuáles dos jaulas ocupan las hembras, 2 maneras de elegir cuál jaula tendrá únicamente una hembra y 3 maneras de elegir cuál hembra la ocupará.

Para dividir a los machos hay 14 maneras: 6 maneras si los separamos dos y dos, y 8 maneras si los separamos uno y tres (2 maneras de elegir la jaula con uno y 4 maneras de elegir al macho que ocupa). Luego, en este caso son $36 \times 14 = 504$.

c) Caso 3. Si las hembras ocupan 3 jaulas, queda una jaula para los machos. Los machos tienen una única manera de acomodarse. Hay 4 maneras de elegir la jaula de los machos y hay 6 maneras en que pueden acomodarse las hembras. Son 24 maneras en este caso.

En total son $144 + 504 + 24 = 672$ maneras de acomodar a los cuyos.

Problema 4. Si escribimos la secuencia $AAABABBB$ a lo largo del perímetro de un círculo, cada palabra de longitud 3 que consiste en las letras A y B (es decir, AAA, AAB, ABA, BAB, ABB, BBB, BBA, BAA) aparece exactamente una vez en el perímetro. Muestra que es posible escribir una secuencia de letras de un alfabeto de k elementos a lo largo del perímetro de un círculo, de tal manera que cada palabra de longitud ℓ (es decir, una ℓ-tupla de letras ordenada) aparezca exactamente una vez en el perímetro.

Solución. Denotemos al alfabeto por $\mathcal{P}$ y consideremos la gráfica dirigida $G = (V, E)$, donde

$$V = \{[a_1, \ldots, a_{\ell-1}] : a_i \in \mathcal{P}\},$$

$$E = \{[[a_1, \ldots, a_{\ell-1}][b_1, \ldots, b_{\ell-1}]] : a_2 = b_1, a_3 = b_2, \ldots, a_{\ell-1} = b_{\ell-2}\}.$$

Si tomamos dos vértices $[a_1, \ldots, a_{l-1}]$ y $[b_1, \ldots, b_{l-1}]$ veamos que debe haber al menos un camino orientado entre ellos:

$$[a_1, \ldots, a_{\ell-1}] \longleftrightarrow [a_2, \ldots, a_{\ell-1}, b_1] \longleftrightarrow [a_3, \ldots, a_{\ell-1}, b_1, b_2] \longleftrightarrow \cdots \longleftrightarrow [b_1, \ldots, b_{\ell-1}]$$

(algunos vértices y aristas pueden repetirse en la secuencia). Lo anterior implica que la gráfica es fuertemente conexa. Por otro lado, cada vértice $[a_1, \ldots, a_{\ell-1}]$ tiene exactamente k arcos salientes y k arcos entrantes: los arcos salientes están dirigidos a los vértices $[a_2, \ldots, a_{\ell-1}, o]$, donde o pasa por todo el alfabeto $\mathcal{P}$ y los entrantes vienen de los vértices $[i, a_1, \ldots, a_{\ell-2}]$, donde i también pasa por todo el alfabeto. Eso significa que los grados internos y externos de cada vértice son iguales, entonces la gráfica es una gráfica de Euler (dirigida). Como consecuencia, existe un ciclo Euleriano en la gráfica, es decir, un ciclo que contiene todas las aristas y cada arista aparece exactamente una vez. Así podemos formar la secuencia cíclica buscada de la siguiente manera: Comencemos con un vértice arbitrario y escribamos su secuencia $a_1, \ldots, a_{\ell-1}$. Sigamos el ciclo de Euler y agreguemos la última letra de cada vértice a la secuencia hasta que lleguemos al primer vértice de nuevo. Ahora borramos las últimas $\ell - 1$ letras (que son necesariamente las mismas que las iniciales). Dado que hay una biyección entre el conjunto de todas las palabras de ℓ letras y el conjunto de aristas de V:

$$[a_1, \ldots, a_\ell] \longleftrightarrow [[a_1, \ldots, a_{\ell-1}], [a_2, \ldots, a_\ell]]$$

se sigue que la secuencia tiene las propiedades requeridas.

Problema 5. Sean a y d dos enteros positivos. Demuestra que existe una constante K tal que cada conjunto de K elementos consecutivos de la progresión aritmética $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a + nd\}_{n=1}^{\infty}$ contiene al menos un número que no es primo.

Solución. Sea p un número primo tal que p no divide a d. Supongamos que para algún entero positivo n se tiene que los elementos $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ son primos. Claramente se tiene que $a_{n+i} = a_n + id$. Entonces $a_n > p$ porque $a_{n+a_n} = a_n + a_n d$ no es un número primo. Luego, en el sistema de residuos $a_{n+1}, \ldots, a_{n+p}$ (mod p), como cada primo es mayor que p, no está el número 0. Así, existen dos números $r_1 < r_2$ tales que $a_{r_1} \equiv a_{r_2}$ (mod p). Esto quiere decir que $a_n + r_1 d \equiv a_n + r_2 d$ (mod p) y así $r_1 d \equiv r_2 d$ (mod p), pero como mcd$(p, d) = 1$, entonces $r_1 \equiv r_2$ (mod p), lo cual es un absurdo.

Problema 6. Sea $\delta(n)$ el máximo divisor impar de n, con n un entero positivo. Demuestra que para todo entero positivo m,

$$\left| S(m) - \frac{2m}{3} \right| < 1,$$

donde $S(m) = \sum_{n=1}^{m} \frac{\delta(n)}{n}$.

Solución. Notemos que $\delta(2k+1) = 2k+1$, $\delta(2k) = \delta(k)$ y $S(2k+1) = S(2k) + 1$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} S(2k) &= \sum_{n=1}^{2k} \frac{\delta(n)}{n} = \sum_{n=1}^{k} \frac{\delta(2n)}{2n} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\delta(2n-1)}{2n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{\delta(n)}{n} + \sum_{n=1}^{k} \frac{2n-1}{2n-1} = \frac{1}{2} S(k) + k. \end{aligned}$$

Si $F(m) = S(m) - \frac{2m}{3}$, entonces $F(2k) = S(2k) - \frac{4k}{3} = \frac{1}{2}S(k) + k - \frac{4k}{3} = \frac{1}{2}S(k) - \frac{k}{3} = \frac{1}{2}F(k)$ y $F(2k+1) = S(2k+1) - \frac{2(2k+1)}{3} = S(2k) + 1 - \frac{2(2k+1)}{3} = \frac{1}{2}S(k) + k + 1 - \frac{4}{3}k - \frac{2}{3} = \frac{1}{2}S(k) - \frac{k}{3} + \frac{1}{3} = F(2k) + \frac{1}{3}$. Finalmente, un argumento inductivo muestra que $0 < F(m) \leq \frac{2}{3}$ para todo entero positivo m, de donde se sigue el resultado.

Problema 7. Determina todas las parejas de enteros positivos (a, n) con $a \geq n \geq 2$, tales que $(a+1)^n + a - 1$ sea una potencia de 2.

Solución. Aplicando el teorema del binomio, tenemos que

$$\begin{aligned} (a+1)^n + a - 1 &= a^n + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + na + 1 + a - 1 \\ &= a^n + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + (n+1)a. \end{aligned} \tag{1}$$

Luego, como todos los términos son divisibles por a y $(a+1)^n+a-1$ es una potencia de 2, se sigue que a también es una potencia de 2. Sean $a=2^b$ y $(a+1)^n+a+1=2^c$. Como $a\geq 2$, tenemos que $b\geq 1$. Más aún, ya que $n\geq 2$, resulta que $2^c>a^2=2^{2b}$ y, por lo tanto, $c>2b$. Note que todos los términos de (1) excepto el último, son divisibles por $a^2=2^{2b}$.
Como $c>2b$, tenemos que 2^c es divisible por 2^{2b} y $(n+1)a$ también lo es. Como $a=2^b$, se sigue que 2^b divide a $n+1$, esto es, $n+1=2^bm=am$ para algún entero positivo m. Dado que $a\geq n\geq 2$, el único valor posible de m es $m=1$ y, por lo tanto, $n=a-1=2^b-1$. Si $b=1$, entonces $n=1$, lo cual no puede ser. Luego, $b>1$ lo cual implica que $a\geq 4$ y $n=a-1\geq 3$. De aquí que $2^c=(a+1)^n+a-1>a^n\geq a^3=2^{3b}$, lo cual implica que $c>3b$. Entonces,

$$\begin{aligned}(a+1)^n+a-1&=a^n+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3+\frac{n(n-1)}{2}a^2+(n+1)a\\&=2^{nb}+\cdots+\frac{(2^b-1)(2^b-2)(2^b-3)}{6}2^{3b}+\frac{(2^b-1)(2^b-2)}{2}2^{2b}+2^{2b}.\end{aligned}$$

Todos los términos, excepto los últimos dos son divisibles por 2^{3b}. Más aún, 2^c es divisible por 2^{3b} y, por lo tanto, $\frac{(2^b-1)(2^b-2)}{2}2^{2b}+2^{2b}=(2^b-1)(2^{b-1}-1)2^{2b}+2^{2b}$ también es divisible por 2^{3b}. Se sigue que $(2^b-1)(2^{b-1}-1)+1=2^{2b-1}-2^b-2^{b-1}+2$ es divisible por 2^b, pero esto solo es posible cuando $b=2$: si $b>2$, todos los términos excepto el último, son divisibles por 4 y, en consecuencia, la suma no es divisible entre 4 (y tampoco es divisible por 2^b). Si $b=2$, entonces $a=4$ y $n=3$. En este caso es fácil verificar que $(a+1)^n+a-1=128=2^7$. Por lo tanto, la única solución es $a=4$ y $n=3$.

Problema 8. Se escoge un punto K en la diagonal de un cuadrilátero convexo $ABCD$ de forma que $KD=DC$, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle KDC$ y $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle KBC$. Prueba que $\angle KDA=\angle BCA$ o $\angle KDA=\angle KBA$.

Solución. Sea X el punto de intersección entre la bisectriz del ángulo $\angle CDK$ y la recta AB. Como $KD=DC$, entonces la bisectriz del ángulo $\angle CDK$ también es la mediatriz del triángulo KDC; por tanto, XD es la bisectriz y la mediatriz del triángulo KCX. Además, $\angle BAC=\angle XAC=\frac{1}{2}\angle KDC=\angle XDC$; en consecuencia, $XCDA$ es un cuadrilátero cíclico. Así, $\angle DXC=\angle DAC$. Por tanto, $\angle KXC=2\angle DAC=\angle KBC$. Sea Y el punto de intersección (distinto de X) entre el circuncírculo del triángulo XCK y la recta AB. Por ser $XCKY$ cíclico, $\angle KYC=\angle KXC=\angle KBC$. Por tanto, X e Y son los únicos dos puntos en AB que satisfacen que $\angle KXC=\angle KYC=2\angle DAC$. Pero, $\angle DAC=\frac{1}{2}\angle KBC$, así que B debe ser X o Y. En consecuencia,

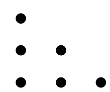
$$\begin{aligned}\angle KDA&=180^\circ-\angle DKA-\angle KDA=\angle CKD-\angle KAD\\&=90^\circ-\frac{1}{2}\angle KDC-\angle KAD=90^\circ-\angle XAC-\angle CAD\\&=90^\circ-\angle XAC-\frac{1}{2}\angle KXC.\end{aligned}$$

Luego, $\angle KXA=\angle CKX-\angle XAC=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle KXC-\angle XAC$ y, por lo tanto,

$\angle KXA = \angle YCA$. Entonces, $\angle KDA = \angle KXA = \angle YCA$. Para concluir basta con sustituir en los casos cuando $B = X$ o cuando $B = Y$.

Problema 9. Encuentra el menor entero positivo n con la siguiente propiedad: para todo conjunto finito X de puntos en el plano, si por cada $m \leq n$ puntos del conjunto existen dos líneas que contienen a todos los m puntos, entonces existen dos líneas que contienen a todos los puntos de X.

Solución. La siguiente configuración muestra que $n \geq 6$. En efecto, cada conjunto de 5 o menos puntos está contenido en dos líneas, pero el conjunto completo no lo está.



Ahora, demostraremos que con $n = 6$ sí se puede. Sea X un conjunto de puntos en el plano, si $\mid X \mid < 6$, por hipótesis todos los puntos están en dos rectas. Si $\mid X \mid \geq 6$, entonces es posible tomar seis puntos y, por hipótesis, estos estarán contenidos en dos rectas. En particular, hay tres puntos en una misma recta Γ. Ahora, supongamos que existen dos puntos $x, y \in X$ que no están contenidos en Γ, de otra forma ya se habría terminado. Sea Λ la recta que pasa por x, y. Supongamos que existe $z \in X$ tal que no esté en Γ o en Λ, de otra forma ya se habría terminado. Por la hipótesis del problema, los tres puntos de Γ, los dos de Λ y z están en dos rectas. Sin embargo, x y y no están en Γ, entonces las dos rectas en las que están los seis puntos anteriores son Γ y Λ; lo cual es una contradicción, pues z no estaba en esas rectas. Por lo tanto, todos los puntos están en Γ o en Λ.

Problema 10. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface $f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy$.

Solución. Al sustituir $y = 0$, se obtiene que $f(xf(0)) = f(0)$. Si $f(0) \neq 0$, la expresión $xf(0)$ toma todos los valores reales posibles. En consecuencia, $f(r) = f(0)$ para todo número real r, esto es, f es una función constante y, por lo tanto, $xy = 0$ para cualesquiera números reales x, y, lo cual es imposible. Luego, $f(0) = 0$.
Si se sustituye $y = x$, se obtiene que $f(0) = f(x^2) - x^2$, es decir, $f(x^2) = x^2$. Por tanto, $f(x) = x$ para todo real $x \geq 0$. Ahora, sean $x, y < 0$. Así, $f(xy) = xy$, por lo que $f(xf(y) - yf(x)) = 0$, lo cual solo puede ocurrir si $xf(y) - yf(x) \leq 0$. De manera análoga se tiene que $yf(x) - xf(y) \leq 0$, es decir, $yf(x) - xf(y) = 0$. En consecuencia, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$. Se sigue que $f(x) = cx$ para todo $x < 0$ con c una constante. Ahora, para $x < 0 < y$ se tiene que $f(xf(y) - yf(x)) = f(xy - cxy) = f((1 - c)xy) = f(xy) - xy = (c - 1)xy$. Así, $f(z) = -z$ para $z = (1 - c)xy$. Si $c = 1$, se obtiene la solución trivial $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $c \neq 1$, basta sustituir $x = -1$ y $y = 1$ en $z = (1 - c)xy = c - 1$ para obtener que $f(c - 1) = -(c - 1)$. Así, $c - 1 < 0$, entonces $f(c - 1) = c(c - 1)$. Por tanto, $-(c - 1) = c(c - 1)$, es decir, $c = -1$. En este caso se tiene que $f(x) = |x|$. Una verificación directa confirma que esta última solución funciona; en efecto, si $x > 0 > y$ (los demás casos son análogos), se tiene que $-2xy = f(-2xy) = f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy = -2xy$.

2^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional

Del 9 al 12 de junio de 2018 se llevó a cabo, en Mérida, Yucatán, la 2^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) en los niveles de primaria y secundaria, con la participación de 261 estudiantes representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta de tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria o una institución equivalente.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente.

Hay dos tipos de exámenes: individual y por equipos. El nivel I de la prueba individual constó de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Los niveles II y III de la prueba individual constaron de 15 problemas para resolver en 120 minutos. Los problemas se dividen en dos partes. La parte A consiste de 12 problemas. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre. En los tres niveles, la prueba por equipos consistió de 8 problemas, a resolver en 70 minutos.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en cada categoría, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2019.

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que obtuvieron medalla de oro en cada nivel de la competencia.

Nombre	Estado	Nivel
Alejandro M. Roque Laparra	Chiapas	I
Mateo I. Latapí Acosta	Ciudad de México	I
Sebastián Montemayor T.	Nuevo León	I
Zizou Rueda Galindo	Oaxaca	I
Dahiana Y. Arvizu Islas	Tamaulipas	I
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México	II
Fidan Garaev Garayeva	Michoacán	II
Luis E. Martínez Aguirre	Nuevo León	II
Alier Sánchez y Sánchez	Quintana Roo	II
Victor M. Bernal Ramírez	Sinaloa	II
Jacobo De Juan Millón	Yucatán	II
Leonardo M. Cervantes M.	Ciudad de México	III
Ana Illanes M. de la Vega	Ciudad de México	III
Diego A. Villarreal Grimaldo	Nuevo León	III
Samantha Ruelas Valtierra	Querétaro	III
Daniel A. Ochoa Quintero	Tamaulipas	III

A continuación, listamos los nombres de los alumnos que obtuvieron medalla de plata en cada nivel de la competencia.

Nombre	Estado	Nivel
Daniel Elías Navarrete Flores	Chihuahua	I
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	I
Raúl E. Flores Rentería	Coahuila	I
Rodrigo Avilés Cabrera	Guanajuato	I
Said Huizar Dorantes	Guanajuato	I
Cristofer Sosa Gutiérrez	Hidalgo	I
Jaziz Cortés Camiro	Michoacán	I
Yeshua A. Wong Vargas	Morelos	I
Santiago Polendo Perini	Nuevo León	I
Carlota Ordoñez Bravo	Quintana Roo	I
Eduardo A. Esparza C.	San Luis Potosí	I
Nicolás Santana Bon	Sinaloa	I
Luis Ángel G. Jiménez Iturbide	Tabasco	I
Leticia Pérez Rodríguez	Tabasco	I
Enrique Jackson Ajuria	Yucatán	I
Juan P. Espinosa Martínez	Zacatecas	I
Carlos F. Martínez Quintero	Ciudad de México	II
Rosa V. Cantú Rodríguez	Ciudad de México	II
José R. Gutiérrez Suárez	Colima	II
Juan B. Olivares Rodríguez	Guanajuato	II
Cynthia N. López Estrada	Guanajuato	II
Omar F. Astudillo Marbán	Guerrero	II

Nombre	**Estado**	**Nivel**
Diego Ocaranza Núñez	Jalisco	II
Pedro E. Mata Castañuela	Nuevo León	II
Fernando Álvarez Ruíz	Nuevo León	II
David García Maldonado	Oaxaca	II
Valentina Acosta Bueno	San Luis Potosí	II
Tiago I. Vargas Rivera	Yucatán	II
María F. López Tuyub	Yucatán	II
Daniel Cañas Urbina	Chiapas	III
Héctor Lomelí García	Ciudad de México	III
Adrián A. García López	Jalisco	III
Gerardo Padilla González	Jalisco	III
Shubham S. Kumar Agarwal	Morelos	III
Uriel J. Hernández Guzmán	Nuevo León	III
Abel Arizpe Kisfalusi	Nuevo León	III
Mónica I. Casillas Rodríguez	Querétaro	III
Rodrigo Gaeta López	San Luis Potosí	III
Karla R. Munguía Romero	Sinaloa	III
Guillermo C. Gruintal Polanco	Yucatán	III
Marco A. Olivares Amaro	Zacatecas	III

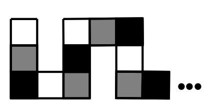
A continuación presentamos los problemas y soluciones del concurso nacional de la 2^a OMMEB.

Pruebas Individuales

Nivel I.

1) En cuatro días, seis máquinas impresoras han impreso 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si solo funcionan cuatro máquinas impresoras?

2) La siguiente serpiente tiene 2018 cuadritos que se han pintado de tres colores siguiendo el patrón: blanco, gris, negro, blanco, gris, negro, etc. ¿Cuántos cuadritos grises hay?



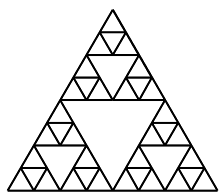
3) A un club de matemáticas asisten 37 estudiantes. Si las niñas se pueden dividir en equipos de 8 sin que sobre ninguna y los niños se pueden dividir en equipos de 7 niños sin que sobre ninguno, ¿cuántas niñas hay en el club?

4) Decimos que un número natural es *yucateco* si tiene 9 dígitos, todos son diferentes y ninguno de ellos es cero. ¿Cuál es la menor diferencia positiva posible entre dos números yucatecos?

5) Mary tiene sus ahorros en una alcancía y decide gastarlos de la siguiente manera: El primer día gasta 20 pesos, el segundo gasta 21 pesos, el tercero 22 pesos, el cuarto 23 pesos y así sucesivamente, de tal modo que cada día gasta un peso más que el día anterior. El día 18 al ir a sacar sus monedas, se da cuenta que tiene en su alcancía exactamente un peso más que lo que gastó el día anterior, ¿cuánto tenía ahorrado Mary?

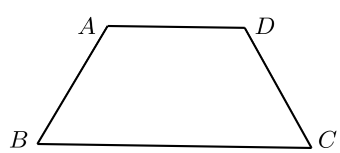
6) Un entero positivo n se dice que es *maya* si en la siguiente lista de números enteros consecutivos $101, 102, 103, \ldots, 200$, hay exactamente un múltiplo de n. Encuentra el número maya más pequeño.

7) La siguiente figura se construyó con palillos de madera de la misma longitud. Si el perímetro del triángulo mayor es 96 cm, ¿cuál es la suma de las longitudes, en cm, de todos los palillos usados?



8) La fracción $\frac{2}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{4}$, y cuando agregas 1 tanto al numerador como al denominador de $\frac{2}{8}$ obtienes $\frac{3}{9}$, que es equivalente a $\frac{1}{3}$. Encuentra una fracción que sea equivalente a $\frac{1}{8}$, de manera que cuando agregues 1 al numerador y al denominador de tu fracción, obtengas una fracción equivalente a $\frac{1}{7}$.

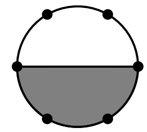
9) Considera un trapecio $ABCD$, con los lados BC y DA paralelos y con $CD = DA = AB = \frac{1}{2}BC$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle CAB$.



10) Si un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro y el área del hexágono es de 120 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo?

11) En una pared está escrita la palabra YUCATAN con letras de metal. Al menos una de las letras se cayó, pero no se cayeron todas. ¿Cuántas palabras distintas pueden haber quedado escritas en la pared, sin considerar los espacios vacíos? Por ejemplo, si se cayeron la C y la T, queda YUAAN.

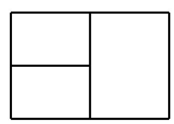
12) Un círculo se colorea de gris y blanco, y sobre la circunferencia están marcados 6 puntos, como se indica en la figura.



Decimos que un cuadrilátero es *bicolor* si su interior tiene una parte blanca y una parte gris. ¿Cuántos cuadriláteros bicolor tienen sus cuatro vértices en los puntos marcados?

13) En un baile de la escuela, cada alumno bailó con 3 alumnas y cada alumna bailó con 6 alumnos. Si al baile asistieron 90 personas entre alumnas y alumnos, ¿cuántos alumnos fueron al baile?

14) Un rectángulo se divide en tres rectángulos más pequeños como se muestra en la figura. Cada uno de los rectángulos más pequeños cumple que sus lados están en la misma proporción que los lados del rectángulo grande. En cada uno de los cuatro rectángulos, ¿cuál es la razón de la longitud del lado más grande entre la longitud del lado más pequeño?

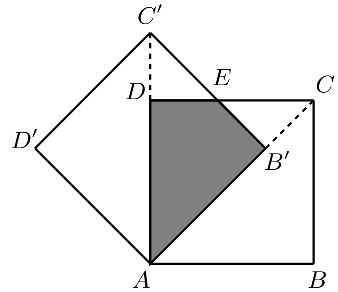


15) Hugo escribe en su libreta exactamente una vez cada uno de los números de la forma $1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \cdots \pm 10$. Por ejemplo, uno de ellos es $1-2+3+4-5-6-7-8+9-10$. Encuentra la suma de todos estos números.

Nivel II. Parte A.

1) ¿Cuántos números primos dividen a $73^2 - 31^2 - 91$?

2) La siguiente figura se formó con dos cuadrados de lado 1 cm, el $ABCD$ y el $AB'C'D'$, de manera que AB' está sobre la diagonal AC. Sea E el punto de intersección de $B'C'$ con CD.



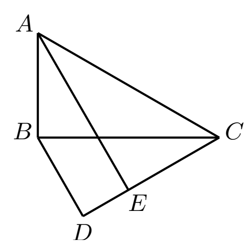
Encuentra el área, en cm^2, del cuadrilátero $AB'ED$.

3) Coincide con el Problema 13 del Nivel I.

4) Coincide con el Problema 14 del Nivel I.

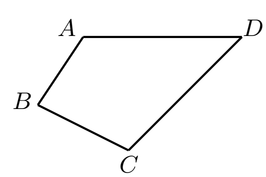
5) Isaac y Alfredo juegan a lanzar dados de la siguiente manera. Isaac lanza un dado y apunta el número que salió en su libreta, luego vuelve a lanzar el dado y apunta el número que le salió a la derecha del número que ya había escrito, formando así un número de 2 dígitos. Luego, Alfredo hace lo mismo que hizo Isaac. ¿Cuál es la probabilidad de que el número de Alfredo sea mayor que el número de Isaac?

6) Sean ABC un triángulo rectángulo con $\angle ABC = 90°$, D un punto que cumple que BDC y ABC son triángulos semejantes, además A y D están en lados opuestos de BC. El punto E sobre CD cumple que los ángulos $\angle CAE$ y $\angle EAB$ son iguales. Si AE es paralelo a BD, ¿cuánto mide (en grados) el ángulo $\angle CAB$?



7) Coincide con el Problema 10 del Nivel I.

8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $CD = 13$ cm y $AD = 12$ cm. Si $\angle ABC$ es recto, calcula el área, en cm^2, de $ABCD$.



9) En una escuela hay 8 alumnos que desean formar equipos de tres. ¿Cuántos equipos se pueden formar si se permite que dos equipos tengan a lo más un alumno en común?

10) En una competencia internacional de matemáticas, el $28\,\%$ de los concursantes son de Asia, el $10\,\%$ de Oceanía. Los concursantes de África junto con los de Europa son el $40\,\%$ del total, además Asia tiene 66 alumnos más que los alumnos de África y entre alumnos de Europa y de Oceanía hay 187 alumnos. ¿Cuántos concursantes europeos participaron?

11) Sea $ABCD$ un rectángulo con diagonal AC, sea Q un punto sobre BC tal que $\angle BAQ = \angle QAD$ y $\angle QAC = 15°$. Encuentra la medida en grados del ángulo $\angle BOQ$, donde O es el punto medio de AC.

12) Encuentra el mayor entero positivo n, tal que $n^2 + 2018n$ sea un cuadrado perfecto.

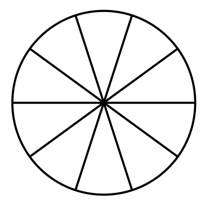
Nivel II. Parte B.

1) Muestra que el siguiente número

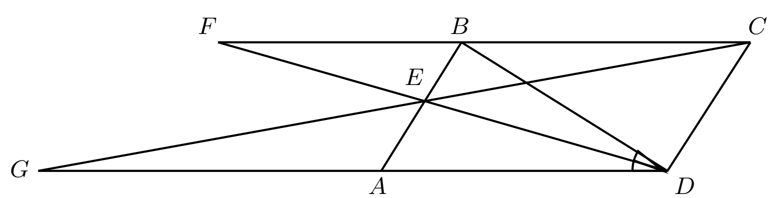
$$\frac{4}{3}+\frac{6}{5}+\frac{8}{7}+\cdots+\frac{102}{101},$$

no es un número entero.

2) En cada una de las 10 regiones en que se ha dividido el círculo de la figura se colocan 3 fichas. Un movimiento consiste en mover una ficha a una región vecina (es decir, a una región que comparte un radio). ¿Es posible que después de 2018 movimientos todas las fichas se encuentren en la misma región? Justifica tu respuesta.



3) Sea $ABCD$ un paralelogramo y sean E un punto sobre AB tal que los ángulos $\angle ADE$ y $\angle EDB$ son iguales, F la intersección de DE con BC y G la intersección de AD con CE. Muestra que $BC^2 = BF \cdot AG$.



Nivel III. Parte A.

1) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

2) Coincide con el Problema 8 del Nivel II.

3) Coincide con el Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 10 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 11 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 12 del Nivel II.

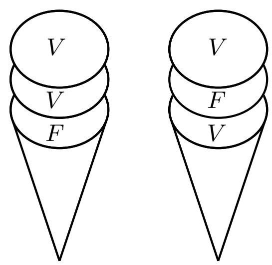
7) La colección de números a_n se define como sigue:

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+3a_n}, \text{ para } n \geq 1.$$

Encuentra el valor numérico de a_{67}.

8) Sea ABC un triángulo isósceles cuyo ángulo en A mide $24°$, siendo este el ángulo desigual. Un punto D en la circunferencia de centro C y radio AC es tal que BD interseca al segmento AC. La perpendicular a BC por D corta a la circunferencia en E. Encuentra $\angle ADB + \angle BEA$.

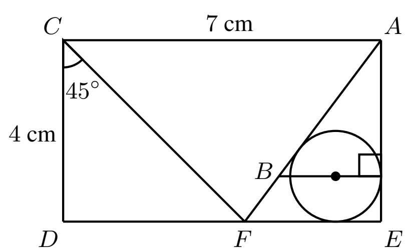
9) Lupita quiere invitarle un helado a cada uno de sus amigos Hugo, Ricardo y Deeds. Para ello tiene tres conos y 7 bolas de helado para repartir: 2 de chocolate, 2 de vainilla, 2 de fresa y 1 de limón. ¿De cuántas maneras puede formar y repartir los helados, si usa las 7 bolas y cada uno de sus amigos debe tener un número distinto (positivo) de bolas en su helado? Nota: Las bolas del mismo sabor son idénticas entre sí, pero el orden en que se distribuyen las bolas en un cono sí importa. Por ejemplo, los siguientes dos helados son distintos.



10) Sea P un polígono regular de n lados y vértices $V_1, V_2, \ldots, V_n$, y sea O su centro. Determina todos los posibles valores de n para que la bisectriz de $\angle V_2V_1O$ pase por V_3.

11) Una lancha cuando se desplaza en un río tranquilo va a 9 km/h. Un día que había corriente en el río, José recorrió un kilómetro de ida y un kilómetro de regreso en 15 minutos. ¿Cuál era la velocidad, en km/h, de la corriente del río ese día?

12) En la siguiente figura, $ACDE$ es un rectángulo y se han dibujado la circunferencia inscrita al triángulo AFE y su diámetro paralelo al lado FE. Encuentra la longitud, en cm, de AB.



Nivel III. Parte B.

1) Coincide con el Problema 2 del Nivel II, Parte B.

2) Ana tiene cuatro hermanas: Berta, Ceci, Diana y Elena. Su edad actual es un número impar menor que 30. Cuando Berta tenga el triple de la edad actual de Ana, se cumplirán las siguientes relaciones:

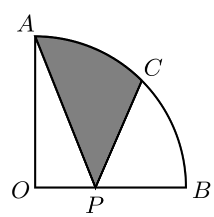
   a) La suma de las edades que tendrán en ese entonces Ana y Ceci será igual a la suma de las edades actuales de todas las hermanas.

   b) La edad de Diana será el triple de su edad actual.

   c) La edad de Elena será un año más que el doble de la edad actual de Berta.

   Halla la suma de las edades de Ana y Berta.

3) En la figura, el sector AOB representa una cuarta parte de un círculo de radio $r = 1$ y el punto C satisface que $\angle BOC = 45°$. Sea P un punto sobre el segmento OB (distinto de O y de B). Se trazan los segmentos AP y CP para formar la región sombreada. Demuestra que el área de la región sombreada es menor que el área de la región sin sombrear.

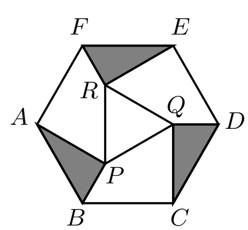


Pruebas por Equipos

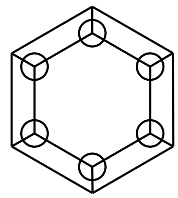
Nivel I.

1) Ordena los siguientes números de menor a mayor: 3^6, 4^5, 5^4, 6^3.

2) En un hexágono regular $ABCDEF$ de área 1 cm^2, se han trazado en su interior tres triángulos congruentes ABP, CDQ y EFR con ángulos de $30°$, $60°$ y $90°$, los ángulos rectos en P, Q, R, como se muestra en la figura. Encuentra el área, en cm^2, del triángulo PQR.



3) Se acomodan 7 de los números del 1 al 8 en las caras de la siguiente figura, de forma que para cada tres caras que se toquen en un mismo círculo la suma de los números en tales caras sea un múltiplo de 3. ¿Cuáles números podrían sobrar en estos tipos de acomodos?



4) Sergio y Zael quieren ir a una heladería a comprar un tipo de helado cada día de la semana. Dentro de los artículos que se venden se encuentran los siguientes: paletas, raspados y sandwich de nieve. Además, de cada uno de los artículos hay 4 sabores: vainilla, fresa, chocolate y limón. Sergio quiere comprar un artículo de chocolate por día de manera que no coma lo mismo dos días seguidos, mientras que Zael quiere comprar paletas de distintos sabores sin comer dos días seguidos el mismo sabor. ¿Quién de los dos tiene más formas distintas de comprar a lo largo de toda la semana? Justifica tu respuesta.

5) Alguien cambió las etiquetas de los números de la calculadora de César. Los números deberían estar en la posición que muestra la imagen de la izquierda, pero sus posiciones fueron cambiadas a como se muestra en la imagen de la derecha.

7	8	9
4	5	6
1	2	3

9	8	7
6	5	4
3	2	1

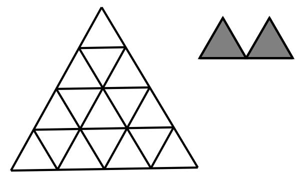
Como consecuencia de esto, cuando César aprieta el número 1, la calculadora registra el número 3 y al revés. Lo mismo pasa con el 4 y con el 6 y con el 7 y el 9. ¿Cuántas multiplicaciones distintas de dos números de un solo dígito, darán un resultado incorrecto cuando César utilice su calculadora? (Nota: las multiplicaciones 1×2 y 2×1 son consideradas multiplicaciones diferentes).

6) Encuentra el entero positivo más pequeño de seis dígitos, que cumpla que la suma de sus seis dígitos sea igual al producto de sus dígitos.

7) Acomoda ocho números enteros diferentes en los cuadritos que faltan, de manera que los productos de los tres números de cada renglón, de cada columna y de cada diagonal sean iguales.

	6	

8) Se quiere acomodar 8 piezas como las de las derecha (las puedes rotar de ser necesario) de manera que se cubra toda la figura de la izquierda. ¿Cuántos acomodos diferentes se pueden hacer?



Nivel II.

1) Coincide con el Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con el Problema 6 del Nivel I.

3) Encuentra todas las parejas de números reales (x, y) que cumplen las siguientes dos igualdades: $x^3 + y^3 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

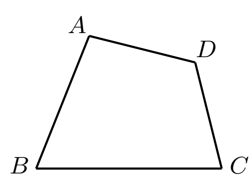
4) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2 + (a + r)^2 + (a + 2r)^2 + (a + 3r)^2 + (a + 4r)^2$ tenga todos sus dígitos iguales.

5) Un triángulo ABC con vértices sobre una circunferencia de centro O tiene la siguiente propiedad: si O, C' son simétricos con respecto a C, se cumple que $\angle CC'A = \angle ABC$. Encuentra el valor (en grados) del ángulo $\angle ABC$.

6) Coincide con el Problema 8 del Nivel I.

7) Los números *creativos* son números de 4 dígitos $abcd$ tales que los números de dos dgitos ab y cd son ambos pares. Además, la suma de sus dígitos es un número primo. Por ejemplo, 2018 es número creativo, ya que $ab = 20$ y $cd = 18$ son números pares de dos dígitos y la suma $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ es un número primo. ¿Cuántos números creativos menores o iguales que 2018 hay?

8) Sea $ABCD$ un cuadrilátero, como se indica en la figura. Muestra que si los cuatro triángulos ABC, BCD, CDA, DAB, tienen el mismo perímetro, entonces $ABCD$ es un rectángulo.



Nivel III.

1) Sea $A = \{2, 5, 8, 11, \ldots, 2018\}$, cada número, a partir del segundo, es el anterior más 3. Determina el mínimo valor k tal que si escogemos k números del conjunto A, necesariamente hay dos distintos cuya suma sea 2020.

2) Todos los números impares se dividen en grupos como se indica:

$$\{1\},\ \{3,5\},\ \{7,9,11\},\ \{13,15,17,19\},\ \ldots.$$

¿Cuál es la suma de los elementos del décimo grupo?

3) Coincide con el Problema 5 del Nivel II.

4) Coincide con el Problema 4 del Nivel II.

5) Coincide con el Problema 7 del Nivel II.

6) Coincide con el Problema 8 del Nivel II.

7) Consideramos un tablero de 8×8. El *Batab* es una pieza que puede moverse de una casilla a otra vecina (que comparte un lado). Un *camino del Mayab* es un camino que va de una casilla inicial a una final tal que:

   a) Consta exclusivamente de movimientos del Batab.

   b) En cada paso se aleja del punto inicial y se acerca al punto final.

   Se coloca una ficha verde en una casilla y una ficha naranja en otra distinta, luego se coloca una ficha blanca en una casilla que está dentro de un camino del Mayab que va de la ficha verde a la ficha naranja. Llamamos T al número total de caminos del Mayab que van de la ficha verde a la naranja pasando por la ficha blanca. Encuentra el número total de formas distintas en que se pueden colocar las tres fichas de modo que 49 divida a T.

8) Los gemelos Adán y Beto van de su casa a la escuela. Adán, corre la mitad del trayecto y camina la otra mitad, mientras que Beto corre la mitad del tiempo y camina la otra mitad del tiempo. Los dos corren a una misma velocidad v_1 y los dos caminan a una misma velocidad v_2. ¿Quién de ellos llega primero? Justifica tu respuesta.

Soluciones de las Pruebas Individuales

Nivel I.

1) Tenemos que en 4 días 6 impresoras hacen 100 libros, por lo que en un día 6 impresoras hacen $\frac{100}{4} = 25$ libros. Luego, en un día una impresora hace $\frac{25}{6}$ libros. De donde en un día 4 impresoras hacen $4 \cdot \frac{25}{6} = \frac{50}{3}$ libros. Así que en tres días 4 impresoras hacen $3 \cdot \frac{50}{3} = 50$ libros.

2) Cada tres cuadritos hay exactamente un cuadrito gris. Como $2018 = 672 \cdot 3 + 2$ entonces tenemos un total de $672 + 1 = 673$ cuadritos grises.

3) El número de niñas en el club debe ser un múltiplo de 8, es decir uno de los números en la lista: 8, 16, 24, 32. De igual manera, el número de niños en el club debe ser un múltiplo de 7, es decir uno de los números en la lista: 7, 14, 21, 28, 35. Como debe haber en total 37 estudiantes, debemos buscar dos números, uno en cada lista, de tal forma que sumen 37. Esto se logra con 16 y 21. Por lo que hay 16 niñas en el club.

4) Sean a y b números yucatecos, con $a > b$. Entonces para hacer la diferencia $a-b$ lo menor posible, lo mejor sería que fueran diferentes únicamente en el número de las unidades, pero esto no es posible. Así que estamos buscando números a y b que solo difieran en los dígitos de las unidades y decenas, ya que la diferencia entre esos dos números sería igual a la diferencia entre los números formados por los dígitos de sus decenas y los dígitos de sus unidades. Un ejemplo de esto sería tomar los números 32 y 23, y formar los números $a = 987654132$ y $b = 987654123$ de manera que $a-b = 32-23 = 9$. Ahora debemos asegurarnos que este es el mínimo. Para esto observamos que la suma de los dígitos de cualquier número yucateco es igual a 45, por lo que a y b son ambos múltiplos de 9. Entonces, su diferencia $a-b$ deberá ser un múltiplo de 9, sin embargo como $a \neq b$, tenemos que $a-b \neq 0$. Por lo que el mínimo valor que puede tomar $a-b$ es 9.

5) El primer día gasta $19+1$ pesos, el segundo día $19+2$ y así, el día 17 gasta $19+17$ y el día 18 le quedan $19+18$ pesos, que se los gasta. Entonces tiene originalmente $(19+1)+(19+2)+(19+3)+\cdots+(19+18) = 19\cdot 18 + \frac{19\cdot 18}{2} = 513$ pesos.

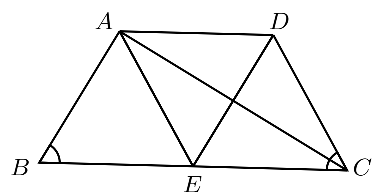
6) Notemos que todos los números de la lista $1, 2, 3, \ldots, 50$ tienen al menos tres múltiplos entre 101 y 200, y por tanto no son números mayas. De manera similar, los números de la lista $51, 52, \ldots, 100$ al multiplicarlos por 2 caen entre 101 y 200. Por tanto, todos ellos tienen al menos un múltiplo en la lista. Como $66\cdot 3 = 198$, entonces todos los números del 51 al 66 tienen al menos dos múltiplos en la lista y por tanto no son números mayas. Dado que $67\cdot 3 = 201$, podemos concluir que el único múltiplo de 67 entre 101 y 200 es $67\times 2 = 114$. Así, concluimos que 67 es el número maya más pequeño.

7) El perímetro del triángulo mayor es 96 cm y está formado por 24 palillos que son lados de los triángulos más pequeños. Por lo tanto cada palillo pequeño mide 4 cm. De ahí podemos obtener que el perímetro de cada triángulo pequeño es 12 cm. Si contamos los triángulos pequeños podemos ver que son 27, por lo que la longitud total de los palillos es $27\times 12 = 324$ cm.
Otra forma: En la figura hay 4 tamaños de triángulos. El más grande tiene perímetro 96 cm, los siguientes disminuyen en tamaño a la mitad, así tendrán perímetros 48 cm, 24 cm y 12 cm, respectivamente. Del grande al menor hay 1, 1, 3 y 9 triángulos de cada tamaño. Luego, la suma de los perímetros es $96+48+3\cdot 24+9\cdot 12 = 324$ cm.

8) Necesitamos que al sumar 1, el denominador sea múltiplo de 7, así que el primer candidato posible es la fracción equivalente a $\frac{1}{8}$ que tiene numerador 6, esto es $\frac{6}{48}$. Probamos con este candidato y podemos ver que al sumar 1 al numerador y al denominador obtenemos la fracción $\frac{7}{49}$, que al ser simplificada es $\frac{1}{7}$.

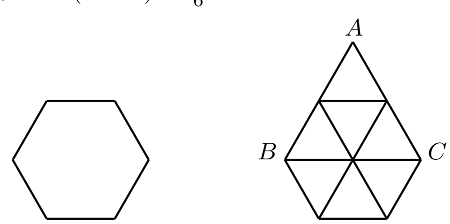
Otra forma: Buscamos a y b tales que $\frac{a}{b} = \frac{1}{8}$ y $\frac{a+1}{b+1} = \frac{1}{7}$. Esto es equivalente al sistema $8a = b$ y $7a + 7 = b + 1$, cuyas soluciones son $a = 6$ y $b = 8 \cdot 6 = 48$.

9) Si E es el punto medio de BC, se tiene que $BE = EC = AD$. Luego, AD y EC son segmentos paralelos y de la misma longitud, por lo que $CDAE$ es un paralelogramo y como tiene tres lados iguales entonces es un rombo.



Además, el triángulo ABE es equilátero y entonces $\angle ABE = 60^\circ = \angle DCE$. Como CA es bisectriz de $\angle DCE$ (pues los triángulos ADC y CEA son congruentes), se tiene que $\angle ACE = 30^\circ$, por lo que $\angle CAB = 90^\circ$.

10) Consideremos la siguiente figura y notemos que el triángulo ABC tiene el mismo perímetro que el hexágono. Más aún, el área del triángulo es $\frac{4}{6}$ del área del hexágono. Por lo tanto, Área $(ABC) = \frac{4}{6} \cdot 120 = 80$ cm^2.



11) La palabra YUCATAN tiene siete letras, de modo que podemos escoger de $2^7 - 2$ formas los distintos conjuntos de letras que pudieron haber quedado. Sin embargo, algunas palabras están representadas por dos de estos conjuntos. Estas palabras son las que contienen exactamente una A y no tienen la letra T; esto es, las que podemos formar con una A y las letras YUCN. Restando las repetidas, entonces el resultado es $(2^7 - 2) - 2^4 = 110$.
Otra forma. Hay tres tipos de palabras que pueden quedar escritas. Las que no tienen letra A, las que tienen exactamente una letra A y las que tiene dos letras A. Con dos letras A, hay $2^5 - 1$ palabras, ya que las otras letras están o no, y una menos porque no quedaron todas las letras. Además. hay $2^5 - 1$ palabras que no tienen letra A: las otras 5 letras pueden o no estar y una menos que corresponde al caso en que se cayeron todas las letras. Con exactamente una A y sin la letra T, hay $2^4 = 16$, con la letra T y con la A antes de la T hay también $2^4 = 16$ y con la letra T y con A después de la T, hay $2^4 = 16$. Por lo tanto, hay en total $(2^5 - 1) + (2^5 - 1) + 16 + 16 + 16 = 110$ palabras.

12) En total hay $\binom{6}{4}$ cuadriláteros con vértices sobre los puntos marcados. De estos, uno tiene solo puntos blancos en su interior y otro tiene solo puntos grises. De tal modo, hay $\binom{6}{4} - 2 = 15 - 2 = 13$ cuadriláteros bicolores.

13) Si hay A alumnos, entonces hubo $3A$ parejas que se formaron para bailar, y si B es el número de alumnas, se formaron $6B$ parejas de baile. Como $3A = 6B$, se tiene que $A = 2B$ y como $A + B = 90$, se tiene que $A = 60$ y $B = 30$.

14) Supongamos que la longitud de los lados mayores de los rectángulos más pequeños es igual a y y la longitud de sus lados menores es x, mientras que la longitud del lado menor del rectágulo mediano es igual a a y su lado mayor vale $2x$. Como los lados de los rectángulos pequeños y grande, están en la misma proporción tenemos que $\frac{y}{x} = \frac{a+y}{2x}$. Por lo tanto, $\frac{2y}{2x} = \frac{a+y}{2x}$, de donde se concluye que $a = y$. Finalmente, como el rectángulo pequeño y el rectángulo mediano tienen la misma proporción se obtiene que $\frac{y}{x} = \frac{2x}{y} = \frac{2}{y/x}$, por lo que $(\frac{y}{x})^2 = 2$ y $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.

15) En cada uno de los números que escribe Hugo, el 1 que aparece al principio siempre es positivo. Para cada elección de signos podemos considerar la elección de signos opuesta y al sumar estos números el resultado será $1 + 1 = 2$. Como hay 2^9 elecciones de signos que se agrupan por pares y como cada par suma 2, se tendrá que la suma es $2 \cdot (2^9/2) = 2^9$.

Nivel II. Parte A.

1) Notemos que

$$\begin{aligned}73^2 - 31^2 - 91 &= (73+31)(73-31) - 91 = (2^3 \cdot 13)(2 \cdot 3 \cdot 7) - 7 \cdot 13 \\ &= 7 \cdot 13(2^4 \cdot 3 - 1) = 7 \cdot 13 \cdot 47.\end{aligned}$$

Por lo tanto, son 3 primos los que dividen a $73^2 - 31^2 - 91$.

2) Notemos que $AB'ED$ es un cuadrilátero con $\angle B' = \angle D = 90°$, además $AB' = AD = 1$ y $DE = EB' = \sqrt{2} - 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\text{Área}(AB'ED) &= \text{Área}(ADE) + \text{Área}(AB'E) \\ &= 2\text{Área}(AB'E) = 2\frac{AB' \cdot EB'}{2} = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}.\end{aligned}$$

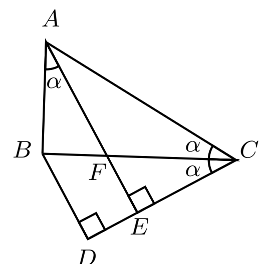
3) Coincide con la solución del Problema 13 del Nivel I.

4) Coincide con la solución del Problema 14 del Nivel I.

5) Como un dado tiene 6 números, en total se pueden formar $6 \times 6 = 6^2$ números de dos cifras. Por lo tanto, el total de casos (tomando en cuenta tanto los tiros de Isaac como de Alfredo) es $6^2 \times 6^2 = 6^4$. Por otro lado, notemos que en 6^2 casos Isaac y Alfredo obtienen los mismos resultados. Luego, en $6^4 - 6^2$ casos los resultados son distintos y, de ellos, la mitad corresponden al caso en que el número de Alfredo es mayor. Por lo tanto, la probabilidad buscada es igual a $\frac{(6^4-6^2)/2}{6^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} = \frac{35}{72}$.

6) Como AE es paralelo a BD, el triángulo AEC es rectángulo. Si F es la intersección de AE con BC, se tiene que los triángulos rectángulos ABF y CEF son

semejantes por tener ángulos en F iguales por ser opuestos por el vértice. Luego, $\alpha = \angle BAE = \angle BAF = \angle FCE = \angle BCE$ y como $\triangle BDC \sim \triangle ABC$, entonces $\alpha = \angle BCE = \angle BCA$. De lo anterior tenemos que $2\alpha = \angle BAC$ y $\alpha = \angle BCA$. Por lo tanto, $\alpha = 30°$ y $\angle CAB = 60°$.



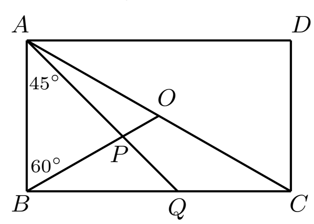
7) Coincide con la solución del Problema 10 del Nivel I.

8) Por el teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$. Por otro lado, notemos que $AD^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 13^2 = DC^2$. Entonces, por el recíproco del teorema de Pitágoras tenemos que ADC es un triángulo rectángulo y $\angle DAC$ es recto. Por lo tanto, $[ABCD] = [ABC] + [ADC] = 3 \cdot \frac{4}{2} + 5 \cdot \frac{12}{2} = 36$ cm^2.

9) Si $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ son los alumnos, se pueden formar 8 equipos así: $(1, 2, 3)$, $(1, 4, 5)$, $(1, 6, 7)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 5, 8)$, $(3, 4, 8)$, $(3, 5, 7)$, $(6, 7, 8)$.
Si $A_1, \ldots, A_n$ son los equipos, entonces $|A_j| = 3$ con $1 \leq j \leq 8$ y $|A_i \cap A_j| \leq 1$ si $i \neq j$. Si existe a que esté en cuatro distintas A_i y como solo hay un alumno común en dos equipos, los otros 8 alumnos que se necesitan para los 4 equipos deben ser diferentes, por lo que deberá haber al menos $1 + 2 \cdot 4 = 9$ alumnos, lo cual no es posible. Por lo que un alumno pertenecerá a lo más a 3 equipos. Luego, con los 8 alumnos podemos formar a lo más $\frac{8 \cdot 3}{3}$ equipos, es decir, el número n de equipos debe cumplir que $n \leq \frac{8 \cdot 3}{3} = 8$.

10) Sea T el total de concursantes. De Asia hay $A = \frac{28}{100}T$, de Oceanía hay $O = \frac{10}{100}T$ y entre africanos y europeos hay $Af + E = \frac{40}{100}T$. También se tiene que $A = Af + 66$ y $E + O = 187$, por lo que $\frac{40}{100}T = Af + E = (A - 66) + (187 - O) = \frac{28}{100}T - 66 + 187 - \frac{10}{100}T$. Luego, $\frac{40}{100}T = \frac{18}{100}T + 121$, de donde $T = \frac{1}{22}(12100) = 550$. Así, a la competencia asistieron 550 alumnos. De Oceanía asistieron 55 alumnos que corresponden al $10\,\%$ y, como $E + O = 187$, se tiene que de Europa asistieron $187 - 55 = 132$ competidores.

11) Denotemos por P a la intersección de AQ y BO.



Como $\angle BAQ = 45°$ y $\angle QAC = 15°$ se tiene que $\angle BAO = 60°$ y como O es punto de intersección de las diagonales, $\angle OBC = \angle BCO = \angle OAD = 30°$, luego $\angle ABO = 60°$, por lo que el triángulo ABO es equilátero. Luego, $\angle APB = 180° - 60° - 45° = 75°$.
Como ABQ es un triángulo rectángulo isósceles con $AB = BQ$ y como ABO es equilátero, se tiene que $BO = AB = BQ$. Luego, OBQ es isósceles y como $\angle OBQ = 30°$ se tiene que $\angle BOQ = \angle BQO = 75°$.

12) Sea m tal que $n^2 + 2018n = (n+m)^2$. Desarrollando y simplificando obtenemos que $n = \frac{m^2}{2018-2m}$. Notemos que se trata de una función creciente en m para $1 \leq m \leq 1008$. Además la expresión no está definida para $m = 1009$ y $n < 0$ si $m \geq 1010$. Así que el máximo se alcanza en $m = 1008$. Entonces, $n = \frac{1008^2}{2}$.

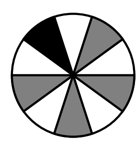
Nivel II. Parte B.

1) Notemos que

$$N = \frac{4}{3} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{102}{101} = (\frac{3}{3} + \frac{5}{5} + \cdots + \frac{101}{101}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101}) = 50 + B$$

Por lo tanto, N es un número entero si y solo si el número $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{101}$ es entero. Sea $C = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot 99$. Es claro que si B es entero, entonces BC es entero. Pero, $BC = \frac{C}{3} + \frac{C}{5} + \cdots + \frac{C}{99} + \frac{C}{101}$ es entero si y solo si $\frac{C}{101}$ es entero, pero esto último es falso ya que 101 es primo y en la factorización en primos de C el número 101 no está presente.

2) La respuesta es no. Supongamos que sí es posible hacerlo, y pintemos de negro la región correspondiente. Coloreamos las nueve regiones restantes alternadamente de gris y blanco como se muestra en la figura.



Observamos que si una ficha se encuentra en una región pintada de blanco, entonces requirirá de un número impar de movimientos para llegar a la región roja, en tanto que una ficha ubicada en una región gris ocupará un número par de movimientos. De ese modo, hay $3 \times 5 = 15$ fichas que requerirán cada una un número impar de movimientos para llegar a la región negra, haciendo un total impar de movimientos. Por otro lado, las fichas de las casillas grises requieren un total par de movimientos. Así, el número de movimientos para llegar a la configuración deseada debe ser necesariamente impar y, por lo tanto, no puede ser 2018.

3) Notemos que los triángulos BCE y AGE son semejantes, al igual que los triángulos BEF y AED, por lo que, $\frac{BC}{AG} = \frac{BE}{AE}$ y $\frac{BE}{AE} = \frac{BF}{AD}$. Luego, $BC \cdot AD = BF \cdot AG$ y, como $AD = BC$, se tiene que $BC^2 = BF \cdot AG$.

Nivel III. Parte A.

1) Coincide con la solución del Problema 5 del Nivel II.

2) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel II.

3) Coincide con la solución del Problema 9 del Nivel II.

4) Coincide con la solución del Problema 10 del Nivel II.

5) Coincide con la solución del Problema 11 del Nivel II.

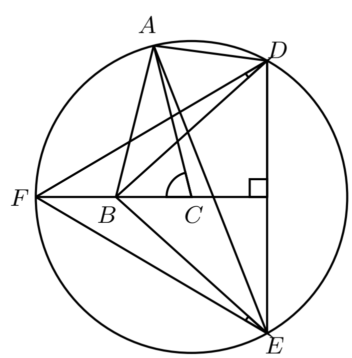
6) Coincide con la solución del Problema 12 del Nivel II.

7) La fórmula de recursión se reescribe así

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2+3a_n}{2a_n} = \frac{1}{a_n} + \frac{3}{2}.$$

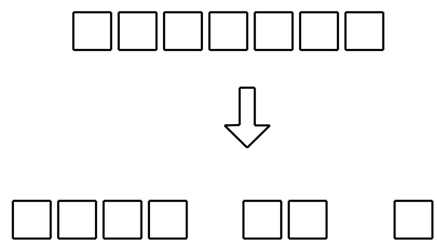
Si $b_n = \frac{1}{a_n}$, entonces $b_{n+1} = b_n + \frac{3}{2} = b_{n-1} + \frac{3}{2} \cdot 2 = \cdots = b_1 + \frac{3}{2} \cdot n$. Luego, $b_{67} = b_1 + \frac{3}{2}66 = 1 + 3(33) = 100$ por lo que $a_{67} = \frac{1}{100}$.

8) La recta BC corta a la circunferencia en F con B entre F y C. Notemos que el triángulo FDE es isósceles y, por lo tanto, $\angle FDB = \angle FEB$.



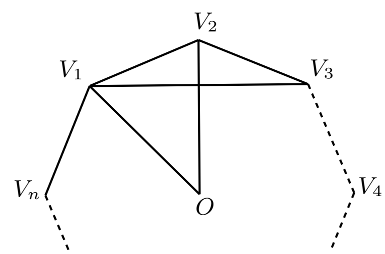
Luego, $\angle ADB + \angle BEA = \angle ADB - \angle FDB + \angle BEA + \angle FEB = \angle ADF + \angle AEF = 2\angle ADF = \angle ACF = \frac{180^\circ - 24^\circ}{2} = 78^\circ$.

9) Primero, notemos que las diferentes formas de escribir a 7 como la suma de tres enteros positivos son: $5+1+1$, $4+2+1$, $3+3+1$ y $3+2+2$. De estas, la única que tiene tres sumandos distintos es $4+2+1$. Si ponemos todas las bolas de helado juntas se forma una "palabra" de longitud 7 con dos C's, dos V's, dos F's y una L. Usando permutaciones con repetición vemos que hay $\frac{7!}{2!2!2!1} = 630$ de estas palabras. Ahora bien, una palabra da origen a una forma de hacer 3 helados, simplemente dividiéndola en segmentos de longitud 4, 2 y 1 (ver figura).



Finalmente, solo basta permutar estos helados entre Hugo, Ricardo y Deeds para obtener todas las formas requeridas. La respuesta es $3! \times 630 = 3780$.

10) Por ser P regular, el ángulo interno $\angle V_2V_1V_n$ mide, en grados, $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$.

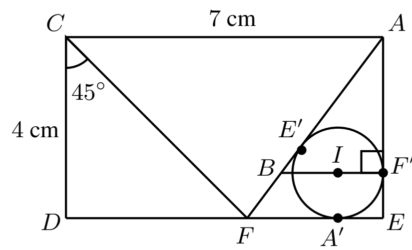


Como V_1O es la bisectriz de $\angle V_2V_1V_n$, se tiene que $\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)90^\circ}{n}$. Por la hipótesis se tiene que $\angle V_2V_1V_3 = \frac{1}{2}\angle V_2V_1O = \frac{(n-2)45}{n}$. Como el segmento V_1V_3 es perpendicular al segmento V_2O, y $\angle V_2OV_1 = \frac{360^\circ}{n}$, por ser ángulo central; $\angle OV_1V_3 + \angle V_2OV_1 = 90^\circ$. Sustituimos por los valores de $\angle OV_1V_3$ y $\angle V_2OV_1$, esto es, $\frac{(n-2)45^\circ}{n} + \frac{360^\circ}{n} = 90^\circ$. Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{n}{45}$ se llega a $(n-2)+8 = 2n$, con lo cual $n = 6$.
Otra forma. Consideremos el cuadrilátero $OV_1V_2V_3$ que se forma de unir los dos triángulos isósceles congruentes OV_1V_2 y OV_2V_3 . Es claro que OV_2 es perpendicular a V_1V_3 y que los triángulos $V_1V_2V_3$ y OV_1V_3 son triángulos isósceles. Sea P la intersección de OV_2 y V_1V_3, los cuatro triángulos PV_1V_2, PV_3V_2, PV_3O, PV_1O, son congruentes (por criterio ALA). Luego, $OV_1V_2V_3$ es un rombo y en consecuencia OV_1V_2 es un triángulo equilátero, por lo que $\angle V_1OV_2 = 60^\circ$. Pero por otro lado, $\angle V_1OV_2 = \frac{360}{n}$, por ser ángulo central del polígono regular de n lados. Igualando los valores de $\angle V_1OV_2$ obtenemos que $n = 6$.

11) Si v es la velocidad de la corriente, la lancha avanza a $(9+v)$ km/h cuando va a favor de la corriente y a $(9-v)$ km/h cuando va en contra de la corriente. Si t_1 es el tiempo que tarda cuando va con la corriente a su favor, entonces se cumple que $(9+v)t_1 = 1$. Y si t_2 es el tiempo que tarda en recorrer el kilómetro cuando va contra corriente entonces $(9-v)t_2 = 1$. Nos dicen que $t_1 + t_2 = \frac{1}{4}h$, luego $\frac{1}{4} = t_1+t_2 = \frac{1}{9+v}+\frac{1}{9-v}$. Esto es equivalente a $\frac{18}{9^2-v^2} = \frac{1}{4}$, es decir $4\cdot 18 = 81-v^2$,

por lo que $v^2 = 81 - 72 = 9$ y entonces $v = 3$ km/h.

12) Denotemos por r y s a los valores del inradio y el semiperímetro del triángulo AFE, respectivamente. Tenemos que Área$(AFE) = \frac{b \times h}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$. Por otro lado, Área $(AFE) = s \cdot r = \left(\frac{3+4+5}{2}\right) \cdot r = 6r$. Luego, $6r = 6$, de donde obtenemos que $r = 1$.



Siendo A' y F' como en la figura e I el incentro del triángulo AFE, $IF'EA'$ forma un cuadrado de lado $r = 1$, por lo que $EF' = 1$ y, por el teorema de Tales, se concluye que $\frac{AB}{AF} = \frac{AF'}{F'E}$, de donde $AB = \frac{AF' \cdot AF}{F'E} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$.

Nivel III. Parte B.

1) Coincide con el Problema 2 del Nivel II, Parte B.

2) Sea x la cantidad de años entre el presente y el momento en el que Berta tenga el triple de la edad actual de Ana. Entonces, los enunciados se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
B + x &= 3A, && (2)\\
A + x + C + x &= A + B + C + D + E, && (3)\\
D + x &= 3D, && (4)\\
E + x &= 2B + 1. && (5)
\end{aligned}
$$

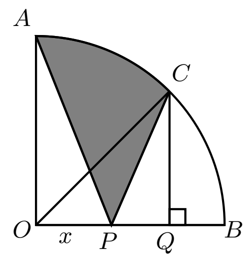
De la ecuación (3) podemos ver que $x = 2D$. Sustituyendo este valor en las ecuaciones (2) y (4) y resolviendo el sistema resultante obtenemos que $D = \frac{3B+1}{5}$ y $E = \frac{4B+3}{5}$. Sustituyendo $x = 2D = \frac{6B+2}{5}$ en la ecuación (1) obtenemos que $15A = 11B + 2$. Además, como A es impar entonces $11B + 2$ debe terminar en 5, por lo que B debe terminar en 3. Por otro lado, como $A \leq 29$ entonces tenemos la desigualdad

$$B = \frac{15A - 2}{11} \leq \left\lfloor \frac{15 \cdot 29 - 2}{11} \right\rfloor = 39,$$

así que $B = 3, 13, 23, 33$. Probando estos casos, verificamos que la única solución entera es $B = 23$ y $A = 17$. Por lo tanto, la suma de las edades de Ana y Berta es $23 + 17 = 40$.

Nota: También se puede resolver la ecuación diofantina por los métodos usuales y encontrar que $B = 23$ es la única solución impar con $1 \leq A \leq 29$.

3) Sean $x = OP$ y Q el pie de la altura de C sobre OB.



Notemos que la región sin sombrear está compuesta de dos partes. Área$(OAP) = r \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$. El área de la segunda parte se puede calcular restando al área del sector COB el área del triángulo OCP. Ahora bien, el triángulo OCQ es rectángulo isósceles de hipotenusa $r = 1$, así que $CQ = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Por lo tanto,

$$\text{Área(sector } COB) - \text{Área}(OCP) = \frac{\pi}{8} - \frac{x(1/\sqrt{2})}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}}.$$

De este modo, tenemos la desigualdad $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}-1}{2}x > \frac{\pi}{8}$. En otras palabras, la región sin sombrear tiene siempre un área mayor a la mitad del área del sector OAB. En consecuencia, la región sombreada siempre tendrá menor área que la región sin sombrear.

Otra forma. Sea R la intersección de AP y OC. Es claro que Área$(AOP) >$ Área(COP) ya que estos triángulos tienen por base común a OP, y la altura desde A es mayor a la altura desde P. Como el triángulo ROP es común a estos dos triángulos, se tiene que Área$(AOR) >$ Área(CRP). Por lo tanto,

$$\text{Área(región sombreada)} < \text{Área(sector } AOC) \leq \text{Área(región sin sombrear)}.$$

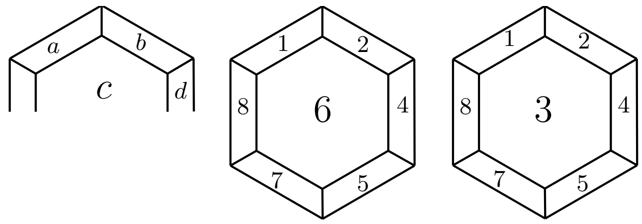
Soluciones de las Pruebas por Equipos

Nivel I.

1) Como $6^3 = 216$, $5^4 = 625$, $3^6 = 729$ y $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$, tenemos que $6^3 < 5^4 < 3^6 < 4^5$.

2) Notemos que el triángulo PQR es una cuarta parte del triángulo AEC. Además, el triángulo AEC tiene la mitad del área del hexágono. Por lo tanto, el área del triángulo PQR es $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ del área del hexágono. Así, Área$(\triangle PQR) = \frac{1}{8}$.

3) Los números son 3 y 6. Si una cara no central tiene un número a múltiplo de 3, entonces si d está en una cara a dos caras de distancia de a (sin pasar por el centro), estos tienen dos vecinos en común (como se muestra en la figura). Si estas tienen los números b y c, entonces $a + b + c$ es múltiplo de 3 y $b + c + d$ es múltiplo de 3, de donde se sigue que su diferencia, igual a $a - d$, es múltiplo de 3.



Como a es múltiplo de 3, d también lo es. Entonces no puede haber un múltiplo de 3 fuera del centro ya que habría al menos 3 caras con múltiplos de 3 y, del 1 al 8, hay 2 múltiplos de 3. Concluimos que se puede tener a lo más un múltiplo de 3 y como se omite solo un número, este debe ser 3 o 6. Para ambos casos se encuentra un acomodo que funciona.

4) Sergio tiene el primer día 3 posibilidades de pedir: paletas, raspados y sandwich de nieve. Del día 2 al 7, tiene solo dos posibilidades en cada día, porque si un día pide sandwich de nieve, al siguiente solo puede pedir paletas o raspados. Por el principio del producto, Sergio tiene $3 \times 2^6 = 192$ formas. Por otro lado, Zael tiene el primer día 4 posibilidades de pedir y, del día 2 al 7, tiene solo 3 posibilidades en cada día, por un argumento análogo. Por el principio del producto, Zael tiene $4 \times 3^6 = 2916$ formas. Por lo tanto Zael tiene más formas.

5) Notemos que únicamente 6 números han sido cambiados de posición, el 1 fue cambiado por el 3, el 4 por el 6 y el 7 por el 9, mientras que los números 2, 5 y 8 se mantuvieron en su lugar original. Entonces, de las multiplicaciones de un número por él mismo, 3 son correctas y las otras 6 son equivocadas. A partir de ahora consideraremos multiplicaciones de dos números diferentes. Empecemos analizando las multiplicaciones donde ambos números son alguno de los números 2, 5, 8. Todas estas serán correctas y hay $3 \times 2 = 6$ de ellas. Ahora, si ambos números que teclea César son algunos de 1, 4, 7, entonces la calculadora registrará dos números entre 3, 6, 9, por lo que el resultado será múltiplo de 9 y, como ninguno de 1, 4, 7 es múltiplo de 3, el resultado no será correcto. De manera similar, si ambos números que teclea César son algunos de 3, 6, 9, el resultado debería de ser múltiplo de 9, pero como la calculadora registra algunos de los números 1, 4, 7, no lo será. Es decir, en todos estos casos el resultado será incorrecto. El número de posibilidades que hay es $(3 \times 2) + (3 \times 2) = 12$. Pasemos ahora al caso en que uno de los números es uno de 2, 5, 8 y el otro es uno de 1, 3, 4, 6, 7, 9. En todos estos casos la multiplicación será incorrecta. Hay $(3 \times 6) + (6 \times 3) = 18 + 18 = 36$ de estos casos. Finalmente vemos qué pasa cuando uno de los números es uno de 1, 4, 7 y el otro de 3, 6, 9. Claramente las multiplicaciones 1×3, 3×1, 4×6, 6×4, 7×9 y 9×7 serán correctas. Son 6 multiplicaciones correctas y las restantes 12 multiplicaciones serán incorrectas. Por lo tanto, hay $6 + 12 + 36 + 12 = 66$ multiplicaciones incorrectas.

6) Ningún dígito debe ser cero y no puede tener 5 o 6 dígitos iguales a 1, (ya que no es posible que se cumpla: $5 + a = a$ o $6 = 1$).
Si tiene 4 dígitos iguales a 1, los otros dos dígitos a y b cumplen que $a+b+4 = ab$, que es equivalente a que $(a-1)(b-1) = 5$. Luego, $a = 6$ y $b = 2$ o bien $a = 2$

y $b = 6$. Entonces, el número que se busca es 111162 o 111126 y, el segundo es el más pequeño.

7) Sí es posible. Una manera es la siguiente. Se coloca el 1 a un lado de 6, independiente del número x. En las esquinas a y b se deben colocar números que su producto sea 6, estos son 2 y 3 (no pueden ser 1 y 6 porque los 9 números son diferentes).

		a
1	6	x
		b

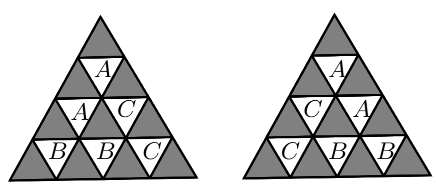
En las otras esquinas se colocan números que se ajusten para que el producto de los números en las diagonales sean iguales. Digamos así,

$2\cdot 6$		2
1	6	
$3\cdot 6$		3

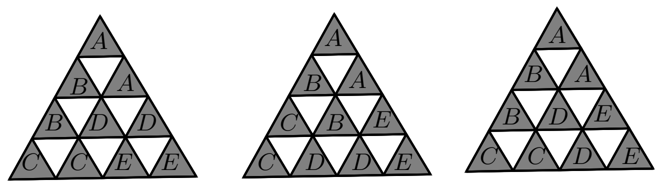
Como el producto es 6^3, lo que falta queda así:

$2\cdot 6$	3^2	2
1	6	6^2
$3\cdot 6$	2^2	3

8) Si coloreamos la figura como tablero de ajedrez, de gris y blanco, notamos que una pieza siempre debe cubrir dos triangulitos grises, o bien dos triangulitos blancos. Contaremos las maneras de acomodar los triangulitos de cada color y bastará aplicar el principio del producto. La región blanca se puede llenar con 3 piezas de 2 maneras distintas (ver figura).



La región gris se llena con 5 piezas de la siguiente manera: primero se coloca la pieza que va en el vértice superior del triángulo –para ello hay dos casos– y se observa que cada caso se completa de 3 maneras distintas (en la figura se ilustra uno de esos casos). Así, hay $2\times 3 = 6$ maneras de llenar la región gris. Por lo tanto, la respuesta es $2\times 6 = 12$.



Nivel II

1) Coincide con la solución del Problema 3 del Nivel I.

2) Coincide con la solución del Problema 6 del Nivel I.

3) Notemos que $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$ son soluciones. Por la segunda igualdad x y y tienen valor absoluto menor o igual que 1. Además, no existe solución con $x = y$, tampoco con $x = -1$ y tampoco con $y = -1$. Supongamos que $x < y$ y analicemos los siguientes casos:

   a) Si $x > 0$, entonces tenemos que $0 < x < y \leq 1$. Por lo tanto, $x^3 < x^2$ y $y^3 < y^2$ y así $1 = x^3 + y^3 < x^2 + y^2 = 1$, lo cual es absurdo.

   b) De manera similar, si $x < 0$ entonces $y^3 = 1 - x^3 > 1$, luego $y > 1$, contradiciendo la segunda ecuación.

   Por lo tanto, la única alternativa es $x = 0$ y entonces $y = 1$. Concluimos que las únicas soluciones son $(x, y) = (0, 1)$ y $(x, y) = (1, 0)$.

4) Sea $c = a + 2r$, entonces

$$N = (c - 2r)^2 + (c - r)^2 + c^2 + (c + r)^2 + (c + 2r)^2 = 5c^2 + 10r^2$$

   tiene todas su cifras iguales. Como N es divisible entre 5, acaba en 5 o 0. Luego, todas las cifras de N deberán ser 0 o 5. El primer caso implica que $N = 0$ y en consecuencia $a = r = 0$, lo cual es absurdo. En el segundo caso tenemos que $\frac{N}{5} = c^2 + 2r^2$ tiene todas sus cifras iguales a 1. Por lo tanto, si $\frac{N}{5}$ tiene tres cifras o más, entonces $\frac{N}{5} \equiv 111 \equiv 7 \pmod 8$. Sin embargo, dado que los cuadrados son congruentes a 0, 1 o 4 módulo 8, entonces tenemos que $c^2 + 2k^2$ es congruente a 0, 1, 2, 4 o 6 módulo 8, lo cual es contradictorio. Por lo tanto, tenemos que $\frac{N}{5} = 1$ o $\frac{N}{5} = 11$. El primer caso implica que $k = 0$, por lo que $a = b = c = d = e = 1$, llegando nuevamente a un absurdo. Finalmente, al resolver $c^2 + 2k^2 = 11$ obtenemos que $c = 3$ y $k = 1$. De este modo, la única solución es la progresión $1, 2, 3, 4, 5$.

5) Sea $\beta = \angle ABC$. Consideremos a O' el centro del circuncírculo del triángulo ACC'. Por la medida del ángulo inscrito, $\angle CO'A = 2\angle CC'A = 2\angle ABC = 2\beta$. Tenemos también por ser isósceles los triángulos $AO'C$ y AOC, que $\angle O'AC = \angle ACO' = 90° - \beta = \angle OAC = \angle OCA$, por lo que son congruentes los triángulos $AO'C$ y AOC. Luego, $O'C = O'A = OA = OC$. Como $\angle OCO' = 180° - 2\beta$,

se tiene que $\angle O'CC' = 180^\circ - \angle OCO' = 2\beta$ y $O'C = OC = CC'$ y, como $O'C = O'C'$ (ya que O' es el centro del circuncírculo de ACC'), se tiene que $CC'O'$ es un triángulo equilátero, de donde $\angle O'CC' = 2\beta = 60^\circ$, por lo que $\beta = 30^\circ$.

6) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel I.

7) Haremos una demostración por casos. Como $abcd < 2108$, tenemos que $a = 1$ o $a = 2$. Cuando $a = 1$ entonces tenemos la ecuación

$$b + c + d = p - 1.$$

Si $p = 2$, entonces la única solución es $b = d = 0$, $c = 1$, por lo que el único número creativo en este caso es 1010. Si p es un primo impar, dado que b y d son pares, por paridad concluimos que c también lo es. Además, como cd es un número de dos cifras tenemos que $c \neq 0$. Por lo tanto, podemos hacer el cambio de variables $b = 2B$, $c = 2(C+1)$, $d = 2D$ y transformar la ecuación anterior en

$$B + C + D = \frac{p-3}{2}$$

sujeta a las condiciones $0 \leq B \leq 4$, $0 \leq C \leq 3$, $0 \leq D \leq 4$. Por lo tanto, tenemos que $\frac{p-3}{2} \leq 4 + 3 + 4 = 11$ y en consecuencia $p \leq 25$. La siguiente tabla ilustra los valores correspondientes a los primos p que cumplen la desigualdad.

p	3	5	7	11	13	17	19	23
$\frac{p-3}{2}$	0	1	2	4	5	7	8	10

En cada caso se puede resolver la ecuación usando el método de separadores y el principio de inclusión-exclusión. La siguiente tabla muestra todas las posibilidades:

$\frac{p-3}{2}$	Soluciones	Total
0	$\binom{2}{2}$	1
1	$\binom{3}{2}$	3
2	$\binom{4}{2}$	6
4	$\binom{6}{2} - \binom{2}{2}$	14
5	$\binom{7}{2} - \left[\binom{3}{2} + 2\binom{2}{2}\right]$	16
7	$\binom{9}{2} - \left[\binom{5}{2} + 2\binom{4}{2}\right]$	14
8	$\binom{10}{2} - \left[\binom{6}{2} + 2\binom{5}{2}\right]$	10
10	$\binom{12}{2} - \left[\binom{8}{2} + 2\binom{7}{2}\right] + \left[2\binom{3}{2} + \binom{2}{2}\right]$	3

Así que hay un total de 67 soluciones en este caso. Finalmente, consideremos el caso $a = 2$ tenemos que p debe ser impar y las únicas posibilidades son 2010, 2012, 2014 y 2018. Hemos probado así que hay $1 + 67 + 4 = 72$ números creativos.

8) Supongamos que $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $e = AC$ y $f = BD$. Si los perímetros de los triángulos son iguales, se tiene que $a + b + e = b + c + f = c + d + e = d + a + f$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} a + e & = & c + f \\ b + f & = & d + e \\ c + e & = & a + f \\ b + e & = & d + f \end{array}$$

de donde, $a - c = f - e = d - b = e - f$. Ahora, como $f - e = e - f$, se tiene que $e = f$. Luego, $a = c$, $f = e$ y $d = b$. Pero un cuadrilátero con lados opuestos iguales y con las diagonales iguales, tiene que ser un rectángulo.

Nivel III

1) Notemos primero que $A = \{3n+2 \mid 0 \leq n \leq 672\}$. Queremos asegurar que existen n y m tales que $3n + 2 + 3m + 2 = 2020$, es decir $n + m = 672$. Agrupamos los números del 0 al 672, en los conjuntos

$$\{0, 672\},\ \{1, 671\},\ \ldots, \{335, 337\},\ \{336\}.$$

Notemos que cada uno de ellos, excepto el conjunto $\{336\}$ es de la forma $\{n, 672 - n\}$, garantizando así que si escogemos dos números del mismo conjunto, hallamos la pareja $(3n+2, 3(672-n)+2)$ cuya suma es 2020. Por el principio de las casillas, necesitaríamos al menos 338 números para garantizar que esto pasa. Entonces $k = 338$.

2) Después de hacer algunos casos, surge la conjetura que la suma de los elementos del n-ésimo grupo es n^3. Para demostrarlo, notemos que el n-ésimo grupo está conformado por los los impares desde $2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + 1$ hasta $2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 1$. Como la suma $1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1$ es igual a k^2, entonces tenemos que los elementos del n-ésimo bloque suman

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2 = \frac{(n^4 + 2n^3 + n^2) - (n^4 - 2n^3 + n^2)}{4} = n^3.$$

Por tanto, la respuesta es $10^3 = 1000$.

3) Coincide con la solución del Problema 5 del Nivel II.

4) Coincide con la solución del Problema 4 del Nivel II.

5) Coincide con la solución del Problema 7 del Nivel II.

6) Coincide con la solución del Problema 8 del Nivel II.

7) Observemos primero que el número de caminos del Mayab que van de una casilla x a una casilla y es igual a $\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$ donde m es el número de casillas que hay que recorrer en dirección horizontal para ir de x a y, y n las que hay que recorrer en

dirección vertical. Entonces tenemos que $T = \binom{a+b}{a}\binom{c+d}{c}$ donde el primer factor corresponde al recorrido de la ficha verde a la blanca, y el segundo al recorrido de la ficha blanca a la naranja. El camino del Mayab más largo, correspondiente a ir de una esquina del tablero a la opuesta en diagonal, tiene 14 movimientos. Como la ficha blanca no puede estar en una esquina se tiene que $a+b \leq 13$ y $c+d \leq 13$, y se sigue que en los coeficientes binomiales considerados a lo mucho hay un factor 7, por lo que 49 no puede dividir a ninguno de los dos. Por lo tanto, 7 divide a ambos. Ambos recorridos deben tener entonces al menos 7 movimientos y, como la suma de ambos no puede exceder a 14, por fuerza $a+b = 7 = c+d$. Esto corresponde a que el camino del Mayab de la verde a la naranja tiene 14 movimientos y, por lo tanto, ambas fichas deben estar en esquinas opuestas del tablero. El valor de a y el de c es cualquier número del 1 al 6, lo que significa que la ficha blanca puede estar en cualquier casilla del interior del tablero (que no esté en las orillas). Con esto, obtenemos que el número de formas en que T sea un múltiplo de 49 es $4 \cdot 36 = 144$, que corresponden a 4 formas de elegir la esquina verde y 36 de colocar la esquina blanca.

8) Sean d la distancia entre la casa y la escuela, v_1 la velocidad en que corren y v_2 la velocidad en que caminan. Si Adán tarda t_1 horas en correr la mitad del trayecto y t_2 horas en caminar la otra mitad, se tiene que $\frac{d}{2} = v_1 t_1 = v_2 t_2$. Por lo que su recorrido lo hace en el tiempo

$$t_1 + t_2 = \frac{d}{2v_1} + \frac{d}{2v_2} = \frac{d}{2}\left(\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}\right).$$

Por otro lado, Beto se mueve con diferentes velocidades en tiempos iguales. Si tarda t horas en hacer el recorrido, entonces

$$d = v_1\frac{t}{2} + v_2\frac{t}{2}, \text{ por lo que } t = \frac{2d}{v_1+v_2}.$$

Ahora comparemos los tiempos en que tardan en llegar,

$$\frac{t_1+t_2}{t} = \frac{\frac{d}{2}\left(\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}\right)}{\frac{1}{v_1+v_2}} = \frac{(v_1+v_2)^2}{4v_1v_2}.$$

Pero $v_1 v_2 \leq \left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2$ (por la desigualdad $MG - MA$), por lo que $\frac{t_1+t_2}{t} \geq 1$, y entonces $t_1 + t_2 \geq t$, pero a menos que $v_1 = v_2$, se tiene que $t_1 + t_2 > t$; en consecuencia Beto llega primero.

32^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas Concurso Nacional

Del 4 al 9 de noviembre de 2018 se llevó a cabo en Campeche, Campeche, el Concurso Nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de todos los estados del país.

Los 16 alumnos ganadores del primer lugar (ordenados por estados) fueron:

Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas).
Fabián Domínguez López (Chiapas).
Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Diego Hinojosa Téllez (Ciudad de México).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México).
Bruno Gutiérrez Chávez (Colima).
Isaac Pancardo Botello (Guanajuato).
Jesús Omar Sistos Barrón (Guanajuato).
Rigoberto Concepción Rodríguez Cruz (Hidalgo).
Jonatan Alejandro González Cázares (Jalisco).
Eric Iván Hernández Palacios (Nuevo León).
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).
Carlos Alberto Páez De la Cruz (Querétaro).
Iván García Mestiza (Veracruz).
Ricardo de Jesús Balam Ek (Yucatán).

Los 11 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

Kevin Brian Rodríguez Sánchez (Baja California).
Leornardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
David García Maldonado (Oaxaca).
Saúl Villalobos Fajardo (Oaxaca).
Mónica Isabel Casillas Rodríguez (Querétaro).
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).
Jacobo de Juan Millón (Yucatán).

Las 12 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Sofía Ingigerth Cañas Urbina (Chiapas).
Katia García Orozco (Chihuahua).
Mirena Flores Valdez (Ciudad de México).
Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Nuria Sydykova Méndez (Ciudad de México).
Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato).
Ana Paula Ramírez Sánchez (Jalisco).
Laura Itzel Rodríguez Dimayuga (Morelos).
Mónica Isabel Casillas Rodríguez (Querétaro).
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
Ana Teresa Calderón Juárez (Zacatecas).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 32^a OMM.

1. Ciudad de México.
2. Guanajuato
3. Nuevo León.
4. Jalisco.
5. Sinaloa.
6. Yucatán.
7. Chihuahua.
8. Chiapas.
9. Veracruz.
10. San Luis Potosí.

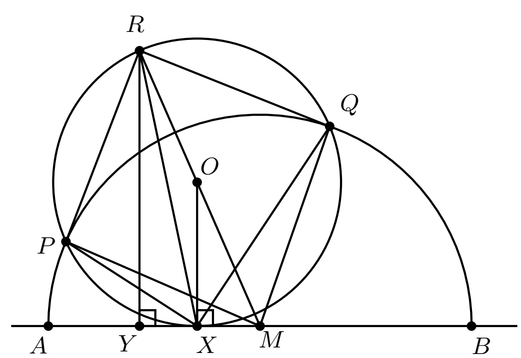
En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "**Copa San Francisco de Campeche**" y fue ganado por Guanajuato. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Sinaloa y Veracruz, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del 32 Concurso Nacional de la OMM. Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

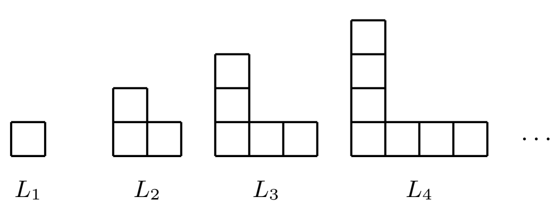
Problema 1. Sean A y B dos puntos en una recta ℓ, M el punto medio del segmento AB y X un punto del segmento AB, diferente de M. Sea Ω una semicircunferencia de diámetro AB. Considera un punto P sobre Ω y considera Γ la circunferencia tangente a AB que pasa por P y por X. Sea Q la otra intersección de Γ con Ω. La bisectriz del ángulo $\angle PXQ$ interseca a Γ en un punto R. Sea Y un punto en ℓ, tal que RY es perpendicular a ℓ. Muestra que $MX > XY$.

(Problema sugerido por Victor Domínguez Silva)

Solución. Notemos que R es el punto medio del arco $\widehat{PQ}$ de Γ que no contiene a X. Sea O el centro de Γ. Veamos que P y Q son las intersecciones de la circunferencia de diámetro AB, de la cual claramente M es centro, con Γ. Entonces R, O, M son colineales por estar todos en la mediatriz de PQ. Luego, como el segmento RY es paralelo al segmento OX y éste último es perpendicular a AB, por el Teorema de Tales, $\frac{YX}{XM} = \frac{RO}{OM} < 1$, pues OR es igual al radio de Γ y OM es mayor a este por encontrarse M fuera de Γ. De aquí obtenemos la desigualdad deseada.



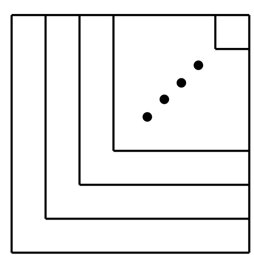
Problema 2. Para cada entero positivo m, la figura L_m se forma traslapando dos rectángulos, uno de $m \times 1$ y uno de $1 \times m$ de manera que coincida un cuadrito extremo del primero con un cuadrito extremo del segundo, como se muestra en la siguiente imagen.



Usando algunas figuras $L_{m_1}, L_{m_2}, \ldots, L_{m_k}$, se cubre completamente una cuadrícula de $n \times n$, colocándolas de manera que sus bordes estén sobre las líneas de la cuadrícula. De entre todas las posibles formas de cubrir la cuadrícula, con distintos valores para los m_i y para k, determina el mínimo valor posible de $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.
Nota: Para cubrir la cuadrícula, las figuras pueden reflejarse, rotarse, traslaparse o salirse de la cuadrícula.

(Problema sugerido por Leonardo Ariel García Morán)

Solución de Isaac Pancardo Botello. Primero demostraremos que $k \geq n$. Supongamos, por contradicción, que $k < n$. Como cada ficha tiene exactamente una esquina y hay n filas en el tablero de $n \times n$, hay al menos una fila que no contiene una esquina sobre ella. Luego, cada ficha tiene a lo más un cuadrito sobre dicha fila y, como hay n cuadritos en la fila, son necesarias para llenarla por lo menos n fichas, lo que es una contradicción ya que $k < n$. Por lo tanto, $k \geq n$.
Por otro lado, como cada ficha L_{m_i} tiene $2m_i - 1$ cuadritos y es posible cubrir la cuadrícula de $n \times n$ usando estas fichas, tenemos que $(2m_1 + 1) + (2m_2 + 1) + \cdots + (2m_k - 1) \geq n^2$, esto es, $2(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) \geq n^2 + k$ y, como $k \geq n$, se sigue que $n^2 + k \geq n^2 + n$. Por lo tanto, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k \geq \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.
Para concluir que el valor mínimo de $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ es $\frac{n(n+1)}{2}$, solo hace falta dar un acomodo con las fichas. Para esto, colocamos las n fichas compartiendo esquinas con una diagonal y ordenadas de la más grande a la más pequeña, colocándolas como se muestra en la figura.



Problema 3. Una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de enteros positivos se dice *campechana*, si para cada i tal que $2 \leq i \leq n$, se tiene que exactamente a_i elementos de la sucesión son primos relativos con i. Decimos que el *tamaño* de la sucesión es $n - 1$. Sea $m = p_1 p_2 \cdots p_k$ donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son números primos distintos y $k \geq 2$. Demuestra que existen al menos dos sucesiones campechanas de tamaño m.

(Problema sugerido por Jorge Fernández Hidalgo y Victor Hugo Almendra Hernández)

Solución de Carlos Alberto Páez de la Cruz. Primero veamos que existe al menos una sucesión campechana de longitud m para $m = p_1 \cdot p_2 \ldots p_k$, es decir, m es el producto de primos distintos. Construyamos una sucesión campechana de la siguiente manera: Sea d_i el máximo común divisor entre i, m. Entonces hacemos $a_i = \frac{m}{d_i}$. Veamos que dicha sucesión es campechana.

Sea x un entero con $2 \leq x \leq n$. Contemos la cantidad de números en la sucesión que son primos relativos con x. Queremos llegar a que esa cantidad es $\frac{m}{d}$, donde $d = (m, x)$, pues así $a_x = \frac{m}{d}$ y la cantidad de primos relativos con x sería a_x.
Sea $x = (q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \dots q_l^{\alpha_l})(r_1^{\beta_1} \cdot r_2^{\beta_2} \dots r_s^{\beta_s})$, donde cada q_i, r_i es primo y, además, $q_i \mid m$ para todo i y, $r_i \nmid m$ para todo i. Es claro que $d = q_1 \dots q_l$, por definición de los q_i's. Para que un número a_y sea primo relativo con x, debe cumplirse que $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$ para todo i y que $\text{mcd}(a_y, r_i) = 1$ para todo i. Es claro que todo a_y en la sucesión cumple la segunda condición, pues $a_i = \frac{m}{d_i}$ es un divisor de m y, como $\text{mcd}(r_i, m) = 1$, debe ocurrir que $\text{mcd}(a_y, r_i) = 1$. Entonces solo es de importancia la primera condición: $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$. Como $a_y = \frac{m}{d_y}$ y d_y es el mínimo común divisor entre y y m, se sigue que si $q_i \mid y$, entonces $q_i \nmid \frac{m}{d_y}$ (porque $q_i \mid y$ y $q_i \mid m$ implican que $q_i \mid d_y$, pero la máxima potencia de q_i que divide a m es q_i^1). En otras palabras, si $q_i \mid y$ entonces $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$.
Ahora veamos que si $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$, entonces $q_i \mid y$. Tenemos que $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$ es equivalente a $\text{mcd}(\frac{m}{d_y}, q_i) = 1$. Pero $q_i \mid m$, por lo tanto $q_i \mid d_y$ para que sea posible. Luego, $q_i \mid d_y = \text{mcd}(y, m)$. Entonces, $q_i \mid y$.
Concluimos que si $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$, entonces $q_i \mid y$. En otras palabras, si q_i es un primo que divide a x y a m, el número a_y será primo relativo con q_i si y solo si q_i divide a y. Además, para que a_y sea primo relativo con x, debe pasar que $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$ para todo primo q_i que divida a x y a m. Entonces, $q_i \mid y$ para todo i. Además, como el máximo común divisor de x y m es el producto de todos los q_i's, y estos son distintos entre sí, ocurre que $\text{mcd}(a_y, q_i) = 1$ si y solo si $d \mid y$. Como hay exactamente $\frac{m}{d}$ múltiplos de d entre 2 y $m + 1$, es claro que la cantidad de primos relativos con x es igual a $\frac{m}{d} = a_x$ por definición.
Para terminar el problema, se debe hallar otra sucesión campechana de longitud m. Para ello, utilizaremos el hecho de que m tiene al menos 2 factores primos. Definimos la sucesión de la siguiente forma: sea (nuevamente) d_i el máximo común divisor de m e i y sea:

$$a_i = \begin{cases} \frac{m}{d_i} & \text{si } p_1 \nmid i \text{ y } p_2 \nmid i, \text{ o } p_1 \mid i \text{ y } p_2 \mid i; \\ \frac{m}{d_i} \cdot \frac{p_1}{p_2} & \text{si } p_1 \mid i \text{ y } p_2 \nmid i; \\ \frac{m}{d_i} \cdot \frac{p_2}{p_1} & \text{si } p_1 \nmid i \text{ y } p_2 \mid i. \end{cases}$$

Veamos que esa sucesión también es campechana. La idea clave es ver que la sucesión es similar a la que ya probamos que lo es. Vayamos por casos:
i) $2 \leq x \leq m$ y ($p_1 \mid x$y p_2 x) o ($p_1 \nmid x$y $p_2 \nmid x$. Entonces, $a_x = \frac{m}{d_x}$. Comparemos en la primera sucesión. El número con subíndice x es el mismo en la original que en la nueva. Además, la cantidad de primos relativos con x en la original es igual a a_x. Además, habíamos visto que $\text{mcd}(a_y, x) = 1$ si y solo si $d_x \mid y$. Supongamos que p_1 y p_2 dividen a x. Si en la sucesión original $\text{mcd}(a_y, x) = 1$, quiere decir que tanto p_1 como p_2 dividen a y. Como $p_1 \mid y, p_2 \mid y$, en la nueva sucesión a_x se mantiene igual. Si $\text{mcd}(a_y, x) > 1$, al multiplicar a_y por $\frac{p_2}{p_1}$ o por $\frac{p_1}{p_2}$ o al dejarlo igual, $\text{mcd}(a'_y, x)$ seguirá siendo mayor que 1. Es decir, si $p_1 \mid x$ y $p_2 \mid x$, la cantidad de primos relativos con x seguirá siendo $\frac{m}{d_x}$. Ahora supongamos que $p_1 \nmid x$ y $m \nmid x$. En la sucesión original,

hay $\frac{m}{d_x}$ primos relativos con x. Además, al mantener el número de la original a_y en la nueva, o multiplicarlo por $\frac{p_1}{p_2}$ o por $\frac{p_2}{p_1}$, el número $\text{mcd}(a'_y, x)$ no cambiará. Entonces seguirá habiendo $\frac{m}{d_x}$ primos relativos con x.
ii) $2 \leq x \leq m$ y $(p_1 \nmid x, p_2 \nmid x)$. Los números que están en una posición k con $(p_1 \mid k, p_2 \mid k)$ o $(p_1 \nmid k, p_2 \nmid k)$ se mantendrán igual con ambas sucesiones. Los que están en una posición k con $(p_1 \mid k, p_2 \nmid k)$ cambiarán a $\frac{m}{d_k} \cdot \frac{p_1}{p_2}$. Además, los que estaban en una posición k con $(p_1 \nmid k, p_2 \mid k)$ cambian a $\frac{m}{d_k} \cdot \frac{p_2}{p_1}$. Sea a_y un número en la original. Si $\text{mcd}(a_y, x) = 1$, $p_1 \mid y$ y $p_2 \nmid y$, entonces a_y cambia a $a_y \cdot \frac{p_1}{p_2}$, pero entonces a'_y (el nuevo) ya no es primo relativo con x, pues $p_1 \mid x$ y $p_1 \mid a_y \cdot \frac{p_1}{p_2}$. En general, si $p_1 \mid k$, $p_2 \nmid k$ y $\text{mcd}(a_y, p_1) = 1$, entonces $\text{mcd}(a'_y, p_1) \neq 1$, pero $\text{mcd}(a'_y, p_2)$ sí será 1. En otras palabras, si en la original un número era primo relativo con p_1, en la nueva será primo relativo con p_2, y viceversa.
Por lo tanto, la sucesión tendrá $\frac{m}{d_i} \cdot \frac{p_1}{p_2}$ primos relativos con x por el cambio que se hace entre p_1 y p_2. El otro caso con $p_1 \nmid x$ y $p_2 \mid x$ es análogo. Entonces, al cambiar la sucesión original por la nueva, sigue siendo campechana y se concluye el problema.

Problema 4. Sea $n \geq 2$ un número entero. Para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de enteros positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, considera las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$ para $1 \leq i \leq k$. Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1 S_2 \cdots S_k$. (Problema sugerido por Ángel Misael Pelayo Gómez)

Solución. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_k$ una colección de enteros positivos (a la cual llamaremos una configuración válida) tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, de tal manera que el producto M toma el valor máximo. Recordemos que $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i = \frac{a_i \cdot (a_i+1)}{2}$, para cada i, con $1 \leq i \leq k$. La idea de la demostración es ir cambiando ciertos números a_i sin modificar la suma original y ver como cambia el producto M.
Supongamos que existe $a_i \geq 5$, notemos que si en lugar de poner a_i, utilizamos $a_{k+1} = a_i - 2$ y $a_{k+2} = 2$, entonces $a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1} + a_{i+1} + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, pero el producto M cambia de $M = S_1 \cdot S_2 \cdots S_k$ a $M' = S_1 \cdot S_2 \cdots S_{i-1} \cdot S_{i+1} \cdots S_k \cdot S_{k+1} \cdot S_{k+2}$, donde $S_{k+1} = 1 + 2 + \cdots + (a_i - 2)$ y $S_{k+2} = 1 + 2 = 3$. Veamos que $M < M'$, para ello basta ver que $S_i < S_{k+1} \cdot S_{k+2}$, es decir, $a_i(a_i + 1) < (a_i - 2)(a_i - 1)(3)$, lo cual es equivalente a $2a_i^2 - 10a_i + 6 \geq 0$. Pero esta última desigualdad es verdadera, ya que $2a_i^2 - 10a_i \geq 0$ se sigue de que $a_i \geq 5$. En resumen, si alguno de los números en la configuración que nos genera un producto M máximo, es mayor o igual que 5, lo podemos cambiar por dos números que generan un valor de M más grande. Por lo tanto $a_i \leq 4$, para toda $1 \leq i \leq k$.
Ahora, supongamos que $a_i = 1$ para algún i y, como $n \geq 2$, existe al menos otro a_j, entonces podemos cambiar este $a_i = 1$ por $a'_j = a_j + 1$, de esta manera la suma de los números a_l sigue siendo n, pero M cambia de tener un factor $\frac{a_j(a_j+1)}{2}$ a un factor $\frac{(a_j+1)(a_j+2)}{2}$ por lo que M se incrementa. Por lo tanto, $2 \leq a_i \leq 4$, para toda $1 \leq i \leq k$.
Supongamos que existen $i \neq j$ tales que $a_i = a_j = 2$, entonces estos dos números los podemos sustituir por sólo un número $a'_i = 4$, de esta forma la suma no cambia, sigue siendo n, sin embargo cuando hay dos números dos, en M hay dos factores iguales a 3, es decir un 9, que al cambiarlos por un número 4, ahora aparece un factor

$1+2+3+4=10$, por lo que M se incrementa. Luego, cada vez que aparezcan parejas de números 2, los podemos cambiar por un 4 en la configuración.
Supongamos que existen $i \neq j$ tales que $a_i = a_j = 4$, entonces estos dos números los podemos sustituir por dos números iguales a 3 y un número igual a 2. De esta forma la suma sigue siendo n. Pero originalmente en M aparecen dos factores iguales $1+2+3+4=10$, es decir, un factor 100. Pero al cambiarlos por el par de números 3 y el número 2, se tendrá dos factores iguales a $1+2+3=6$ y un factor igual a $1+2=3$, es decir, $6\times 6\times 3=108>100$, luego M crece. De esta manera, cada vez que aparezcan parejas de números 4, los podemos cambiar por dos números 3 y un 2 en la configuración.
En el caso de algún $a_i = 4$ y un $a_j = 2$, los podemos cambiar por dos números 3. Así la suma sigue siendo n, pero nuevamente elproducto M pasa de tener un factor 3 y un factor 10 a tener dos factores iguales a 6, pero $30 < 36$, luego M vuelve a crecer.
En conclusión, en la configuración de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_k$, con $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ y M máximo, solo pueden aparecer números 3 y a lo más un número 2 o un número 4.
Para determinar el valor de M, analicemos módulo 3:

a) Si $n \equiv 0 \pmod 3$, entonces $n = 3s$, para algún entero positivo s. Luego, todos los a_i son iguales a 3 y cada $S_i = 6$, de donde $M = 6^s$.

b) Si $n \equiv 1 \pmod 3$, entonces $n = 3s+1$, para algún entero positivo s, de donde $n = 3+3+\cdots+3+4$, donde hay $s-1$ números iguales a 3 en la suma. Por lo tanto, $M = 10\cdot 6^{s-1}$.

c) Si $n \equiv 2 \pmod 3$, entonces $n = 3s+2$, para algún entero positivo s, de donde $n = 3+3+\cdots+3+2$, donde hay s números iguales a 3 en la suma. Por lo tanto, $M = 3\cdot 6^s$.

Problema 5. Sea $n \geq 5$ un número entero y considera un n-ágono regular. Originalmente, Nacho se encuentra en un vértice del n-ágono, en el cual pondrá una bandera. Él comenzará a moverse entre los vértices del n-ágono, siempre en el sentido de las manecillas del reloj. Primero se moverá una posición y colocará otra bandera, luego, se moverá dos posiciones y colocará otra bandera, etcétera, hasta que en el último movimiento se moverá $n-1$ posiciones y colocará una bandera, de manera que colocará n banderas en total. ¿Para qué valores de n, Nacho colocará una bandera en cada uno de los n vértices?

(Problema sugerido por Victor Domínguez Silva)

Solución. Supongamos que Nacho no recorrió todos los vértices del n-ágono. Esto quiere decir que hay un vértice que Nacho recorrió al menos dos vértices. Consideremos uno de esos vértices y los dos primeros momentos que Nacho visitó dicho vértice y sean a el número de posiciones que Nacho se movió en el movimiento que lo llevó al vértice por primera vez (es posible que a sea igual a 0) y b el número de posiciones que Nacho se movió en el movimiento que lo llevó al vértice por segunda vez. Entre las dos visitas a este vértice Nacho se movió $(a+1)+(a+2)+\cdots+b$ posiciones. Por lo tanto, n divide a la suma $(a+1)+(a+2)+\cdots+b$, para ciertos enteros a, b con $0 \leq a < b \leq n-1$. Usando la fórmula de Gauss, esta suma es igual a:

$$\begin{aligned}(a+1)+(a+2)+\cdots+b &= (1+2+\cdots+b)-(1+2+\cdots+a)\\ &= \frac{b(b+1)-a(a+1)}{2} = \frac{b^2+b-a^2-a}{2}\\ &= \frac{(b-a)(a+b+1)}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que Nacho habrá estado dos veces en el mismo vértice si y solo si $2n$ divide a $(b-a)(a+b+1)$ para ciertos enteros a y b con $0 \leq a < b \leq n-1$.
Supongamos primero que n es una potencia de 2, digamos, $n = 2^t$ con t un entero positivo y que efectivamente se tiene que $2n = 2^{t+1}$ divide a $(b-a)(a+b+1)$ para ciertos enteros a, b con $0 \leq a < b \leq n-1$. Como estos factores tienen distinta paridad, tenemos que $2n$ debe dividir a alguno de los factores $b-a$ o $a+b+1$, pero esto no es posible pues $0 < b-a < a+b+1 \leq (n-2)+(n-1)+1 = 2n-2 < 2n$, lo que es una contradicción. Concluimos que si n es una potencia de 2, Nacho recorrió los n vértices.
Demostraremos ahora que en el resto de los casos, Nacho no recorrió los n vértices. Sea $n = 2^k m$ donde $m \geq 3$ es un número impar y $k \geq 0$. Queremos que $2n = 2^{k+1}m$ divida a $(b-a)(a+b+1)$. Una manera de que esto pase es que estos dos números sean iguales: $2^{k+1}m = (b-a)(a+b+1)$.
Consideraremos dos casos (más adelante se verá la necesidad de separar en estos dos casos).

a) $m < 2^{k+1}$. Supongamos que $m = b-a$ y $2^{k+1} = a+b+1$. Esto nos da el sistema de ecuaciones $b+a = 2^{k+1}-1$ y $b-a = m$, el cual tiene por solución $a = \frac{2^{k+1}-m-1}{2}$ y $b = \frac{2^{k+1}+m-1}{2}$. Como 2^{k+1} es par y m es impar, estos valores de a y b son enteros. Si verificamos que además se cumple que $0 \leq a < b \leq n-1$ habremos terminado este caso.

   - $0 \leq a$ es equivalente a $2^{k+1} \geq m+1$ lo cual es cierto (justo este valor de a es el que nos hace tener que dividir en estos casos).
   - $a < b$ es cierto pues $b-a = m > 0$.
   - $b \leq n-1$ se sigue de $b \leq a+b = 2(2^k)-1 < 3(2^k)-1 \leq m(2^k)-1 = n-1$.

   Esto concluye este caso.

b) $m > 2^{k+1}$. En este caso supondremos que $m = a+b+1$ y $2^{k+1} = b-a$. Esto nos da el sistema de ecuaciones $b+a = m-1$ y $b-a = 2^{k+1}$, el cual tiene por solución $a = \frac{m-2^{k+1}-1}{2}$ y $b = \frac{m+2^{k+1}-1}{2}$. Como 2^{k+1} es par y m es impar, estos valores de a y b son enteros. Si verificamos que además se cumple que $0 \leq a < b \leq n-1$ habremos terminado este caso.

   - $0 \leq a$ es equivalente a $m \geq 2^{k+1}+1$ lo cual es cierto.
   - $a < b$ es cierto pues $b-a = 2^{k+1} > 0$.

- $b \leq n-1$ se sigue de $b \leq a+b = m-1 \leq m2^k - 1 = n-1$.

Esto concluye este caso y el problema.

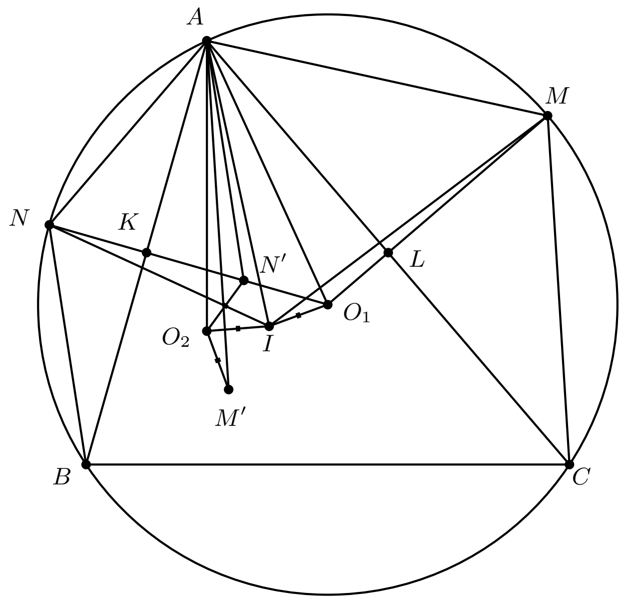
Segunda solución. Esta solución se basa en que si s es un entero impar, la suma de una cantidad s de enteros consecutivos es múltiplo de s, de manera que si n tiene un factor impar, podemos encontrar una suma adecuada en algunos casos (esto no funcionará siempre pues a veces algunos sumandos son negativos).
Sea 2^t la máxima potencia de 2 que divide a n. Si $n = 2^t$, Nacho recorrerá todos los vértices (ver la primera solución). Queda el caso $n = 2^t(2m+1)$ para $m \geq 1$. Veremos que podemos expresar a n como suma de algunos enteros consecutivos entre 1 y $n-1$, para ver que en este caso Nacho no recorrerá todos los vértices. Consideremos la suma $(m-(2^t-1)) + \cdots + (m-1) + m + (m+1) + \cdots + (m+(2^t-1)) + (m + 2^t) = 2^{t+1}m + 2^t = 2^t(2m+1)$. Si $m \geq 2^t$, tenemos que $1 \leq m-(2^t-1)$ y $m+2^t < 2^t(2m+1) = n$ y esto mostraría que para este valor de n, se repetirá un vértice. Si $m \leq 2^t - 1$ consideramos la suma $(2^t - m) + \cdots + (2^t-1) + 2^t + (2^t+1) + \cdots + (2^t+m) = 2^t(2m+1)$ que también funciona, pues $1 \leq 2^t - m$ y $2^t + m < 2^t(2m+1) = n$.

Problema 6. Sean ABC un triángulo acutángulo y Γ la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C. La bisectriz del ángulo en B corta a Γ en M y la bisectriz del ángulo en C corta a Γ en N. Sea I el punto de intersección de las bisectrices anteriores. Considera M' y N' las reflexiones de M y N con respecto a CA y AB, respectivamente. Muestra que el centro de la circunferencia que pasa por los puntos I, M' y N' está en la altura del triángulo ABC que pasa por A.

(Problema sugerido por Victor Domínguez Silva y Leonardo Ariel García Morán)

Solución de Ángel Alexis Anaya Alamea. Sean O_1 el circuncentro del triángulo ABC, D el pie de la altura desde A sobre BC y O_2 el punto en AD tal que $AO_1 = AO_2$. Demostraremos que O_2 es el circuncentro del triángulo $IM'N'$.
Como BM y CN son bisectrices de los ángulos $\angle CBA$ y $\angle ACB$, respectivamente, tenemos que $\angle ACN = \angle NCB = \theta$ y $\angle CBM = \angle MBA = \beta$. Por ángulos inscritos que abren el mismo arco, tenemos que $\angle ACN = \angle ABN = \theta$, $\angle NVB = \angle NAB = \theta$, $\angle CBM = \angle CAM = \beta$ y $\angle MAB = \angle MCA = \beta$. Lo anterior implica que los triángulos ABN y CAM son isósceles, entonces $NA = NB$ y $MA = MC$.
Sean K y L los puntos medios de AB y AC, respectivamente. Por lo desarrollado en el párrafo anterior se tiene que KN y LM son mediatrices de los segmentos AB y AC, respectivamente. Al ser N' la reflexión de N sobre AB, se tiene que NN' es perpendicular a AB y $NK = KN'$. Por lo tanto, las diagonales del cuadrilátero $ANBN'$ se bisecan, de donde se sigue que este cuadrilátero es un paralelogramo que de hecho es un rombo. De manera análoga se concluye que $AMCM'$ es un rombo.
Por otro lado, al ser O_1 el circuncentro del triángulo ABC se tiene que los puntos N, K, N' y O_1 están alineados así como M, L, M' y O_1. De los paralelogramos se tiene que $\angle NAB = \angle N'BA = \theta$, $\angle ABN = \angle BAN' = \theta$, $\angle CAM = \angle M'CA = \beta$ y $\angle MCA = \angle M'AC = \beta$.

Además, es bien conocido[2] que, al ser I el incentro del triángulo ABC y N la intersección de la bisectriz por C con el circuncírculo, se cumple que $NA = NB = NI$. Lo anterior junto con el rombo implican que $NI = AN'$.



Por la construcción de O_2 y el hecho de que O_1 es el circuncentro del triángulo ABC, se tiene que $NO_1 = AO_2$. Por lo tanto, si demostramos que los ángulos $\angle INO_2$ y $\angle N'AO_2$ son iguales, se concluirá por el criterio LAL que los triángulos NIO_1 y $AN'O_2$ son congruentes, de donde $IO_1 = N'O_2$. Para ver esto notemos que

$$\angle N'AO_2 = \angle N'AB - \angle O_2AB = \theta - (90^\circ - 2\beta) = \theta + 2\beta - 90^\circ$$

mientras que

$$\begin{aligned}\angle INO_1 &= \angle BNO - \angle BNI = 90^\circ - \theta - \angle BAC = 90^\circ - \theta - (180^\circ - 2\theta - 2\beta)\\ &= \theta + 2\beta - 90^\circ.\end{aligned}$$

Lo anterior concluye la congruencia deseada. De manera similar obtenemos que $IO_1 = M'O_2$. Por último, es conocido que la altura desde A y el diámetro por A (radio AO_1) son isogonales, de donde se tiene que $\angle O_2AI = \angle IAO_1$. Además, $AO_2 = AO_1$ por construcción, luego por criterio LAL los triángulos AO_2I y AO_1I son congruentes, de donde $IO_2 = IO_1$, lo cual implica que $IO_2 = M'O_2 = N'O_2$ que nos dice que O_2 es el circuncentro del triángulo $IM'N'$ el cual, por construcción, está sobre la altura desde A a BC, justo como se quería.

[2]Ver en el apéndice el teorema 17.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*

2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*

3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 5 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 6 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 7 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 8 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 9 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 10 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 11 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 12 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 13 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 14 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 16 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 17 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.