TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Mayo de 2020

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2020, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Victor Antonio Domínguez Silva y a Maximiliano Sánchez Garza, quienes se integran al Comité Editorial de la revista a partir de este número. Asimismo, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Víctor Hugo Almendra Hernández, quien se integró a este Comité a partir del número 2 del año 2019. Le deseamos el mayor de los éxitos en sus nuevos proyectos. ¡Muchas gracias Víctor!

Pasando al contenido, destaca el artículo *Introducción a las Ecuaciones Funcionales*, de Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se aborda una serie de ejemplos donde se pide

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

resolver una ecuación cuya incógnita es una función. Este tipo de problemas es muy común en la olimpiada de matemáticas y estamos seguros que será muy enriquecedor para todos los lectores.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2020, incluimos los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2019. También hemos incluido los exámenes con soluciones de la XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la 9^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas que se llevó a cabo a distancia debido a la contingencia sanitaria por el Covid-19, ambos certámenes donde México participó en el primer cuatrimestre de este año 2020.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.

- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2001. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2020-2021 y, para el 1° de julio de 2021, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará de forma virtual durante la segunda semana de noviembre de 2020. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2020 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (2021) y a la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (2021).

De entre los concursantes nacidos en 2004 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2021).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la X Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2021.

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2020, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Cuarta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de julio de 2020.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de

2020.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de julio de 2020.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 4^a OMMEB se realizará de forma virtual, del 15 al 18 de octubre de 2020. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2021.

Introducción a las Ecuaciones Funcionales

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Intermedio

Una *ecuación funcional* es una ecuación en donde la incógnita es una función de una o varias variables. Este tipo de ecuaciones aparecen frecuentemente en exámenes de olimpiadas de matemáticas. En este escrito abordaremos este tipo de problemas, comenzando con la definición de función.

Una *función* es una relación entre elementos de dos conjuntos X, Y, que denotamos como $f : X \to Y$, que satisface las siguientes dos condiciones.

1) Cada elemento $x \in X$ está relacionado con algún elemento $y \in Y$, que se denota como $y = f(x)$.

2) Cada elemento $x \in X$ está relacionado con exactamente un elemento de Y, esto es, si $f(x) = y$ y $f(x) = z$, entonces $y = z$.

El conjunto X se llama *dominio* de la función f; el conjunto Y se llama *contradominio o codominio* de la función f. El rango de una función $f : X \to Y$, es el conjunto de los elementos $y \in Y$ tales que $y = f(x)$ para algún $x \in X$.

Ejemplos.

1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$ para todo número real x. El dominio de f es el conjunto de los números reales (denotado por $\mathbb{R}$), el contradominio de f también es el conjunto de los números reales y el rango de f es el conjunto de los números reales no negativos (observe que para cada y número real no negativo, $f(\sqrt{y}) = y$).

2) Sea $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{Z}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0, \\ \\ -1 & \text{si } x<0. \end{cases}$$

El dominio de f es el conjunto de los números reales distintos de cero, el contradominio de f es el conjunto de los números enteros y el rango de f es el conjunto $\{-1,1\}$.

A continuación, tenemos nuestro primer ejemplo de ecuación funcional.

Ejemplo 1. Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy,$$

para todos los números reales x,y.

Solución. Sustituyendo $x=y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0)=f(0)+f(0)-0=2f(0)$, esto es, $f(0)=0$. Tratemos de utilizar esta información para eliminar el lado izquierdo de la ecuación funcional. Una manera es haciendo $x=y$. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que $f(x-x)=f(x)+f(x)-2x^2$ para todo número real x. Luego, tenemos que $f(0)=2f(x)-2x^2$ para todo número real x. Como $f(0)=0$, la relación anterior se simplifica en $0=2f(x)-2x^2$, de donde se sigue que $f(x)=x^2$ para todo número real x. Esto muestra que si $f(x)$ es una función que es solución de la ecuación funcional, entonces $f(x)=x^2$. Para concluir que es la única solución de la ecuación funcional, lo único que falta hacer es verificar que, en efecto, satisface la ecuación funcional. Pero esto es fácil, pues $f(x-y)=(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=f(x)+f(y)-2xy$ para cualesquiera números reales x,y. Por lo tanto, la única solución de la ecuación funcional es la función $f(x)=x^2$ para todo número real x.

Consideremos el siguiente ejemplo, un poco más complicado.

Ejemplo 2. Determinar todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(x+y)-f(f(x)-x-y)=xf(y)-(x+y)f(y-x),$$

para todos los números reales x,y.

Solución. Como en la solución del Ejemplo 1, sustituyendo $x=y=0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(0)=f(f(0)).$$

Si ahora sustituimos $x=0$, $y=f(0)$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(f(0))-f(0)=-f(0)^2. \tag{1}$$

Como $f(f(0)) = f(0)$, la ecuación (1) se simplifica en $f(0)^2 = 0$ y, por lo tanto, $f(0) = 0$. Luego, si $x = 0$ entonces $f(y) - f(-y) = -yf(y)$ para todo número real y, esto es, $(y+1)f(y) = f(-y)$ para todo número real y. Luego, si $y = -k$, entonces $(-k+1)f(-k) = f(k)$. Por lo tanto, para todo número real k, tenemos que

$$f(k) = (-k+1)f(-k) = (-k+1)((k+1)f(k)) = (1-k^2)f(k).$$

Si $f(k) \neq 0$, entonces $1 - k^2 = 1$, de donde se sigue que $k = 0$. Esto significa que si $k \neq 0$, entonces $f(k) = 0$. Pero ya teníamos que $f(0) = 0$. Por lo tanto, $f(x) = 0$ para todo número real x. Por último, es fácil verificar que esta funcón satisface la ecuación funcional. Luego, como en el Ejemplo 1, la ecuación funcional tiene una única solución: La función $f(x) = 0$ para todo número real x.

A veces tenemos más de una relación, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(0) = 1$, $f(f(n)) = n$ y $f(f(n+2)+2) = n$ para todo entero n.

Solución. Si $n = 0$, tenemos que $f(f(0)) = 0$ y, como $f(0) = 1$, resulta que $f(1) = 0$. Ahora, la relación $f(f(n+2)+2) = n$ implica que $f(f(f(n+2)+2)) = f(n)$. Por otro lado, la relación $f(f(n)) = n$ que es válida para todo entero n, implica que $f(f(f(n+2)+2)) = f(n+2)+2$. Por lo tanto, tenemos que

$$f(n+2) + 2 = f(n) \tag{2}$$

para todo entero n. Usaremos esta relación para calcular los primeros valores de $f(n)$. Ya tenemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Con $n = 0$, obtenemos que $f(2)+2 = f(0) = 1$, esto es, $f(2) = -1$. Con $n = 1$, obtenemos que $f(3) + 2 = f(1) = 0$, esto es, $f(3) = -2$. Con estos valores de $f(n)$ podemos conjeturar que $f(n) = 1 - n$ para todo entero n. Demostraremos por inducción, que si n es un entero mayor o igual que cero, entonces $f(n) = 1 - n$. Tenemos que $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$. Supongamos que para algún entero $n \geq 1$ y para todo entero k tal que $0 \leq k \leq n$, se cumple que $f(k) = 1 - k$. Aplicando la relación (2) y la hipótesis de inducción, se sigue que

$$f(n+1) = f(n-1) - 2 = 1 - (n-1) - 2 = 1 - (n+1),$$

lo que completa la inducción.
De manera análoga, se puede probar por inducción el caso de los enteros negativos. Para concluir que la función $f(n) = 1 - n$ es la única solución, solo resta verificar que satisface todas las condiciones del problema, lo cual es fácil de hacer.

El siguiente ejemplo apareció en el Concurso Nacional de la 29^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

Ejemplo 4. (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015) Sea $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ una función tal que $f(1) = 1$ y

$$f(a+b+ab) = a + b + f(ab)$$

para cualesquiera enteros positivos a, b, donde $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los enteros positivos. Determinar el valor de $f(2015)$.

Solución. Para $b = 1$, tenemos que

$$f(2a+1) = a + 1 + f(a), \tag{3}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(3) = 3$.
Para $b = 3$, tenemos que

$$f(4a+3) = a + 3 + f(3a),$$

para todo entero positivo a. Por otro lado, usando la relación (3) tenemos también que

$$f(4a+3) = f(2(2a+1)+1) = (2a+1) + 1 + f(2a+1) = 3a + 3 + f(a),$$

para todo entero positivo a. Luego, $a + 3 + f(3a) = 3a + 3 + f(a)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(3a) = 2a + f(a), \tag{4}$$

para todo entero positivo a.
Calculemos ahora $f(6a+3)$ de dos maneras. Usando primero la relación (4) y después la relación (1), tenemos que

$$f(6a+3) = f(3(2a+1)) = 2(2a+1) + f(2a+1) = 5a + 3 + f(a),$$

para todo entero positivo a.
Usando ahora la relación (3), tenemos que

$$f(6a+3) = f(2(3a+1)+1)) = (3a+1) + 1 + f(3a+1) = 3a + 2 + f(3a+1),$$

para todo entero positivo a. Luego, $5a + 3 + f(a) = 3a + 2 + f(3a+1)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(3a+1) = 2a + 1 + f(a), \tag{5}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(4) = 2 + 1 + f(1) = 4$.
Análogamente, calculemos $f(6a+1)$ de dos maneras. Usando la relación (5), tenemos que

$$f(6a+1) = f(3(2a)+1) = 2(2a) + 1 + f(2a) = 4a + 1 + f(2a),$$

para todo entero positivo a.
Ahora, usando primero la relación (3) y después la relación (4), tenemos que

$$\begin{aligned} f(6a+1) &= f(2(3a)+1) = 3a + 1 + f(3a) = 3a + 1 + 2a + f(a) \\ &= 5a + 1 + f(a), \end{aligned}$$

para todo entero positivo a. Luego, $4a + 1 + f(2a) = 5a + 1 + f(a)$ para todo entero positivo a, esto es,

$$f(2a) = a + f(a), \tag{6}$$

para todo entero positivo a. En particular, $f(2) = 1 + f(1) = 2$.
Como $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ y $f(4) = 4$, estamos tentados a pensar que $f(n) = n$ para todo entero positivo n. Es fácil verificar que esta función satisface las condiciones del problema.
Demostraremos, por inducción, que $f(n) = n$ para todo entero positivo n. La base de inducción es $f(1) = 1$, la cual es cierta por hipótesis. Supongamos que para algún entero $n \geq 1$ y para todo entero k tal que $1 \leq k < n$, se cumple que $f(k) = k$.
Si n es par, entonces $n = 2m$ para algún entero positivo $m < n$. Luego, aplicando la relación (6) y la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$f(n) = f(2m) = m + f(m) = m + m = 2m = n.$$

Ahora, si n es impar, entonces $n = 2m + 1$ para algún entero positivo $m < n$. Luego, aplicando la relación (3) y la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$f(n) = f(2m + 1) = m + 1 + f(m) = m + 1 + m = 2m + 1 = n.$$

Por lo tanto, $f(n) = n$, lo que completa la inducción. En particular, $f(2015) = 2015$. De paso hemos demostrado que la única función que satisface las condiciones del problema es la función $f(n) = n$ para todo entero positivo n.

En el ejemplo anterior fue muy útil calcular las imágenes de algunos valores del dominio de la función, lo cual sirvió para poder conjeturar. Veamos un ejemplo donde puede no ser tan inmediato establecer una conjetura.

Ejemplo 5. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(1) = 1$ y

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$$

para cualesquiera enteros x, y.

Solución. Comencemos por calcular las imágenes de algunos enteros. Tenemos que

$$\begin{aligned}
f(2) &= f(1) + f(1) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4,\\
f(3) &= f(1) + f(2) + 2 \cdot 3 = 1 + 4 + 6 = 11,\\
f(4) &= f(2) + f(2) + 4 \cdot 4 = 4 + 4 + 16 = 24,\\
f(5) &= f(2) + f(3) + 6 \cdot 5 = 4 + 11 + 30 = 45,\\
f(6) &= f(3) + f(3) + 9 \cdot 6 = 11 + 11 + 54 = 76.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
f(2) &= 1 + (2\cdot 1 + 1) = f(1) + 2(1) + 1,\\
f(3) &= 4 + (2\cdot 3 + 1) = f(2) + 2(1+2) + 1,\\
f(4) &= 11 + (2\cdot 6 + 1) = f(3) + 2(1+2+3) + 1,\\
f(5) &= 21 + (2\cdot 10 + 1) = f(4) + 2(1+2+3+4) + 1,\\
f(6) &= 45 + (2\cdot 15 + 1) = f(5) + 2(1+2+3+4+5) + 1,
\end{aligned}$$

conjeturamos que

$$f(n) = f(n-1) + 2(1+2+\cdots+(n-1)) + 1 = f(n-1) + n(n-1) + 1,$$

para todo entero $n \geq 2$. Ahora, tratemos de hallar una fórmula cerrada para $f(n)$ a partir de esta fórmula recursiva de f. Aplicando repetidamente esta fórmula recursiva de f, obtenemos que

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(n-1) + (n-1)n + 1\\
&= f(n-2) + (n-2)(n-1) + (n-1)n + 2\\
&= f(n-3) + (n-3)(n-2) + (n-2)(n-1) + (n-1)n + 3\\
&\;\vdots\\
&= f(1) + (1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n) + (n-1).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la conjetura es

$$\begin{aligned}
f(n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) + (n-1) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i + (n-1)\\
&= 1 + \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2\right) + \left(\frac{n(n+1)}{2} - n\right) + n - 1\\
&= \frac{n^3+2n}{3}, \qquad (7)
\end{aligned}$$

para todo entero $n \geq 2$. Se deja de ejercicio a lector demostrar por inducción en n, que la relación (7) es verdadera para todo entero $n \geq 2$.
Calculemos ahora $f(0)$. Como $0 = -1 + 1$, haciendo $x = -1$, $y = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(-1) + f(1)$. Para calcular el valor de $f(-1)$, hagamos $x = -1$, $y = 2$ en la ecuación funcional. Así, $f(1) = f(-1) + f(2) + (-2)(-1+2)$, esto es, $1 = f(-1) + 4 - 2 = f(-1) + 2$, de donde obtenemos que $f(-1) = -1$ y, en consecuencia, $f(0) = f(-1) + f(1) = 0$. Es fácil ver que la relación (7) también se verifica para $n = 0$ y $n = 1$. Usaremos el hecho de que $f(0) = 0$ para determinar $f(n)$ para todo entero $n < 0$. Usando la identidad, $0 = -n + n$ válida para todo entero n, tenemos que $f(0) = f(n) + f(-n)$ para todo entero n, esto es, $f(n) = -f(-n)$ para todo entero n, ya que $f(0) = 0$. Luego, si $n < 0$, entonces $-n > 0$ y, aplicando la relación (7) válida para todo entero no negativo, obtenemos que $f(n) = -f(-n) = -\left(\frac{(-n)^3+2(-n)}{3}\right) = \frac{n^3+2n}{3}$ para todo entero $n < 0$.

Por lo tanto, $f(n) = \frac{n^3+2n}{3}$ para todo entero n. Por último, es fácil verificar que esta función satisface la ecuación funcional, de manera que es la única solución.

El siguiente ejemplo apareció en la 28^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Ejemplo 6. (Olimpiada Internacional, 1987) Demostrar que no existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(f(n)) = n + 1987$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es el conjunto de los números naturales.

Solución. Supongamos, por contradicción, que existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(f(n)) = n + 1987$ para todo número natural n. Por un lado, tenemos que

$$f(f(f(n))) = f(n + 1987)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por otro lado, tenemos que

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1987$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$f(n + 1987) = f(n) + 1987 \tag{8}$$

para todo número natural n.
Más aún, tenemos el siguiente resultado.

Lema. $f(n + 1987m) = f(n) + 1987m$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Si $m = 0$, el resultado es inmediato. Supongamos que el resultado es cierto para algún número natural m. Entonces, aplicando primero la relación (8) y después la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(n + 1987(m+1)) &= f((n + 1987m) + 1987) = f(n + 1897m) + 1987 \\ &= f(n) + 1987m + 1987 = f(n) + 1987(m+1), \end{aligned}$$

lo que completa la inducción. $\square$

Ahora, sea r un número natural tal que $r \leq 1986$. Como $f(r)$ y 1987 son números naturales, el Algoritmo de la división garantiza la existencia de números naturales k y ℓ tales que $f(r) = 1987k + \ell$ con $\ell \leq 1986$. Luego, tenemos que

$$r + 1987 = f(f(r)) = f(\ell + 1987k) = f(\ell) + 1987k,$$

donde la última igualdad se sigue por el lema anterior.
Por lo tanto, $r+1987 = f(\ell)+1987k$, esto es, $r-f(\ell) = 1987(k-1)$. Como $r \leq 1986$ y $f(\ell) \geq 0$, tenemos que $r - f(\ell) \leq 1986$, lo que significa que $1987(k-1) \leq 1986$. Como k es un número natural, es fácil ver que esta desigualdad se satisface si y solo si $k = 0$ o $k = 1$.

1) Si $k = 0$, entonces $f(r) = \ell$ y $f(\ell) = f(f(r)) = r + 1987$, lo cual implica que $r \neq \ell$.

2) Si $k = 1$, entonces $f(r) = 1987 + \ell$ y $f(\ell) = r$, lo cual implica que $r \neq \ell$.

Hemos demostrado así, que para cada número natural $r \leq 1986$, existe un número natural $\ell \leq 1986$, con $\ell \neq r$, tal que $f(r) = \ell$ y $f(\ell) = r + 1987$, o $f(\ell) = r$ y $f(r) = \ell + 1987$. Observemos que ambos casos no pueden suceder simultáneamente. En efecto, si para algún r número natural menor que 1987 existen números naturales $\ell_1 \leq 1986$ y $\ell_2 \leq 1986$ tales que $f(r) = \ell_1$ y $f(r) = \ell_2 + 1987$, entonces $\ell_1 = \ell_2 + 1987$, esto es, $\ell_1 - \ell_2 = 1987$, lo cual es imposible. De esta manera, el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, 1986\}$ se ha dividido en parejas (r, ℓ), lo que es una contradicción, ya que dicho conjunto tiene una cantidad impar de elementos.

Cuando comenzamos a trabajar con una ecuación funcional, siempre es una buena idea considerar valores pequeños, como $x = 0$, $x = 1$, y ver qué sucede. Sin embargo, esto puede no ser suficiente para resolver todo el problema. A veces será necesario considerar valores más grandes. Podemos pensar en la ecuación funcional como un sistema gigante de ecuaciones e intentar encontrar una forma de hacer que algunas cosas se cancelen.

Ejemplo 7. (Corea, 2000) Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

para todos los números reales x, y.

Solución. Sea z un número real positivo arbitrario. Sustituyendo $x = \sqrt{z}$, $y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(z) = \sqrt{z}(f(\sqrt{z}) + f(0)).$$

Si ahora sustituimos $x = 0$, $y = \sqrt{z}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(-z) = -\sqrt{z}(f(0) + f(\sqrt{z})).$$

Comparando estas relaciones, obtenemos que $f(z) = -f(-z)$.
Si ahora sustituimos $y = -z$ y usamos que $f(-z) = -f(z)$, resulta que

$$f(x^2 - z^2) = (x + z)(f(x) + f(-z)) = (x + z)(f(x) - f(z)),$$

para todo número real x. Sin embargo, si $y = z$, tenemos también que

$$f(x^2 - z^2) = (x - z)(f(x) + f(z))$$

para todo número real x.
Por lo tanto, $(x - z)(f(x) + f(z)) = (x + z)(f(x) - f(z))$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de donde se sigue que $xf(z) = zf(x)$ para todo número real x, esto es, $f(x) = \frac{f(z)}{z}x$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como $\frac{f(z)}{z}$ es una constante, $f(x)$ tiene la forma Cx con C una constante. Es fácil verificar que si C es cualquier número real, la función $f(x) = Cx$ para todo $x \in \mathbb{R}$, satisface la ecuación funcional. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación funcional son todas las funciones de esta forma.

Ejemplo 8. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy,$$

para cualesquiera números reales x, y.

Solución. Sustituyendo $y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(xf(0)) = f(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) \neq 0$, para cada número real r podemos encontrar un número real x tal que $xf(0) = r$ (de hecho, $x = \frac{r}{f(0)}$), lo cual significa que $xf(0)$ toma todos los valores reales posibles y, en consecuencia, $f(r) = f(0)$ para todo número real r. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(0) - xy$ para cualesquiera x, y, esto es, $xy = 0$ para cualesquiera x, y, lo cual evidentemente es falso. Por lo tanto, $f(0) = 0$.
Si ahora sustituimos $y = x$ en la ecuación funcional, obtenemos que $f(0) = f(x^2) - x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, esto es, $f(x^2) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pues $f(0) = 0$). Esto significa que $f(x) = x$ para todo número real $x \geq 0$, pues para cada número real $r \geq 0$ existe un número real y tal que $y^2 = r$.
Ahora, sean x, y números reales menores que cero. Como $xy > 0$, tenemos entonces que $f(xy) = xy$. Luego, la ecuación funcional en este caso es $f(xf(y) - yf(x)) = 0$. Si $xf(y) - yf(x) > 0$, entonces $f(xf(y) - yf(x)) = xf(y) - yf(x)$ y, en consecuencia, $xf(y) - yf(x) = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $xf(y) - yf(x) \leq 0$. De manera análoga, obtenemos que $yf(x) - xf(y) \leq 0$, esto es, $-(xf(y) - yf(x)) \leq 0$. Luego, la única posibilidad es que $xf(y) - yf(x) = 0$. En conclusión, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ para cualesquiera números $x < 0$, $y < 0$. Esto significa que $\frac{f(x)}{x}$ es constante para todo $x < 0$, esto es, $f(x) = cx$ para todo $x < 0$ con c una constante. Si $c = 1$, tenemos que $f(x) = x$ para todo $x < 0$ y, es fácil ver que la función $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación funcional.
Supongamos que $c \neq 1$ y sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < 0 < y$. Por lo demostrado antes, tenemos que $f(x) = cx$, $f(y) = y$ y $f(xy) = cxy$. Sustituyendo estos valores en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f((1-c)xy) = f(xy - cxy) = f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy = (c-1)xy.$$

Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$, obtenemos que $f(c-1) = -(c-1)$. Como $f(x) = x$ para todo $x \geq 0$ y $c \neq 1$, necesariamente $c - 1 < 0$. Luego, $f(c-1) = c(c-1)$. Por lo tanto, $c(c-1) = -(c-1)$, esto es, $c = -1$. Esto significa que $f(x) = -x$ para todo $x < 0$. Como $f(x) = x$ para todo $x \geq 0$, concluimos que $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ es otra solución, solo debemos verificar que esta función satisface la ecuación funcional. Los detalles de este aserto se dejan de ejercicio al lector.
En conclusión, las funciones $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$ son las únicas soluciones.

Ejemplo 9. (Estados Unidos, 2014) Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

$$xf(2f(y) - x) + y^2 f(2x - f(y)) = \frac{f(x)^2}{x} + f(yf(y))$$

para todos los enteros x, y con $x \neq 0$.

Solución. Demostraremos primero que $f(0) = 0$. Supongamos, por contradicción, que $f(0) \neq 0$. Sustituyendo $x = 2f(0)$, $y = 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$2f(0)^2 = \frac{f(2f(0))^2}{2f(0)} + f(0),$$

esto es, $(4f(0) - 2)f(0)^2 = f(2f(0))^2$, lo cual significa que $4f(0) - 2$ es un cuadrado. Sin embargo, $4f(0) - 2 \equiv 2 \pmod 4$, lo cual es una contradicción ya que todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4. Por lo tanto, $f(0) = 0$.
Sustituyendo ahora $y = 0$ en la ecuación funcional y simplificando con $f(0) = 0$, obtenemos que $xf(-x) = \frac{f(x)^2}{x}$. Si $x \neq 0$, esta igualdad es equivalente a la igualdad

$$x^2 f(-x) = f(x)^2.$$

Intercambiando x por $-x$, obtenemos también que

$$x^2 f(x) = f(-x)^2$$

para todo entero $x \neq 0$.
De estas dos últimas relaciones, obtenemos que $x^2 f(x) = \frac{f(x)^4}{x^4}$ para todo entero $x \neq 0$, esto es, $x^6 f(x) = f(x)^4$ que es equivalente a $f(x)(x^6 - f(x)^3) = 0$. De aquí que $f(x) = 0$ o $f(x) = x^2$ para todo entero x.
Es fácil ver que cada una de las funciones $f(x) = 0$ para todo entero x y $f(x) = x^2$ para todo entero x, satisfacen el problema. Demostraremos que si $f(t) = 0$ para algún entero $t \neq 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo entero x. Supongamos que $f(y) = 0$ con $y \neq 0$. Sustituyendo en la ecuación funcional, obtenemos que

$$xf(-x) + y^2 f(2x) = \frac{f(x)^2}{x}.$$

Sin embargo, como $x^2 f(-x) = f(x)^2$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\frac{f(x)^2}{x} + y^2 f(2x) = \frac{f(x)^2}{x},$$

de donde se sigue que $y^2 f(2x) = 0$. Como $y \neq 0$, necesariamente $f(2x) = 0$. Esto muestra que $f(x) = 0$ para todo entero par x. Supongamos que existe un entero impar m tal que $f(m) = m^2$. Sustituyendo $x = 2k$ con $k \neq 0$ en la ecuación funcional, obtenemos que $y^2 f(4k - f(y)) = f(yf(y))$ para todo entero y. En particular, si $y = m$, entonces $m^2 f(4k - m^2) = f(m^3)$. Observemos que $f(4k - m^2) \neq 0$ si y solo si $f(m^3) \neq 0$ (pues $m^2 \neq 0$ al ser m impar). Supongamos que ambos $f(4k - m^2)$ y

$f(m^3)$ no son cero. Entonces, $f(4k-m^2)=(4k-m^2)^2$ y $f(m^3)=m^6$, de donde obtenemos la ecuación $m^2(4k-m^2)^2=m^6$, esto es, $4k-m^2=\pm m^2$. Es fácil ver que esta ecuación es imposible ya que $k\neq 0$ y m es impar. Por lo tanto, debemos tener que

$$m^2 f(4k-m^2)=f(m^3)=0.$$

Como m es impar, se sigue que $f(4k-m^2)=0$ y $m^2\equiv 1 \pmod 4$. Luego, $4k-m^2\equiv 3 \pmod 4$, lo que significa que $f(x)=0$ para todo entero $x\equiv 3 \pmod 4$ y $x\neq -m^2$ (pues $k\neq 0$). Por otro lado, de $x^2f(-x)=f(x)^2$ tenemos que si $f(x)=0$ y $x\neq 0$, entonces $f(-x)=0$. Como $f(4k-m^2)=0$ y $4k-m^2\neq 0$, se sigue que $f(m^2-4k)=0$. Luego, $f(x)=0$ para todo $x\equiv 1 \pmod 4$ y $x\neq m^2$ (pues $m^2-4k\equiv 1 \pmod 4$ y $k\neq 0$). Con esto hemos demostrado que $f(x)=0$ para todo entero $x\neq \pm m^2$. Como $f(m)\neq 0$ (pues $f(m)=m^2$ y m es impar), necesariamente $m=\pm m^2$. Elevando al cuadrado esta ecuación, obtenemos que $m^2=m^4$ y, dividiendo por $m\neq 0$, resulta que $m=m^3$. Como $f(m^3)=0$, se sigue que $f(m)=0$, lo que es una contradicción.
Hemos demostrado así que si $f(y)=0$ para algún entero $y\neq 0$, entonces $f(x)=0$ para todo entero x.
En conclusión, las únicas funciones que son solución de la ecuación funcional son las funciones $f(x)=0$ para todo entero x y $f(x)=x^2$ para todo entero x.

En la solución del ejemplo anterior, obtuvimos que $f(x)=0$ o $f(x)=x^2$ para todo entero x. En general, esto no significa que $f(x)=0$ para todo entero x o $f(x)=x^2$ para todo entero x. Por ejemplo, si S es cualquier subconjunto de enteros y $S\neq\mathbb{Z}$, la función

$$f_S(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in S,\\ x^2 & \text{si } x\notin S,\end{cases}$$

satisface la primera afirmación y no satisface la segunda. En principio, la ecuación funcional del ejemplo anterior podría tener una infinidad de soluciones (una función por cada subconjunto S de enteros). Este error a menudo se olvida y le ha sido dado un nombre especial en la comunidad olímpica como *la trampa puntual*. En una ecuación funcional que está sujeta a la trampa puntual, usar contradicción es usualmente útil (como lo hicimos en el ejemplo anterior), para determinar el conjunto correcto de soluciones a partir de la (posible) infinidad de soluciones puntuales. Los Ejercicios 9 y 10 al final de este breve escrito, son ejemplos de ecuaciones funcionales en donde aparece la trampa puntual.

Concluimos este escrito con un problema de la olimpiada matemática de China.

Ejemplo 10. (China, 2007) Determinar todas las funciones $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$ tales que

$$f(a)+f(b)+2abf(ab)=\frac{f(ab)}{f(a+b)},$$

para todos $a,b\in\mathbb{Q}^+$, donde $\mathbb{Q}^+$ denota el conjunto de los números racionales positivos.

Solución. Haciendo $a = b = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $4f(1) = \frac{f(1)}{f(2)}$, lo cual implica que $f(2) = \frac{1}{4}$ pues $f(1) \neq 0$. Si ahora sustituimos $a = b = 2$ en la ecuación funcional, obtenemos que $2f(2) + 8f(4) = 1$, de donde se sigue que $f(4) = \frac{1}{16}$.
Sustituyendo $b = 1$ en la ecuación funcional, obtenemos que $(1 + 2a)f(a) + f(1) = \frac{f(a)}{f(a+1)}$, lo cual implica la fórmula recursiva

$$f(a+1) = \frac{f(a)}{(1+2a)f(a) + f(1)}. \tag{9}$$

Usando esta fórmula recursiva, obtenemos que $f(3) = \frac{1}{5+4f(1)}$ y $f(4) = \frac{1}{7+5f(1)+4f(1)^2}$. Como $f(4) = \frac{1}{16}$, se sigue que $4f(1)^2 - 5f(1) - 9 = 0$, cuyas soluciones son $f(1) = 1$ o $f(1) = -\frac{9}{4}$. Al ser $f(1) > 0$, la única posibilidad es $f(1) = 1$. Por lo tanto, $f(3) = \frac{1}{9}$ y la relación (9) se simplifica como

$$f(a+1) = \frac{f(a)}{(1+2a)f(a) + 1}.$$

Lema 1. $f(n) = \dfrac{1}{n^2}$ para todo entero positivo n.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en n. El resultado es cierto para $n = 1, 2, 3, 4$. Supongamos que la fórmula es cierta para cierto $n = k \geq 1$. Entonces, aplicando la relación (9), resulta que

$$f(k+1) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1+2k}{k^2} + 1} = \frac{1}{1 + 2k + k^2} = \frac{1}{(k+1)^2},$$

lo que prueba el resultado para $n = k + 1$ y concluye la inducción. □

Lema 2. $f(a+n) = \dfrac{f(a)}{(n^2 + 2na)f(a) + 1}$ para todo entero positivo n y todo número racional positivo a.

Demostración. Procederemos por inducción en n. El resultado es cierto para $n = 1$. Supongamos que la igualdad es cierta para cierto $n = k \geq 1$. Aplicando primero la relación (9) y después la hipótesis de inducción, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(a+k+1) &= \frac{f(a+k)}{(1+2(a+k))f(a+k) + 1} = \frac{\frac{f(a)}{(k^2+2ka)f(a)+1}}{\frac{(1+2(a+k))f(a)}{(k^2+2ka)f(a)+1} + 1} \\ &= \frac{f(a)}{(1+2(a+k))f(a) + (k^2+2ka)f(a) + 1} \\ &= \frac{f(a)}{((k+1)^2 + 2a(k+1))f(a) + 1}, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado para $n = k + 1$ y concluye la inducción. □

Lema 3. $f\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$ para todo entero positivo n.

Demostración. Sustituyendo $a = n$ y $b = \frac{1}{n}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2f(1) = \frac{f(1)}{f\left(n + \frac{1}{n}\right)}.$$

Como $f(1) = 1$ y, por el Lema 1, $f(n) = \frac{1}{n^2}$, obtenemos que

$$f\left(n + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n^2} + f\left(\frac{1}{n}\right) + 2}.$$

Ahora, aplicando el Lema 2 con $a = \frac{1}{n}$, tenemos que

$$f\left(\frac{1}{n} + n\right) = \frac{f(\frac{1}{n})}{(n^2+2)f(\frac{1}{n}) + 1}.$$

Eliminando $f(\frac{1}{n} + n)$ de estas ecuaciones y simplificando, resulta que

$$f\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - n^2\right) f\left(\frac{1}{n}\right) - 1 = 0,$$

esto es, $(f(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n^2})(f(\frac{1}{n}) - n^2) = 0$. Como $f(\frac{1}{n}) > 0$, se sigue que $f(\frac{1}{n}) = n^2$. $\square$

Lema 4. $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{n^2}{m^2}$ para todos los enteros positivos m y n.

Demostración. La prueba la haremos por inducción en m. El caso $m = 1$ es cierto por el Lema 3. Supongamos que el resultado es cierto para $m = k \geq 1$. Sustituyendo $a = \frac{k}{n}$ y $b = \frac{1}{n}$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2k}{n^2} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)}{f\left(\frac{k+1}{n}\right)}.$$

Aplicando ahora la hipótesis de inducción, resulta que

$$\frac{n^2}{k^2} + n^2 + \frac{2k}{n^2}\frac{n^4}{k^2} = \frac{\frac{n^4}{k^2}}{f(\frac{k+1}{n})}.$$

Por lo tanto,

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{\frac{n^4}{k^2}}{n^2(\frac{1}{k^2} + 1 + \frac{2}{k})} = \frac{n^2}{1 + k^2 + 2k} = \frac{n^2}{(k+1)^2},$$

lo que prueba el resultado para $m = k + 1$ y concluye la inducción. $\square$

Como cada número racional positivo q es de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros positivos, tenemos la única solución $f(q) = \frac{1}{q^2}$ para todo $q \in \mathbb{Q}^+$. Finalmente, es fácil verificar que esta función satisface la ecuación funcional:

$$f(a) + f(b) + 2abf(ab) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2ab}{a^2b^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2} = \frac{f(ab)}{f(a+b)}.$$

A continuación dejamos unos ejercicios para que practique el lector.

Ejercicios

1) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$2f(x+y) + 6y^3 = f(x+2y) + x^3$$

para cualesquiera números reales x, y.

2) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x-y) = f(x)f(y)$$

para todos los números reales x, y.

3) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x+y)) = x + f(y)$$

para todos los números reales x, y.

4) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ que satisfacen las siguientes dos condiciones:

   a) $f(x+1) = f(x) + 1$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
   b) $f(x^3) = f(x)^3$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

5) Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$

para todos los números reales x, y.

6) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $f(1) = 1$ y

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + ab$$

para todos $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

7) Determina todas las funciones $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ tales que

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y$$

para todos los números racionales positivos x, y.

8) Determina todas las funciones $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(a+b+c)+f(a)+f(b)+f(c)=f(a+b)+f(b+c)+f(c+a)+f(0)$$

para todos los números racionales a,b y c.

9) (Irán, 1999) Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(f(x)+y)=f(x^2-y)+4f(x)y$$

para todos los números reales x,y.

10) (Japón, Final, 2004) Determina todas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x)+f(y))=f(x)^2+y$$

para todos los números reales x,y.

Bibliografía

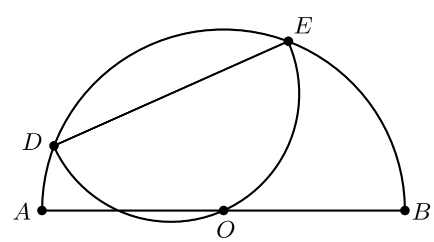
1) J. A. Gómez Ortega, C. J. Rubio Barrios, R. Valdez Delgado. *Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016*. Colección Papirhos, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2019.

2) `https://artofproblemsolving.com/`

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2020. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. En la siguiente figura, el centro O de la semicircunferencia Γ_1 de diámetro AB, está en la semicircunferencia Γ_2 de diámetro DE. Calcula la razón del área de Γ_1 entre el área de Γ_2.



Problema 2. Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si las primeras dos cifras son iguales entre sí y las últimas dos cifras son iguales entre sí. Por ejemplo, los números 4455 y 9999 son tartamudos. Encuentra todos los números tartamudos que sean cuadrados perfectos.

Problema 3. Dentro del paralelogramo $ABCD$ se considera un punto P tal que $PC = BC$. Demuestra que la recta BP es perpendicular a la recta que conecta los puntos medios de los segmentos AP y CD.

Problema 4. Una cuadrícula de 6×6 se va a cubrir con 18 piezas de dominó, cada una de 2×1 o 1×2. Demuestra que, sin importar cómo se acomoden las piezas, existe una forma de cortar la cuadrícula (vertical u horizontalmente) en dos partes de tal manera que no se corte ninguna pieza de dominó.

Problema 5. Demuestra que para cualquier entero n, el número $n^3 - 9n + 27$ no es divisible por 81.

Problema 6. Determina todos los enteros positivos n tales que $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ divide a $2n$, donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera[2] de x.

Problema 7. Sea a_n una sucesión de números reales tal que $a_1 = 1$ y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$. Demuestra que $a_{100} > 14$.

Problema 8. Sean a, b y c enteros positivos. Demuestra que

$$[a, b] \cdot [b, c] \cdot [c, a] \geq [a, b, c]^2,$$

donde los corchetes denotan el mínimo común múltiplo.

Problema 9. Encuentra todas las soluciones enteras positivas de la ecuación

$$x(x + 3)(x + 4)(x + 7) + 25 = y^2.$$

Problema 10. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Ω y sea D el pie de altura desde A hasta BC. Las perpendiculares desde D hasta AB y AC cortan a estas en E y F, respectivamente. La recta EF corta a Ω en X y Y. Prueba que $AX = AD = AY$.

Problema 11. La suma de 63 enteros positivos distintos entre sí y distintos de cierto entero positivo n es 2020. ¿Cuál es el menor valor posible de n?

Problema 12. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Sea X un punto arbitrario en BC. Los puntos Z y Y se ubican en los lados AC y AB, respectivamente, de tal forma que $\angle BXY = \angle ZXC$. Una recta paralela a YZ pasa por B y corta a XZ en T. Demuestra que AT biseca al ángulo en el vértice A.

Problema 13. Decimos que un entero positivo m es *digital* si existe un entero positivo n tal que m^n tiene exactamente m dígitos en su representación decimal.

a) Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos digitales.

b) Demuestra que hay una infinidad de enteros positivos no digitales.

Problema 14. Determina si es posible o no acomodar los enteros del 1 al 2020^2 en un tablero de 2020×2020 de modo que para cualquier celda del tablero se cumpla que al considerar todos los enteros que aparecen en su fila y columna correspondientes, existen tres enteros distintos x, y, z tales que $x = yz$.

[2] Para cada número real x, $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Problema 15. Sean $a \geq 1$, $b \geq 1$ y $c \geq 1$ números reales. Demuestra que

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}.$$

Problema 16. Sean p, q y r números primos mayores que 3. Demuestra que 48 divide a $(p-q)(q-r)(r-p)$.

Problema 17. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. El punto P se escoge en la recta AB de tal forma que la circunferencia por C, D y P es tangente a AB. De forma similar, el punto Q se escoge en la recta CD de tal forma que la circunferencia por A, B y Q es tangente a CD. Demuestra que la distancia de P a CD es la misma distancia que de Q a AB.

Problema 18. Considera las siguientes sumas de 50 términos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}, \\ T &= \frac{1}{51\cdot 100} + \frac{1}{52\cdot 99} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 52} + \frac{1}{100\cdot 51}. \end{aligned}$$

Expresa $\frac{S}{T}$ como fracción irreducible.

Problema 19. Encuentra todas las ternas (x, y, z) de números reales tales que

$$\begin{aligned} x^2 - yz &= |y-z| + 1, \\ y^2 - zx &= |z-x| + 1, \\ z^2 - xy &= |x-y| + 1. \end{aligned}$$

Problema 20. Todos los enteros del 1 al 100 han sido escritos en un pizarrón, cada uno exactamente una vez. Una *operación* consiste en elegir dos números a y b en el pizarrón, borrarlos y luego escribir el máximo común divisor de a^2+b^2+2 y a^2b^2+3. Luego de algunas operaciones, queda solamente un entero escrito en el pizarrón. Demuestra que este número no puede ser un cuadrado.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Como DE es diámetro de Γ_2, tenemos que $\angle EOD = 90^\circ$. Además, como O es el centro de Γ_1, $OE = OD$. Sean r_1 y r_2 los radios de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Por el teorema de Pitágoras, resulta que $OE^2 + OD^2 = DE^2$, esto es, $2r_1^2 = (2r_2)^2$, de donde $\frac{r_1^2}{r_2^2} = 2$. Por lo tanto,

$$\frac{\text{área}(\Gamma_1)}{\text{área}(\Gamma_2)} = \frac{\frac{\pi r_1^2}{2}}{\frac{\pi r_2^2}{2}} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = 2.$$

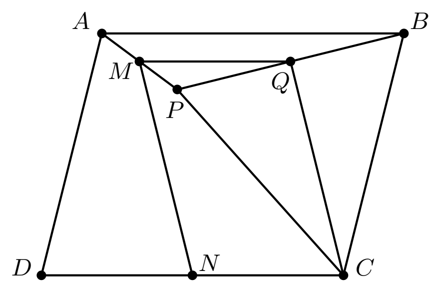
Solución del problema 2. Sea $\overline{aabb}$ un número tartamudo que también es cuadrado perfecto. Es claro que

$$\overline{aabb} = 11\left(\overline{a0b}\right).$$

Luego, para que sea un cuadrado perfecto, es necesario que 11 divida a $\overline{a0b}$. Del criterio de divisibilidad del 11, esto sucede si y solo si 11 divide a $a+b$. Como a y b son dígitos, entonces $0 \leq a+b \leq 18$, por lo que $a+b$ puede ser 0 u 11. El primer caso no es posible ya que implica $a = b = 0$, lo cual no puede suceder pues el número debe ser de cuatro cifras. Entonces, $a + b = 11$. Usando el criterio de divisibilidad del 4, tenemos que

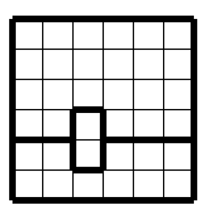
$11b \equiv 0, 1 \pmod 4$, es decir, $b \equiv 0, 3 \pmod 4$. Como $0 \leq a, b \leq 9$, entonces las únicas posibilidades para (a, b) son $(8, 3)$, $(7, 4)$, $(4, 7)$ y $(3, 8)$. Es fácil verificar que la única de estas que sí cumple es $(7, 4)$ ($\overline{a0b} = 704 = 11 \cdot 64 = 11 \cdot 8^2$). Por lo tanto, el único número tartamudo que también es un cuadrado perfecto es $7744 = 88^2$.

Solución del problema 3. Sean M, N y Q los puntos medios de los segmentos AP, CD y BP, respectivamente.



Como M y Q son puntos medios de AP y BP, tenemos que MQ y AB son paralelas y $MQ = \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2} = NC$. Luego, MQ y NC son paralelas y de la misma longitud, por lo que $MQCN$ es un paralelogramo. Como $CP = CB$ y Q es punto medio de BP, se sigue que CQ y BP son perpendiculares, de donde concluimos que BP y MN son perpendiculares.

Solución del problema 4. Tenemos 5 líneas verticales y 5 líneas horizontales en la cuadrícula. Además, tenemos 18 piezas de dominó. Supongamos que cada línea está bloqueada por al menos una pieza de dominó. Entonces debe haber una línea (vertical u horizontal) que está bloqueada exactamente por una pieza (de lo contrario, habría al menos 20 piezas de dominó). Consideremos las dos subcuadrículas en las que queda dividida la cuadrícula de 6×6 con esa línea. Cada una de esas subregiones tiene una cantidad par de cuadritos. Al considerar la pieza que cruza esa línea, queda una cantidad impar de cuadritos a cubrir en cada subcuadrícula, la cual es imposible cubrir con las piezas de dominó, ya que cada pieza cubre dos cuadritos. Esto significa que debe haber alguna línea que no está bloqueada por ninguna pieza.



Solución del problema 5. Supongamos, por contradicción, que existe un entero n tal que $n^3 - 9n + 27 \equiv 0 \pmod{81}$. En particular, 3 divide a $n^3 - 9n + 27$ y, por lo tanto, 3 divide a n^3. Como 3 es primo, se sigue que n es múltiplo de 3. Luego, $n = 3a$ para algún entero a. Entonces,

$$n^3 - 9n + 27 = 27a^3 - 27a + 27 = 27(a^3 - a + 1).$$

Como este número es múltiplo de 81, necesariamente $a^3 - a + 1$ es múltiplo de 3. Sin embargo, por el pequeño teorema de Fermat, tenemos que $a^3 \equiv a \pmod 3$, lo cual implica que $a^3 - a + 1 \equiv 1 \pmod 3$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el número $n^3 - 9n + 27$ no es divisible por 81 para todo entero n.

Solución del problema 6. Como $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor > \sqrt{2n}$, tenemos que

$$\frac{2n}{1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor} < \sqrt{2n}. \tag{10}$$

Además, $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor \leq 1 + \sqrt{2n}$. Luego,

$$\frac{2n}{1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor} \geq \frac{2n}{1 + \sqrt{2n}} = \sqrt{2n} - 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2n}} > \sqrt{2n} - 1. \tag{11}$$

De (10) y (11) se sigue que

$$\frac{2n}{1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor} = \left\lfloor \sqrt{2n} \right\rfloor, \tag{12}$$

ya que tiene que ser un entero. Sea $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor = m$. Sustituyendo en (12) y despejando n, obtenemos que $n = \frac{m(m+1)}{2}$. Es claro que si n tiene esta forma, entonces $1 + \lfloor \sqrt{2n} \rfloor = 1 + \left\lfloor \sqrt{m(m+1)} \right\rfloor = 1 + m$, el cual claramente divide a $2n = m(m+1)$. Por lo tanto, los enteros positivos que cumplen son los de la forma $n = \frac{m(m+1)}{2}$ con m un entero positivo.

Solución del problema 7. Para $i > 1$, tenemos que

$$a_i^2 = \left(a_{i-1} + \frac{1}{a_{i-1}}\right)^2 = a_{i-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{i-1}^2} > a_{i-1}^2 + 2.$$

Sumando estas desigualdades desde $i = 2$ hasta $i = n$, obtenemos que

$$a_n^2 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i^2 > a_1^2 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i^2 + 2(n-1),$$

esto es, $a_n^2 > 2n - 1$. En particular, si $n = 100$, entonces $a_{100} > \sqrt{199} > 14$.

Solución del problema 8. Sea p un número primo y sea $\nu_p(n)$ la mayor potencia de p que divide a n. Entonces, $\nu_p([a, b]) = \text{máx}\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, de donde

$$\nu_p([a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]) = \text{máx}\{\nu_p(a), \nu_p(b)\} + \text{máx}\{\nu_p(b), \nu_p(c)\} + \text{máx}\{\nu_p(c), \nu_p(a)\},$$

mientras que $\nu_p([a,b,c]^2) = 2\max\{\nu_p(a), \nu_p(b), \nu_p(c)\}$.
Luego, tenemos que

$$\nu_p([a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]) \geq \nu_p([a,b,c]^2),$$

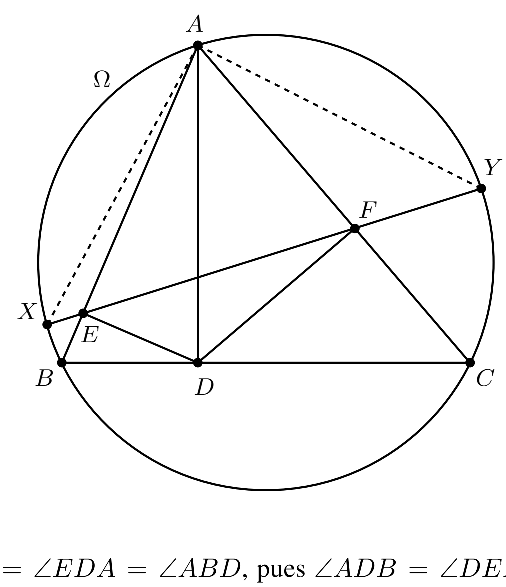
pues $\max\{x,y\} + \max\{y,z\} + \max\{z,x\} \geq 2\max\{x,y,z\}$. Como esto pasa para todo número primo, concluimos que $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a] \geq [a,b,c]^2$, como se quería probar.

Solución del problema 9. Desarrollando el producto del lado izquierdo de la ecuación, obtenemos que $x^4+14x^3+61x^2+84x+25 = y^2$. Sea A la expresión del lado izquierdo de esta igualdad. Observemos que

$$\begin{aligned}(x^2+7x+5)^2 &= x^4+14x^3+59x^2+70x+25\\ &< A\\ &< x^4+14x^3+61x^2+84x+36 = (x^2+7x+6)^2,\end{aligned}$$

por lo que $(x^2+7x+5)^2 < A < (x^2+7x+6)^2$, esto es, A está entre dos cuadrados perfectos consecutivos, por lo que este no puede ser un cuadrado perfecto. Por lo tanto, la ecuación no tiene soluciones en los enteros positivos.

Solución del problema 10. Observemos que el cuadrilátero $AEDF$ es cíclico, pues $\angle AED + \angle AFD = 180°$.



Luego, $\angle EFA = \angle EDA = \angle ABD$, pues $\angle ADB = \angle DEA = 90°$. Entonces el cuadrilátero $BEFC$ es cíclico. Más aún,

$$\frac{\widehat{AX}+\widehat{CY}}{2} = \angle AFX = \angle CBA = \frac{\widehat{CY}+\widehat{YA}}{2},$$

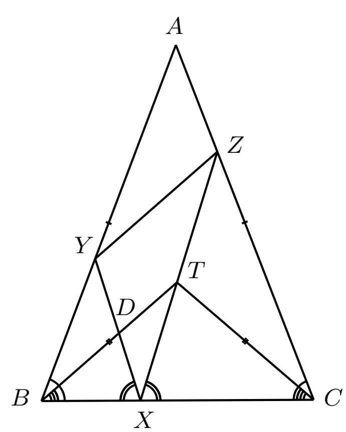
de donde se sigue que $\widehat{AX} = \widehat{YA}$, esto es, $AX = AY$.
Como $\angle ADB = \angle DEA = 90°$, los triángulos DBA y EDA son semejantes, por lo que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$, de donde $AD^2 = AE \cdot AB$.
Por otro lado, tenemos que $\angle ADX = \angle AYX = \angle YXA$, pues el triángulo AXY es isósceles. Entonces, los triángulos AXB y AEX son semejantes. Luego, $AX^2 = AE \cdot AB$ y, por lo tanto, $AD^2 = AX^2$, de donde se sigue el resultado.

Solución del problema 11. Mostraremos que 60 es el menor valor posible de n. Observemos que $1 + 2 + \cdots + 63 = \frac{63\cdot 64}{2} = 2016$. La suma $1 + 2 + 3 + \cdots + 59 + 61 + 62 + 63 + 64$ omite al 60 e incluye al 64, por lo tanto es igual a $2016 - 60 + 64 = 2020$ y $n = 60$ es posible. Mostramos que es imposible que $n \leq 59$. Si el número $n \leq 59$ no aparece en la suma, entonces la menor suma posible es

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + \cdots + (n-1) + (n+1) + (n+2) + \cdots + 64 \\ = {} & (1 + 2 + \cdots + 63) + (64 - n) \\ = {} & 2080 - n \\ \geq {} & 2080 - 59 = 2021, \end{aligned}$$

lo cual es imposible. Por lo tanto, la respuesta es 60.

Solución del problema 12. Sea D la intersección de XY y BT. Como DT y YZ son paralelas, se sigue por el teorema de Tales que $\frac{XY}{XZ} = \frac{XD}{XT}$.



Como $\angle BXY = \angle CXZ$ y $\angle YBX = \angle ZCX$ por ser isósceles el triángulo ABC, tenemos que los triángulos BXY y CXZ son semejantes. Entonces, $\frac{XB}{XC} = \frac{XY}{XZ} = \frac{XD}{XT}$ y, como $\angle BXD = \angle CXT$, por el criterio LAL tenemos que los triángulos BXD y CXT son semejantes, lo cual implica que $\angle CBT = \angle CBD = \angle BCT$. Esto significa que $TB = TC$, así que T y A están en la mediatriz de BC, que también es la bisectriz del ángulo en el vértice A.

Solución del problema 13. a) Sea $m = 10^{3^k}$ y $n = \left(10^{3^k} - 1\right)/3^k$, con $k \geq 1$.

Denotamos por $\nu_p(r)$ a la máxima potencia de p que divide a r. Por el *Lifting the Exponent Lemma*, tenemos que

$$\nu_3\left(10^{3^k}-1\right)=\nu_3\left(10^{3^k}-1^{3^k}\right)=\nu_3(10-1)+\nu(3^k)=k+2$$

y, por lo tanto, n es un entero. Ahora, observemos que

$$m^n=(10^{3^k})^{\left(10^{3^k}-1\right)/3^k}=10^{10^{3^k}-1}.$$

Este número tiene $10^{3^k}-1+1=10^{3^k}=m$ dígitos. Por lo tanto, m es digital para cada entero positivo k.
b) Sea $m=10^k$ donde $k\geq 2$ es par. Entonces $m^n=(10^k)^n=10^{kn}$ tiene exactamente $kn+1$ dígitos en su representación decimal. La igualdad $kn+1=m$ no es posible puesto que k y m son números pares. Por lo tanto, m no es digital para cada entero par $k\geq 2$.

Solución del problema 14. No es posible. Supongamos, por contradicción, que existe un tablero que cumple lo deseado. Primero, notemos que cambiar el orden de las filas o de las columnas no afecta la propiedad deseada del tablero, pues estos cambios mantienen invariantes los conjuntos dados por las filas y las columnas. Mediante movimientos de este estilo, es fácil ver que podemos acomodar a los números del 1 al 2019 de modo que queden dentro del subtablero de 2019×2019 de la esquina superior izquierda (con intercambios de filas y columnas se puede llevar el 1 a la casilla superior izquierda, si el 2 no está dentro del tablero de 2×2, se puede llevar sin afectar la posición del 1 y así sucesivamente). Luego, para las 2020-ésimas fila y columna, deben existir x,y,z distintos con la propiedad de que $x=yz$. Sin embargo, los tres enteros son mayores que 2019, lo cual implica que $x=yz\geq 2020^2$ y, tendría que pasar $x=2020^2, y=z=2020$, lo que es una contradicción ya que x,y,z son distintos. Por lo tanto, no existe tablero con la propiedad deseada.

Solución del problema 15. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $c+a\geq 2\sqrt{ca}$ y $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}&\leq\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{ab-1}{bc}}+\sqrt{\frac{bc-1}{ca}}+\sqrt{\frac{ca-1}{ab}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}}+\sqrt{\left(b-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}}+\sqrt{\left(c-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}}\right).\end{aligned}$$

Por otro lado, como $a\geq 1$ y $b\geq 1$, tenemos que $\frac{1}{b}\leq 1$ y $a-\frac{1}{b}\geq 0$. De manera análoga, obtenemos que $b-\frac{1}{c}\geq 0$ y $c-\frac{1}{a}\geq 0$. Luego, aplicando la desigualdad

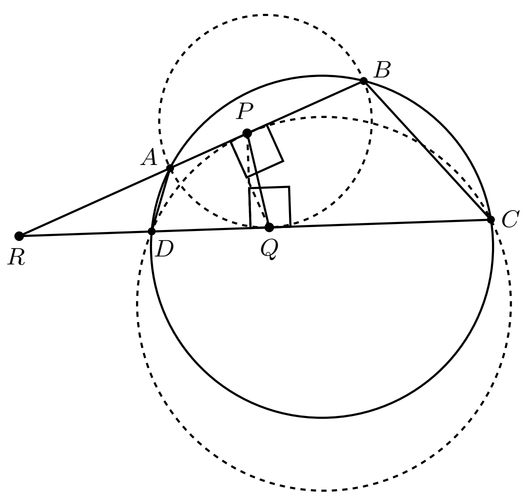
MA-MG en cada uno de los pares $((a - \frac{1}{b}, \frac{1}{c}), (b - \frac{1}{c}, \frac{1}{a})$ y $(c - \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$, obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{c}}+\sqrt{\left(b-\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}}+\sqrt{\left(c-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{b}}\right)\\
\leq\ &\frac{1}{4}\left[\left(a-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(b-\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+\left(c-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]\\
=\ &\frac{a+b+c}{4}.
\end{aligned}
$$

Esta serie de desigualdades muestran lo que queríamos probar.

Solución del problema 16. Como p, q y r son primos mayores que 3, cada uno de ellos es congruente con 1 o -1 módulo 3. Luego, por el principio de las casillas, hay dos con la misma congruencia módulo 3, de donde se sigue que $3 \mid (p-q)(q-r)(r-p)$. Por otro lado, como los tres primos son impares, cada uno de $p-q$, $q-r$ y $r-p$), es par. Además, cada uno de p, q y r es congruente con 1 o -1 módulo 4. Nuevamente por el principio de las casillas, hay dos con la misma congruencia módulo 4, por lo que 4 divide a alguna de las diferencias y las otras dos son pares, lo cual implica que $16 \mid (p-q)(q-r)(r-p)$.
Concluimos entonces que $3 \cdot 16 = 48$ divide al producto $(p-q)(q-r)(r-p)$.

Solución del problema 17. Si AB y CD son paralelas, el resultado es inmediato, así que supongamos lo contrario. Sea R la intersección de AB y CD. Se sigue por las tangencias que $RP^2 = RD \cdot RC = RA \cdot RB = RQ^2$, lo que implica que el triángulo RPQ es isósceles con $RP = RQ$. Por lo tanto, las alturas desde P y Q son iguales, como queríamos demostrar.



Solución del problema 18. Observemos que

$$S=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{(2k-1)2k}=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k}$$
$$=\sum_{k=51}^{100}\frac{1}{k}$$

y

$$T=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{(50+k)(101-k)}=\frac{1}{151}\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{50+k}+\frac{1}{101-k}\right)=\frac{2}{151}\sum_{k=51}^{100}\frac{1}{k}.$$

Por lo tanto, $\frac{S}{T}=\frac{151}{2}$.

Solución del problema 19. Es fácil notar que si (x,y,z) es solución del sistema, entonces $(-x,-y,-z)$ también lo es. Además, la suma de los números en la primera terna es el negativo de la segunda. Supongamos entonces que $x+y+z\leq 0$. Esta ecuación es simétrica en x,y,z así que podemos suponer que $x\geq y\geq z$ con lo que el sistema se vuelve

$$\begin{aligned}x^2-yz&=y-z+1,\\ y^2-zx&=x-z+1,\\ z^2-xy&=x-y+1.\end{aligned}$$

Restando la tercera ecuación de la segunda obtenemos que $(y-z)(x+y+z-1)=0$, de donde $y=z$ o $x+y+z=1$.
Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos que $(x-y)(x+y+z+1)=0$, de donde $x=y$ o $x+y+z=-1$.
Como claramente $x=y=z$ no es solución, debe ocurrir $y=z$ y $x+y+z=-1$. Entonces, $x=-2y-1$ y la primera ecuación se vuelve $x^2-y^2=1$. Luego, $(2y+1)^2-y^2=1$ y, por lo tanto, $3y^2-4y=0$. Así que $y=0$ o $y=-\frac{4}{3}$. Si $y=0$, entonces $x=-1<y$ lo que contradice nuestra suposición. En este caso, la única solución es $x=\frac{5}{3}, y=z=-\frac{4}{3}$.
Considerando ahora los cambios de signo y los posibles acomodos de las ternas, tenemos seis soluciones del sistema: $(\frac{5}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$ y sus permutaciones, y $(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ y sus permutaciones.

Solución del problema 20. Observemos que a^2b^2+3 nunca es múltiplo de 9. En efecto, si lo fuera, entonces a^2b^2+3 es múltiplo de 3, lo cual implica que $3\mid a^2b^2$ y, por lo tanto, $3\mid a$ o $3\mid b$. En cualquier caso, tenemos que $9\mid a^2b^2$ y, como 9 divide a a^2b^2+3, se sigue que $9\mid 3$, lo que es imposible. Esto implica que cuando se realiza la operación a algún par de enteros, el número resultante no es múltiplo de 9.
Afirmamos que en todo momento la paridad de la cantidad de múltiplos de 3 en el pizarrón es invariante. Si escogemos a y b tales que ninguno es múltiplo de 3, entonces $3\nmid(a^2b^2+3)$, así que el máximo común divisor no será divisible por 3. Si a y b son

ambos divisibles por 3, entonces $a^2 + b^2 + 2$ no es divisible por 3. Si exactamente uno entre a y b es divisible por 3, entonces $a^2 + b^2 + 2 \equiv 1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ y 3 divide a $a^2b^2 + 3$. Esto prueba la afirmación.

Como hay 33 múltiplos de 3 al principio, el número final debe ser múltiplo de 3. Como no es divisible por 9, este no puede ser un cuadrado.

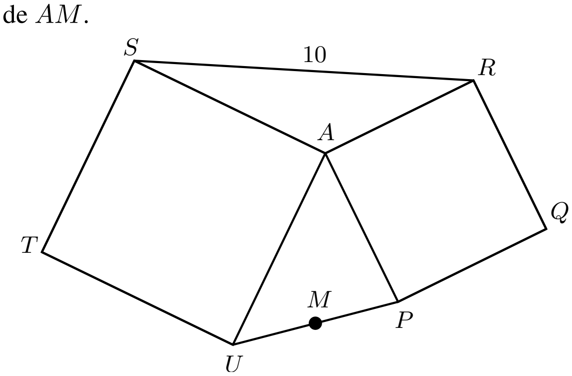
Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2020 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sean $APQR$ y $ASTU$ dos cuadrados con el vértice A en común, como se muestra en la figura. Si $SR = 10$ cm y M es el punto medio de UP, calcula la longitud, en cm, de AM.



Problema 2. Una maestra de preescolar tomó $n > 1$ rectángulos de cartón idénticos (de dimensiones números enteros) y los distribuyó a n niños; cada niño recibió un rectángulo. Cada niño cortó su rectángulo en varias piezas cuadradas iguales (los cuadrados de diferentes niños pueden ser distintos). Resultó que la cantidad total de cuadrados entre todos los niños es un número primo. Demuestra que los rectángulos iniciales eran cuadrados.

Problema 3. ¿Es posible cubrir completamente un tablero de 8×8 con fichas de 2×1 (sin que se traslapen), de tal forma que ningún par de fichas forme un cuadrado de 2×2?

Problema 4. Determina todos los números primos de la forma $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p$, donde p es un número primo.

Problema 5. Sea M el punto medio del arco menor $\widehat{BC}$ en el circuncírculo del triángulo ABC. Supón que la altura trazada desde A interseca a la circunferencia en N. Las rectas por el circuncentro O del triángulo ABC, paralelas a MB y MC, cortan a AB y a AC en K y L, respectivamente. Demuestra que $NK = NL$.

Problema 6. Determina el valor mínimo de la expresión

$$\frac{|a+b| + |b+c| + |c+a|}{|a| + |b| + |c|},$$

donde a, b y c son números reales.

Problema 7. Sean a, b y c números reales tales que $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ y $(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) = (abc)^9$. Demuestra que al menos uno de los números a, b o c es igual a cero.

Problema 8. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que todo número primo p divide a $f(n)f(p-1)! + n^{f(p)}$ para todo entero positivo n. (Recuerda que $\mathbb{Z}^+$ denota al conjunto de los enteros positivos).

Problema 9. Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias que se intersecan en dos puntos distintos A y B. Una recta por A interseca a Γ_1 y a Γ_2 en C y D, respectivamente. Sea P la intersección de las rectas tangentes a Γ_1 en A y C, y sea Q la intersección de las rectas tangentes a Γ_2 en A y D. Sea X el segundo punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos BCP y BDQ, y sea Y la intersección de AB y PQ. Demuestra que C, D, X y Y son concíclicos.

Problema 10. Oriol tiene una colección finita de cartas, cada una con un entero positivo escrito en ella. Decimos que la colección es n-*completa* si para cada entero k del 1 al n (inclusive), puede escoger algunas cartas de tal forma que la suma de los números escritos en ellas sea igual a k. Supón que la colección de Oriol es n-completa, pero deja de ser n-completa si se retira alguna carta de ella. ¿Cuál es la máxima suma posible de los números en las cartas?

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2019 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2019. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a Guillermo Courtade Morales por habernos enviado sus soluciones a los problemas 1, 2 y 3. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2019, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean a y b números reales no negativos y distintos tales que $a+\sqrt{b}=b+\sqrt{a}$. Determina el valor máximo de la suma $a+b$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Tenemos que $a+\sqrt{b}=b+\sqrt{a}$ si y solo si $\sqrt{a}-\sqrt{b}=a-b$ si y solo si $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ si y solo si $\sqrt{a}+\sqrt{b}=1$ (pues $a\neq b$). Elevando al cuadrado la última igualdad y reacomodando, obtenemos que $a+b=1-2\sqrt{ab}$. Como $-2\sqrt{ab}\leq 0$, se sigue que $a+b\leq 1$. Finalmente, observemos que si $a=0$ y $b=1$, entonces $a+b=1$. Por lo tanto, el valor máximo de la suma $a+b$ es 1.

Problema 2. Demuestra que ningún número de la lista

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ldots$$

es un cuadrado.

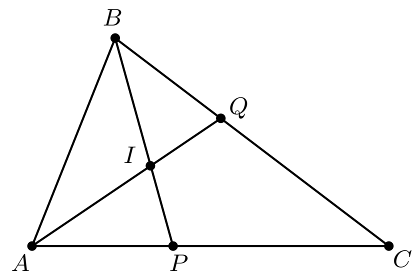
Solución de Guillermo Courtade Morales. Observemos que cada número de la lista es de la forma $11+100m$ para algún entero m. Además, es fácil ver que $11+100m\equiv 3 \pmod 4$. Como todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4, se sigue que $11+100m$ no puede ser un cuadrado.

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con incentro I. La bisectriz interna del ángulo $\angle ABC$ corta a AC en P. Demuestra que si $AP+AB=BC$, entonces el triángulo API es isósceles.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Primero notemos que, por el teorema de la bisectriz, $\frac{BC}{AB}=\frac{PC}{AP}=\frac{PC}{BC-AB}$, por lo que $PC=\frac{BC(BC-AB)}{AB}$. Ahora, como $AC=PC+AP$, se sigue que $AC=BC-AB+\frac{BC(BC-AB)}{AB}=\frac{BC^2-AB^2}{AB}$.
Sea Q el punto de intersección de la recta AI con el segmento BC. De nuevo, por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{AC}{AB}=\frac{BC^2-AB^2}{AB^2}=\frac{BC-BQ}{BQ}$, lo cual implica que $\frac{BQ}{AB}=\frac{AB}{BC}$. Como los triángulos AQB y CAB comparten el ángulo $\angle ABQ$, son semejantes por el criterio LAL. Entonces,

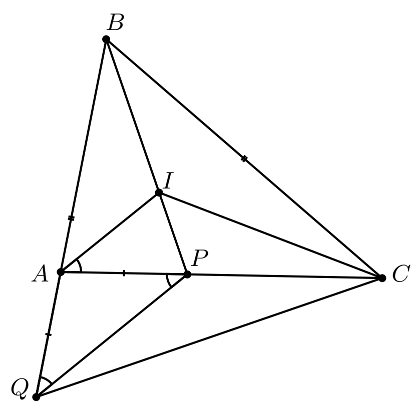
$$180^\circ=\angle ABQ+\angle BCA+\angle CAB=2\angle ABP+3\angle QAB,$$

de donde obtenemos que $\angle ABP = 90^\circ - \frac{3}{2}\angle QAB$.



Por otro lado, tenemos que $180^\circ = \angle ABP + 2\angle QAB + \angle BPA$, por lo que $\angle BPA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle QAB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PAI$. Esto significa que $\angle BPA = \angle AIP$, lo cual implica que $AI = AP$, esto es, el triángulo API es isósceles.

Solución alternativa. Consideremos el punto Q sobre AB de modo que PQ sea paralela a AI.



Como $\angle AQP + \angle QPA = \angle BAC$ y $\angle AQP = \frac{\angle BAC}{2}$ por ser PQ y AI paralelas, tenemos que $AQ = AP$. Entonces, $BQ = BA + AQ = BA + AP = BC$, de donde el triángulo BQC es isósceles y, como BP es bisectriz del ángulo $\angle QBC$, P está sobre la mediatriz de QC, por lo que $PC = PQ$.
Por el teorema de Tales, tenemos que $\frac{AI}{PQ} = \frac{AB}{BQ} = \frac{AB}{BC}$, donde la última igualdad se sigue de $BC = BQ$. Ahora, por el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PC} = \frac{AP}{PQ}$, pues $PC = PQ$. Lo anterior implica que $\frac{AI}{PQ} = \frac{AP}{PQ}$, por lo que $AI = AP$ y el triángulo API es isósceles.

Problema 4. En un comité hay n miembros. Cada 2 miembros son amigos o enemigos y cada miembro tiene exactamente 3 enemigos. También se sabe que para cada miembro del comité, un enemigo de su amigo es su enemigo. Encuentra todos los valores posibles de n.

Solución. Como cada miembro tiene exactamente 3 enemigos, hay $\frac{3n}{2}$ relaciones de enemistad. Como este número es un entero, entonces n es par. Más aún $n \geq 4$ porque cada miembro tiene al menos 3 enemigos.
Para $n = 4$ podemos ver que el comité en el que cada pareja de miembros son enemigos funciona. Con $n = 6$, podemos dividirlos en dos grupos de 3 personas en los que cada persona es amigo de los miembros de su grupo y enemigo de los miembros del otro grupo.
Si $n > 6$, sea A un miembro del comité. Sabemos que A tiene 3 enemigos, sea B uno de ellos. También A tiene $n-4$ amigos que son enemigos de B, porque son amigos de A. Por lo tanto, B tiene al menos $n-4 \geq 8-4 = 4$ enemigos, lo que es imposible. Por lo tanto, solo $n = 4$ y $n = 6$ funcionan.

Problema 5. Para cada entero positivo n, determina la cantidad de triángulos (no degenerados) que se pueden formar con lados de longitudes enteros a, b y n con $a \leq b \leq n$.

Solución. Por la desigualdad del triángulo, debemos tener que $a + b > n$. Contaremos siguiendo los valores de b. Cuando $b = n$, es posible hacer n triángulos distintos, pues $a = 1, 2, 3, \ldots, n$. Con $b = n-1$, es posible hacer dos triángulos menos: a ya no puede alcanzar el valor de n pues $a \leq b$ y a no puede ser tampoco igual a 1, pues $1 + (n-1) = n$ no cumple la desigualdad del triángulo. De esta manera, cada vez que b disminuye en una unidad, la cantidad de triángulos que se pueden formar disminuye en 2. Si $n = 2k+1$, el "último" triángulo que podemos hacer es con $b = k+1 = a$. La suma sería $1+3+\cdots+2k+1 = (k+1)^2 = (\frac{n+1}{2})^2$. En caso en que $n = 2k$, entonces el "último" valor que alcanza b es $k+1$ y se pueden formar dos triángulos con $a = k, k+1$. Luego, la suma en este caso es $2 + 4 + \cdots + 2k = k(k+1) = k^2 + k = (\frac{n+1}{2})^2 - \frac{1}{4}$. En ambos casos, se puede simplificar como $\left\lfloor (\frac{n+1}{2})^2 \right\rfloor$.

Problema 6. Cinco enteros distintos a, b, c, d y e, no necesariamente positivos, satisfacen que

$$(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12.$$

Determina el valor de la suma $a + b + c + d + e$.

Solución. Renombrando los números, si es necesario, podemos asumir que

$$A = 4 - a < B = 4 - b < C = 4 - c < D = 2 - d < E = 4 - e.$$

Los números A, B, C, D, E son enteros distintos que satisfacen que $ABCDE = 12$. Luego, cada uno de estos números es igual a $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ o ± 12. Si alguno de los números (que debe ser A o E) es igual a 12 o a -12, entonces todos los demás números deben ser 1 o -1, así que al menos dos de ellos son iguales, lo que es imposible. De manera análoga, si alguno de los números es igual a 6 o -6, entonces algún otro número debe ser 2 o -2 y los restantes tres números deben ser iguales a 1 o -1, lo cual implica que al menos dos de ellos son iguales, lo cual es imposible. Por lo tanto, todos los números están entre -4 y 4. Si alguno de los números es igual a 4 o -4, algún otro número debe ser 3 o -3 y los restantes tres números deben ser iguales a 1 o -1, así que al menos dos de ellos son iguales, lo cual es imposible. Luego, A, B, C, D, E son cinco de los números $-3, -2, -1, 1, 2, 3$. Es claro que si $A = -3$, entonces $E \leq 2$, y si $E = 3$, entonces $A \geq -2$. Como el producto de los cinco números es positivo, no puede haber tres de ellos negativos, de modo que el único caso posible es $A = -2$, $B = -1, C = 1, D = 2, E = 3$. Entonces, $A + B + C + D + E = 3$, lo cual implica que $a + b + c + d + e = 20 - (A + B + C + D + E) = 17$.

Problema 7. Sea p un número primo impar. Decimos que una p-tupla de enteros $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ es **exótica** si se satisfacen las siguientes tres condiciones.

a) $0 \leq a_i \leq p - 1$ para toda $i = 1, 2, \ldots, p$.

b) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ no es múltiplo de p.

c) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_pa_1$ es múltiplo de p.

Determina la cantidad de p-tuplas exóticas.

Solución. Diremos que una p-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ es *casi exótica* si satisface las primeras dos condiciones, esto es, si $0 \leq a_i \leq p-1$ para $i = 1, 2, \ldots, p$, y $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ no es múltiplo de p. Notemos que hay $p^{p-1}(p-1)$ p-tuplas casi exóticas, pues hay p formas de elegir cada uno de $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$, y $p - 1$ formas de seleccionar a a_p, ya que hay exactamente una elección para la cual $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$ es múltiplo de p, una vez seleccionados los primeros $p - 1$ miembros de la p-tupla.
Ahora, sea C_i el conjunto de p-tuplas casi exóticas tales que

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_pa_1 \equiv i \pmod{p}$$

para $i = 0, 1, \ldots, p - 1$. Es fácil ver que cada p-tupla pertenece a exactamente uno de los conjuntos C_i y buscamos el tamaño del conjunto C_0. Veamos que los C_i's tienen el mismo tamaño. Para esto, consideremos una p-tupla en C_i, $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, y sea c un entero no negativo menor que p tal que $2c(a_1 + a_2 + \cdots + a_p) \equiv j - i \pmod{p}$. Observe que tal c existe y es único, pues $a_1 + a_2 + \cdots + a_p$ no es múltiplo de p. Además, tenemos que

$$\begin{aligned}
&(a_1 + c)(a_2 + c) + \cdots + (a_p + c)(a_1 + c) \\
&= [a_1a_2 + c(a_1 + a_2) + c^2] + \cdots + [a_pa_1 + c(a_p + a_1) + c^2] \\
&= \sum_{i \neq j} a_ia_j + 2c\sum_{i=1}^{p} a_i + pc^2 \equiv i + (j - i) + 0 \equiv j \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Esto muestra que la p-tupla $(a_1 + c, a_2 + c, \ldots, a_p + c)$ está en C_j (cada $a_k + c$ es considerado módulo p). Ahora demostraremos que la función definida anteriormente es inyectiva. Sean $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ dos p-tuplas casi exóticas en C_i y supongamos que de estas se llegan a las mismas parejas $(a_1+c_a, a_2+c_a, \ldots, a_p+c_a) = (b_1 + c_b, b_2 + c_b, \ldots, b_p + c_b)$ donde c_a y c_b cumplen que

$$2c_a(a_1 + \cdots + a_p) \equiv 2c_b(b_1 + \cdots + b_p) \pmod{p}. \tag{13}$$

Entonces, $a_i + c_a \equiv b_i + c_b \pmod p$ para todo $1 \le i \le p$. Sumando estas p congruencias se obtiene que $a_1 + \cdots + a_p \equiv b_1 + \cdots + b_p \pmod p$. De (13) se sigue que $2c_a \equiv 2c_b \pmod p$ y, como $0 \le c_a, c_b \le p-1$, resulta que $c_a = c_b$. Luego $a_i \equiv b_i \pmod p$ para todo i, de donde se concluye que las p-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_p)$ son las mismas. Esto muestra que la función definida anteriormente, es inyectiva.
Al ser la función inyectiva, tenemos que para cualesquiera $i \neq j$, $|C_i| \le |C_j|$. Esto claramente implica que $|C_i| = |C_j|$ para cualesquiera $i \neq j$.
Esto muestra que todos los C_i's tienen el mismo tamaño, por lo que $|C_0| = p^{p-2}(p-1)$ elementos, esto es, el número de p-tuplas exóticas es $p^{p-2}(p-1)$.

Problema 8. Se tienen $n \ge 1$ cuadrados tales que la suma de sus áreas es 4. Muestra que estos cuadrados se pueden acomodar dentro de un cuadrado de 1×1 de modo que lo cubran totalmente. (Los cuadrados se pueden traslapar al ser acomodados).

Solución. Sean $a_1, a_2, \ldots a_n$ los lados de los cuadrados. Si algún a_i es mayor o igual que 1, el cuadrado correspondiente cubre todo el cuadrado de 1×1 y terminamos. Supongamos entonces que $a_i < 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Notemos que para cada a_i existe un k_i entero positivo tal que $\frac{1}{2^{k_i}} \le a_i < \frac{1}{2^{k_i - 1}}$. Para cada cuadrado, consideramos un subcuadrado de lado $b_i = \frac{1}{2^{k_i}}$. Como $1 \le \frac{a_i}{b_i} < 2$, este subcuadrado será de al menos $1/4$ de área del cuadrado correspondiente, entonces la suma del área de los subcuadrados (los cuadrados de lados $b_1, b_2, \ldots, b_n$) es mayor o igual que 1.
Veamos que podemos cubrir un cuadrado de 1×1 con estos subcuadrados. Consideremos una división en 4 cuadrados de lados $\frac{1}{2}$ cada uno. Si alguno de los b_i's es igual a $\frac{1}{2}$, lo colocamos de modo que cubra a alguno de estos cuadrados y procedemos recursivamente. Cada uno de los cuadrados de lado $\frac{1}{2}$, se divide en cuatro subcuadrados y, si hay b_i's iguales a esos lados, cubrimos los cuadrados que puedan ser cubiertos. Como la suma de las áreas de los cuadrados de lados $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es mayor o igual que 1, se cubrirá el cuadrado inicial de 1×1. Entonces, cada cuadrado de lado b_i lo cubrimos con el correspondiente de lado a_i, con lo que logramos cubrir totalmente el cuadrado de 1×1, como queríamos.

Problema 9. Sea p un número primo y sean $a_1, \ldots, a_p$ enteros. Demuestra que existe un entero k tal que los números $a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$, producen al menos $\frac{1}{2}(p+1)$ residuos distintos al ser divididos entre p.

Solución. Notemos que dos valores se repiten si $a_i + ik \equiv a_j + jk \pmod p$, con $i \neq j$. Como $i - j \neq 0$, existe el inverso multiplicativo de $i - j$ módulo p. Luego, $k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \pmod p$. Consideremos las $\binom{p}{2}$ fracciones $-\frac{a_i - a_j}{i-j} \pmod p$. Tenemos que cada una corresponde a uno de los p residuos módulo p. Por el principio de las casillas, existe un residuo j con a lo más $\frac{p(p-1)}{2p} = \frac{p-1}{2}$ parejas. Vamos a probar que este j funciona.
Sea x_i la cantidad de veces que aparece el residuo i en la sucesión $a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots$ y sean $b_1, b_2, \ldots, b_k$ los residuos que se repiten. Sea $S = x_{b_1} + \cdots + x_{b_k}$ y notemos que $p - S$ es la cantidad de residuos que aparecen una vez.
Sabemos que $x - 1 \le \binom{x}{2} = \frac{x^2 - x}{2}$ si y solo si $(x-1)(x-2) \ge 0$ se cumple para

todo x entero positivo. Por lo tanto, como la cantidad de parejas que describimos antes es $\sum_{i=1}^{k}\binom{x_{b_i}}{2}$ tenemos que $S-k=\sum_{i=1}^{k}(x_{b_i}-1)\leq\sum_{i=1}^{k}\binom{x_{b_i}}{2}\leq\frac{p-1}{2}$.
La cantidad total de residuos en esta sucesión es

$$(p-S)+k=p-(S-k)\geq p-\frac{p-1}{2}=\frac{p+1}{2},$$

como queríamos.

Problema 10. Encuentra todos los enteros positivos n con la siguiente propiedad: los enteros del 1 al $2n$ se pueden dividir en dos grupos $a_1,a_2,\ldots,a_n$ y $b_1,b_2,\ldots,b_n$ tales que $2n$ divide a $a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n-1$.

Solución. Primero notemos que $a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n$ es impar, por lo que los n pares están en un grupo y los n impares están en otro. Tenemos que encontrar todos los n para los que $2n$ divide a $1\cdot3\cdots(2n-1)+2\cdot4\cdots(2n)-1$. Es claro que $2n$ divide al producto $2\cdot4\cdots(2n)$, por lo que necesitamos que $2n$ divida a $1\cdot3\cdots(2n-1)-1$. Supongamos que n tiene un factor primo impar p. Sabemos que $p\leq n\leq 2n-1$, por lo que aparece en el producto $1\cdot3\cdots(2n-1)$ y, por lo tanto, lo divide. También sabemos que $p\mid 2n\mid 1\cdot3\cdots(2n-1)-1$, lo cual implica que $p\mid 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $n=2^k$ y 2^{k+1} debe dividir a $1\cdot3\cdots(2^{k+1}-1)-1$. Es fácil ver que $k=0$ funciona y $k=1$ no. Vamos a probar que toda $k\geq 2$ funciona.
Sea a un residuo impar módulo 2^{k+1}. Decimos que el residuo b módulo 2^{k+1} es el inverso de a módulo 2^{k+1} si 2^{k+1} divide a $ab-1$. Es fácil ver que a tiene exactamente un inverso porque si b y c son residuos distintos, entonces $ab\equiv ac \pmod{2^{k+1}}$, lo cual implica que 2^{k+1} divide a $ab-ac=a(b-c)$ y, como a es impar, 2^{k+1} divide a $b-c$, lo que es imposible para residuos distintos. Por lo tanto, ab toma el valor de un residuo impar diferente para cada residuo b impar y, por lo tanto, exactamente un b hace que la expresión sea congruente con 1 módulo 2^{k+1}.
Por lo tanto, el producto de cada pareja de inversos en el producto $1\cdot3\cdots(2^{k+1}-1)$ es 1 módulo 2^{k+1} y solo quedan los valores que son su propio inverso. Esto es, 2^{k+1} divide a $a^2-1=(a-1)(a+1)$. Sabemos que uno de $a-1,a+1$ no es divisible entre 4 porque su diferencia es 2. Entonces, 2^k divide a $a-1$ o a $a+1$. Como a es un residuo y su valor está entre 0 y $2^{k+1}-1$, los únicos que son su propio inverso son $1,2^k-1,2^k+1,2^{k+1}-1$ que son todos diferentes pues $k\geq 2$.
El problema es equivalente a demostrar que 2^{k+1} divide a

$$(1)(2^k-1)(2^k+1)(2^{k+1}-1)-1=(2^{k+1}-1)^2-1=2^{2k+2}-2^{k+2},$$

que es evidentemente cierto.
Por lo tanto, los valores posibles de n son las potencias de 2 diferentes de 2.

Competencia Internacional de Matemáticas 2019 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2019 (SAIMC 2019), se celebró en Durban, Sudáfrica, del 1 al 6 de agosto de 2019. En esa ocasión, México participó con un equipo de Primaria y un equipo de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, dos medallas de plata, tres medallas de bronce y dos menciones honoríficas en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de oro y una medalla de bronce.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

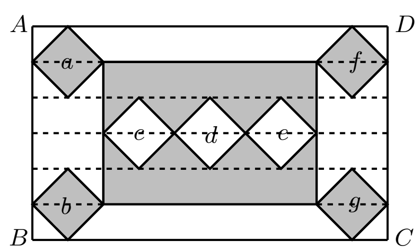
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. Es decir, solo el 6 % recibe una medalla

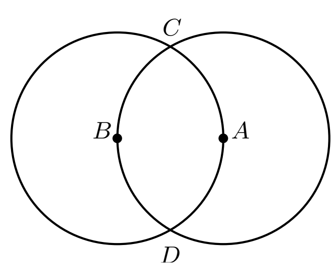
de oro, por lo que no es extraño que se necesiten al menos 13 respuestas correctas para conseguirla. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso nacional que se toma muy en serio el concurso, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años: el proceso Nacional empieza en junio con el Concurso Nacional de la OMMEB y concluye en agosto del siguiente año con el viaje a la IMC: 14 meses de proceso selectivo.
En esa ocasión, el equipo de Primaria estuvo integrado por:
• Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México).
• Javier Caram Quirós (Ciudad de México).
• Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León).
• Luis Ángel Gabriel Jiménez Iturbide (Tabasco).
Mateo Iván obtuvo medalla de oro, Sebastián obtuvo medalla de plata, Javier y Luis Ángel obtuvieron mención honorífica. Como equipo obtuvieron medalla de bronce.
A continuación presentamos los enunciados y las soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2019.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En la figura siguiente, a, b, c, d, e, f y g son cuadrados congruentes. ¿Cuál es la razón del área sombreada entre el área del rectángulo $ABCD$?



Problema 2. En la siguiente figura, se tienen dos circunferencias del mismo tamaño que se intersecan, con centros A y B, de manera que el centro de cada circunferencia está sobre la otra. ¿Cuál es la razón de la longitud del arco $\widehat{CD}$ que contiene a B entre la longitud de la circunferencia de uno de los círculos?

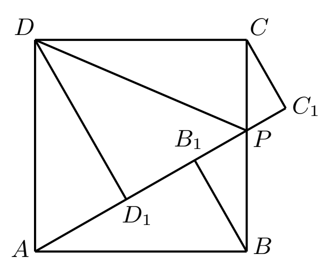


Problema 3. Cada uno de los tres estudiantes A, B y C tiene una calculadora y comienza a realizar ciertas operaciones al mismo tiempo. El estudiante A comienza en 1509 y suma 3 en cada paso, el estudiante B comienza en 2019 y resta 7 en cada paso, mientras que el estudiante C comienza en un número X y suma 1 en el primer paso, suma 2 en el segundo paso, suma 3 en el tercer paso y así sucesivamente. Después de N pasos, los tres estudiantes terminan con el mismo resultado. Encuentra el número X.

Problema 4. El gobierno de la ciudad encuestó a todos los estudiantes de 5° y 6° grado para determinar la popularidad de manejar una motoneta y andar en patineta. De los estudiantes de 5° grado, el $9\,\%$ respondió que le gusta manejar una motoneta y el $14\,\%$ respondió que le gusta andar en patineta. De los estudiantes de 6° grado, el $11\,\%$ respondió que le gusta manejar una motoneta y el $7\,\%$ respondió que le gusta andar en patineta. Cuando se combinan los estudiantes de 5° y 6° grado, el número de estudiantes que les gusta manejar una motoneta es el mismo que el número de estudiantes que les gusta andar en patineta. Si el número total de estudiantes de 5° y 6° grado en la ciudad es de 59400 y a ningún estudiante le gusta ambos manejar una motoneta y andar en bicicleta, determina la cantidad de estudiantes de 6° grado en la ciudad.

Problema 5. El promedio de tres números enteros positivos es 2019. Si uno de los números es reemplazado por el número 3, entonces el promedio de estos tres números es 673. ¿Cuál es el número original que fue reemplazado por el 3?

Problema 6. En la siguiente figura se tiene un cuadrado $ABCD$, donde el punto P está en el lado BC y $AP = 4$ cm. Sean BB_1, CC_1 y DD_1 las alturas bajadas desde los puntos B, C y D a la recta AP, respectivamente. Si $BB_1 + CC_1 + DD_1 = 6$ cm, encuentra el área, en cm^2, del triángulo APD.

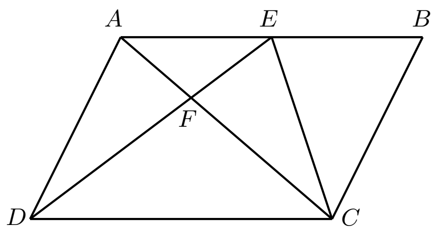


Problema 7. Nueve canastas contienen las siguientes cantidades de huevos: 4, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 23 y 24. Cualquier persona que quiera comprar huevos tiene que comprar todos los huevos de una de las canastas. Kitty y Philip compran cuatro canastas cada uno. La cantidad de huevos que Kitty compró es tres veces la cantidad de huevos que Philip compró. ¿Cuántos huevos hay en la canasta que ninguno compró?

Problema 8. Los números del 1 al 9 se dividen en tres grupos de tres números cada uno. Se calcula el producto de los tres números en cada grupo y se elige el mayor de esos tres productos. De todas las posibles divisiones en tres grupos de tres, ¿cuál es el menor de los productos elegidos?

Problema 9. Si A tiene más de un divisor primo, ¿cuántos divisores positivos distintos debe tener A de manera que A^2 tenga 2019 divisores positivos distintos?

Problema 10. Sean $ABCD$ un paralelogramo y E el punto medio de AB, como se muestra en la siguiente figura. Si el área del triángulo CDF es 2692 cm^2, encuentra el área en cm^2, del triángulo BCE.

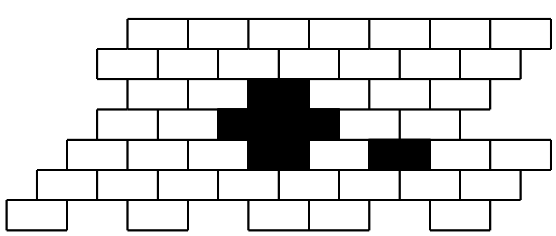


Problema 11. Las longitudes de los lados de un triángulo son enteros positivos consecutivos, en cm. Una de sus medianas es perpendicular a una de sus bisectrices interiores. ¿Cuál es el perímetro, en cm, del triángulo?

Problema 12. Considera todas las palabras que se obtienen como permutaciones de las letras D, U, R, B, A, N. Todas estas palabras se escriben sobre un renglón, ordenadas en orden alfabético como en un diccionario, comenzando con ABDNRU y terminando con URNDBA. ¿En qué posición se encuentra la palabra DURBAN en esta sucesión de palabras?

Problema 13. Juan escribe los enteros del 1 al 2019, inclusive, en el pizarrón. ¿Cuántos dígitos pares escribió?

Problema 14. La siguiente figura muestra un muro de siete hileras de ladrillos con dos hoyos (sombreados en negro). Se quiere escoger un ladrillo en cada hilera de manera que dos ladrillos escogidos en cualesquiera dos hileras adyacentes estén conectados (dos ladrillos están conectados si comparten al menos una porción de sus lados). ¿De cuántas maneras distintas se pueden escoger los 7 ladrillos?



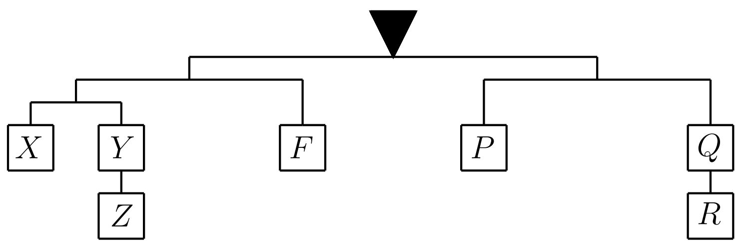
Problema 15. En la siguiente ecuación, cada una de las letras S, A, I, M, C, T y H representa un dígito distinto.

$$\overline{SAIMC} + \overline{SAIMC} = \overline{MATHS},$$

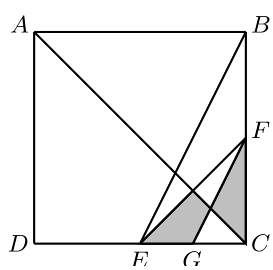
donde $\overline{SAIMC}$ y $\overline{MATHS}$ son números de cinco dígitos. Encuentra la suma de todos los posibles valores de T.

Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En la siguiente figura, la balanza está en equilibrio y cada uno de los pesos es un entero mayor que cero gramos. Si la suma de todos los pesos es el mayor entero posible no mayor que 2019 gramos, encuentra el mayor valor posible, en gramos, de X.



Problema 2. En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado y los puntos E, G y F son los puntos medios de CD, CE y BC, respectivamente. ¿Cuál es la razón del área sombreada entre el área de $ABCD$?

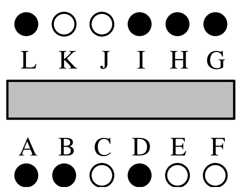


Problema 3. Se tienen nueve cartas acomodadas en el orden 7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3, como se muestra en la figura. En cada turno, se puede quitar cualquier cantidad de cartas consecutivas, revertir su orden y colocarlas juntas de vuelta en cualquier lugar de la secuencia. Después de tres turnos, las cartas están en el orden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuáles son esos tres turnos? Muestra los pasos.

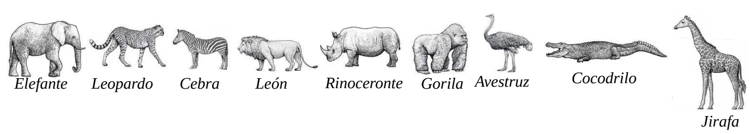
$$\boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{9}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}$$

Problema 4. Eduardo y Jacobo fueron a una tienda a comprar lápices. En la tienda, se venden diferentes paquetes de lápices de manera que cada paquete tiene exactamente $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ lápices. Por ejemplo, si Eduardo quiere comprar 14 lápices, entonces él tiene que comprar paquetes con 8, 4 y 2 lápices. Se sabe que Eduardo compró n lápices y Jacobo compó $n+1$ lápices, donde $n \leq 2019$. Si Eduardo y Jacobo compraron el mínimo número de paquetes de lápices y Eduardo tiene 4 paquetes más que Jacobo, encuentra la cantidad de distintos valores posibles de n.

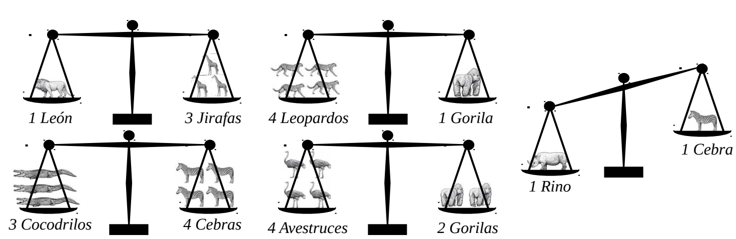
Problema 5. Doce niños, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K y L, se sientan a lo largo de una mesa con sillas en cada lado, formando seis parejas opuestas. Seis de ellos son niños y los otros seis son niñas. En la fiesta se tienen dos reglas. Primero, cada niño debe tener a una niña sentada en la silla opuesta a él. Segundo, si una niña no está sentada en ninguna esquina de la mesa, entonces debe haber un niño a cada lado de ella. Sin embargo, no todos los niños siguieron estas reglas. En el diagrama siguiente, los niños que siguieron las reglas están representados por círculos en blanco y aquellos que no siguieron las reglas están representados por círculos en negro. Como ninguna regla se aplica cuando una niña está sentada en alguna esquina de la mesa, tal niña podría estar representada por un círculo blanco o negro. ¿Cuál es el género de cada niño? Representa a una niña por "g" y a un niño por "b".



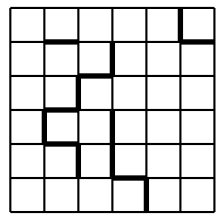
Problema 6. En una tienda hay nueve tipos de figuritas de animales:



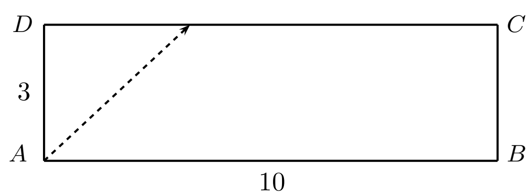
Los pesos de estas figuritas son 1 kg, 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg, 7 kg, 8 kg o 9 kg. Diferentes tipos de figuritas tienen pesos distintos y el mismo tipo de figuritas tienen el mismo peso. Puse algunas figuritas sobre una balanza y obtuve los siguientes resultados. ¿Cuál es el peso, en kg, de cada tipo de figurita?



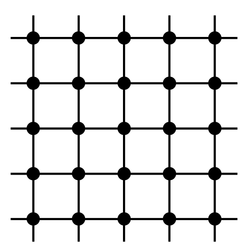
Problema 7. En la cuadrícula de 6×6 siguiente, cada fila y cada columna contiene tres tipos de dígitos: un 1, dos 2's y tres 3's. Se dibuja una línea gruesa entre dos cuadrados adyacentes si y solamente si ambos contienen el mismo número. Después, se borraron todos los números, quedando la figura siguiente. Completa la cuadrícula.



Problema 8. Se le pega a una bola de billar desde la esquina A de la mesa de billar $ABCD$, de manera que el primer rebote es sobre el lado CD. La bola continúa rebotando en los lados de la mesa (con el rebote usual de billar y sin perder velocidad). Después de exactamente cinco rebotes (sobre los lados de la mesa), la bola se detiene en la esquina D. Si $AD = 3$ m y $AB = 10$ m, ¿cuál es la longitud total, en m, de la mayor trayectoria posible recorrida de esta manera por la bola desde A hasta D?



Problema 9. La siguiente figura muestra 25 puntos, todos ellos colocados en una cuadrícula. ¿Cuántas líneas rectas puedes dibujar, de manera que cada una contenga exactamente tres de los 25 puntos?



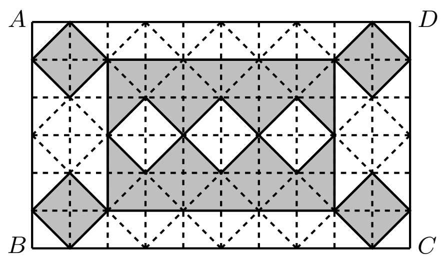
Problema 10. Una calculadura especial muestra el número 1 en la pantalla cuando la calculadora se enciende y tiene solamente dos botones: @ y #. Los botones @ y # funcionan de manera diferente:

Botón	Efecto
@	Multiplica por 5, luego suma 2
#	Multiplica por 7, luego resta 5

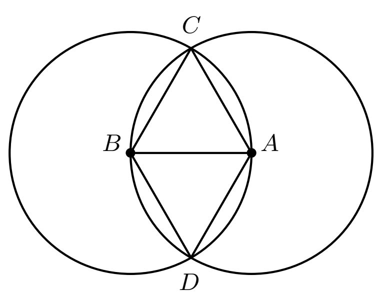
Por ejemplo, si presionas @ primero, entonces la calculadora muestra $1 \times 5 + 2 = 7$. Presionando @ otra vez, se muestra $7 \times 5 + 2 = 37$. Después, presionando # se mostrará $37 \times 7 - 5 = 254$. ¿Cuántos números distintos de tres dígitos se pueden obtener presionando los botones @ y #? (Está permitido presionar solo uno de los botones).

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. Llamemos x a la longitud de la diagonal de uno de los cuadrados. Entonces, podemos decir que los lados del rectángulo $ABCD$ miden $3x$ y $5x$. Luego, su área es $(3x)(5x) = 15x^2$. De manera similar, podemos observar que las medidas del rectángulo menor son $0.5x + x + 0.5x = 2x$ y $3x$. Luego, su área es $(2x)(3x) = 6x^2$. Por último, el área de un cuadrado es $0.5x^2$. Por lo tanto, el área sombreada total es $6x^2 - 3(0.5x^2) + 4(0.5x^2) = 6.5x^2$. La razón entre el área sombreada y el área total es $6.5x^2 : 15x^2 = 13 : 30$.
Solución alternativa. Dividamos el rectángulo $ABCD$ en pequeños triángulos rectángulos isósceles idénticos, como se muestra en la figura. La parte sombreada contiene 52 piezas y el rectángulo $ABCD$ contiene 120 piezas. Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{52}{120} = \frac{13}{30}$.



Solución del Problema 2. Como BC y BA son radios de la circunferencia con centro en B, tenemos que $BC = BA$. También tenemos que $AC = AB$ por ser radios de la circunferencia con centro en A. Luego, $AB = BC = CA$, lo que significa que el triángulo ABC es equilátero. De manera análoga, tenemos que el triángulo ABD también es equilátero.



Como los ángulos internos de cualquier triángulo equilátero miden $60°$, tenemos que $\angle CBD = 120°$. Por lo tanto, la razón buscada es $\frac{120°}{360°} = \frac{1}{3}$.

Solución del Problema 3. La diferencia entre 2019 y 1509 es $2019 - 1509 = 510$ al principio y disminuye $3 + 7 = 10$ en cada paso, así que A y B tendrán el mismo resultado después de $\frac{510}{10} = 51$ pasos. Después de 51 pasos, C aumenta por $1 + 2 + 3 + \cdots + 51 = 1326$ y obtiene el mismo resultado que B. Luego, el número inicial X de C debe ser $3 \times 51 + 1509 - 1326 = 336$.

Solución alternativa. Las expresiones para el número al que llegaron cada uno de los estudiantes son: $1509 + 3N$, $2019 - 7N$, $X + \frac{N(N+1)}{2}$, respectivamente. Sabiendo que estas tres expresiones son iguales, podemos encontrar N igualando las primeras dos:

$$\begin{aligned} 1509 + 3N &= 2019 - 7N, \\ 10N &= 3N + 7N = 2019 - 1509 = 510, \\ N &= 51. \end{aligned}$$

Con esto sabemos que el número al que deben llegar es $1509 + 51 \times 3 = 1662$. El tercer estudiante sumó $X + 1 + 2 + 3 + \cdots + 51 = X + \frac{51(52)}{2} = X + 1326 = 1662$, de donde $X = 1662 - 1326 = 336$.

Solución del Problema 4. Sea A la cantidad de estudiantes de 5° año y sea B la cantidad de estudiantes de 6° año. Sabemos que

$$\frac{9}{100}A + \frac{11}{100}B = \frac{14}{100}A + \frac{7}{100}B.$$

Juntando A y B de cada lado de la ecuación, obtenemos que $\frac{4}{100}B = \frac{5}{100}A$, esto es, $4B = 5A$ y, por lo tanto, $A = \frac{4}{5}B$. Como $A + B = 59400$, tenemos que $\frac{4}{5}B + B = \frac{9}{5}B = 59400$, de donde se sigue que $B = 33000$.

Solución del Problema 5. Sean a, b y c los números originales. Como sabemos que su promedio es 2019, tenemos que $a + b + c = 2019 \times 3 = 6057$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que a se sutituye por el número 3. Como conocemos el nuevo promedio, tenemos que $3 + b + c = 673 \times 3 = 2019$. Si restamos estas dos ecuaciones, obtenemos que $a - 3 = 4038$, de donde $a = 4041$.

Solución del Problema 6. Denotaremos por $(*)$ al área de la región $*$. Es fácil ver que $(APD) = \frac{1}{2}(ABCD)$. Luego, si calculamos el área del cuadrado, podemos conocer el área del triángulo. Veamos que $(ABCD) = (APD) + (APB) + (PDC)$. Las primeras dos áreas se pueden calcular de manera directa: $(APD) = \frac{AP \times DD_1}{2} = 2 \times DD_1$ y $(ABP) = \frac{AP \times BB_1}{2} = 2 \times BB_1$. Para calcular (PDC), observemos que por ser paralelas PC y AD, tenemos que $(PDC) = (APC)$. En el triángulo APC, tomando AP como base, podemos ver que su altura es CC_1. Entonces, $(PDC) = (APC) = \frac{AP \times CC_1}{2} = 2 \times CC_1$. Por último, tenemos que $(ABCD) = 2(BB_1 + CC_1 + DD_1) = 2(6) = 12$ cm^2 y concluimos que $(APD) = 6$ cm^2.

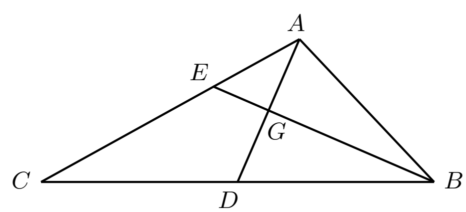
Solución del Problema 7. Entre las 9 canastas hay $4+5+7+8+12+13+14+23+24 = 110$ huevos. Sea a la cantidad de huevos en la canasta que no compraron. Sabemos que si Philip compró x huevos, entonces Kitty compró $3x$, de manera que $4x = 110 - a$. Como 110 deja residuo 2 al dividirse entre 4 y $110 - a$ es múltiplo de 4, necesariamente a también deja residuo 2 al dividirse entre 4. De las 9 canastas posibles, la única que cumple es la que tiene 14 huevos.

Solución del Problema 8. Tenemos que $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 9 = 362880$. La raíz cúbica de este número es aproximadamente 71.32, de manera que no es posible que el producto de los números de cada grupo sea menor o igual a 71. Si acomodamos los números como $\{9, 8, 1\}$, $\{6, 4, 3\}$ y $\{7, 5, 2\}$, los productos correspondientes son 72, 72 y 70, con el mayor igual a 72. Como no es posible que el mayor producto sea menor o igual a 71, el menor valor que puede tomar el mayor de los productos en cualquier acomodo es 72.

Solución del Problema 9. Como $2019 = 3 \times 673$, siendo 3 y 673 números primos y, A tiene al menos dos divisores primos distintos, tenemos que $A^2 = p^2 \times q^{672}$ con p y q primos distintos. Por lo tanto, $A = p \times q^{336}$ y tiene $(1+1)(336+1) = 674$ divisores positivos distintos.

Solución del Problema 10. Como AB y DC son paralelas, tenemos que los triángulos AEF y CDF son semejantes. Como E es punto medio de AB y $ABCD$ es un paralelogramo, la razón de semejanza es $\frac{AE}{CD} = \frac{1}{2}$, de manera que $\frac{(AEF)}{(CDF)} = \frac{AE^2}{CD^2} = \frac{1^2}{2^2} = \frac{1}{4}$, de donde $(AEF) = \frac{2692}{4} = 673$ cm^2. Además, por la misma semejanza, tenemos que $\frac{AF}{CF} = \frac{1}{2}$, de manera que $(CFE) = 2(AEF) = 2 \times 673 = 1346$ cm^2. Además, como E es punto medio de AB, se sigue que $(BCE) = (AEC) = (AEF) + (CFE) = 673 + 1346 = 2019$ cm^2.

Solución del Problema 11. Sea ABC el triángulo y supongamos que la mediana AD es perpendicular a la bisectriz BE, con intersección en G.

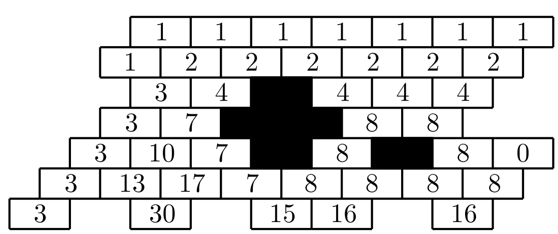


Como $\angle ABG = \angle DBG$ y $\angle AGB = \angle DGB = 90°$, tenemos que los triángulos AGB y DGB son congruentes por el criterio ALA y, en consecuencia $\angle GAB = \angle GDB$. Esto implica que $AB = BD$ y, por lo tanto, $BC = 2BD = 2AB$. Dado que las longitudes de AB, BC y CA son enteros consecutivos, tenemos que $BC - AB = 1$ cm o 2 cm. Como $BC = 2AB$, resulta que $AB = 1$ cm o 2 cm. Si $AB = 1$ cm, entonces $BC = 2$ cm y $CA = 3$ cm, lo cual no puede ser porque no hay triángulos de lados $1, 2$ y 3 centímetros. Por lo tanto, debemos tener que $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm y $CA = 3$ cm, de modo que el perímetro del triángulo ABC es 9 cm.

Solución del Problema 12. Consideremos las letras en orden alfabético: A, B, D, N, R, U. Con las 6 letras es posible formar $6! = 720$ palabras distintas. La primera palabra es ABDNRU. De ellas, las primeras $5! = 120$ palabras empiezan con la letra A y las siguientes $5! = 120$ palabras empiezan con la letra B. La palabra número 241 empieza con la letra D. Con D fija, debemos pasar todas las palabras que empiezan con DA, DB, DN y DR antes de llegar a DU. Con dos letras fijas al inicio, podemos formar $4! = 24$ palabras distintas, de modo que dejamos pasar $24+24+24+24 = 96$ palabras para poder llegar a DU. Para llegar a DUR, debemos dejar pasar todas las palabras que empiezan con DUA, DUB, DUN. Dejando tres letras fijas al inicio, podemos formar $3! = 6$ palabras distintas con las letras restantes, de modo que dejamos pasar $6 + 6 + 6 = 18$ palabras para poder llegar a DUR. Las siguientes palabras las podríamos enlistar en orden: $DURABN, DURANB, DURBAN$. Luego, nuestra palabra es la número $240 + 96 + 18 + 3 = 357$.

Solución del Problema 13. Del 1 al 2000, el dígito 4 se ha usado $\frac{2000}{10} = 200$ veces en las unidades, 200 veces en las decenas y 200 veces en las centenas, para un total de 600 veces. De manera similar, los dígitos 6 y 8 se han usado 600 veces cada uno y, el dígito 2, se ha usado 601 veces (por el 2 de 2000). El dígito 0 no puede ser el dígito más a la izquierda, de manera que se ha usado 200 veces en las unidades (no cuenta el 0, pero sí el 2000), $200 - 9 = 191$ veces en las decenas (no cuenta la decena del 0 al 9, pero sí en 2000) y $200 - 99 = 101$ veces en las unidades (no cuenta la centena del 0 al 99, pero sí en 2000); esto es, se ha usado $200 + 191 + 101 = 492$ veces.
También tenemos los 19 números de 2001 a 2019, donde todos ellos comienzan con 20; 9 de ellos tienen 0 en las decenas y 9 de ellos tienen dígito par en las unidades. Luego, la respuesta final es $601 + 3 \times 600 + 492 + 38 + 18 = 2949$ dígitos.

Solución del Problema 14. Observemos que la cantidad de maneras en que podemos elegir los ladrillos siguiendo las condiciones, es igual a la cantidad de caminos que empiezan en la fila superior y terminan en la fila inferior, tomando un ladrillo por fila y moviéndose únicamente por ladrillos adyacentes. Luego, podemos contar la cantidad de caminos escribiendo un 1 en cada ladrillo de la fila superior y calculando el número en cada ladrillo inferior como la suma de los números de los ladrillos arriba de este, como se muestra en la figura.



El número en cada ladrillo representa el número de formas de llegar a él desde la fila superior. Para calcular el número total de ladrillos que van desde la fila superior hasta la inferior, basta con sumar los números de los ladrillos en la última fila. Concluimos que hay $3 + 30 + 15 + 16 + 16 = 80$ maneras en que podemos elegir los ladrillos.

Solución del Problema 15. Reescribiendo la ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{cccccc} & S & A & I & M & C \\ + & S & A & I & M & C \\ \hline & M & A & T & H & S \end{array}$$

Dado que $\overline{SAIMC}$ y $\overline{MATHS}$ son números de 5 dígitos, tenemos que $S \leq 4$ y, como S es el dígito de las unidades de $2C$, resulta que S es par. Luego, $S = 2$ o 4.
Si $S = 2$, entonces $C = 1$ o 6 y, $M = 4$ o 5.
• Si $C = 1$, entonces H es el dígito de las unidades de $2M$. Dado que $M = 4$ o 5, entonces $H = 8$ o 0, respectivamente.
Caso 1. $M = 4$ y $H = 8$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & A & I & 4 & 1 \\ + & 2 & A & I & 4 & 1 \\ \hline & 4 & A & T & 8 & 2 \end{array}$$

Como no hay acarreo en las unidades de millar, necesariamente $A \leq 4$ y, por lo tanto, $A = 0$. Luego, $T = 2I$, de donde $I = 3$ y $T = 6$. Así, tenemos la siguiente solución.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ + & 2 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 0 & 6 & 8 & 2 \end{array}$$

Caso 2. $M = 5$ y $H = 0$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & A & I & 5 & 1 \\ + & 2 & A & I & 5 & 1 \\ \hline & 5 & A & T & 0 & 2 \end{array}$$

Como el dígito 1 es acarreado en las decenas de millar, necesariamente $A \geq 5$ y, por lo tanto, $A = 9$ y $2I + 1 = 10 + T$. Luego, $I = 6$ y $T = 3$, o bien, $I = 8$ y $T = 7$. Así, tenemos dos soluciones.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 9 & 6 & 5 & 1 \\ + & 2 & 9 & 6 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & 9 & 3 & 0 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 2 & 9 & 8 & 5 & 1 \\ + & 2 & 9 & 8 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & 9 & 7 & 0 & 2 \end{array}$$

• Si $C = 6$, entonces H es el dígito de las unidades de $2M + 1$. Dado que $M = 4$ o 5, tenemos que $H = 9$ o 1, respectivamente.
Caso 1. $M = 4$ y $H = 9$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & A & I & 4 & 6 \\ + & 2 & A & I & 4 & 6 \\ \hline & 4 & A & T & 9 & 2 \end{array}$$

Como no hay acarreo en las unidades de millar, necesariamente $A \leq 4$ y, por lo tanto, $A = 0$. Luego, $T = 2I$. Sin embargo, los dígitos que nos quedan disponibles son $1, 3, 5, 7$ y 8. Así, no hay soluciones en este caso.

Caso 2. $M = 5$ y $H = 1$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & A & I & 5 & 6 \\ + & 2 & A & I & 5 & 6 \\ \hline & 5 & A & T & 1 & 2 \end{array}$$

Dado que el dígito 1 es acarreado en las decenas de millar, necesariamente $A \geq 5$ y, por lo tanto, $A = 9$ y $2I + 1 = 10 + T$. Luego, $I = 8$ y $T = 7$. Así, tenemos la siguiente solución.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ + & 2 & 9 & 8 & 5 & 6 \\ \hline & 5 & 9 & 7 & 1 & 2 \end{array}$$

Si $S = 4$, entonces $C = 2$ o 7 y $M = 8$ o 9.
• Si $C = 2$, entonces H es el dígito de las unidades de $2M$. Dado que $M = 8$ o 9, tenemos que $H = 6$ o 8, respectivamente.
Caso 1. $M = 8$ y $H = 6$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & A & I & 8 & 2 \\ + & 4 & A & I & 8 & 2 \\ \hline & 8 & A & T & 6 & 4 \end{array}$$

Como no hay acarreo en los dígitos de los millares, tenemos que $A \leq 4$, y, por lo tanto, $A = 0$. Luego, $T = 2I + 1$, de donde se sigue que $I = 1$ y $T = 3$ o bien, $I = 3$ y $T = 7$. Así, tenemos dos soluciones más.

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & 0 & 1 & 8 & 2 \\ + & 4 & 0 & 1 & 8 & 2 \\ \hline & 8 & 0 & 3 & 6 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 4 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ + & 4 & 0 & 3 & 8 & 2 \\ \hline & 8 & 0 & 7 & 6 & 4 \end{array}$$

Caso 2. $M = 9$ y $H = 8$. En este caso, tenemos que

$$\begin{array}{cccccc} & 4 & A & I & 9 & 2 \\ + & 4 & A & I & 9 & 2 \\ \hline & 9 & A & T & 8 & 4 \end{array}$$

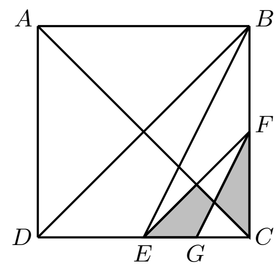
Como hay acarreo en los dígitos de las centenas, necesariamente $A \geq 5$ y, por lo tanto, $A = 9$, lo cual es imposible.
• Si $C = 7$, entonces H es el dígito de las unidades de $2M + 1$. Dado que $M = 8$ o 9, tenemos que $H = 7$ o 9, respectivamente. Cualquiera de los dos casos es imposible.
Concluimos que hay en total 6 soluciones y la suma de los valores posibles de T es $3 + 6 + 7 = 16$.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Dado que las balanzas están en equilibrio, tenemos las siguientes ecuaciones: $X = Y + Z$, $F = X + Y + Z$, $P = Q + R$ y $X + Y + Z + F = P + Q + R$.

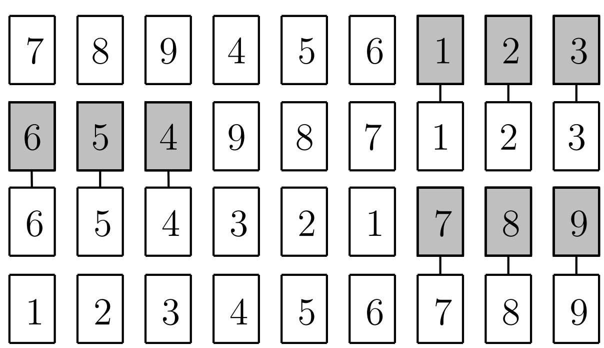
Luego, $F = 2X$ y, por lo tanto, $P + Q + R = X + Y + Z + F = 4X$, de manera que $X + Y + Z + F + P + Q + R = 8X$, que es un múltiplo de 8. Dado que la suma de todos los pesos es el mayor entero posible, menor que 2019 gramos, tenemos que $X + Y + Z + F + P + Q + R = 2016$. Por lo tanto, $X = \frac{2016}{8} = 252$ gramos.

Solución del Problema 2. Tracemos la diagonal BD. Como EF es une los puntos medios de CD y BC, tenemos que el área del triángulo CEF es la cuarta parte del área del triángulo CBD, que a su vez es la mitad del área del cuadrado $ABCD$. Luego, $(CEF) = \frac{1}{8}(ABCD)$.



En el triángulo CEF, FG y AC son medianas y, como las medianas de un triángulo lo dividen en 6 triángulos de la misma área, en el triángulo CEF, cuatro de esos triángulos están sombreados, esto es, el área sombreada representa $\frac{2}{3}$ del área del triángulo CEF. Luego, el área sombreada es igual a $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8} \times (ABCD) = \frac{1}{12}(ABCD)$. Por lo tanto, la razón del área sombreada entre el área del cuadrado $ABCD$ es $\frac{1}{12}$.

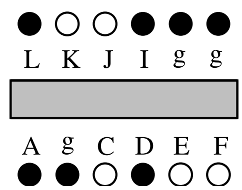
Solución del Problema 3. Los tres movimientos se muestran en el siguiente diagrama. Las cartas sombreadas no se mueven y permanecen en el mismo orden, en el mismo lugar.



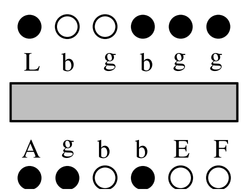
Solución del Problema 4. Observemos que $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, \ldots$. Esto sugiere que debemos representar a n y $n + 1$ como números binarios. Dado que la cantidad de lápices que compraron Eduardo y Jacobo se expresa con la menor cantidad posible de paquetes, quiere decir que no podemos tener dos paquetes del mismo tipo, pues $2^x + 2^x = 2^{x+1}$; este es el equivalente en binario de "llevar" o "acarrear" en la suma. Como Eduardo tiene 4 paquetes más que Jacobo pero 1 lápiz

menos, quiere decir que los últimos seis dígitos de n en representación binaria son 011111, de manera que los últimos seis dígitos de $n+1$ en representación binaria son 100000. Es decir, ese lápiz extra genera un "acarreo", cinco veces consecutivas (cambiando cinco dígitos 1 por dígitos 0 y un dígito 0 por un dígito 1).
Dado que $2019 = (11111100011)_2$, los primeros 5 dígitos de n son elecciones libres (el mayor valor posible para $n+1$ es $(11111100000)_2 = 2016$). Cada dígito tiene dos opciones, 0 o 1, por lo que hay $2^5 = 32$ valores posibles para n que cumplen la condición.

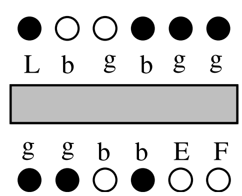
Solución del Problema 5. A partir de las primeras dos reglas, podemos hacer las siguientes deducciones:
(i) Si un círculo blanco está frente a un círculo negro, el círculo negro debe representar a una niña.
(ii) Si dos círculos negros están uno frente a otro, entonces representan ya sea a dos niños o a dos niñas.
(iii) Si dos círculos blancos están uno frente a otro, no pueden ser ambos niños.
(iv) Si dos círculos blancos están uno junto al otro, no pueden ambos ser niñas.
A partir de (i), B y H son ambas niñas. Si G es un niño, entonces F es un niño también. Como F es un círculo blanco, G es una niña, lo que es imposible. Por lo tanto, G es una niña y tenemos la siguiente figura.



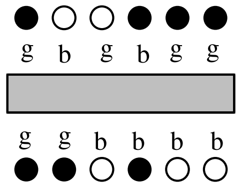
Dado que B es una niña y C es un círculo blanco, C debe ser un niño y, por lo tanto, J es una niña. Luego, tanto K como I son niños. Así que D es un niño y tenemos la siguiente figura.



Como B es una niña, C es un niño y B es un círculo negro, necesariamente A debe ser una niña.



Como L no puede ser un niño, L debe ser una niña y, por lo tanto, tanto E como F son niños. Tenemos el siguiente arreglo final.



Solución del Problema 6. Sean Z el peso de una figurita de cebra, L el peso de una figurita de león, R el peso de una figurita de rinoceronte, A el peso de una figurita de avestruz, E el peso de una figurita de elefante, P el peso de una figurita de leopardo, C el peso de una figurita de cocodrilo, G el peso de una figurita de gorila y J el peso de una figurita de jirafa. Luego, a partir del equilibrio en las imágenes, tenemos que $L = 3J$, $4P = G$, $3C = 4Z$, $4A = 2G$ y $R > Z$. Dado que $3C = 4Z$ y todos son números enteros, C es un múltiplo de 4 y Z es un múltiplo de 3. Si $C = 4$, entonces $Z = 3$. Dado que $4P = G$, tenemos que $G = 8$ es la única opción posible y, por lo tanto, $P = 2$. Ahora, observemos que las posibles parejas para (J, L) son $(1, 3)$, $(2, 6)$ y $(3, 9)$. Ninguna de ellas es posible puesto que $Z = 3$ y $P = 2$. Por lo tanto, $C \neq 4$. Luego, $C = 8$ y $Z = 6$. Dado que $4P = G$, la única opción disponible es $G = 4$ y $P = 1$. Ahora, considerando las mismas parejas de (J, L) la única disponible es $L = 9, J = 3$, dado que 1 y 3 están tomados. Como $4A = 2G = 8$, tenemos que $A = 2$. Como $R > Z$ y solo quedan 5 y 7, tenemos que $R = 7$ y $E = 5$.
La figurita de leopardo pesa 1 kg, la figurita de avestruz pesa 2 kg, la figurita de jirafa pesa 3 kg, la figurita de gorila pesa 4 kg, la figurita de elefante pesa 5 kg, la figurita de cebra pesa 6 kg, la figurita de rinoceronte pesa 7 kg, la figurita de cocodrilo pesa 8 kg y la figurita de león pesa 9 kg.

Solución del Problema 7. Tanto en la quinta fila como en la segunda columna hay un bloque continuo de tres números iguales. Solo es posible que sean 3's. El bloque continuo de dos números iguales que ocurre en la cuarta fila y en la segunda columna debe ser de 2's y, el bloque continuo de dos números iguales que hay tanto en la sexta fila como en la sexta columna, debe ser de 3's. Escribimos estos valores como se muestra en la figura.

	2			3	3
	2	3	3		3
	3	3			
3	3	2	2		
	3	3	3		
			3	3	

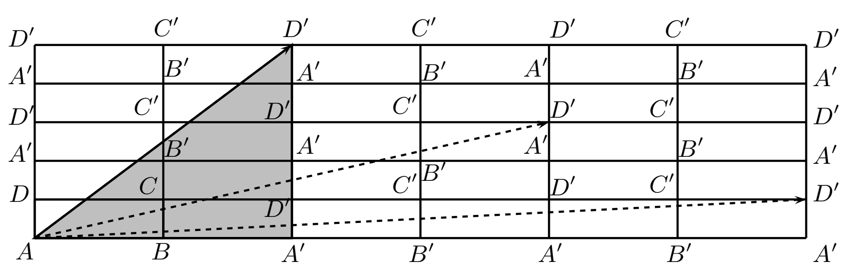
Observemos que el último número en la segunda columna es 1. En la segunda fila, el número de más a la izquierda es 1 y el otro número es 2. En la cuarta columna, el número hasta arriba es 2 y el otro número es 1. En la tercera columna, el número hasta arriba es 1 y el número hasta abajo es 2. Luego, el número en la esquina superior izquierda es 3, como se muestra en la figura.

3	2	1	2	3	3
1	2	3	3	2	3
	3	3	1		
3	3	2	2		
	3	3	3		
	1	2	3	3	

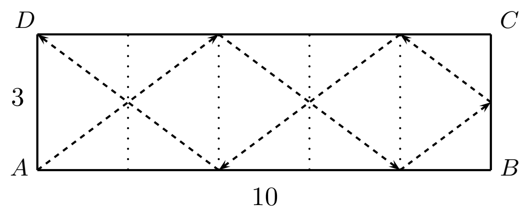
En la sexta fila, el número de más a la derecha es 2 y, por lo tanto, el número de más a la izquierda es 3. Luego, los dos últimos números en la primera columna son ambos iguales a 2. En la tercera fila, el número de más a la derecha es 2 y el otro número es 3. En la cuarta fila, el número de más a la derecha es 3 y el otro número es 1. Finalmente, en la quinta fila, el número de más a la derecha es 1 y el otro número es 2.
Tenemos la siguiente tabla completa.

3	2	1	2	3	3
1	2	3	3	2	3
2	3	3	1	3	2
3	3	2	2	1	3
2	3	3	3	2	1
3	1	2	3	3	2

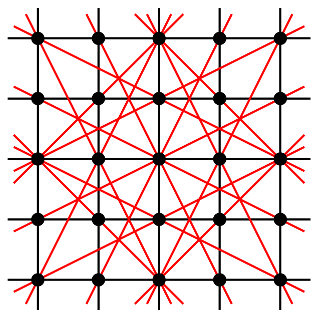
Solución del Problema 8. Si consideramos que la mesa se refleja en un plano (imagina que hay espejos a los lados de la mesa), entonces podemos ver el camino que recorre como una línea recta sobre la cuadrícula de la figura. Los rebotes de la bola sobre los lados de la mesa original se corresponden con las veces en que nuestro camino recto cruza las líneas de la cuadrícula. Por lo tanto, la longitud del camino que recorre la bola es igual a la longitud de AD' dibujada en el tablero. Hay tres segmentos AD' donde hay cinco rebotes en total; observa que únicamente uno de ellos tiene su rebote original sobre el lado CD.



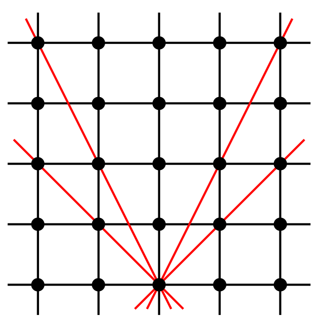
Podemos calcular la longitud del camino usando el teorema de Pitágoras en el triángulo sombreado. Como $AA' = 2AB = 20$ m y $A'D' = 5AD = 15$ m, tenemos que $(AD')^2 = 20^2 + 15^2 = 625 = 25^2$, de donde obtenemos que $AD' = 25$ m. La siguiente figura muestra el camino que debió haber recorrido la pelota en la mesa original.



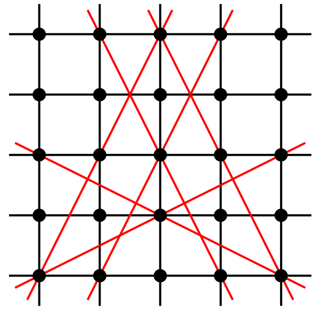
Solución del Problema 9. La respuesta es 16, como se muestra a continuación.



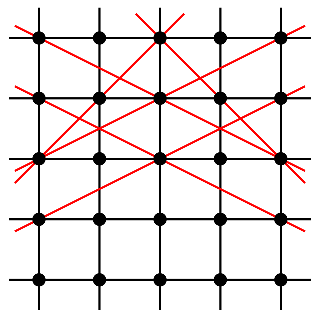
Consideremos primero las líneas que pasan por el punto de en medio de la última línea (la de más abajo) de la cuadrícula. Son exactamente 4 líneas que pasan por dicho punto y por exactamente otros dos puntos.



Consideramos ahora las líneas que pasan por cualquiera de los otros puntos de la última línea (la de más abajo) de la cuadrícula. Son en total 6 líneas.



Por último, consideremos los otros 4 puntos de la columna de más a la izquierda y de la columna de más a la derecha. Hay exactamente 6 líneas que pasan por estos puntos y por exactamente otros 2 puntos.



No es posible que una recta pase por 3 puntos de los 9 centrales sin que además pase por algún otro. Las líneas que pasan por los restantes puntos de la primera línea (la de más arriba) ya fueron consideradas en los otros casos. Concluimos que un total de $4+6+6=16$ líneas cumplen las condiciones del problema.

Solución del Problema 10. Como $5\times5\times5\times5=625<1000<3125=5\times5\times5\times5\times5$, el botón @ se debe apretar a lo más 4 veces. Realizaremos las operaciones justo tres veces. Hay ocho posibilidades. Estas pueden extenderse de una a dos operaciones para obtener números de tres dígitos. Notemos que el resultado antes de la última operación debe ser menor que $\frac{1000-2}{5}=199\frac{3}{5}$ para obtener un número de tres dígitos después de la última operación.

Inicio	@	@	@	@
1	$1\times5+2=7$	$7\times5+2=37$	$37\times5+2=187$	$187\times5+2=937$ # $187\times7-5=1304$
	#	@	@	@
1	$1\times7-5=2$	$2\times5+2=12$	$12\times5+2=62$	$62\times5+2=312$ # $62\times7-5=429$

Inicio	@	#	@	
1	$1 \times 5 + 2 = 7$	$7 \times 7 - 5 = 44$	$44 \times 5 + 2 = 222$	
	@	@	#	
1	$1 \times 5 + 2 = 7$	$7 \times 5 + 2 = 37$	$37 \times 7 - 5 = 254$	
	@	#	#	
1	$1 \times 5 + 2 = 7$	$7 \times 7 - 5 = 44$	$44 \times 7 - 5 = 303$	
	#	@	#	@
1	$1 \times 7 - 5 = 2$	$2 \times 5 + 2 = 12$	$12 \times 7 - 5 = 79$	$79 \times 5 + 2 = 397$ # $79 \times 7 - 5 = 548$
	#	#	@	@
1	$1 \times 7 - 5 = 2$	$2 \times 7 - 5 = 9$	$9 \times 5 + 2 = 47$	$47 \times 5 + 2 = 237$ # $47 \times 7 - 5 = 324$
	#	#	#	@
1	$1 \times 7 - 5 = 2$	$2 \times 7 - 5 = 9$	$9 \times 7 - 5 = 58$	$58 \times 5 + 2 = 292$ # $58 \times 7 - 5 = 401$

En total son 13 números de 3 dígitos los que puede mostrar la calculadora: 187, 222, 237, 254, 292, 303, 312, 324, 397, 401, 429, 548 y 937.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

El 2 de marzo de 2020 se aplicó en el CIMAT, el examen de la XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los estudiantes convocados al segundo entrenamiento nacional de la OMM y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador fue Indonesia.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 3 de plata y 4 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 149 puntos quedando en el lugar número 11 de 38 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León): Medalla de plata.
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas): Medalla de plata.
- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México): Medalla de plata.
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero): Medalla de bronce.
- José Alejandro Reyes González (Morelos): Medalla de bronce.

- Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa): Medalla de bronce.
- Crisanto Salazar Verástica (Sinaloa): Medalla de bronce.
- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México): Mención honorífica.
- Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México): Mención honorífica.
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Sea Γ el circuncírculo del triángulo ABC. Sea D un punto en el lado BC. La tangente a Γ en A interseca a la recta paralela a AB que pasa por D en el punto E. El segmento CE interseca a Γ nuevamente en F. Supón que los puntos B, D, F, E son concíclicos. Demuestra que AC, BF y DE son concurrentes.

Problema 2. Demuestra que $r = 2$ es el mayor número real que satisface la siguiente condición: Si una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de números enteros positivos cumple las desigualdades

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$$

para cada entero positivo n, entonces existe un entero positivo M tal que $a_{n+2} = a_n$, para todo entero $n \geq M$.

Problema 3. Determina todos los enteros positivos k para los cuales existe un entero positivo m y un conjunto S de enteros positivos, tales que cada entero $n > m$ se puede escribir como la suma de elementos distintos de S en exactamente k maneras.

Problema 4. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Encuentra todos los polinomios $P(x)$ con coeficientes enteros que satisfacen la siguiente propiedad: para cualquier sucesión infinita $a_1, a_2, \ldots$ de enteros en donde cada entero aparece exactamente una vez, existen índices $i < j$ y un entero k tales que $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = P(k)$.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un entero fijo. El número 1 está escrito n veces en un pizarrón. Debajo del pizarrón hay dos cubetas inicialmente vacías. Un movimiento consiste en borrar dos de los números, digamos a y b y reemplazarlos por los números 1 y $a + b$, después añadir una piedra a la primera cubeta y $\text{mcd}(a, b)$ piedras a la segunda cubeta. Después de un número finito de movimientos, hay s piedras en la primera cubeta y t piedras en la segunda, donde s y t son enteros positivos. Encuentra todos los posibles valores de la razón t/s.

9ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

Del 15 al 21 de abril de 2020, se llevó a cabo la novena edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a distancia, debido a la emergencia sanitaria por el Covid-19, siendo Holanda la sede académica. El equipo mexicano estuvo integrado por: Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México), Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México), Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa) y Nathalia del Carmen Jasso Vera (Guanajuato). Se obtuvieron excelentes resultados: Ana Paula obtuvo medalla de oro; Ana Illanes y Karla Rebeca obtuvieron medallas de plata y Nathalia obtuvo medalla de bronce. México obtuvo el sexto lugar de 53 equipos participantes provenientes de 52 países (el país sede participó con dos equipos). Los profesores que acompañaron a la delegación fueron: Isabel Hubard Escalera (líder), Marcela Cruz Larios (tutora) y Cristina Sotomayor (tutora).

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la séptima ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la 9^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_{3030}$ enteros positivos tales que

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \quad \text{para todo } \; n = 0, 1, 2, \ldots, 3028.$$

Demuestre que al menos uno de los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{3030}$ es divisible por 2^{2020}.

Problema 2. Encuentre todas las listas $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ de números reales no negativos que satisfacen las siguientes tres condiciones:

I) $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2020}$;

II) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

III) existe una permutación $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ tal que

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Una permutación de una lista es una lista de la misma longitud, con los mismos elementos pero en un orden cualquiera. Por ejemplo, $(2,1,2)$ *es una permutación de* $(1,2,2)$ *y ambas son permutaciones de* $(2,2,1)$*. En particular, cualquier lista es una permutación de ella misma.*

Problema 3. Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que $\angle A = \angle C = \angle E$ y $\angle B = \angle D = \angle F$. Además, las bisectrices interiores de los ángulos $\angle A$, $\angle C$ y $\angle E$ son concurrentes. Demuestre que las bisectrices interiores de los ángulos $\angle B$, $\angle D$ y $\angle F$ también son concurrentes.
La notación $\angle A$ *hace referencia al ángulo* $\angle FAB$*. Lo mismo se aplica a los otros ángulos del hexágono.*

Problema 4. Una permutación de los enteros $1, 2, \ldots, m$ se llama *fresca* si no existe ningún entero positivo $k < m$ tal que los primeros k elementos de la permutación son los números $1, 2, \ldots, k$ en algún orden. Sea f_m el número de permutaciones frescas de los enteros $1, 2, \ldots, m$. Demuestre que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ para todo $n \geq 3$.
Por ejemplo, para $m = 4$ *la permutación* $(3,1,4,2)$ *es fresca, mientras que la permutación* $(2,3,1,4)$ *no lo es.*

Problema 5. Considere el triángulo ABC con $\angle BCA > 90°$. Sea R el radio del circuncírculo Γ de ABC. En el segmento AB existe un punto P con $PB = PC$ tal que la longitud de PA es igual a R. La mediatriz de PB corta a Γ en los puntos D y E. Demuestre que P es el incentro del triángulo CDE.

Problema 6. Sea $m > 1$ un entero. Se define una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ como $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ y, para todo $n \geq 4$,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

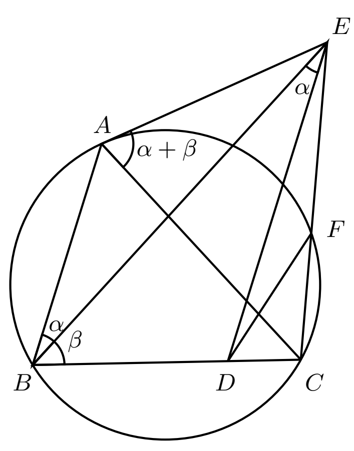
Determine todos los enteros m tales que cada término de la sucesión es un cuadrado perfecto.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Karla Rebeca Munguía Romero). Sean $\angle ABE = \alpha$ y $\angle EBC = \beta$. Como AB y ED son paralelas, tenemos que $\angle EDC = \alpha + \beta$ y, como AE es tangente al circuncírculo del triángulo ABC, tenemos que $\angle EAC = \alpha + \beta$. Luego, $\angle EAC = \angle EDC$, de donde se sigue que el cuadrilátero $AEDC$ es cíclico.



Ahora, notemos que DE es el eje radical de los circuncírculos de $AECD$ y $EFDB$;

FB es el eje radical de los circuncírculos de $EFDB$ y $AFCB$; y AC es el eje radical de los circuncírculos de $AECD$ y $AFCB$, por lo que DE, FB y AC concurren.

Solución del problema 2. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Para este problema tenemos que ver dos cosas:

1) Si $r = 2$, se satisfacen las condiciones del problema. Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros positivos tal que $a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_{n+1}}$, esto es, $a_n^2 \leq a_{n+2}^2 \leq a_n^2 + 2a_{n+1}$. Queremos probar que si $a_{m+1} \leq a_m$ para alguna m, entonces existe M tal que $a_{n+2} = a_n$ para todo $n \geq M$. Veamos primero que si $a_{n+1} \leq a_n$, entonces $a_n = a_{n+2}$ y, por inducción sobre z, tenemos que $a_{m+2z} = a_m$ para todo $z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Si $a_{n+1} \leq a_n$, entonces $a_n^2 + 2a_{n+1} \leq a_n^2 + 2a_n < a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2$. Se sigue que $a_n \leq (a_{n+2}) < a_n + 1$ y de aquí, $a_n = a_{n+2}$, pues son enteros. Luego, $a_{n+1} \leq a_{n+2}$, $a_{n+1} \leq a_{n+3} \leq \sqrt{a_{n+1}^2 + 2a_{n+2}} < a_{n+2} + 1$, lo cual implica que $a_{n+3} \leq a_{n+2}$. Con esto, es fácil ver inductivamente que $a_{n+2m+1} \leq a_{n+2m}$ para $m \geq 0$. Ya sabemos que $a_{n+2k} = a_{n+2j}$ y que $a_{n+2k+1} \leq a_{n+2k} = c$. Además, sabemos que $a_{n+1} \leq a_{n+3} \leq \cdots$ y todos son menores o iguales a c. Como hay una cantidad finita de enteros entre c y a_{n+1}, por el prinicpio de casillas infinito se sigue que debe haber infinitas a_{n+2x+1} iguales, y dado que forman una sucesión no decreciente, existe y tal que $a_{n+2y+1} = r$, con r una constante, entero positivo. Concluimos que entonces existe M tal que $a_{n+2} = a_n$ para toda $n \geq M$. Resta ver qué pasa si $a_{m+1} > a_m$ para toda m. Se tendría que $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, lo que implica que $a_{n+1} \geq a_n + 1$ y de aquí, $a_{n+2} \geq a_{n+1} + 1 \geq a_n + 2$, para toda n. Entonces, $a_n + 2 \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_{n+1}}$ para toda n, de donde $a_n^2 + 4a_n + 4 \leq a_{n+2} \leq a_n^2 + 2a_{n+1}$. De aquí que $2a_n + 4 \leq 2a_{n+1}$ y, por lo tanto, $a_n + 2 \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea k la diferencia mínima entre a_{n+1} y a_n, y supongamos que se alcanza en m. Entonces, $a_{m+1} = a_m + k$ y $a_{m+2} = a_{m+1} + z$, con $z \geq k$. Luego, $a_{m+2} \geq a_m + 2k$. Entonces, $a_m + 2k \leq a_{m+2} \leq \sqrt{a_m^2 + 2a_{m+1}} = \sqrt{a_m^2 + 2a_m + 2k}$, lo cual implica que $(a_m + 2k)^2 \leq a_m^2 + 2a_m + 2k$, esto es, $2a_m k + 2k^2 \leq a_m + k$. Así, $2k(a_m + k) \leq a_m + k$ y, como $a_m + k > 0$, $2k \leq 1$, cosa que no es posible, pues k es entero positivo. Por lo tanto, existe m tal que $a_{m+1} \leq a_m$, por lo que $r = 2$ sí cumple lo deseado.

2) Si $r > 2$ entonces existe al menos una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de enteros positivos que cumple que $a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + ra_{n+1}}$ pero no cumple que existe un entero positivo M tal que $a_{n+2} = a_n$ para todo $n \geq M$. Para esto, sea $b = r - 2$, $b > 0$. Tenemos que $\lceil \frac{1}{b} \rceil = m$, lo cual implica que $b \geq \frac{1}{m}$ y, en consecuencia, $2+b \geq 2+\frac{1}{m} = \frac{2m+1}{m}$. Entonces, $r \geq \frac{2m+1}{m}$, con m entero positivo. Consideremos la sucesión $m, m, m+1, m+1, m+2, m+2, \ldots$ Se tienen dos casos:

   - $a_n = a_{n+1} = m + k, a_{n+2} = m + k + 1$. En este caso, tenemos que

$$m + k \leq m + k + 1 \leq \sqrt{m^2 + k^2 + 2mk + \left(2 + \frac{1}{m}\right)(m + k)},$$

   pues $m^2 + k^2 + 2mk + (2 + \frac{1}{m})(m + k) = (m + k + 1)^2 + \frac{k}{m} \geq (m + k + 1)^2$. Como $2 + \frac{1}{m} \leq r$, se sigue la desigualdad deseada para la sucesión.

- $a_n = m + k, a_{n+1} = a_{n+2} = m + k + 1$. En este caso, tenemos que

  $$m + k \leq m + k + 1 \leq \sqrt{m^2 + k^2 + 2mk + \left(2 + \frac{1}{m}\right)(m + k + 1)},$$

  pues

  $$\begin{aligned} &m^2 + k^2 + 2mk + (2 + \frac{1}{m})(m + k + 1) \\ &= m^2 + k^2 + 2mk + 2m + 2k + 3 + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} \\ &\geq (m + k + 1)^2, \end{aligned}$$

  ya que $2 + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} \geq 0$. Al igual que en el caso anterior, de esto se sigue la desigualdad deseada para la sucesión.

Los dos casos cumplen las desigualdades y $a_{n+2} \neq a_n$ pra todo n, de manera que no existe M tal que $a_{n+2} = a_n$ para todo $n \geq M$. Con esto concluimos que $r \leq 2$.

Entonces se concluye que 2 es el mayor número real que satisface lo deseado, como queríamos ver.

Solución del problema 3. Afirmamos que $k = 2^a$ para todo $a \geq 0$. Sean $A = \{1, 2, 4, 8, \ldots,\}$ y $B = \mathbb{N} - A$. Definimos $s(T)$ como la suma de los elementos del conjunto T. Si $T = \emptyset$, entonces $s(T) = 0$. Veamos primero que cualquier entero positivo $k = 2^a$ cumple la propiedad deseada. Sea B' un subconjunto de B con a elementos y sea $S = A \cup B'$. Recordemos que todo entero no negativo tiene una única representación binaria. Entonces, para cualquier entero $t > s(B')$ y cualquier subconjunto $B'' \subset B'$, el número $t - s(B'')$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de A de una única forma. Esto implica que t puede ser escrito como suma de elementos distintos de B' de exactamente 2^a formas.

Ahora, supongamos que un entero positivo k satisface la propiedad deseada para un entero positivo $m \geq 2$ y un conjunto S. Claramente, S es infinito.

Lema. Para $x \in S$ suficientemente grande, el elemento más chico de S que es mayor que x es $2x$.

Demostración. Sea $x \in S$ con $x > 3m$ y sea $x < y < 2x$. Mostraremos que $y \notin S$. Primero supongamos que $y > x + m$. Luego, $y - x$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de S que no incluyen a x de k formas diferentes. Si $y \in S$, entonces y puede ser escrito como suma de elementos distintos de S de $k + 1$ formas distintas, lo que es una contradicción. Supongamos ahora que $y \leq x + m$. Sea $z \in (2x - m, 2x)$. De manera similar, $z - x$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de S, sin incluir a x o y, de k formas distintas. Si $y \in S$, como $m < z - y < x$, $z - y$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de S que no incluyen a x o y, de k formas distintas. Esto implica que z puede ser escrito como suma de elementos distintos de S de al menos $k + 1$ formas distintas, lo que nuevamente nos lleva a una contradicción.

Ahora veamos que $2x \in S$. Supongamos que esto no pasa. Notemos que $2x$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de S incluyendo x de exactamente $k-1$ formas distintas. Esto implica que $2x$ puede ser escrito también como suma de elementos distintos de S que no incluyen a x. Si esta suma inclye algún número menor que $x-m$, al remover este número, podemos escribir algún número $y \in (x+m, 2x)$ como suma de elementos distintos de S que no incluyen a x. Ahora, si $y = y' + x$ donde $y' \in (m, x)$, entonces y' puede ser escrito como suma de elementos distintos de S incluyendo x de exactamente k formas. Entonces, y puede ser escrito como suma de elementos distintos de S de al menos $k+1$ formas distintas, lo que es una contradicción. Por lo que la suma solo incluye números en el intervalo $[x-m, x)$. Claramente dos números no son suficientes. Por otro lado, tres números de tal intervalo suman al menos $3(x-m) > 2x$, que es una contradicción. $\square$

Volviendo al problema, por el lema que acabamos de probar tenemos que $S = T \cup U$, donde T es finito y $U = \{x, 2x, 4x, 8x, \dots\}$ para algún entero positivo x. Sea y un entero positivo mayor que $s(T)$. Para cualquier subconjuntos $T' \subset T$, si $y - s(T') \equiv 0 \pmod{x}$, entonces $y - s(T')$ puede ser escrito como suma de elementos distintos de U de una única forma, de lo contrario, $y - S(T')$ no puede ser escrito como suma de elementos distintos de U. Entonces, el número de formas de escribir y como suma de elementos distintos de S es igual al número de subconjuntos $T' \subset T$ tales que $s(T') \equiv y \pmod{x}$. Como esto pasa para toda y, tenemos que para todo $0 \leq a \leq x-1$, hay exactamente k subconjuntos $T' \subset T$ tales que $s(T') \equiv a \pmod{x}$. Esto implica que hay kx subconjuntos de T en total. Pero el número de subconjuntos de T es potencia de 2, por lo que k debe ser potencia de 2, como queríamos probar.

Solución del problema 4. La solución la haremos en dos partes.
Parte 1. Todos los polinomios $P(x)$ de grado 1 satisfacen la propiedad deseada. Sea $P(x) = cx + d$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $c > d \geq 0$. Sea $s_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \pmod{c}$. Es suficiente demostrar que existen índices i, j tales que $j - i \geq 2$ y $s_j - s_i \equiv d \pmod{c}$.

Consideremos $c+1$ índices $e_1, e_2, \dots, e_{c+1}$ mayores que 1 tales que $a_{e_l} \equiv d \pmod{c}$. Por el principio de las casillas, de entre los $n+1$ pares (s_{e_1-1}, s_{e_1}), (s_{e_2-1}, s_{e_2}), ..., $(s_{e_{n+1}-1}, s_{e_{n+1}})$ hay dos iguales, digamos (s_{m-1}, s_m) y (s_{n-1}, s_n). Podemos tomar $i = m-1$ y $j = n$.

Parte 2. Todos los polinomios $P(x)$ de grado distinto de 1, no satisfacen la propiedad deseada.

Lema. Si $P(x)$ tiene grado distinto de 1, entonces para cualesquiera enteros positivos A, B, C, existe un entero y tal que $|y| > C$ y no existe entero x que cumpla que $P(x) \in [y-A, y+B]$, esto es, no hay valores del rango de P en el intervalo $[y-A, y+B]$.

Demostración. La proposición es inmediata para $P(x)$ constante o si el grado de $P(x)$ es par, pues $P(x)$ estaría acotado por abajo. Sea $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado impar mayor que 1 y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a_n > 0$.

Como $P(x+1) - P(x) = a_n n x^{n-1} + \cdots$ y $n-1 > 0$, la diferencia entre $P(x)$ y $P(x+1)$ crece arbitrariamente para x suficientemente grande. Con esto se sigue el lema. $\square$

Supongamos que el grado de $P(x)$ es distinto de 1. Construiremos una sucesión $\{a_i\}$ de forma inductiva de forma que para cualesquiera índices $i < j$ y cualquier entero k se tiene que $a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j \neq P(k)$. Supongamos que se tienen los elementos $a_1, \ldots, a_i$ de la secuencia que cumplen lo mencionado anteriormente y m es un entero de menor valor absoluto que no aparece entre estos primeros i elementos. Añadiremos dos elementos a la sucesión. Sea $a_i + 2 = m$. Consideremos todas las nuevas sumas de al menos dos términos consecutivos, cualquiera de estas contiene a a_{i+1}. Entonces, todas las sumas están en el intervalo $[a_{i+1} - A, a_{i+1} + B]$ para ciertas constantes A y B. El lema nos permite encontrar a_{i+1} de modo que todas estas sumas eviten el rango de P.

Solución del problema 5. Todos los valores posibles son los números racionales en el intervalo $[1, n-1)$. Primero, veamos que no hay otro valor posible además de los mencionados. Claramente la razón $\frac{t}{s}$ es al menos 1, pues en cada movimiento al menos una piedra se añade a la segunda cubeta. Notemos que el número s de piedras en la primera cubeta siempre es igual a $p - n$, donde p es la suma de los números en el pizarrón. Supongamos que los números están escritos en una fila y, siempre que a y b se borren, $a + b$ se escribe en la posición que ocupaba el número de la derecha entre a y b. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ los números en el pizarrón de izquierda a derecha y sea $q = 0a_1 + 1a_2 + \cdots + (n-1)a_n$.

Como cada a_i es al menos 1, tenemos que

$$q \leq (n-1)p - (1 + \cdots + (n-1)) = (n-1)p - \frac{n(n-1)}{2} = (n-1)s + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Además, si un movimiento cambia a_i y a_j con $i < j$, entonces t cambia por $(a_i, a_j) \leq a_i$ y q incrementa en $(j-1)a_i - (i-1)(a_i - 1) \geq ia_i - (i-1)(a_i - 1) \geq a_i$.

Entonces, $q - t$ nunca decrece. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el primer movimiento involucra al 1 de hasta la derecha. Entonces, inmediatemente después de este movimiento, $q = 0 + 1 + \cdots + (n-2) + (n-1) \cdot 2 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ y $t = 1$. Luego, después del primer movimiento siempre tenemos que

$$\begin{aligned} t &\leq q + 1 - \frac{(n+2)(n-1)}{2} \leq (n-1)s + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n+2)(n-1)}{2} + 1 \\ &= (n-1)s - (n-2) < (n-1)s. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\frac{t}{s} < n - 1$ y $\frac{t}{s}$ debe ser un racional en el intervalo $[1, n-1)$.

Después del primer movimiento, tenemos que $\frac{t}{s} = 1$. Resta probar que $\frac{t}{s}$ puede ser cualquier racional en $(1, n-1)$. Mostraremos por inducción sobre n, que para cualquier entero positivo a, es posible llegar a una situación donde hay $n-1$ unos en el pizarrón y el número a^{n-1}, con t y s iguales a $a^{n-2}(a-1)(n-1)$ y $a^{n-1}-1$, respectivamente. Para $n=2$, esto es claro pues solo hay un posible movimiento en cada paso, por lo que después de $a-1$ movimientos, s y t serán ambos iguales a $a-1$. Supongamos ahora que la afirmación es cierta para $n-1$, con $n>2$. Seguimos el algoritmo que nos deja como resultado esta situación usando $n-1$ veces el algoritmo A. Luego, para llegar a la situación de tamaño n, aplicamos el algoritmo A, para crear el número a^{n-2}. Luego, aplicamos el algoritmo A de nuevo y sumamos los dos números más grandes y repetimos, hasta tener el número a^{n-1}. El algoritmo A se ha aplicado a veces y los dos números más grandes fueron sumados $a-1$ veces. Cada vez que los dos números más grandes fueron sumados, t incrementó en a^{n-2} y, cada vez que el algoritmo A fue aplicado, t incrementa en $a^{n-3}(a-1)(n-2)$. Entonces, el valor final de t es $t=(a-1)a^{n-2}+a\cdot a^{n-3}(a-1)(n-2)=a^{n-2}(a-1)(n-1)$, lo que completa la inducción.

Ahora, podemos elegir 1 y el número más grande b veces para cualquier entero positivo b, lo que va a añadir b piedras a cada cubeta. En este punto tenemos que $\frac{t}{s}=\frac{a^{n-2}(a-1)(n-1)+b}{a^{n-1}-1+b}$. Ahora nos falta probar que cualquier número racional $\frac{p}{q}\in(1,n-1)$ tiene representación de la forma $\frac{a^{n-2}(a-1)(n-1)+b}{a^{n-1}-1+b}$, con a y b enteros positivos. Reacomodando, notamos que esto pasa si y solo si

$$b=\frac{qa^{n-2}(a-1)(n-1)-p(a^{n-1}-1)}{p-q}.$$

Si elegimos $a\equiv 1 \pmod{p-q}$, esto será un entero. Luego, necesitamos verificar que el numerador es positivo para a suficientemente grande.

$$\begin{aligned} qa^{n-2}(a-1)(n-1)-p(a^{n-1}-1) &> qa^{n-2}(a-1)(n-1)-pa^{n-1} \\ &= a^{n-2}(a(q(n-1)-p)-(n-1)), \end{aligned}$$

que es positivo para a suficientemente grande, pues $q(n-1)-p>0$.

9ª Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 9^a Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Observemos que la recursión del problema es equivalente a

$$a_{n+1}=2(a_{n+2}-2a_n) \quad \text{para todo } m=0,1,2,\ldots,3028,$$

por lo que $2\mid a_m$ para todo $m=1,2,\ldots,3029$. De aquí, obtenemos que $2\mid a_{n+2}$ para $n=0,1,2,\ldots,3027$ y, por lo tanto, $4\mid a_n$ para $n=1,2,\ldots,3028$.

Procederemos por inducción sobre k para probar que

$$2^{2k-1} \mid a_i \quad \text{para } i = k, k+1, \ldots, 3030 - 2k + 1, \tag{14}$$
$$2^{2k} \mid a_i \quad \text{para } i = k, k+1, \ldots, 3030 - 2k. \tag{15}$$

El caso base $k = 1$ ya se hizo anteriormente. Supongamos que (14) y (15) se cumplen para cierto $k \geq 1$ y probaremos que se cumplen para $k + 1$.
Sea $m \in \{k, k+1, \ldots, 3030 - 2k - 2\}$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $2^{2k-1} \mid a_m$ y $2^{2k} \mid a_{m+2}$ para $m = k, k+1, \ldots, 3030-2k-2$. Entonces 2^{2k+1} divide a $2a_{m+2} - 4a_m = a_{m+1}$, por lo que $2^{2k+1} \mid a_n$ para $n = k+1, k+2, \ldots, 3030-2k-1$.
Para verificar que (15) se cumple para $k+1$, del resultado que se acaba de obtener y de la hipótesis de inducción tenemos que $2^{2k} \mid a_n$ para $n = k, k+1, \ldots, 3030 - 2k - 3$ y $2^{2k+1} \mid a_{n+2}$ para $n = k-1, k, \ldots, 3030 - 2k - 3$. Entonces, 2^{2k+2} divide a $2(a_{n+2} - 2a_n) = a_{n+1}$ para $n = k, k+1, \ldots, 3030 - 2k - 3$, por lo que $2^{2k+2} \mid a_i$ para $i = k+1, k+2, \ldots, 3030 - 2k - 2$, lo cual prueba el paso inductivo y completa la inducción.
Tomando $k = 1010$, tenemos que $2^{2(1010)} \mid a_i$ para $i = 1010, \ldots, 3030 - 2(1010)$, esto es, $2^{2020} \mid a_{1010}$. El resultado se sigue.

Solución del problema 2. Hay dos soluciones:

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{1010}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1010}) \quad y \quad (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1010}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{1010}).$$

Primero demostraremos la desigualdad

$$((x+1)(y+1))^2 \geq 4\left(x^3 + y^3\right) \tag{16}$$

para cualesquiera números reales $x \geq 0, y \geq 0$ tales que $|x - y| \leq 1$, con la igualdad si y solo si $\{x, y\} = \{0, 1\}$ o $\{x, y\} = \{1, 2\}$. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} 4\left(x^3 + y^3\right) &= 4(x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &\leq [(x+y) + (x^2 - xy + y^2)]^2 = [xy + x + y + (x-y)^2]^2 \\ &\leq (xy + x + y + 1)^2 = [(x+1)(y+1)]^2, \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se sigue de la desigualdad MA-MG con los números $x+y$ y x^2-xy+y^2 (los cuales claramente son no negativos). La igualdad se da en la primera desigualdad si $x+y = x^2-xy+y^2$ y, en la segunda desigualdad, si y solo si $|x-y| = 1$. Combinando estas igualdades obtenemos que $x + y = (x-y)^2 + xy = 1 + xy$, esto es, $(x-1)(y-1) = 0$, de donde obtenemos las soluciones $\{x, y\} = \{0, 1\}$ y $\{x, y\} = \{1, 2\}$. Ahora, sea $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ cualquier sucesión que cumple I) y II) y sea $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$. Como $0 \leq \text{mín}\{x_i, y_i\} \leq \text{máx}\{x_i, y_i\} \leq \text{mín}\{x_i, y_i\} + 1$, se puede usar la desigualdad (16) en la pareja (x_i, y_i) y sumar todas las desigualdades obtenidas para $1 \leq i \leq 2020$ para obtener que

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i+1)(y_i+1))^2 \geq 4 \sum_{i=1}^{2020} \left(x_i^3 + y_i^3\right) = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Entonces, para que se cumpla la condición III), todas las desigualdades deben ser igualdades. Por lo tanto, para todo $1 \leq i \leq 2020$ debemos tener que $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$ o $\{x_i, y_i\} = \{1, 2\}$. Por la condición II), debemos tener que $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$ para todo i o $\{x_i, y_i\} = \{1, 2\}$ para todo i.
Si $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq 2020$, entonces las sucesiones $(x_1, \ldots, x_{2020})$ y $(y_1, \ldots, y_{2020})$ tienen (entre las dos) 2020 ceros y 2020 unos. Como $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020})$ es una permutación de $(x_1, x_2, \ldots, x_{2020})$ se sigue que

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2020}) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{1010}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{1010}).$$

También observemos que esta sucesión cumple las condiciones I), II) y III) (para III), tomamos $(y_1, y_2, \ldots, y_{2020}) = (x_{2020}, x_{2019}, \ldots, x_1)$), lo que prueba que esta sucesión en efecto cumple. El mismo razonamiento funciona para el caso en el que $\{x_i, y_i\} = \{1, 2\}$ para todo i.

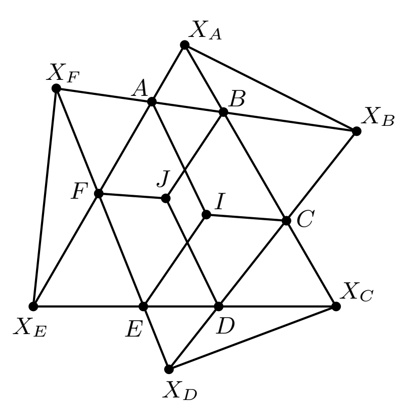
Solución del problema 3. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz). Notemos que

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 3(\angle A + \angle B) = 720°,$$

por lo que $\angle A + \angle B = 240°$. Prolongando los lados FA y BC hasta que se intersequen en X_A, tenemos que $\angle BAX_A = 180° - \angle A$, $\angle X_A BA = 180° - \angle B$ y

$$\angle AX_A B = -180° + \angle A + \angle B = 60°.$$

Similarmente, si $AB \cap CD = X_B$, $BC \cap DE = X_C$, $DC \cap FE = X_D$, $ED \cap FA = X_E$ y $FE \cap AB = X_F$, al tener que $\angle A + \angle B = 180° + 60°$, sabemos que se intersecan fuera del hexágono y que forman ángulos de 60°. Luego, los triángulos $X_A X_C X_E$ y $X_B X_D X_F$ son equiláteros.
Recordemos que las bisectrices de $\angle A$, $\angle C$ y $\angle E$ concurren en un punto, llamémosle I. Entonces, $\angle FAI = \angle IAB = \alpha = \frac{1}{2}\angle A$.



También tenemos que $\alpha = \angle BCI = \angle ICD = \angle DEI = \angle IEF$. Considerando $\angle B = 2\beta$, tenemos que $\alpha + \beta = 120°$. Además, $\angle CIA = \angle AIE = \angle EIC = 360° - (2\alpha + 2\beta) = 120°$. Entonces, los cuadriláteros IAX_AX_BC, ICX_CX_DE y IEX_EX_FA son cíclicos ya que los arcos $\widehat{AC}$, $\widehat{CE}$ y $\widehat{EA}$ abren ángulos de $60°$. Además, es fácil ver que los cuadriláteros X_FX_ABF, X_BX_CDB y X_DX_EFD también son cíclicos (por ejemplo, de las igualdades de ángulos $\angle FX_AB = 60° = \angle FX_FB$ se sigue que el primero es cíclico).
Demostraremos que las circunferencias X_FX_ABF, X_BX_CDB y X_DX_EFD van a tener un punto en común, ya que F, B y D son puntos en los lados del triángulo $X_AX_CX_E$. Para probar esto, sea J el punto en el que los circuncírculos de los triángulos X_ABF y X_CDB se intersecan. Notemos que $\angle BJF = 120°$ ya que $\angle FX_AB = 60°$ y $\angle DJB = 120°$ ya que $\angle BX_CD = 60°$. Entonces, $\angle FJD = 120°$ y, por lo tanto, $FJDX_E$ también es cíclico.
Queremos ver que BJ, DJ y FJ son las bisectrices de los ángulos $\angle B$, $\angle D$ y $\angle F$ del hexágono, respectivamente. Sabemos que $\angle JBX_C = \angle JDX_E = \angle JFX_A$ por los cíclicos antes mencionados. Basta probar que $\angle JBX_C = \beta$.
Sea $\angle JBX_C = \gamma$. Sabemos que $\angle X_ACI = \angle IAX_B$. Como X_AX_BCIA es cíclico, tenemos que X_AI y IX_B abren el mismo arco, entonces $X_AI = IX_B$. Similarmente obtenemos que $IX_C = IX_D$ y $IX_F = IX_E$. Luego,

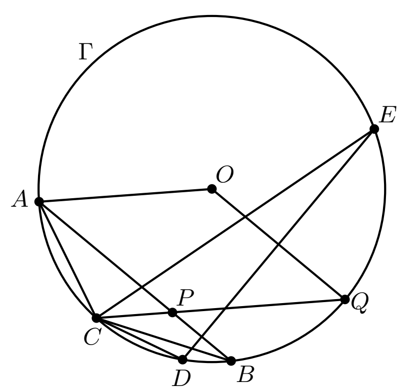
$$\begin{aligned}\angle X_DIX_C = \angle X_DCX_C = \angle X_BCX_A = \angle X_BIX_A = \angle X_BAX_A = \angle X_FIX_E \\ = 180° - 2\alpha.\end{aligned}$$

Entonces, los triángulos IX_BX_A, IX_DX_C y IX_FX_E son semejantes pues los tres son isósceles y tienen el ángulo distinto igual. Luego, hay una rotación con centro en I que manda X_D a X_C, X_B a X_A y X_F a X_E. Por lo tanto, hay una rotación que manda el triángulo IX_DX_B al triángulo IX_CX_A, ya que son triángulos congruentes por el criterio LAL. Se sigue que $X_AX_C = X_DX_B$ y, por lo tanto, los triángulos equiláteros $X_AX_CX_E$ y $X_BX_DX_F$ son congruentes.
Recordemos que los cuadriláteros X_FX_ABJF, JBX_BX_CD y JDX_DX_EF son cíclicos. Entonces, $\angle FX_FJ = \angle FX_AJ$ y $\angle JX_DF = \angle JX_EF$, de donde se sigue que los triángulos JX_AX_E y JX_FX_D son semejantes. Sin embargo, sabemos que $X_AX_E = X_FX_D$, luego los triángulos mencionados anteriormente son congruentes y, en consecuencia, $JX_A = JX_F$ y $JX_E = JX_D$. De aquí se sigue que $\angle JX_FX_A = \angle X_FX_AJ$ y, al ser estos ángulos inscritos del circuncírculo del triángulo X_FX_ABJF, resulta que $\angle X_FBJ = \angle X_FX_AJ = \angle JX_FX_A = \angle JFX_A = \gamma$. Como $\angle X_FBJ = 2\beta - \angle JBC = 2\beta - \gamma$, se sigue que $\gamma = \angle X_FBJ = 2\beta - \gamma$, esto es, $\beta = \gamma$.
Por lo tanto, BJ, DJ y FJ son las bisectrices de los ángulos $\angle B$, $\angle D$ y $\angle F$ en el hexágono y estas concurren en J.

Solución del problema 4. (Solución de Karla Rebeca Munguía Romero). Consideremos un acomodo para los primeros $n-1$ números que sea fresco. Si intercambiamos el número en la posición k, con $1 \leq k \leq n-1$, con el número n y colocamos al número en la posición k al final, el acomodo es fresco para n, porque al revisar las primeras j posiciones con $j < k$, hay exactamente lo mismo que al revisar las primeras j posiciones en el acomodo fresco para $n-1$, así que no hay contradicciones, y al revisar

para j's mayores o iguales a k, siempre aparece el número n, así que algún número del 1 al j no apareció, entonces no son exactamente los números del 1 al j, así que no hay contradicción, por lo que este acomodo es fresco.
Para cada uno de los acomodos de $n-1$ números, veamos que en un acomodo fresco $n-1$ no puede ser nunca el último número (pues revisando los primeros $n-2$ hay contradicción), así que en esos nuevos acomodos para n, $n-1$ nunca fue un penúltimo número, así que para cada acomodo de $n-1$ consideremos también el que $1)$ traslada el penúltimo a la última posición, $2)$ pone a $n-1$ en la penúltima posición, $3)$ pone a n donde estaba $n-1$, es decir, pasamos de un acomodo de $n-1$ a uno de n que tienen los mismos números en las mismas posiciones, excepto que el último del acomodo de $n-1$ es ahora el último de la de n, n está donde estaba el $n-1$, y $n-1$ está en la penúltima posición del nuevo acomodo. El acomodo funciona para n porque antes de poder tomar n se toma lo mismo de antes, y después de tomar n, como se toma n no serán los primeros j exactamente. De los acomodos generados, no hay dos iguales entre sí pues si hubiera dos iguales, a debió haber sido el último en ambos y $n-1$ estuvo en la misma posición. Como los demás no se mueven, cada fresco de $n-1$ da un acomodo distinto de n con este algoritmo.
De los acomodos que salen de poner a n en la posición k, $1 \leq k \leq n-1$ y al número en la posición k al final no son iguales entre sí, porque si no, como los n's están en el mismo lugar y el último número es el mismo, al cambiar el último número con n, las primeras $n-1$ posiciones van a ser iguales.
Como hay $n-1$ posibles valores para k y un acomodo ajeno a estos, para cada fresco de $n-1$, hay n generados frescos nuevos en f_n. Concluimos entonces que $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$.

Solución del problema 5. (Solución de Nathalia Jasso Vera). Sea $\alpha = \angle OAB = \angle OBA$ (son iguales pues $OA = OB$). Como $PB = PC$, P está sobre la mediatriz de BC, al igual que O, de donde OP es la mediatriz de BC.



Como $AO = AP$, el triángulo AOP es isósceles, lo cual implica que $\angle AOP = \angle OPA = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Como $\angle AOB = 180° - 2\alpha$, tenemos que $\angle BOP = 90° - \frac{3}{2}\alpha$, de donde se sigue que $\angle PBC = \angle BCP = \frac{\alpha}{2}$. Luego, $\angle CPA = \alpha$, por ser ángulo externo. Esto implica que AO y CP son paralelas. Como $AO = AP = OC = R$, $AOPC$ es un trapecio isósceles con $AC = OP$.

Sea Q la intersección de CP con la perpendicular a ED por O. Como AB y ED son perpendiculares, tenemos que OQ y AB son paralelas y, como AO y CP son paralelas, tenemos que $\angle APC = \angle OQC = \alpha$. Luego, $\alpha = \angle OCP$ y $OC = OQ$, de donde se sigue que Q está en Γ.
Como OQ es mediatriz de ED por construcción, tenemos que Q es el punto medio del arco $\widehat{ED}$, lo cual implica que CP es bisectriz del ángulo $\angle DCE$. Veamos que, por simetría $OQBP$ también es un trapecio isósceles congruente al trapecio $AOPC$, de donde $QB = OP = AC$. Además, como B es el reflejado de P por ED, resulta que Q es el reflejado de O por ED y, como $EQBD$ es cíclico, se sigue que $DPOE$ también es cíclico.
Dado que ED es mediatriz de OQ, tenemos que $OE = EQ$. Pero $R = EO = OQ$ implica que $R = EQ = DQ = PQ$, pues Q es el punto medio del arco $\widehat{ED}$ y $OQBP$ es un trapecio isósceles con $OQ = OB = QP = R$. Entonces, Q es el circuncentro del triángulo DPE. Como Q es el punto medio del arco $\widehat{ED}$ y P está en la bisectriz del ángulo $\angle DCE$, resulta que P debe ser el incentro del triángulo DCE.

Solución del problema 6. Los únicos enteros que cumplen lo deseado son $m = 2, 10$. Consideremos $m > 1$ un entero para el cual la secuencia definida contiene puros cuadrados perfectos. Primero veamos que $m-1$ es potencia de 3. Supongamos que $m-1$ es par. Luego, $a_4 = 5m - 1$ es divisible por 4, lo cual implica que $m \equiv 1 \pmod 4$. Entonces, $a_5 = 5m^2 + 3m - 1 \equiv 3 \pmod 4$, de donde se sigue que a_5 no puede ser un cuadrado, lo que es una contradicción. Entonces $m - 1$ es impar.
Supongamos que un primo impar $p \neq 3$ divide a $m - 1$. Notemos que $a_n - a_{n-1} \equiv a_{n-2} - a_{n-3} \pmod p$. Se sigue que la secuencia módulo p tiene la forma 1, 1, 4, 4, 7, 7, 10, 10, ... En efecto, un argumento inductivo sencillo muestra que $a_{2k} \equiv a_{2k-1} \equiv 3k - 2 \pmod p$ para $k \geq 1$. Como $\text{mcd}(p, 3) = 1$, tenemos que la secuencia $a_n \pmod p$ contiene todos los residuos módulo p, lo que es una contradicción, pues solo $\frac{p+1}{2}$ residuos módulo p son cuadrados. Esto muestra que $m - 1$ es potencia de 3.
Sean h y k enteros tales que $m = 3^k + 1$ y $a_4 = h^2$. Tenemos que $5 \cdot 3^k = (h-2)(h+2)$. Como $\text{mcd}(h-2, h+2) = 1$, tenemos que $h - 2 = 1, 3^k$ o 5, y $h + 2 = 5 \cdot 3^k, 5$ o 3^k, respectivamente. En los primeros dos casos tenemos que $k = 0$ y, en el último caso, tenemos que $k = 2$. Esto implica que $m = 2$ o $m = 10$.
Veamos que $m = 2$ y $m = 10$ cumplen lo requerido. Sea $t = 1$ o $t = 3$, de modo que $m = t^2 + 1$. Sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$, una sucesión de enteros definida por $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$ y $b_n = tb_{n-1} + b_{n-2}$ para todo $n \geq 4$. Claramente, $a_n = b_n^2$ para $n = 1, 2, 3$. Notemos que si $m = 2$, entonces $a_4 = 9$ y $b_4 = 3$ y, si $m = 10$, entonces $a_4 = 49$ y $b_4 = 7$. En cualquier caso tenemos $a_4 = b_4^2$.
Si $n \geq 5$, tenemos que

$$\begin{aligned} b_n^2 + b_{n-3}^2 &= (tb_{n-1} + b_{n-2})^2 + (b_{n-1} - tb_{n-2})^2 = (t^2 + 1)(b_{n-1}^2 + b_{n-2}^2) \\ &= m(b_{n-1}^2 + b_{n-2}^2). \end{aligned}$$

Entonces, de manera inductiva es fácil probar que $a_n = b_n^2$ para todo $n \geq 1$. Con lo que concluimos.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*

2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*

3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*

4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*

2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*

3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Mauricio Adrián Che Moguel

Eugenio Daniel Flores Alatorre

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Isabel Alicia Hubard Escalera

Leonardo Martínez Sandoval

Mónica Mateos Cisneros

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez

Cintillo Legal

Tzaloa, Año 2020 No. (1, 2, 3, 4), revista electrónica de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, es una publicación trimestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, Col. San Andrés Totoltepec, Delegación Tlalpan, C.P. 14400, Ciudad de México, Tel. 55 5849-6709, http://www.smm.org.mx, smm@smm.org.mx.
http://www.ommenlinea.org/publicaciones/revista-tzaloa-2/

Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios.

Reservas del Uso de Derecho: En trámite.