TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2020, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Noviembre de 2020

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2020, Número 4

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *El triángulo órtico, el ortocentro y una cascada de curiosidades*, de José Antonio Gómez Ortega. En él, se abordan algunas de las propiedades más importantes del triángulo órtico de un triángulo y se presentan ejemplos resueltos de problemas que han aparecido en las olimpiadas de matemáticas alrededor del mundo. Estamos seguros que esta aportación será de mucha utilidad para todos los lectores, principalmente para los lectores avanzados.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este cuarto y último número del año 2020, incluimos los exámenes con soluciones de la 61^a Olimpiada Internacional de Mátemáticas (IMO) que se llevó a cabo de manera virtual el pasado mes de septiembre de 2020. Hemos incluido también el examen de la prueba individual del nivel I de la cuarta etapa de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de la Ciudad de México 2019-2020. Agradecemos a Denisse Escobar, delegada de la OMMEB de la Ciudad de México, por habernos proporcionado la información y el examen de este certamen. También hemos incluido los exámenes de la tercera etapa de la XXXIV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato. Agradecemos a Myriam Hernández Ketchul por habernos proporcionado la información y los exámenes de este certamen.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.

- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2001. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2020-2021 y, para el 1° de julio de 2021, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará de forma virtual durante la segunda semana de noviembre de 2020. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2020 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIII Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (2021) y a la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (2021).

De entre los concursantes nacidos en 2004 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2021).

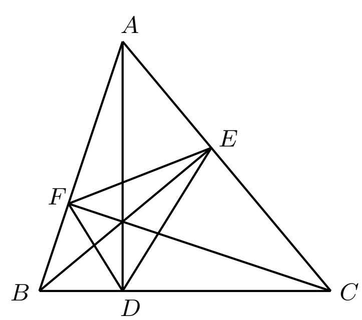
De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la X Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2021.

El triángulo órtico, el ortocentro y una cascada de curiosidades

Por José Antonio Gómez Ortega

Nivel Avanzado

Para un triángulo ABC su **triángulo órtico** es el que tiene por vértices a los pies de las alturas de ABC, esto es, si AD, BE y CF son las alturas del triángulo ABC con D, E y F sobre las rectas BC, CA y AB, respectivamente, entonces su triángulo órtico es DEF.



Algunas propiedades del triángulo órtico

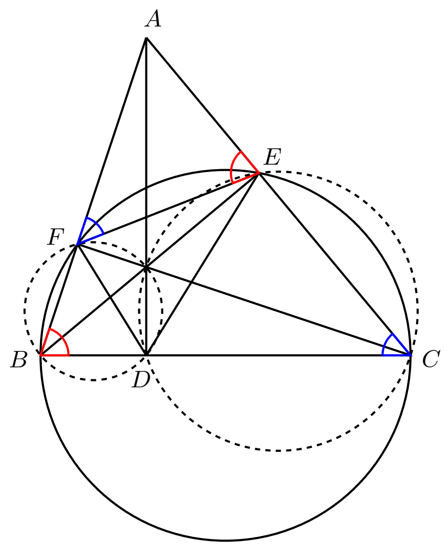
A continuación veremos una serie de propiedades que involucran al triángulo órtico de un triángulo.

Propiedad 1. Sea ABC un triángulo con ortocentro H. Los triángulos ABC, HBC, HCA y HAB tienen a DEF como triángulo órtico.

Demostración. Solamente hay que verificar en cada triángulo que los pies de las alturas son D, E y F. En el triángulo HBC los pies de las alturas desde B y C son, respectivamente, F y E, por lo que el triángulo órtico de HBC es DFE. Análogamente, para HCA y HAB sus triángulos órticos son EDF y FED, respectivamente.
□

Propiedad 2. Sea ABC un triángulo y sea DEF su triángulo órtico. Entonces, los triángulos ABC, AEF, DBF y DEC son semejantes entre sí.

Demostración. Como el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico, tenemos que $\angle AEF = \angle ABC$ y $\angle EFA = \angle ACB$, lo cual implica que los triángulos ABC y AEF son semejantes.



De manera análoga se prueba la semejanza de los triángulos ABC y DBF, así como la semejanza de los triángulos ABC y DEC. □

Propiedad 3. Sea ABC un triángulo con ortocentro H y sea DEF su triángulo órtico. Si el triángulo ABC es acutángulo, entonces H es el incentro de DEF. Si ABC es obtusángulo, entonces H es un excentro de DEF. En general, A, B, C y H son, en algún orden, los excentros e incentro del triángulo DEF.

Demostración. Como los cuadriláteros $HDCE$, $BCEF$ y $HFBD$ son cíclicos, tenemos que DH es bisectriz del ángulo $\angle D$. Además, tenemos que A, B, C y H cumplen que cada uno de ellos es el ortocentro de los otros tres. □

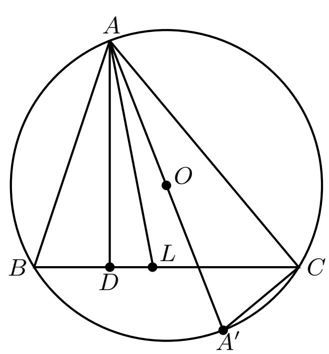
Propiedad 4. (Euler) Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. El circuncentro del triángulo DEF es el centro de la circunferencia de los nueve puntos y es el punto medio de HO, donde H y O son el ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente.

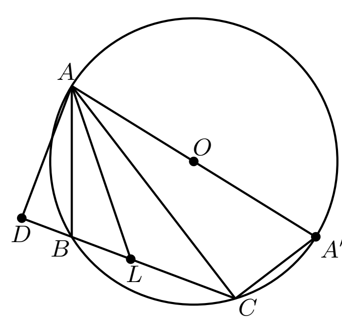
Demostración. Existen varias pruebas de esta afirmación, la que se presenta a continuación usa potencia de un punto con respecto a una circunferencia y ejes radicales. Como $BCEF$ es un cuadrilátero cíclico, la potencia de A con respecto a la circunferencia circunscrita a tal cuadrilátero es $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Luego, $AF \cdot AC' = AE \cdot AB'$ donde B' y C' son los puntos medios de CA y AB, respectivamente. Por lo tanto, F, C', E y B' se encuentran sobre una misma circunferencia, digamos $\mathcal{C}_A$. Análogamente, D, A', F y C' están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_B$ y también D, A', E y B' están sobre una circunferencia $\mathcal{C}_C$. Si dos de estas tres circunferencias coinciden, entonces las tres coinciden. Pero si no, los ejes radicales por pares de estas tres circunferencias son los lados del triángulo ABC. Luego, los tres ejes no son concurrentes, lo que es una contradicción. Por lo tanto, los seis puntos D, E, F, A', B' y C' se encuentran sobre una circunferencia $\mathcal{N}$. Aplicando lo anterior al triángulo HBC, se tiene también que los puntos medios de HB y HC son también parte la circunferencia $\mathcal{N}$. Una vez más aplicando el razonamiento a HCA, se obtiene que el punto medio de HA está sobre la circunferencia $\mathcal{N}$, luego en tal circunferencia están los siguientes 9 puntos: los pies de las alturas, los puntos medios de los lados y los puntos medios de los segmentos HA, HB y HC. Euler también notó que el ortocentro H, el centroide G y el circuncentro O de un triángulo ABC son colineales y que $HG = 2GO$. Para el triángulo medial $A'B'C'$ se tiene que su ortocentro es O, su centroide es G y su circuncentro es otro punto que está alineado con O y G, que usualmente se denota por N y, como cumple $OG = 2GN$, no es difícil concluir que N es el punto medio de HO. $\square$

Propiedad 5. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Las perpendiculares desde A, B y C a los lados EF, FD y DE, respectivamente, concurren en el circuncentro del triángulo ABC.

Demostración. Comenzamos demostrando los siguientes dos resultados.

Lema 1. La bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$ del triángulo ABC, es también la bisectriz del ángulo que forman la altura AD y el diámetro AA' del circuncírculo de ABC.





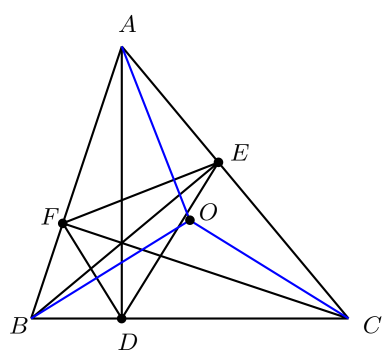
Demostración. Sea L el pie de la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ sobre el segmento BC. En los triángulos rectángulos ABD y $AA'C$, tenemos que $\angle DBA = \angle CA'A$. Luego, estos triángulos son semejantes, por lo que $\angle BAD = \angle A'AC$. Por lo tanto, AL es bisectriz del ángulo $\angle DAA'$ si y solo si AL es bisectriz del ángulo $\angle BAC$. $\square$

Lema 2. Con la notación del Lema 1, tenemos que $\angle DAA' = |\angle B - \angle C|$.
Demostración. Supongamos que $\angle B \geq \angle C$. Como $\angle DAO + 2(90^\circ - \angle B) = \angle A$, tenemos que $\angle DAO = \angle A + 2\angle B - (\angle A + \angle B + \angle C) = \angle B - \angle C$.
De manera análoga se prueba el caso $\angle B \leq \angle C$. $\square$

Continuemos con la demostración de la Propiedad 5. La perpendicular desde A a EF es la altura AD' desde A en el triángulo AEF, pero este triángulo es semejante al triángulo ABC. Luego, el ángulo entre la altura AD' con el lado AE es igual al ángulo entre la altura AD y el lado AB del triángulo ABC. Ahora, usando el Lema 1, se sigue que AD' deberá pasar por O, el circuncentro del triángulo ABC. $\square$

Propiedad 6. El área del triángulo ABC es igual a Rs, donde R es el circunradio del triángulo ABC y s es el semiperímetro de su triángulo órtico DEF.

Demostración.



Tenemos que

$$\begin{aligned}(ABC) &= (OEAF) + (OFBD) + (ODCE) = \frac{R}{2} \cdot EF + \frac{R}{2} \cdot FD + \frac{R}{2} \cdot DE \\ &= \frac{R}{2}(EF + FD + DE) = Rs.\end{aligned}$$

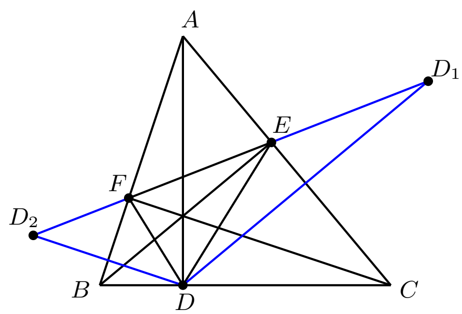
$\square$

Propiedad 7. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. El triángulo formado por las tangentes al circuncírculo del triángulo ABC en los vértices, es semejante al triángulo DEF.

Demostración. La tangente por A al circuncírculo del triángulo ABC, es perpendicular al radio AO. Por otro lado por la Propiedad 5, este radio es también perpendicular a EF. Luego, la tangente en A y EF son paralelas. Análogamente, las tangentes en B y C son paralelas a FD y DE, respectivamente. El resultado es inmediato. $\square$

Propiedad 8. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D_1 y D_2 son las reflexiones de D sobre CA y AB, respectivamente, entonces D_1, D_2, E y F son colineales.

Demostración. Por la Propiedad 2, tenemos que $\angle AEF = \angle DEC$ y por ser D_1 el reflejado de D, tenemos que $\angle DEC = \angle CED_1$. Estas dos igualdades implican que $\angle AEF = \angle CED_1$, lo que significa que D_1, E y F son colineales.



Análogamente, obtenemos que D_2, E y F también son colineales. □

Propiedad 9. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D_1 y D_2 son las reflexiones de D sobre CA y AB, respectivamente, entonces:

a) D_1D_2 es igual al perímetro de DEF.

b) $D_1D_2 = 2AD \operatorname{sen} A$.

c) $D_1D_2 = \frac{8(ABC)^2}{abc}$.

Demostración.

a) Se sigue de que $D_1E = DE$ y $FD_2 = DF$.

b) Notemos que la circunferencia de centro A y radio AD pasa por D_1 y D_2. Además, tenemos que $\angle D_2AD_1 = 2\angle A$. Luego, $\operatorname{sen} \angle A = \frac{\frac{D_1D_2}{2}}{AD}$.

c) Tenemos que $D_1D_2 = 2AD \operatorname{sen} A = 2\frac{a \cdot AD}{a}\frac{bc \cdot \operatorname{sen} A}{bc} = \frac{8(ABC)^2}{abc}$.

□

Propiedad 10. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Los perímetros de ABC y DEF están relacionados de la siguiente manera

$$p(DEF) = \frac{r}{R}p(ABC),$$

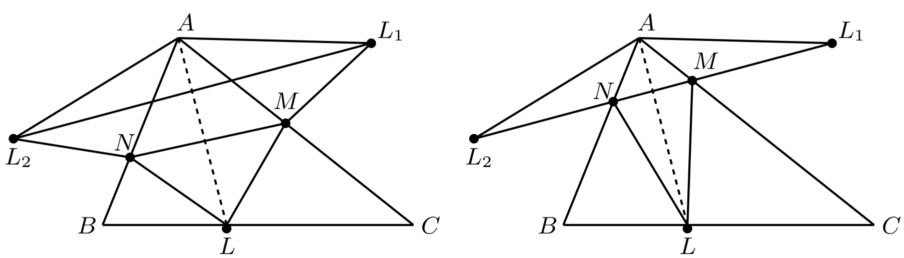
donde r y R son el inradio y circunradio del triángulo ABC, respectivamente.

Demostración. Por la Propiedad 6, tenemos que $p(DEF) = \frac{2(ABC)}{R} = \frac{rp(ABC)}{R}$. $\square$

Propiedad 11. (Fagnano) De los triángulos inscritos dentro de un triángulo acutángulo, el órtico es el de menor perímetro.

Demostración (Fejer). Sea LMN un triángulo inscrito en un triángulo ABC. Sean L_1 y L_2 las reflexiones de L sobre los lados CA y AB, respectivamente. Es claro que $LM = ML_1$ y $L_2N = NL$. Por lo que el perímetro del triángulo LMN es

$$LM + MN + NL = L_2N + NM + ML_1 \geq L_1L_2.$$



De lo anterior podemos asegurar que una vez fijado el punto L, los puntos M y N que hacen mínimo el perímetro de LMN son las intersecciones de L_1L_2 con CA y AB, respectivamente. Ahora veamos cuál es la mejor opción para el punto L. Ya sabemos que el perímetro del triángulo LMN es L_1L_2, así que el punto L deberá hacer esta cantidad mínima.
Es claro que $AL = AL_1 = AL_2$ y que AC y AB son bisectrices de los ángulos $\angle LAL_1$ y $\angle L_2AL$, respectivamente, por lo que $\angle L_2AL_1 = 2\angle BAC = 2\alpha$ es un ángulo fijo. La ley de los cosenos aplicada en el triángulo AL_2L_1 nos garantiza que:

$$(L_1L_2)^2 = (AL_1)^2 + (AL_2)^2 - 2AL_1 \cdot AL_2 \cos 2\alpha = 2AL^2(1 - \cos 2\alpha).$$

Así, L_1L_2 es mínimo cuando AL es la altura desde A del triángulo ABC. No es difícil ver que cuando AL es altura, los puntos M y N son los pies de las otras alturas[2]. Luego, el triángulo de perímetro mínimo es el órtico. $\square$

Propiedad 12. Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Si D', E' y F' son los puntos medios de EF, FD y DE, respectivamente y, si L, M y N son los pies de las perpendiculares desde D', E' y F' sobre BC, CA y AB, respectivamente, entonces

a) $D'L$, $E'M$ y $F'N$ son concurrentes.

b) AD', BE' y CF' son concurrentes.

[2]Los triángulos AL_2L_1 y ALL_1 son isósceles. Si $\beta = \angle AML_2 = \angle L_1MC$, tenemos que $\angle ML_1L = 90° - \beta$ y, como $\angle ALL_1 = \angle LCA = \angle C$, tenemos que $\angle C = (90° - \angle A) + (90° - \beta) = 180° - \angle A - \beta$, luego $\beta = 180° - \angle A - \angle C = \angle B$. Ahora podemos ver que el cuadrilátero $ABLM$ es cíclico y, como AL es perpendicular a BL, tenemos que BM es perpendicular a MA y, por consiguiente, BM es altura. Análogamente se prueba que CN es altura.

Demostración.

a) Bastará mostrar que $D'L$, $E'M$ y $F'N$ son bisectrices de los ángulos del triángulo $D'E'F'$. Esto es consecuencia de que las alturas AD, BE y CF son paralelas a $D'L$, $E'M$ y $F'N$, respectivamente y, que el triángulo $D'E'F'$ tiene lados paralelos a los del triángulo DEF.

b) Si L es el punto donde AD' corta a BC, tenemos por el teorema generalizado de la bisectriz que, $\frac{BL}{LC} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle FAL}{CA \operatorname{sen} \angle LAC}$. Este mismo teorema aplicado en el triángulo AFE, nos garantiza que $1 = \frac{FD'}{D'E} = \frac{AF \operatorname{sen} \angle FAL}{EA \operatorname{sen} \angle LAC}$. Las dos igualdades implican que $\frac{BL}{LC} = \frac{AB \cdot EA}{CA \cdot AF}$. Análogamente, obtenemos que $\frac{CM}{MA} = \frac{BC \cdot FB}{AB \cdot BD}$ y $\frac{AN}{NB} = \frac{CA \cdot DC}{BC \cdot CE}$. El resultado se sigue por el teorema de Ceva. $\square$

Observación. La demostración de la Propiedad 12 funciona para ver que AD', BE' y CF' son concurrentes en el caso en que tanto AD, BE, CF como DD', EE', FF' son dos ternas de cevianas que concurren.

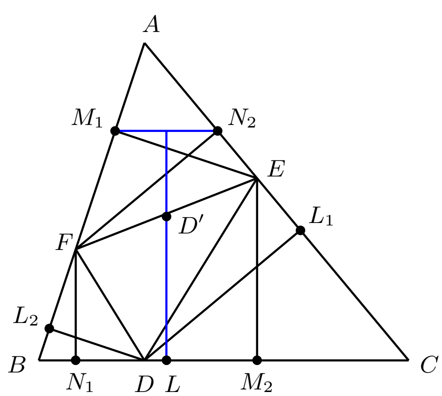
Propiedad 13. (Circunferencia de Taylor) Sean ABC un triángulo y DEF su triángulo órtico. Sean L_1 y L_2 las proyecciones de D sobre CA y AB, respectivamente; M_1 y M_2 las proyecciones de E sobre AB y BC, respectivamente; N_1 y N_2 las proyecciones de F sobre BC y CA, respectivamente. Entonces,

a) $M_1N_2 \parallel BC$, $N_1L_2 \parallel CA$ y $L_1M_2 \parallel AB$.

b) Los puntos L_1, L_2, M_1, M_2, N_1 y N_2 están sobre una misma circunferencia, llamada **circunferencia de Taylor**. Su centro es el incentro del triángulo medial del triángulo órtico DEF.

Demostración.

a) Como $BCEF$ y FEN_2M_1 son cuadriláteros cíclicos, tenemos que BC y M_1N_2 son paralelas. De manera análoga se prueba que $N_1L_2 \parallel CA$ y $L_1M_2 \parallel AB$.



b) Como FEN_2M_1 está inscrito en una circunferencia de diámetro EF, la mediatriz de M_1N_2 pasa por D' el punto medio de EF. Pero M_1N_2 es paralela a BC, por lo que la mediatriz de M_1N_2 corta a BC perpendicularmente en L, el mismo punto del problema anterior. Luego, las mediatrices de M_1N_2, L_1M_2 y N_1L_2 son concurrentes en el mismo punto de la parte a) del problema anterior, denotémoslo por I'. Notemos que $D'L$ es también mediatriz de N_1M_2, pues EFN_1M_2 es un trapecio con $FN_1 \parallel EM_2 \parallel D'L$ y D' es punto medio de EF. Luego, N_1 y M_2 son equidistantes desde el punto I', lo que significa que los puntos L_1, L_2, M_1, M_2 y N_1, N_2 están en una circunferencia de centro I'. De la demostración de la Propiedad 12-a), concluimos que el punto I' es el incentro del triángulo medial de DEF, esto es, I' es el incentro del triángulo $D'E'F'$. □

Propiedad 14. En un triángulo acutángulo ABC, si D, E, F, P, Q, R son los pies de las perpendiculares desde A, B, C, A, B, C sobre BC, CA, AB, EF, FD, DE, respectivamente, entonces se cumple que $(ABC)(PQR) = (DEF)^2$, donde (XYZ) denota el área del triángulo XYZ.

Demostración. Comenzamos demostrando el siguiente resultado.

Lema. Si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC tales que $\frac{BL}{LC} = p$, $\frac{CM}{MA} = q$ y $\frac{AN}{NB} = r$, entonces

$$(LMN) = (ABC) \cdot \frac{1 + pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}.$$

Demostración. Si $\frac{BL}{LC} = p$, entonces $\frac{BC}{LC} = \frac{BL}{LC} + \frac{LC}{LC} = p + 1$, por lo que $LC = \frac{1}{p+1}BC$ y, por consiguiente, $BL = BC - LC = (1 - \frac{1}{p+1})BC$.
Análogamente, obtenemos que $MA = \frac{1}{q+1}CA$, $CM = (1-\frac{1}{q+1})CA$, $NB = \frac{1}{r+1}AB$ y $AN = (1 - \frac{1}{r+1})AB$.
Si hacemos $x = \frac{1}{p+1}$, $y = \frac{1}{q+1}$ y $z = \frac{1}{r+1}$, obtenemos que $\frac{(ANM)}{(ABC)} = y(1 - z)$, $\frac{(BLN)}{(ABC)} = x(1 - y)$ y $\frac{(CML)}{(ABC)} = z(1 - x)$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}(LMN) =&(ABC) - (ANM) - (BLN) - (CML)\\ =&(ABC)[1 - y(1 - z) - x(1 - y) - z(1 - x)]\\ =&(ABC)[1 - (x + y + z) + (xy + yz + zx)]\\ =&(ABC)[xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z)]\\ =&(ABC) \cdot \frac{1 + pqr}{(p + 1)(q + 1)(r + 1)}.\end{aligned}$$

□

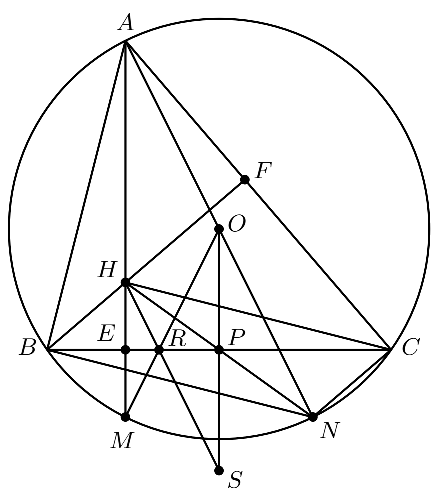
Continuemos con la demostración de la Propiedad 14. Como los triángulos ABC y AEF son semejantes, tenemos que $\frac{BD}{DC} = \frac{EP}{PF} = p$. Análogamente, tenemos que $\frac{CE}{EA} = \frac{FQ}{QD} = q$ y $\frac{AF}{FB} = \frac{DR}{RE} = r$. Por el lema anterior, tenemos que $(DEF) = (ABC) \cdot \frac{1+pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}$ y $(PQR) = (DEF) \cdot \frac{1+pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)}$. Estas dos últimas igualdades implican que $(ABC)(PQR) = (DEF)^2$. □

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas

A continuación veremos algunos ejemplos de problemas de olimpiadas de matemáticas que involucran al triángulo órtico.

Ejemplo 1. (XII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, 1997). En un triángulo ABC sean AE y BF dos alturas y sea H el ortocentro. La recta simétrica de AE respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en A y la recta simétrica de BF respecto de la bisectriz del ángulo en B, se intersecan en un punto O. Las rectas AE y AO cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita del triángulo ABC en los puntos M y N, respectivamente. Sean P la intersección de BC con HN, R la intersección de BC con OM y S la intersección de HR con OP. Demostrar que $AHSO$ es un paralelogramo.

Solución. Como $\alpha = \angle BAH = \angle OAC$ y $\angle ABC = \angle ANC$, tenemos que el triángulo ABE es semejante al triángulo ANC. Así que $\angle ACN = 90°$, de donde AN es un diámetro del circuncírculo del triángulo ABC. Análogamente, obtenemos que la simétrica de BF respecto a la bisectriz de B, es un diámetro por lo que el punto de intersección O es el circuncentro. Como BH y NC son perpendiculares a CA, tenemos que BH y NC son paralelas. También como BN y CH son perpendiculares a AB, tenemos que HC y BN son paralelas y, por consiguiente, el cuadrilátero $HBNC$ es un paralelogramo.



Ahora, como las diagonales de un paralelogramo se intersecan en su punto medio, tenemos que $BP = PC$, lo cual implica que OP es la mediatriz de BC. Luego, OP es perpendicular a BC y AH es paralela a OP. Sea $\beta = \angle MAN$. Como, $\angle HBE = \angle EBM = \alpha + \beta$, los triángulos rectángulos BEH y BEM son congruentes, por lo que $HE = EM$. Luego, son congruentes HER y MER, lo mismo que OPR y SPR. Luego, $OP = PS$. Es conocido que $AH = 2OP$, por lo que $AH = OS$. Esto último y el que AH sea paralela a OS nos garantizan que $AHSO$ es un paralelogramo.

Ejemplo 2. (XIV Olimpiada iberoamericana de matemáticas, 1999). Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

a) Prueba que OA es perpendicular a PQ.

b) Si M es el punto medio de BC, muestra que $AP^2 = 2AD \cdot OM$.

Solución.

a) Se sigue de la Propiedad 5.

b) Sea T la intersección de PQ con el diámetro AA'. En el triángulo rectángulo APA', tenemos que PT es altura, por lo que los triángulos rectángulos APA' y ATP son semejantes. Luego, $\frac{AP}{AT} = \frac{AA'}{AP}$, por lo que,

$$AP^2 = 2R \cdot AT. \tag{1}$$

Como los triángulos ABC y AEF son semejantes y AT es altura en AEF, tenemos que

$$\frac{AT}{AD} = \frac{AF}{AC} = \cos \angle A. \tag{2}$$

Pero en el triángulo OBM, tenemos que $\angle BOM = \angle A$. Luego,

$$\cos \angle A = \frac{OM}{R}. \tag{3}$$

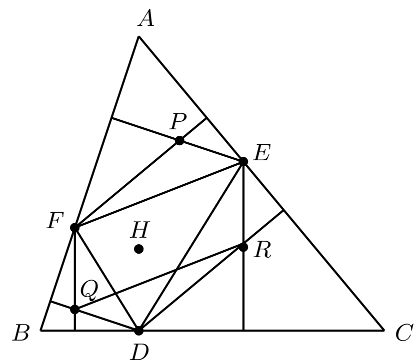
Por lo tanto, de (1), (2) y (3), se sigue que

$$AP^2 = 2R \cdot AT = 2R \cdot AD \cos \angle A = 2AD \cdot OM.$$

Ejemplo 3. (Lista corta de la 4ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, 2002). Sea ABC un triángulo acutángulo y sean D, E y F los pies de las alturas desde A, B y C, respectivamente. Si P, Q y R son los ortocentros de los triángulos AFE, BDF y CED, respectivamente, demuestra que el ortocentro del triángulo PQR es el circuncentro del triángulo ABC.

Solución. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Demostraremos que AP, BQ y CR son las alturas del triángulo PQR y que concurren en O. Para ver que AP es perpendicular a QR, bastará ver QR es paralela a EF. Pero tanto ER como FQ son perpendiculares a BC, por lo que ER y FQ son paralelas. Si probamos que $ER = FQ$, tendremos que $EFQR$ es un paralelogramo, por lo que EF será paralela a QR.
Como $AFDC$ es cíclico, tenemos que $\angle BDF = \angle BAC$. Por lo tanto, los triángulos BDF y BAC son semejantes. Si H es el ortocentro del triángulo ABC, los segmentos FQ y CH se corresponden en los triángulos semejantes BDF y BAC, por lo que $\frac{FQ}{CH} = \frac{BF}{BC}$, esto es, $FQ = \frac{BF \cdot CH}{BC}$. Análogamente, son semejantes los triángulos CDE y CAB, de donde obtenemos que $ER = \frac{EC \cdot BH}{BC}$. Para ver que $ER = FQ$, solo

faltaría ver que $BF \cdot CH = EC \cdot BH$, pero esto es equivalente a $\frac{BF}{BH} = \frac{EC}{CH}$, que se sigue de la semejanza de los triángulos BHF y CHE.



Por último, nos falta ver que AP, BQ y CR pasan por O. Como AP es altura del triángulo AFE, tenemos que $\angle PAC = 90° - \angle ABC$, donde la última igualdad se sigue de que $BFEC$ es cíclico. Por otro lado, el triángulo AOC es isósceles y $180° - \angle AOC = 2\angle OAC$. Luego, $\angle OAC = 90° - \angle ABC = \angle PAC$, lo cual implica que AP y AO son la misma recta. Esto muestra que AP pasa por O. De manera análoga se prueba que BQ y CR pasan por O.
Otra manera de ver que $EFQR$ es un paraleogramo es como sigue: FQ y HD son paralelas, ya que son perpendiculares a BC. También HF y QD son paralelas, por ser perpendiculares a AB. Luego, $HFQD$ es un paralelogramo, por lo que $FQ = HD$. Análogamente, obtenemos que $EHDR$ es un paralelogramo, por lo que $ER = HD$. Por lo tanto, $EFQR$ es un paralelogramo.

Ejemplo 4. (7ª Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, 2005). En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo con los lados AB, BC y CA, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR sobre PQ, QR y RP, respectivamente.

a) Muestra que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

b) Muestra que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

Solución.

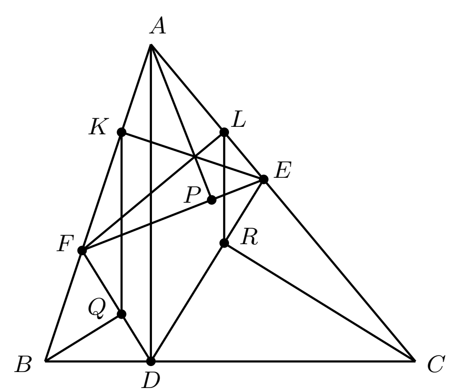
a) Una primera forma de ver la concurrencia es notando que los triángulos ABC y NLM son de lados paralelos (por ejemplo AB y QR son antiparalelas con respecto a PQ y RP, lo mismo que LN y RQ). Luego, son homotéticos, por lo que AN, BL y CM son concurrentes.
Otra forma de probar la concurrencia es la siguiente: Sean N', L' y M' las intersecciones de AN, BL y CM con BC, CA y AB, respectivamente. El teorema generalizado de la bisectriz, aplicado a AN' en el triángulo ABC y a AN en el triángulo APR nos garantiza que $\frac{BN'}{N'C} = \frac{AB \operatorname{sen} \angle PAN}{CA \operatorname{sen} \angle NAR}$ y $\frac{PN}{NR} = \frac{AP \operatorname{sen} \angle PAN}{RA \operatorname{sen} \angle NAR}$. Luego, las dos igualdades anteriores implican que $\frac{BN'}{N'C} = \frac{AB}{CA}\frac{RA}{AP}\frac{PN}{NR}$. En forma

análoga, obtenemos que $\frac{CL'}{L'A} = \frac{BC}{AB}\frac{PB}{BQ}\frac{QL}{LP}$ y $\frac{AM'}{M'B} = \frac{CA}{BC}\frac{QC}{RC}\frac{RM}{MQ}$. Por lo tanto, $\frac{BN'}{N'C}\frac{CL'}{L'A}\frac{AM'}{M'B} = 1$ y, por el teorema de Ceva, concluimos que AN, BL y CM son concurrentes.

b) Primero recordemos que ABC y NLM son triángulos de lados paralelos, luego son homotéticos desde el punto común de AN, BL y CM. Este punto común K es también el centro de homotecia de los incírculos de los triángulos ABC y NLM. Sabemos que si I y I_1 son los incentros de tales circunferencias, entonces K, I e I_1 son colineales. Pero el incentro del triángulo ABC es el circuncentro O_t del triángulo PQR y, el incentro H_t del triángulo LMN, es el ortocentro del triángulo PQR. Por lo tanto, estos tres puntos $I = O_t$, $I_1 = H_t$ y K son colineales.

Ejemplo 5. (Lista corta de la 46ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, 2005). En un triángulo acutángulo ABC, sean D, E, F, P, Q y R los pies de las perpendiculares desde A, B, C, A, B y C sobre BC, CA, AB, EF, FD y DE, respectivamente. Demuestra que $p(ABC)p(PQR) \geq p(DEF)^2$, donde $p(T)$ denota el perímetro del triángulo T.

Solución. Como ABC es acutángulo, los pies de las perpendiculares son puntos interiores de los lados. Es conocido que ABC y AEF son semejantes, luego los pies de las alturas en este último triángulo también son interiores a sus lados, en particular P está sobre EF. De manera análoga, Q y R son interiores a los lados de DEF.



Si K y L son los pies de las perpendiculares desde E y F sobre AB y CA, respectivamente, entonces los triángulos AKL y ABC son semejantes, por lo que KL y BC son paralelas.
Ahora, EK y BQ son alturas correspondientes en los triángulos semejantes AEF y DBF. Luego, los pies de estas dividen al lado opuesto correspondiente en la misma razón: $\frac{AK}{KF} = \frac{DQ}{QF}$. Esto implica que KQ y AD son paralelas. Análogamente, obtenemos que LR y AD son paralelas. Como KL es paralela a BC, también es perpendicular a AD y, por consiguiente, $QR \geq KL$.

De la semejanza de los triángulos AKL, AEF y ABC, se sigue que

$$\frac{KL}{EF} = \frac{AK}{AE} = \cos\angle A = \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

Luego, $QR \geq \frac{EF^2}{BC}$. De manera análoga obtenemos que $PQ \geq \frac{DE^2}{AB}$ y $RP \geq \frac{FD^2}{CA}$. Por lo tanto, será suficiente demostrar que

$$(AB+BC+CA)\left(\frac{DE^2}{AB} + \frac{EF^2}{BC} + \frac{FD^2}{CA}\right) \geq (DE+EF+FD)^2,$$

pero esto se deduce inmediatamente de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejemplo 6. (China, 1999). Sea ABC un triángulo con $\angle B < \angle C$. Sea D un punto sobre el lado BC tal que $\angle ADB$ es obtuso y sea H_1 el ortocentro del triángulo ABD. Supón que H es un punto dentro del triángulo ABC y que está sobre el circuncírculo del triángulo ABD. Demuestra que H es el ortocentro del triángulo ABC si y solo si HC y H_1D son paralelas y H_1 está sobre el circuncírculo del triángulo ABC.

Solución. Si H_1 es el ortocentro del triángulo ABD, entonces D es el ortocentro del triángulo ABH_1. Luego, $\angle H_1AD = \angle DBH_1$. Como H es el ortocentro del triángulo ABC, tenemos que $\angle CAH = \angle HBC$ y, como $ABDH$ es cíclico, resulta que $\angle HAD = \angle HBD$. Luego,

$$\angle CAH_1 = \angle CAH = \angle HBC = \angle HAD = \angle H_1AD = \angle DBH_1 = \angle CBH_1,$$

por lo que $CABH_1$ es cíclico. Finalmente, tenemos que HC y H_1D son paralelas por ser ambas perpendiculares a AB.
Recíprocamente, supongamos que H_1, el ortocentro del triángulo ABD, está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Entonces, H_1 es la intersección de la altura AD_1 de ABC con el circuncírculo de ABC. Notemos que BD_1 es altura del triángulo ABH_1 y esta corta al circuncírculo en C. Luego, $DD_1 = D_1C$. Si K es la intersección de CH con la altura AH_1, tenemos que CKD_1 y DH_1D_1 son triángulos rectángulos congruentes, por lo que K es el ortocentro del triángulo ABC. Ahora, como

$$D_1K \cdot D_1A = H_1D_1 \cdot D_1A = CD_1 \cdot D_1B = D_1D \cdot D_1B,$$

tenemos que A, K, D, B están sobre una misma circunferencia. Por lo tanto, K está en el circuncírculo del triángulo ABD y sobre la recta CH, lo mismo que H, de donde se sigue que $K = H$.

Ejemplo 7. (Ucrania, 1999). Sean AD, BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC y sea X un punto arbitrario dentro del triángulo DEF. Sean M, N, P, Q, R y S los pies de las perpendiculares desde X sobre las rectas AD, BC, BE, CA, CF y AB, respectivamente. Demuestra que MN, PQ y RS son concurrentes.

Solución. Es inmediato que los cuadriláteros $XMDN$, $XPEQ$ y $XRFS$ son rectángulos. Sean D_1, E_1 y F_1, respectivamente, sus centros. Recordemos que las bisectrices internas del triángulo órtico DEF son las alturas del triángulo ABC. Luego, las bisectrices del triángulo $D_1E_1F_1$ son paralelas a las alturas del triángulo ABC (note que DEF y $D_1E_1F_1$ son homotéticos desde X). Notemos que MN es la reflexión de DX en la bisectriz de D_1. El resultado se sigue de que DX, EX y FX son concurrentes y del hecho de que las reflexiones en las bisectrices de tres cevianas concurrentes de un triángulo, son también concurrentes[3].

Ejemplo 8. (Bulgaria, 2000). Una recta ℓ está trazada por el ortocentro H de un triángulo acutángulo ABC. Demuestra que las reflexiones de ℓ sobre los lados del triángulo son concurrentes.

Solución. Como ABC es acutángulo, el ortocentro H está dentro de ABC, por lo que la recta ℓ corta a dos de los lados, digamos CA y AB en Q y R, respectivamente. Si ℓ y BC son paralelas, tomemos cualquier punto P de la reflexión de ℓ en BC. Si ℓ y BC no son paralelas, tomemos por P la intersección de ℓ con la recta BC.
Sean D', E' y F' las intersecciones de las alturas AD, BE y CF con el circuncírculo, respectivamente. Las reflexiones de ℓ sobre los lados del triángulo son PD', QE' y RF'. Demostraremos que estas concurren.
Sea S la intersección de $E'Q$ y $F'R$. Tenemos que

$$\angle SE'A + \angle SF'A = \angle QE'A + \angle RF'A = \angle QHA + \angle RHA = \pi.$$

Luego, $SE'AF'$ es un cuadrilátero cíclico, por lo que S está sobre el circuncírculo del triángulo ABC.
Análogamente, si T es la intersección de $D'P$ y $E'Q$, obtenemos que T está sobre el circuncírculo del triángulo ABC. Pero entonces, $T = S$, ya que ambos son la intersección de $E'Q$ con el circuncírculo. Por lo tanto, PD', QE' y RF' son concurrentes.

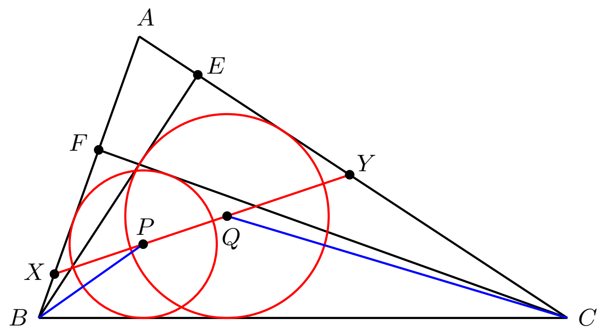
Ejemplo 9. (Taiwán, 2000). En un triángulo acutángulo ABC, $CA > BC$ y M es el punto medio de AB. Las alturas AD y BE se intersecan en H y, las rectas AB y DE, se intersecan en R. Demuestra que las dos rectas RH y CM son perpendiculares.

Solución. Sean CF la otra altura y S el pie de la perpendicular desde H sobre CM. Los puntos H, S, D, C y E están sobre una circunferencia de diámetro CH, ya que los ángulos en S, D y E son rectos. Los puntos D, E, F y M están en otra circunferencia, precisamente en la circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC. Los puntos M, S, H, F están en la circunferencia de diámetro MH, ya que los ángulos en S y F son rectos. Los ejes radicales (las rectas AB, SH y DE) de estas tres circunferencias tomadas por pares son concurrentes y, como AB y DE se intersecan en R, se sigue que los puntos R, H y S son colineales. Por lo tanto, la recta que determinan es perpendicular (así se eligió S) a CM.

Ejemplo 10. (San Petersburgo, 2000). Sean BE y CF las alturas de un triángulo acutángulo ABC. La recta por los incentros de los triángulos BCE y BCF, intersecan a las rectas AB y AC en X y Y, respectivamente. Demuestra que $AX = AY$.

[3] Esto se puede demostrar usando el teorema de Ceva en su forma trigonométrica.

Solución. Primero notemos que si P y Q son los centros de los circuncírculos, el cuadrilátero $BCQP$ es cíclico, pues $\angle BPC = \pi - (\angle PBC + \angle PCB) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ y $\angle BQC = \pi - (\angle QBC + \angle QCB) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



Como CQ es bisectriz del ángulo $\angle ECB$, tenemos que $\alpha = \angle YCQ = \angle QCB = \angle XPB$, donde la última igualdad se sigue por ser cíclico $BCQP$. Análogamente, tenemos que $\beta = \angle PBX = \angle CBP = \angle YQC$. Luego, los triángulos BPX y QCY son semejantes y, por consiguiente, los ángulos suplementarios en X y Y son iguales, por lo que AXY es un triángulo isósceles.

A continuación dejamos algunos ejercicios para el lector.

Ejercicios

En todos los ejercicios, DEF es el triángulo órtico de un triángulo ABC y H es el ortocentro del triángulo ABC.

1) Si la extensión de la altura AD del triángulo ABC corta al circuncírculo en D', demuestra que $HD = DD'$.

2) Sean D', E' y F' las intersecciones del circuncírculo de ABC con AD, BE y CF, respectivamente.
   a) Demuestra que los triángulos DEF y $D'E'F'$ son homotéticos desde H.
   b) Demuestra que los circuncírculos de los triángulos DEF y ABC son homotéticos desde H. ¿Cuál es el otro centro de homotecia?

3) Demuestra que $AD \cdot HD = BD \cdot DC$.

4) Demuestra que $AH \cdot HD = BH \cdot HE = CH \cdot HF$.

5) Demuestra que los circuncírculos de los triángulos ABC, HBC, AHC y ABH tienen el mismo circunradio.

6) Sean A_1BC y A_2BC dos triángulos inscritos en una misma circunferencia y sean H_1 y H_2 los ortocentros de los triángulos A_1BC y A_2BC, respectivamente. Demuestra que H_1H_2 y A_1A_2 son paralelas y de la misma longitud.

7) Sea A' el punto medio de BC. El circuncírculo del triángulo HDA' corta a las alturas BE y CF en E' y F', respectivamente. Demuestra que E y F son los puntos medios de las alturas y que los triángulos $DE'F'$ y ABC son semejantes.

8) Sean P y Q los pies de las perpendiculares desde A y B a los lados EF y FD del triángulo órtico DEF, respectivamente. Demuestra que $EP = QD$. Usa esto para demostrar que DP, EQ y FR son concurrentes, donde R es el pie de la perpendicular desde C al lado DE.

9) Demuestra que las cuatro proyecciones de D sobre CA, CF, BE y AB son colineales.

10) Si a, b, c son las longitudes de los lados de un triángulo ABC y R es el circunradio, demuestra que:
a) $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$, donde O es el circuncentro de ABC.
b) $GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$, donde G es el baricentro de ABC.
c) $AH^2 + BH^2 + CH^2 = 12R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

11) Sea ABC un triángulo acutángulo.
a) Si las áreas de los triángulos HBC, HCA y HAB son iguales, demuestra que el triángulo ABC es equilátero.
b) Si los perímetros de los triángulos HBC, HCA y HAB son iguales, demuestra que el triángulo ABC es equilátero.

12) Si ABC es un triángulo acutángulo, demuestra que $HD + HE + HF \leq 3r$ donde r es el inradio.

13) Determina la medida del ángulo $\angle BAC$ si $EA + AF = CE + FB$.

14) Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Si L, M y N son las intersecciones de AO, BO y CO con los lados BC, CA y AB, respectivamente, demuestra que

$$\text{Área}(LMN) \leq \frac{1}{4}\text{Área}(ABC)$$

y que la igualdad se da si y solo si el triángulo ABC es equilátero.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

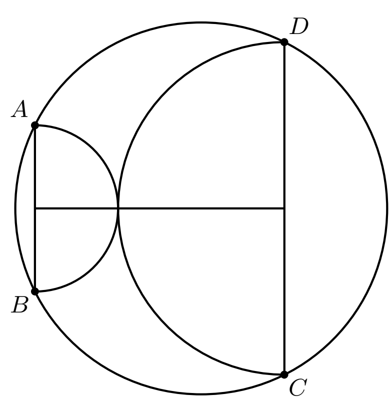
2) H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer. *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America, 1967.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2020. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

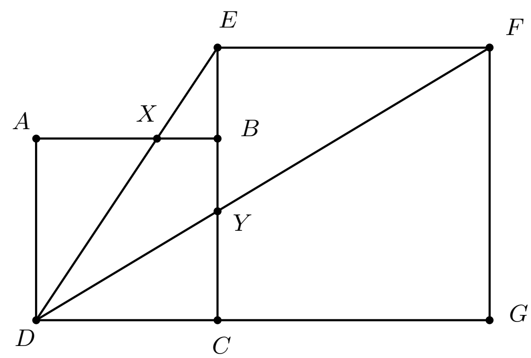
Problema 1. Determina el mayor entero n tal que $\frac{50!}{2^n}$ es un entero.

Problema 2. En la figura, las semicircunferencias de diámetros AB y CD son tangentes de manera que las rectas AB y CD son paralelas. Más aún, los puntos A, B, C y D están sobre una misma circunferencia Γ. Si a_1 es el área del semicírculo de diámetro AB, a_2 es el área del semicírculo de diámetro CD y b es el área encerrada por la circunferencia Γ, determina el valor de $(a_1 + a_2)/b$.



Problema 3. En una cuadrícula de 7 filas y 3 columnas, cada casilla se pinta de blanco o negro. Demuestra que, sin importar cómo se coloreen las casillas, siempre se pueden encontrar 4 del mismo color cuyos centros forman un rectángulo.

Problema 4. En la siguiente figura, el cuadrado $ABCD$ tiene lado de longitud 4 cm y el cuadrado $CEFG$ tiene lado de longitud 6 cm. El segmento DE interseca a AB en X y el segmento DF interseca a BC en Y. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $DXBY$?



Problema 5. Determina todas las parejas de enteros positivos (m, n) tales que

$$\sqrt{m! \cdot n!} = mn.$$

Problema 6. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2020\}$ tales que para cualesquiera tres de ellos, juntos contienen a todos los enteros del 1 al 2020, pero para cualesquiera dos, existe un entero del 1 al 2020 que no está en ninguno. Encuentra el máximo valor de n.

Problema 7. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto sobre el segmento BC. Sea Y el punto sobre la recta CD tal que $BX = YD$ y D esté entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY está sobre la recta BD.

Problema 8. Determina todas las parejas de números reales (x, y) tales que

$$x^3 + 9x^2y = 10,$$
$$y^3 + xy^2 = 2.$$

Problema 9. Determina todas las parejas ordenadas de enteros positivos (a, b) tales que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ y $\frac{b^3a+1}{b-1}$ sean también enteros positivos.

Problema 10. Determina todos los números reales $x > 1$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$

Problema 11. Demuestra que para cada entero $n \geq 3$, existen enteros positivos a_1, $a_2, \ldots, a_n$ tales que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2$ y $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n$.

Problema 12. Se dice que un conjunto S es *colindante* si satisface las siguientes dos propiedades:

a) S tiene exactamente 4 elementos.

b) Para cada elemento x de S, al menos uno de los números $x - 1$ o $x + 1$ pertenece a S.

¿Cuántos subconjuntos colindantes tiene el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$?

Problema 13. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico. Las diagonales AC y BD se cortan en P y, DA y CB se cortan en Q. Supongamos que PQ es perpendicular a AC. Sea E el punto medio de AB. Demuestra que PE es perpendicular a BC.

Problema 14. Determina si existe un entero positivo n tal que el número $\underbrace{1\ldots1}_{n}2\underbrace{1\ldots1}_{n}$ es un número primo.

Problema 15. Demuestra que en un n-ágono convexo, la mayor cantidad de diagonales que se pueden dibujar dentro del n-ágono de tal manera que no haya dos que se intersequen dentro de él es $n - 3$.

Problema 16. Sean x, y y z números reales positivos tales que $x+y+z = 1$. Demuestra que $\left(1 - x^2\right)^2 + \left(1 - y^2\right)^2 + \left(1 - z^2\right)^2 \leq (1 + x)(1 + y)(1 + z)$.

Problema 17. Borra 100 dígitos del número

$$1234567891011121314\ldots585960$$

de tal manera que el número que quede sea el menor posible.

Problema 18. Sean $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_k < \cdots$ números enteros no negativos tales que $a_{2n} = a_n + n$ para todo entero $n \geq 1$, con la propiedad de que si a_n es primo, entonces n es primo. Determina el valor de a_{2020}.

Problema 19. Sean k y n enteros positivos con $k \geq 3$ y $n \geq 3(k - 2)$. Demuestra que todo k-ágono se puede descomponer en n cuadriláteros cíclicos con interiores disjuntos dos a dos.

Problema 20. Determina todos los números primos p tales que $7^p - p - 16$ sea un cuadrado.

Soluciones a los problemas de práctica

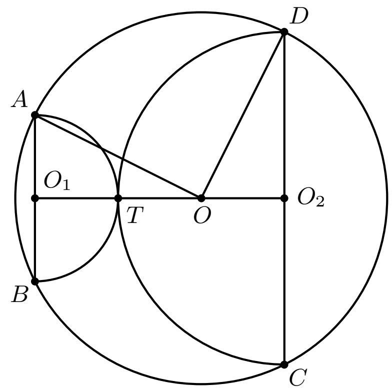
En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Notemos que cada número par del 1 al 50 aportará al menos un factor 2 al número $50!$, luego cada número múltiplo de 4 aportará al menos dos factores 2, cada número múltiplo de 8 aportará al menos tres factores 2, etcétera. Luego, la potencia de 2 más grande que divide a $50!$ es

$$\left\lfloor\frac{50}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{4}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{8}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{16}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{50}{32}\right\rfloor=25+12+6+3+1=47,$$

esto es, $n=47$ es la respuesta.

Solución del problema 2. Sean O_1 el punto medio de AB, O_2 el punto medio de CD, O el centro de la circunferencia Γ y T el punto de tangencia de las semicircunferencias de diámetros AB y CD. Además, sean $r_1=\frac{AB}{2}$, $r_2=\frac{CD}{2}$ y r el radio de Γ. De la construcción de la figura, tenemos que O_1, T, O y O_2 son colineales. Más aún, $O_1O_2=r_1+r_2$. Como $AO=r=OD$, aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AO_1O y DO_2O obtenemos que $AO_1^2+O_1O^2=OO_2^2+O_2D^2$, esto es, $r_1^2+(r_1+r_2-OO_2)^2=OO_2^2+r_2^2$, de donde obtenemos que $OO_2=r_1$.



Luego, $r = OD = \sqrt{OO_2^2 + O_2D^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$, de donde se sigue que $b = \pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.
Por otro lado, tenemos que $a_1 = \frac{1}{2}\pi r_1^2$ y $a_2 = \frac{1}{2}\pi r_2^2$, por lo que $a_1 + a_2 = \frac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)$.
Por lo tanto,

$$\frac{a_1 + a_2}{b} = \frac{\frac{1}{2}\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)}{\pi\left(r_1^2 + r_2^2\right)} = \frac{1}{2}.$$

Solución del problema 3. Supongamos, por contradicción, que existe una manera de colorear las casillas de la cuadrícula de tal manera que no hay 4 del mismo color cuyos centros formen un rectángulo. Para cada fila, las posibles opciones para colorear las casillas son: BBB, BBN, BNB, NBB, NNB, NBN, NNB y NNN. De estos acomodos, 7 se tienen que usar (con posible repetición) para llenar las filas de la cuadrícula.
Notemos que si se usa una misma coloración en dos filas distintas, entonces se cumplirá lo que se busca, por lo que no se puede usar dos veces una misma coloración. Más aún, observemos que las coloraciones BBN y BBB no se pueden usar en dos filas distintas porque también haría que se cumpla la propiedad. Esto significa que las otras 6 coloraciones se tienen que usar, además de alguna entre BBN y BBB, para colorear las 7 filas. Sin embargo, entre las coloraciones a usar están NNB y NNN, lo que es una contradicción.

Solución del problema 4. Notemos que los triángulos ADX y BEX son semejantes, por lo que $\frac{AX}{XB} = \frac{AD}{BE} = \frac{4}{6-4} = 2$. Más aún, $AX + XB = 4$ cm. Esto implica que $AX = \frac{8}{3}$ cm y, por lo tanto, $[ADX] = \frac{AD \cdot AX}{2} = \frac{16}{3}$ cm^2, donde $[ADX]$ denota el área del triángulo ADX.
Por otro lado, tenemos que los triángulos DCY y DGF son semejantes, por lo que $\frac{CY}{GF} = \frac{DC}{DG} = \frac{4}{4+6} = \frac{2}{5}$. Luego, $CY = \frac{12}{5}$ cm. Así que $[DCY] = \frac{DC \cdot CY}{2} = \frac{24}{5}$ cm^2.
Por lo tanto, $[DXBY] = [ABCD] - [ADX] - [DCY] = 16 - \frac{16}{3} - \frac{24}{5} = \frac{88}{15}$ cm^2.

Solución del problema 5. Es fácil probar que $(x-1)! > x$ para todo entero $x \geq 4$ y $(y-1)! > 2y$ para todo entero $y \geq 5$.

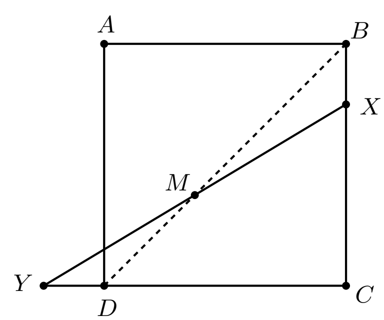
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m \geq n$. Si $n \geq 4$, entonces

$$mn = \sqrt{m! \cdot n!} = \sqrt{mn(m-1)! \cdot (n-1)!} > \sqrt{m^2n^2} = mn,$$

lo que es un absurdo. Esto implica que $n \leq 3$.
Si $n = 1$, la ecuación es $m! = m^2$. Un argumento similar al dado anteriormente prueba que $m \leq 3$, de donde solo $m = 1$ es posible.
Si $n = 2$, sustituyendo en la ecuación original obtenemos que $m! = 2m^2$. Si $m \geq 5$, entonces $2m^2 = m! = m(m-1)! > m(2m) = 2m^2$, un absurdo. Así que $2 \leq m \leq 4$, donde ninguno de estos valores satisface la ecuación.
Si $n = 3$, tenemos la ecuación $m! = \frac{3}{2}m^2$. Un argumento similar al dado anteriormente prueba que $m \leq 4$, donde únicamente $m = 4$ es posible.
Por lo tanto, las parejas que cumplen son $(1,1)$, $(4,3)$ y $(3,4)$.

Solución del problema 6. La respuesta es 64. Asignemos a cada pareja de índices (i,j), con $1 \leq i < j \leq 2020$, un número $m_{i,j}$ del 1 al 2020 que no está en A_i ni en A_j. Este número existe por hipótesis. Si dos parejas tienen asignado el mismo número m, combinando estas parejas encontramos al menos tres conjuntos que no tienen a m, lo que es una contradicción. Como hay $n(n-1)/2$ parejas y 2020 posibles números $m_{i,j}$, se sigue que $n(n-1)/2 \leq 2020$ y así $n \leq 64$. Para ver que $n = 64$ funciona, asignemos a la pareja (i,j) un entero $m_{i,j}$ entre 1 y 2020 de tal forma que estos $64 \cdot 63/2 = 2016$ números sean distintos y escojamos los conjuntos de tal forma que para cada $m_{i,j}$, A_i y A_j sean los únicos que no tengan a $m_{i,j}$. Es fácil verificar que estos conjuntos cumplen las condiciones.

Solución del problema 7. Sea M el punto medio del segmento XY.



Notemos que

$$\frac{CD}{DY} \cdot \frac{YM}{MX} \cdot \frac{XB}{CB} = \frac{CB}{XB} \cdot \frac{YM}{YM} \cdot \frac{XB}{CB} = 1.$$

Luego, por el teorema de Menelao, se sigue que B, M y D son colineales.

Solución del problema 8. Multiplicando la segunda ecuación por 27 y sumándole la primera ecuación, obtenemos que

$$x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3 = 64,$$

la cual se puede reescribir como $(x+3y)^3 = 64$, esto es, $x+3y = 4$. Sustituyendo $x = 4-3y$ en la segunda ecuación, obtenemos la ecuación $y^3 + (4-3y)y^2 = 2$, esto es, $2y^3 - 4y^2 + 2 = 0$, la cual se puede reescribir como $2(y-1)(y^2-y-1) = 0$.
Si $y = 1$, entonces $x = 1$. Si $y^2 - y - 1 = 0$, entonces $y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ y, por lo tanto, $x = \frac{5\mp 3\sqrt{5}}{2}$.
Luego, las únicas soluciones al sistema de ecuaciones son $(1,1)$, $\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Solución del problema 9. Tenemos que $a+1$ debe dividir a $a^3b - 1 = b(a^3+1) - (b+1)$. Sin embargo, como $a+1$ divide a $b(a^3+1) = b(a+1)(a^2-a+1)$, se sigue que $a+1$ debe dividir a $b+1$. También tenemos que $b-1$ debe dividir a $b^3a + 1 = a(b^3-1) + (a+1)$ y, como $b-1$ divide a $a(b^3-1) = a(b-1)(b^2+b+1)$, se sigue que $b-1$ debe dividir a $a+1$. Entonces, $b-1$ debe dividir a $b+1$, lo cual implica que $b-1$ debe ser divisor de 2, por lo que las únicas posibilidades son $b=2$ o $b=3$. Si $b=2$, entonces $a+1$ debe dividir a 3 y, por lo tanto, $a=2$. Si $b=3$, entonces $a+1$ debe dividir a 4, así que solo es posible $a=1$ o $a=3$. Esto nos deja tres posibles soluciones: $(2,2), (1,3), (3,3)$. Es fácil verificar que estos pares son válidos.

Solución del problema 10. Sean $a = \frac{x^2}{x-1}$, $b = \sqrt{x-1}$ y $c = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2}$. Observemos que $abc = 1$ y la ecuación es equivalente a $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.
Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1) &= abc - (ab+bc+ca) + (a+b+c) - 1\\ &= 1 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 1\\ &= 0.\end{aligned}$$

Si $a = 1$, entonces $(x-1)x + 1 = x^2 - x + 1 = 0$, lo cual es imposible ya que $x > 1$. Si $b = 1$, entonces $\sqrt{x-1} = 1$, lo cual implica que $x = 2$ y es fácil verificar que es solución de la ecuación. Por último, si $c = 1$, entonces $\sqrt{x-1} = x^2$ y así $x(x^3-1) + 1 = x^4 - x + 1 = 0$, lo cual es imposible ya que $x > 1$. Concluimos que $x = 2$ es la única solución.

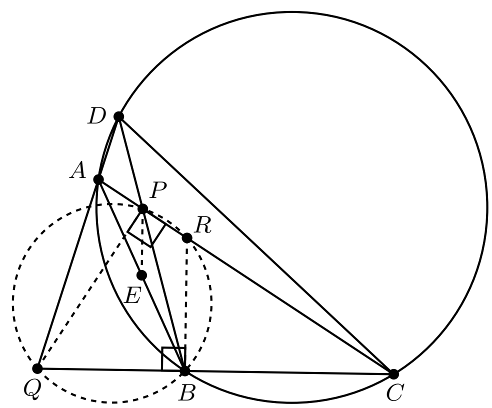
Solución del problema 11. Si $n = 3$, sean $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 5$. Es claro que $3^2 + 4^2 = 5^2$ y $3 < 4 < 5$. Si $n \geq 4$, consideremos los números $a_1 = 7$, $a_2 = 8$, $a_3 = 10, \ldots, a_{n-2} = 2n$. Evidentemente, la suma $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-2}^2$ es impar, esto es, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-2}^2 = 2N+1$ para algún número natural N. Tenemos que $N \geq 3$. Definamos $a_{n-1} = N$ y $a_n = N+1$. Entonces, tenemos que

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 = 2N + 1 + N^2 = (N+1)^2 = a_n^2$$

y $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$. Todas estas desigualdades son claras excepto la penúltima: $a_{n-2} \leq \sqrt{2N+1} < N = a_{n-1}$ ya que $N^2 > 2N+1$ si $N \geq 3$, esto es, $(N-1)^2 > 2$ si $N \geq 3$.

Solución del problema 12. Para $n \leq 3$ la respuesta es 0. Supongamos que $n \geq 4$. Sea $S = \{a, b, c, d\}$ donde $a < b < c < d$ y observemos que $d - a \geq 3$. Debemos tener que $b = a + 1$, ya que en caso contrario no aparecerían $a - 1$ ni $a + 1$ en S. Similarmente, obtenemos que $c = d - 1$. Además, para cualquier par (a, d) con $d - a \geq 3$, el conjunto $S = \{a, a+1, d-1, d\}$ es colindante. Se sigue que la cantidad de subconjuntos colindantes del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual a la cantidad de pares de enteros (a, d) con $3 \leq a + 2 < d \leq n$.
Para $a = 1$ tenemos $n - 3$ posibles valores de d: $4, 5, \ldots, n$.
Para $a = 2$ tenemos $n - 4$ posibles valores de d: $5, 6, \ldots, n$.
En general, para $a = i$ $(1 \leq i \leq n - 3)$, tenemos $n - (i + 2)$ posibles valores de d.
Por lo tanto, hay $(n-3) + (n-4) + \cdots + 1 = \frac{(n-3)(n-2)}{2}$ subconjuntos colindantes de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Solución del problema 13. Sea R la reflexión de A con respecto a P. Por la perpendicularidad de PQ y AC, tenemos que el triángulo QAR es isósceles.



Como $ABCD$ es cíclico, tenemos que $\angle QBP = \angle QAC = \angle QRA = \angle QRP$ y así $QPRB$ también es un cuadrilátero cíclico. Se sigue que RB es perpendicular a BC y, por lo tanto, PE lo es también, ya que es base media opuesta a A en el triángulo ABR.

Solución del problema 14. No existe tal n. Observemos que el número dado se puede escribir como

$$\frac{10^{2n+1} - 1}{9} + 10^n = \frac{10^{2n+1} + 9 \cdot 10^n - 1}{9} = \frac{\left(10^{n+1} - 1\right)(10^n + 1)}{9}.$$

Además, es fácil ver que $\frac{10^{n+1}-1}{9} \geq \frac{10^2-1}{9} = 11$ y $10^n + 1 \geq 11$, por lo que el número dado se puede expresar como producto de dos enteros mayores que 1, esto es, no es primo para todo entero positivo n.

Solución del problema 15. Para probar que $n - 3$ es alcanzable, consideremos un vértice del n-ágono y tracemos diagonales desde él a todos los vértices del polígono.

Esto generará $n-3$ diagonales que no se intersecan dentro de él.
Ahora, sea k el mayor número de diagonales que se pueden formar en el n-ágono sin que se intersequen. Estas dividen al polígono en varias regiones convexas. Si alguna de estas regiones es un polígono con al menos 4 lados, entonces se puede trazar una diagonal dentro de esta región (que también será diagonal del n-ágono) y se tendrán más de k diagonales, lo que es una contradicción. Luego, todas las regiones en las que está dividido el polígono son triángulos. Ahora procederemos a calcular cuántos triángulos hay.
Notemos que por cada triángulo hay $180°$ entre la suma de sus ángulos (los cuales forman parte de los ángulos internos del n-ágono). Si hay T triángulos, entonces $180T = 180(n-2)$ (donde $180°(n-2)$ representa la suma de los ángulos internos del n-ágono). Luego, $T = n-2$.
Ahora contaremos de dos maneras el número total de lados de los triángulos. Cada triángulo dentro del polígono tiene 3 lados, por lo que la cuenta total es igual a $3T$. Sin embargo, cada lado del n-ágono se cuenta una sola vez y cada una de las k diagonales se cuenta dos veces, por lo que $3T = n+2k$. Sustituyendo el valor de T y despejando para k, obtenemos que $k = n-3$, como se quería.

Solución del problema 16. Sean $x+y+z=p$, $xy+yz+zx=q$ y $xyz=r$. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$(x+y+z)(xy+yz+zx) \geq (3\sqrt[3]{xyz})\left(3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\right) = 9xyz,$$

por lo que $pq \geq 9r$. Más aún, como $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ (pues $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$), se sigue que $p^2 \geq 3q$. La desigualdad a demostrar se puede reescribir en términos de p, q y r como

$$3 - 2(p^2-2q) + (p^2-2q)^2 - 2(q^2-2pr) \leq 1+p+q+r.$$

Usando que $p=1$, la desigualdad se convierte en

$$3 - 2(1-2q) + (1-2q)^2 - 2(q^2-2r) \leq 2+q+r,$$

esto es, $2q^2 - q + 3r \leq 0$. Dado que $pq \geq 9r$, resulta que $r \leq \frac{q}{9}$. Luego, para probar el resultado, basta probar que $2q^2 - q + \frac{q}{3} \leq 0$, es decir, que $2q^2 - \frac{2}{3}q \leq 0$. Esta última desigualdad se cumple si y solo si $0 \leq q \leq \frac{1}{3}$, lo cual debe cumplirse porque x, y y z son reales positivos y $q \leq \frac{1}{3}p^2 = \frac{1}{3}$.

Solución del problema 17. El número dado tiene $9 + 2\cdot 51 = 111$ dígitos. Después de borrar 100 dígitos quedará un número de 11 dígitos. Como queremos que el número que quede sea el menor posible, empezaremos desde la izquierda tratando de quedarnos con el mayor número de ceros posible. Nos quedamos con los ceros de $10, 20, 30, 40$ y 50, así que de los primeros 50 enteros positivos obtenemos 5 ceros. Hacen falta 6 dígitos más. Del 51 dejamos el 1; del 52 dejamos el 2; del 53 dejamos el 3; del 54 dejamos el 4; del 55 dejamos el 5 y nos quedamos con el 0 del 60. Por lo tanto, el menor número posible es: 00000123450.

Solución del problema 18. Como $a_k < a_{k+1} < a_{k+2} < \cdots < a_{2k} = a_k + k$ y todos los términos son enteros, se sigue que $a_{k+1} = a_k + 1$ para todo $k \geq 1$, lo cual implica que $a_n = a_1 + n - 1$ para todo $n \geq 1$.
Si $a_1 = 0$, entonces $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y $a_4 = 3$, lo cual no es posible ya que a_4 es primo pero 4 no.
Supongamos que $a_1 \geq 2$ y sea p el mínimo primo que es mayor que $(a_1+1)! + a_1 + 1$. Si $n = p - (a_1 - 1)$, entonces $a_n = p$ y, por consiguiente, n es primo. Por otro lado, tenemos que $n = p - (a_1 - 1) > (a_1 + 1)! + a_1 + 1 - (a_1 - 1) = (a_1 + 1)! + 2$ y ninguno de los números $(a_1 + 1)! + k$, con $2 \leq k \leq a_1 + 1$, es primo. Luego, $n > (a_1 + 1)! + a_1 + 1$ y, por como definimos p, debe suceder que $n \geq p$, lo cual es una contradicción ya que $n = p - (a_1 - 1) < p$. Por lo tanto, $a_1 = 1$. Finalmente, tenemos que $a_n = a_1 + n - 1 = 1 + n - 1 = n$ para todo entero $n \geq 1$, en particular obtenemos que $a_{2020} = 2020$.

Solución del problema 19. Un triángulo se puede descomponer en 3 cuadriláteros cíclicos dibujando perpendiculares desde el incentro a cada uno de sus lados. Como un triángulo se puede descomponer en un cuadrilátero cíclico y un triángulo más pequeño a través de una antiparalela a uno de sus lados, se sigue que un triángulo también se puede descomponer en cualquier número $q \geq 3$ de cuadriláteros cíclicos.
La conclusión del problema se sigue descomponiendo el k-ágono en $k - 2$ triángulos de los cuales $k - 3$ se descomponen cada uno en 3 cuadriláteros cíclicos y el triángulo restante en $n - 3(k - 3)$ cuadriláteros.

Solución del problema 20. Sea $a = 7^p - p - 16$. Es fácil ver que $p = 2$ no satisface la condición, pero $p = 3$ sí: $a = 7^3 - 3 - 16 = 324 = 18^2$. Demostraremos que no hay otras soluciones. Sea $p \geq 5$ un número primo. Si $p \equiv 1 \pmod 4$, entonces $a = 7^p - p - 16 \equiv (-1)^p - 1 = -2 \equiv 2 \pmod 4$, lo cual implica que a no es un cuadrado, pues todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4.
Ahora, si p es de la forma $4k+3$, entonces por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $7^p \equiv 7 \pmod p$, lo cual implica que $a \equiv 7 - 16 = -9 \pmod p$, esto es, p divide a $a + 9$. Si $a = b^2$ para algún entero b, entonces p divide a $b^2 + 3^2$, lo cual implica que p divide a b y también p divide a 3 (ver el Teorema 3 en el Apéndice). Pero si $p \mid 3$, entonces $p \leq 3$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, la única solución es $p = 3$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2020 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Encuentra todas las funcinones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $f(x + f(y)) = 2x + 2f(y + 1)$ para todos los números reales x, y.

Problema 2. Encuentra todos los números primos p, q y r tales que

$$p^2 + 1 = 74(q^2 + r^2).$$

Problema 3. Se tiene una pila de cartas numeradas con los números $1, 2, \ldots, n$ en algún orden. Después, se hace la siguiente operación repetidamente: si la primera carta de la pila tiene el número k, entonces se revierte el orden de las primeras k cartas. Prueba que, después de que la operación se repite una cantidad finita de veces, la carta con el número 1 llegará a ser la primer carta de la pila.

Problema 4. Sea ABC un triángulo. La circunferencia ω_A pasa por A y es tangente a la recta BC en B. La circunferencia ω_C pasa por C y es tangente a la recta AB en B.

Sea D el punto de intersección de ω_A y ω_C distinto de B. Sea M el punto medio del segmento BC. Las rectas MD y AC se cortan en E. Prueba que E está sobre ω_A.

Problema 5. Sean n un entero par libre de cuadrados y p un primo tales que:

a) $\text{mcd}(n,p) = 1$,

b) $p \leq 2\sqrt{n}$,

c) existe un entero k tal que p divide a $n + k^2$.

Demuestra que existen enteros positivos distintos a, b y c tales que $n = ab + bc + ca$.
Nota: Un entero m se dice que es *libre de cuadrados* si no existe un entero x mayor que 1 tal que $x^2 \mid m$.

Problema 6. Determina todos enteros positivos m y n tales que $m^2 - mn + n^2 + 1$ divide a cada uno de los números $(m+n)! + 3^{m+n}$ y $m + n + 3^{m^3+n^3}$.

Problema 7. Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos AD y BC y lados no paralelos AB y CD. Sea I el incentro del triángulo ABC. Se sabe que existe un punto Q en AD con $Q \neq A$ y $Q \neq D$ con la siguiente propiedad: Si P es el punto de intersección de las bisectrices internas de los ángulos $\angle CQD$ y $\angle CAD$, entonces PI y AD son paralelas. Demuestra que $PI = BQ$.

Problema 8. Sea a un entero positivo. Supón que para cada entero positivo n, existe un entero positivo k tal que $kn + 1$ divide a $n^2a + 1$. Demuestra que a es un cuadrado perfecto.

Problema 9. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 999\}$. Considera una función $f : S \to S$, tal que para cada $n \in S$,

$$f^{n+f(n)+1}(n) = f^{nf(n)}(n) = n.$$

Demuestra que existe un número $a \in S$, tal que $f(a) = a$.
(Nota: Aquí, $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(n)\ldots)))$.

Problema 10. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos.Demuestra que

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2020 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2020. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a: Marcos Ramón Archila Bonifaz, Guillermo Courtade Morales y José Hernández Santiago, por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2020, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. ¿Cuántos números de 9 dígitos que son una permutación de 123456789 son múltiplos de 11?

Solución de Marcos Ramón Archila Bonifaz. Primero veremos que uno de esos números será múltiplo de 11 si y solo si la diferencia entre la suma de los dígitos en posiciones pares y la suma de los dígitos en las posiciones impares del número, es 11.
La suma de los dígitos del número 123456789 es 45. En las posiciones pares son 4 dígitos y la suma mínima es $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Por lo que la máxima diferencia de las sumas es a lo más $35 - 10 = 25$. Supongamos que X y Z son, en algún orden, las sumas de los dígitos en las posiciones pares e impares $(X \geq Z)$ de una permutación del número 123456789, de tal manera que $X + Z = 45$. Tenemos las siguientes ecuaciones:

$$X + Z = 45, \quad X - Z = 11n,$$

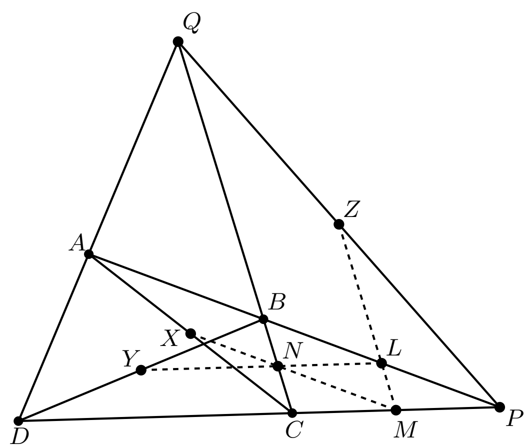
donde n es un entero no negativo. Como $11n = X - Z \leq 25$, tenemos que $n \leq 2$. Los casos $n = 0$ y $n = 2$ no son posibles ya que $X + Z$ y $X - Z$ tienen la misma paridad. Entonces, $n = 1$ es la única solución posible.
Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior con $n = 1$, obtenemos que $X = 28$ y $Z = 17$. Si consideramos Z, como la suma de los dígitos en posiciones pares, tenemos los siguientes conjuntos posibles de dígitos: $(1, 2, 5, 9)$, $(1, 2, 6, 8)$, $(1, 3, 4, 9)$, $(1, 3, 5, 8)$, $(1, 3, 6, 7)$, $(1, 4, 5, 7)$, $(2, 3, 4, 8)$, $(2, 3, 5, 9)$, $(2, 4, 5, 6)$, en total son 9 conjuntos. Cada conjunto lo podemos permutar de $4!$ formas. Por otro lado, a cada conjunto le corresponde uno de 5 dígitos que lo podemos permutar de $5!$ formas. En este caso, tenemos $9 \cdot 4! \cdot 5! = 25920$ números múltiplos de 11.
Por otro lado, si consideramos Z, como la suma de los dígitos en posiciones impares tenemos los siguientes conjuntos posibles: $(1, 2, 3, 4, 7)$ y $(1, 2, 3, 5, 6)$. Cada conjunto lo podemos permutar de $5!$ formas y a cada uno le corresponde uno de 4 dígitos que lo podemos permutar de $4!$ formas. En este caso, tenemos $2 \cdot 5! \cdot 4! = 5760$ números múltiplos de 11.
En total tenemos $25920 + 5760 = 31680$ números múltiplos de 11.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales.

Problema 2. Decimos que un entero n es *perfecto* si la suma de todos sus divisores positivos (incluyendo a 1 y a n) es igual a $2n$. Encuentra todos los enteros perfectos n tales que $n-1$ y $n+1$ son primos.

Solución. Notemos que para $n \leq 6$, la única solución es $n = 6$. Supongamos que $n > 6$. Como $n-1$ y $n+1$ deben ser primos, tenemos que n es mútliplo de 6. Entonces, 1, $\frac{n}{6}$, $\frac{n}{3}$, $\frac{n}{2}$ y n son divisores de n distintos entre sí, por lo que la suma de los divisores positivos de n es al menos $1 + \frac{n}{6} + \frac{n}{3} + \frac{n}{2} + n = 2n + 1$, lo que es una contradicción ya que n es perfecto.
Por lo tanto, la única solución es $n = 6$.

Problema 3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sean P y Q las intersecciones de AB con CD y de AD con BC, respectivamente, y X, Y, Z los puntos medios de AC, BD y PQ, respectivamente. Demuestra que X, Y, Z son colineales.

Solución. Sean M, N y L los puntos medios de PC, BC y BP, respectivemente. Notemos que ZL es paralela a QB y que LM es paralela a BC, lo cual implica que Z, L, M son colineales. De manera análoga se prueba que las ternas de puntos Y, N, L y X, N, M son colineales.



Ahora, notemos que $\frac{NX}{XM} = \frac{BA}{AP}$, $\frac{MZ}{ZL} = \frac{CQ}{QB}$, $\frac{LY}{YN} = \frac{PD}{DC}$. Por el teorema de Menelao en el triángulo BPC con la recta que pasa por Q, A y D, tenemos que $\frac{BA}{AP} \cdot \frac{PD}{DC} \cdot \frac{CQ}{QB} = -1$. Entonces, $\frac{NX}{XM} \cdot \frac{MZ}{ZL} \cdot \frac{LY}{YN} = -1$ y, por el teorema de Menelao en el triángulo MNL, concluimos que X, Y, Z son colineales.

Problema 4. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002,$$

para todo entero positivo n, donde $\mathbb{Z}^+$ denota el conjunto de los enteros positivos.

Solución. Sea a_0 un entero positivo y definamos $a_{n+1} = f(a_n)$ para $n \geq 0$ y $c_n = a_n - a_{n-1} - 667$ para $n \geq 1$. Tenemos que $c_{n+1} + 2c_n = a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} - 2001$ y, para todo $n \geq 1$, $c_{n+1} + 2c_n$ es un entero y $0 \leq c_{n+1} + 2c_n \leq 1$, pues $a_{n+1} + a_n - 2a_{n-1} = f(f(a_{n-1})) + f(a_{n-1}) - 2a_{n-1}$, que está acotado por abajo por 2001 y por arriba por 2002.
Supongamos que $c_1 > 0$. Entonces $c_1 \geq 1$ y $c_2 \leq -2c_1 + 1 \leq -1$. También se tiene $c_3 \geq -2c_2 \geq 2$. Afirmamos que $c_{2k+1} \geq 2^k$. Para esto, procederemos por inducción, como base de inducción ya vimos las desigualdades para c_1, c_3. Supongamos ahora que $c_{2k+1} \geq 2^k$, usando esto se tiene que $c_{2k+2} \leq -2c_{2k+1} + 1 \leq -2^{k+1} + 1$ y $c_{2k+3} \geq -2c_{2k+2} \geq 2^{k+2} - 2 \geq 2^{k+1}$, con lo que queda probado el paso inductivo. Entonces, nuestra afirmación se cumple.
Notemos que $a_{2k+2} - a_{2k} - 1334 = c_{2k+2} + c_{2k+1} \leq -c_{2k+1} + 1 \leq -2^k + 1$. Entonces, como $2^{11} > 1335$, para $k \geq 11$ se tiene que $a_{2k+2} < a_{2k}$, entonces tendríamos una sucesión decreciente de enteros positivos, lo cual no es posible. Entonces, $c_1 \leq 0$.
Supongamos ahora que $c_1 < 0$. Entonces, $c_1 \leq -1$ y $c_2 \geq -2c_1 \geq 2$. Al igual que en el caso anterior, de manera inductiva se prueba que $a_{2k} \geq 2^k$. Entonces $a_{2k+1} - a_{2k-1} - 1334 = c_{2k+1} + c_{2k} \leq -c_{2k} + 1 \leq -2^k + 1$ para $k \geq 1$. Entonces, para $k \geq 11$ se tiene que $a_{2k+3} < a_{2k+1}$, que no es posible, pues los a_k's forman una sucesión de enteros positivos.
Con esto concluimos que $c_1 = 0$, es decir, $a_1 = a_0 + 667$, de donde $f(n) = n + 667$ para toda $n \in \mathbb{Z}^+$ y es fácil verificar que dicha función cumple lo deseado.

Problema 5. Los enteros del 1 al 2014 están escritos en un pizarrón. Una operación válida es borrar dos números a y b que están escritos en el pizarrón y escribir en su lugar mcm(a, b) y mcd(a, b). Muestra que después de cualquier cantidad de operaciones válidas, la suma de los números escritos en el pizarrón es mayor que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$.

Solución. Dado que $ab = \text{mcd}(a, b) \cdot \text{mcm}(a, b)$, se tiene que el producto de los números escritos en el pizarrón es invariante, siempre es $2014!$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$ los números escritos en el pizarrón después de cierta cantidad de operaciones. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014} \geq 2014 \cdot \sqrt[2014]{a_1 a_2 \cdots a_{2014}} = 2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}.$$

Ahora solo nos resta ver que no se puede dar la igualdad. Como la igualdad en la desigualdad MA-MG se da cuando todos los números son iguales, se tendría que $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2014}$, sin embargo, notemos que 1 siempre está escrito en el pizarrón, pues mcd$(1, a) = 1$ para todo entero a. Entonces se tendría que todos los números del pizarrón son iguales a 1, cosa que no es posible ya que esto no nos da el producto $2014!$ que ya vimos que es un invariante de las operaciones válidas. Con esto concluimos que la suma de los números escritos en el pizarrón es mayor que $2014 \cdot \sqrt[2014]{2014!}$, como queríamos ver.

Problema 6. Para cada número entero $m > 1$, sea $p(m)$ el menor divisor primo de m. Si a y b son enteros mayores que 1 tales que $a^2 + b = p(a) + (p(b))^2$, demuestra que $a = b$.

Solución de José Hernández Santiago. Demostraremos primero que b es un número primo. Supongamos, por contradicción, que b es compuesto. Entonces, $p(b) \leq \sqrt{b}$ y

$$a^2 + b = p(a) + (p(b))^2 \leq a + (\sqrt{b})^2 = a + b,$$

lo cual implica que $a^2 \leq a$, que es una contradicción ya que $a > 1$. Por lo tanto, b es primo y $p(b) = b$.
Demostraremos ahora que a también es un número primo. Nuevamente, por contradicción, supongamos que a es un número compuesto. Entonces, $p(a) < a$ y $a^2 + b = p(a) + b^2 < a + b^2$, esto es, $a^2 - a < b^2 - b$. Completando cuadrados de cada lado, obtenemos que $(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} < (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, de donde se sigue que $a < b$. Esta desigualdad implica que $(b-1)^2 < b^2 - b + p(a) < b^2$, lo que es una contradicción ya que $b^2 - b + p(a) = a^2$ es un cuadrado y $(b-1)^2$, b^2 son cuadrados consecutivos. Por lo tanto, a es primo y $p(a) = a$.
Luego, la igualdad original es $a^2 + b = a + b^2$, esto es, $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, de donde se sigue que $a = b$ o $a + b = 1$. Como a y b son enteros positivos, el caso $a + b = 1$ no es posible. Luego, necesariamente $a = b$.
Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales

Solución alternativa. Como $p(b)$ es un divisor de b, tenemos que $b = p(b)k$ para algún entero positivo k. Si $k \geq p(b)$, entonces, $b \geq p(b)^2$ y, como $a^2 + b = p(a) + (p(b))^2$, concluimos que $a^2 \leq p(a)$, lo que es una contradicción ya que $p(a) \leq a$ y $a > 1$. Por lo tanto, $k < p(b)$. Como k es un divisor de b el cual es menor que el menor divisor primo de b, necesariamente $k = 1$ y $b = p(b)$ es un número primo. Luego, tenemos que

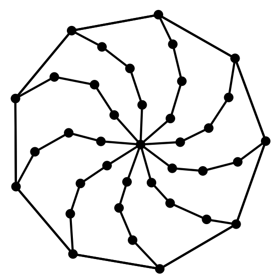
$$a^2 + b = p(a) + b^2. \tag{4}$$

Como $p(a)$ divide a a^2, se sigue que $p(a)$ divide a $b^2 - b = b(b-1)$. Luego, $p(a)$ divide a b o $p(a)$ divide a $b - 1$, pues $p(a)$ es primo.
Si $p(a)$ divide a b, entonces $p(a) = b$ ya que b es primo y, por (4), se sigue que $a^2 = b^2$, esto es, $a = b$.
Si $p(a)$ divide a $b - 1$, entonces $b \geq p(a) + 1$ ya que $b > 1$ y, por (4), obtenemos que $b^2 \geq a^2 + 1$, lo cual implica que $b > a$, esto es, $b \geq a + 1$. Por lo tanto, tenemos que $b^2 - b \geq (a+1)^2 - (a+1)$, de donde se sigue que $a^2 - p(a) \geq (a+1)^2 - (a+1) = a^2 + a$, lo que es una contradicción.
En conclusión, el único caso posible es que $a = b$ y, de paso, hemos demostrado que a y b son primos.

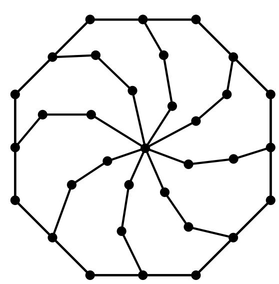
Problema 7. Considera una región poligonal regular de n lados ($n \geq 3$). Demuestra que es posible dividir dicha región en n regiones poligonales de igual área, de tal forma que cada una de ellas tenga n lados. (Las regiones poligonales no son necesariamente convexas).

Solución. Consideraremos dos casos, según la paridad de n.
Caso 1: $n = 2k + 1$. Sea O el centro del polígono regular y sean A_1 y A_2 vértices consecutivos. Unimos O con cada A_i, $i = 1, 2$, mediante k segmentos (no paralelos

entre sí), de tal forma que los k segmentos estén dentro del triángulo OA_1A_2. Consideremos a los k segmentos como una línea quebrada y hagamos rotar esta línea cada vez un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$ alrededor de O. De esta forma, un extremo de la línea está en O y el otro extremo va recorriendo los vértices del polígono regular. Luego de hacer n rotaciones, obtenemos n polígonos congruentes y, por lo tanto, de igual área. Además, cada uno de ellos tiene $k + 1 + k = n$ lados.
En la siguiente figura mostramos el caso $n = 9$.



Caso 2: $n = 2k$. Sea O el centro del polígono regular y sean A_1 y A_2 vértices consecutivos. Unimos O con el punto medio de A_1A_2 mediante $k-1$ segmentos (no paralelos entre sí), de tal forma que los $k-1$ segmentos estén dentro del triángulo OA_1A_2. Como en el caso anterior, consideramos a los $k-1$ segmentos como una línea quebrada y la hacemos rotar n veces un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$ alrededor de O, obteniendo así n polígonos congruentes, cada uno de ellos con $(k-1)+1+1+(k-1) = n$ lados.
En la siguiente figura mostramos el caso $n = 8$.

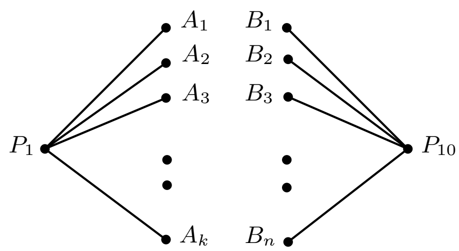


Problema 8. Sean $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{10}$ puntos en el espacio, algunos de ellos están unidos por segmentos que no se intersecan. Un escarabajo que está en el punto P_1 se puede trasladar al punto P_{10} pasando por algunos de los segmentos. Demuestra que al menos una de las siguientes dos condiciones es verdadera:

a) El escarabajo puede ir de P_1 a P_{10} pasando como máximo por dos puntos del conjunto $\{P_2, P_3, \ldots, P_9\}$.

b) Existen dos puntos P_i y P_j, con $2 \leq i < j \leq 9$, tales que cualquier camino del escarabajo que une P_1 con P_{10} pasa por el punto P_i o por el punto P_j.

Solución. Suponiendo que a) es falsa, vamos a demostrar que b) es verdadera. Si a) es falsa, entonces todo camino que une P_1 con P_{10} debe pasar por más de dos puntos del conjunto $\{P_2, \ldots, P_9\}$. Supongamos que P_1 está unido (directamente) mediante segmentos con los puntos $A_1, \ldots, A_k$. Si $k = 1$, entonces todo camino que une P_1 con P_{10} debe pasar por A_1. Luego, podemos tomar $P_i = A_1$ y P_j cualquier otro punto. De manera análoga, si $k = 2$ tomamos $P_i = A_1$ y $P_j = A_2$ y, así, tendremos que todo camino que une P_1 con P_{10} pasa por P_i o P_j. A partir de ahora, podemos suponer que $k \geq 3$.



Análogamente, si P_{10} está unido (directamente) con $B_1, B_2, \ldots, B_n$, podemos suponer que $n \geq 3$. Además, notemos que ningún A_i puede coincidir con algún B_j, pues si así fuera, existiría un camino que une P_1 con P_{10} y que pasa por exactamente un punto del conjunto $\{P_2, \ldots, P_9\}$, lo que es una contradicción. De la misma forma, si algún A_i está unido con algún B_j, entonces existe un camino que une P_1 con P_{10} y que pasa por exactamente dos puntos del conjunto $\{P_2, \ldots, P_9\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, ningún A_i está unido con un B_j.
A los puntos de $\{P_2, \ldots, P_9\}$ que no están unidos ni con P_1 ni con P_{10} los llamaremos *puntos intermedios*. Como existe un camino que une P_1 con P_{10}, entonces hay al menos un punto intermedio. Además, como $k \geq 3$ y $n \geq 3$, tenemos que hay a lo más dos puntos intermedios. Finalmente, como todo camino que une P_1 con P_{10} debe pasar por un punto intermedio, hacemos que P_i y P_j sean los puntos intermedios (en caso de que haya un solo punto intermedio hacemos que P_i sea un punto intermedio y P_j cualquier otro punto). Por lo tanto, cualquier camino que una P_1 con P_{10} pasará por P_i o por P_j.

Problema 9. Demuestra que existen infinitas ternas (x, y, z) de números reales que satisfacen las ecuaciones $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$, tales que x, y, z son distintos dos a dos.

Solución. Como x, y, z son distintos dos a dos, el sistema de ecuaciones inicial es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= \frac{z - y}{x - y}, \\ y + z &= \frac{x - z}{y - z}, \\ z + x &= \frac{y - x}{z - x}. \end{aligned}$$

Sean $a = x + y$, $b = y + z$ y $c = z + x$. Tenemos que $abc = -1$ y el sistema de ecuaciones anterior ahora es

$$\begin{aligned} a &= \frac{c-a}{c-b}, \\ b &= \frac{a-b}{a-c}, \\ c &= \frac{b-a}{b-c}. \end{aligned}$$

Buscaremos soluciones con a, b y c distintos de cero. Sustituyendo $c = \frac{-1}{ab}$ en la segunda ecuación del sistema anterior, obtenemos que $ab + \frac{1}{a} = a - b$, esto es, $b(a+1) = \frac{a^2-1}{a}$. Por lo tanto, $b = \frac{a-1}{a}$ es una solución. Ahora, es fácil ver que para todo número real m distinto de 0 y 1, la terna $(a, b, c) = (m, \frac{m-1}{m}, \frac{1}{1-m})$ es solución del sistema anterior.

Regresando ahora a las variables x, y, z, tenemos que $x = \frac{c+a-b}{2}$, $y = \frac{a+b-c}{2}$ y $z = \frac{b+c-a}{2}$. Luego, para todo número real m distinto de 0 y 1, la terna:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-m^3 + 2m^2 - m + 1}{2m(1-m)}, \frac{-m^3 + m - 1}{2m(1-m)}, \frac{m^3 - 2m^2 + 3m - 1}{2m(1-m)} \right),$$

es solución del sistema original. Como la cantidad de valores de m para los que algún par de variables son iguales es finita (pues m sería raíz de un polinomio de grado a lo más 3), se sigue que hay infinitos valores de m para los cuales x, y, z son distintos dos a dos.

Problema 10. En el congreso se forman 3 comisiones disjuntas de 100 congresistas cada una. Cada pareja de congresistas se conocen o no se conocen entre sí. Demuestra que hay dos congresistas, de comisiones distintas, tales que la tercera comisión contiene 17 congresistas que conocen a ambos, o 17 congresistas que no conocen a ninguno de ellos.

Solución. Para tres congresistas A, B y C de comisiones distintas, diremos que A tiene igual relación con B y C si A conoce a B y a C, o si A no conoce ni a B ni a C. Para cada pareja de congresistas de comisiones distintas, calcularemos la cantidad de congresistas en la tercera comisión, que tienen igual relación con dicha pareja. Estimaremos la suma S de todas estas $3 \cdot 100 \cdot 100$ cantidades. Para cualesquiera tres congresistas A, B y C de comisiones distintas, es posible encontrar uno de ellos que tenga igual relación con los otros dos (esto es fácil de comprobar). Por lo tanto, cada terna de congresistas de comisiones distintas, contribuye con al menos 1 a la suma S. Como hay 100^3 ternas, tenemos que $S \geq 100^3$ y, en consecuencia, alguna de las cantidades iniciales es mayor o igual que $\frac{100^3}{3 \cdot 100^2} = \frac{100}{3}$. Esto significa que hay dos congresistas M y N de comisiones distintas y 34 congresistas de la tercera comisión, tales que cada uno de ellos tiene igual relación con M y N. De estos 34 congresistas, por el principio de las casillas, al menos 17 conocen a M y a N, o al menos 17 no conocen ni a M ni a N.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica de la Ciudad de México

En la Ciudad de México, se realiza el Concurso de Primaria y Secundaria cada ciclo escolar. Las inscripciones se abren en julio y la primera, segunda y tercera etapa se llevan a cabo en septiembre, octubre y diciembre, respectivamente. En la primera etapa participan alrededor de 25000 niños y niñas de la CDMX. Para la segunda etapa se selecciona al 5 % de cada escuela, de manera que todas las escuelas inscritas tienen alumnos participando. Para la tercera etapa se invita alrededor de 400 participantes. Entre la tercera y cuarta etapa, hay alrededor de seis entrenamientos para prepararlos, por lo que en la tercera etapa se seleccionan alrededor de 100 participantes. Los ganadores de la cuarta etapa conforman la preselección y asisten al Concurso Regional de Educación Básica Zona Centro, que usualmente se celebra en el mes de abril. Los exámenes selectivos constan de 4 exámenes individuales y 4 exámenes por equipos, tratando de simular el formato del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB).

Los alumnos ganadores de la cuarta etapa del nivel I de la OMMEB de la Ciudad de México del ciclo escolar 2019-2020 fueron:

1. Stefano Serrano Lefler.
2. Yara Peimbert Pichardo.
3. José Luis Romero Beristain.
4. Takumi Higashida Martínez.
5. Samuel Arath Cisneros Rosales.
6. Jerónimo Bernal Fernández.
7. Maia Barnetche Campos.
8. Andrés Jacobo Kaim.
9. Iker López Sotelo.

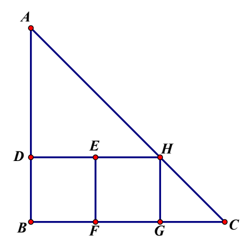
Prueba Individual, Nivel I, Cuarta Etapa

Ciudad de México, 14 de marzo de 2020

1) El lado de cada uno de los triángulos equiláteros de la figura es el doble del lado del hexágono regular del centro. ¿Qué fracción del área total de los seis triángulos, representa el área del hexágono?

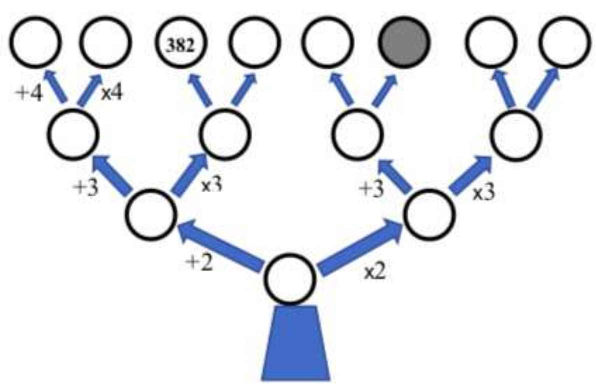
2) En la asamblea de raperos la mitad de los asistentes lleva gorra; la tercera parte lleva camisetas gigantes; la octava parte lleva gorra y camiseta gigante; y hay 63 raperos que no llevan ni gorra ni camiseta gigante. ¿Cuántos raperos hay en la asamblea?

3) En la figura, el triángulo ABC es isósceles y rectángulo. Además, $BDEF$ y $EFGH$ son cuadrados. Si el área del cuadrado $EFGH$ es 10 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?

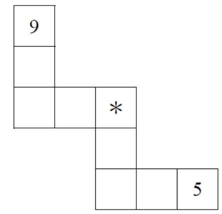


4) Ana Pau convierte cada palabra en un número, asignando a todas las vocales un mismo valor y a todas las consonanates otro valor y sumando todos los valores de sus letras. Si una NARANJA se transforma en 100 y una FRESA en 72, ¿en qué número se convierte la palabra APOLONIO?

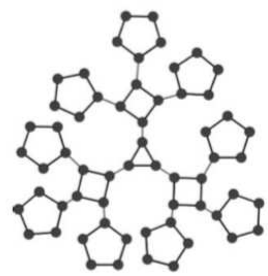
5) Observa cómo crece este árbol numérico. Desde la bolita inicial crece n bolitas hacia la izquierda sumando $2, 3, 4, \ldots$ y hacia la derecha multiplicando por $2, 3, 4, \ldots$ Solo sabes que en una bolita del cuarto piso está el número 382. ¿Qué número estará en la bolita sombreada?



6) Los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 se escriben en los cuadrados de tal manera que en cada columna y en cada renglón con tres números, suman 13. Dos números ya han sido escritos. ¿Cuál es el número que queda en el cuadrado marcado con $*$?



7) El año pasado en el Zócalo utilizaron motivos geométricos para iluminar las calles en Navidad. El diseñador ha comenzado formando un triángulo con tres luces led en los vértices. De cada vértice del triángulo sale un cuadrado con luces en los vértices y de cada vértice libre de los cuadrados un pentágono. El diseñador quiere ahora continuar poniendo hexágonos en los vértices libres de los pentágonos. ¿Cuántas luces necesita en total para culminar su obra?

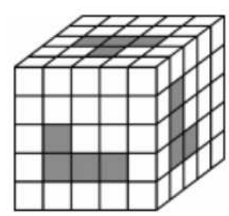


8) Si seis gallinas ponen 100 huevos en 8 días, ¿cuántas gallinas harán falta para poner 200 huevos en 4 días?

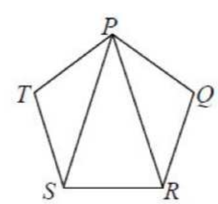
9) Diego y Ana van a plantar algunos árboles en el patio. Quieren plantar 6 árboles de manzana, 2 árboles de pera y 1 de durazno en una sola fila. ¿De cuántas maneras posibles pueden hacer el acomodo de los árboles?

10) Si recortamos con una línea recta una cuadrícula de 4×4 casillas, ¿cuántas casillas como máximo puede cortar esa recta?

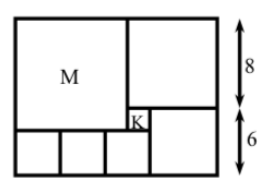
11) Ana arma un cubo con cubitos más pequeños como se muestra en la figura. Las partes sombreadas arriba, enfrente y a la derecha muestran los cubos que Leo, el travieso, quitó hasta llegar a la cara opuesta del cubo (de manera que queda un hueco en el cubo en forma de L si lo miras de frente y así para las tres figuras). ¿Cuántos cubitos quedan en el cubo después de que Leo hace esta travesura?



12) Para dibujar esta figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea, ¿en qué puntos podrías comenzar?



13) El rectángulo que observas está formado por 7 cuadrados de los cuales, como ves, hay tres iguales. M es el mayor y K es el más pequeño. ¿Cuántos cuadrados como K caben en M?



14) En una pizzería hay 8 ingredientes de carne y 10 ingredientes de vegetales. Si quieres armar tu pizza con 3 tipos de carne y 5 tipos de vegetales, ¿de cuántas maneras puedes armar tu pizza?

15) Acomoda los números del 1 al 9 sin repeticiones en la cuadrícula de manera que cada número aparezca una vez y el resultado de multiplicar los números de la primera fila sea 12, de la segunda fila sea 112, de la primera columna sea 216 y de la segunda columna sea 12 como se indica en la figura. ¿Cuánto vale la suma de los números que van en los cuadrados señalados con A, B y C?

A			12
	B		112
		C	
216	12		

Concursos Estatales

XXXIV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato

Los días 12 y 13 de septiembre de 2020 se llevó a cabo el tercer examen selectivo del proceso de la XXXIV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato, en el cual participaron un total de 164 estudiantes de distintos municipios del Estado. El selectivo consistió en 2 exámenes de 3 problemas cada uno, donde cada problema se evaluó en una escala de 0 a 7 puntos.

Los alumnos seleccionados que pasaron a la siguiente etapa y presentaron el examen de la Olimpiada Regional de Occidente (ORO) 2020, representando al Estado de Guanajuato fueron:

1. Armada Hernández Sofía.
2. Bárcenas Ovando Julia Patricia.
3. Cano Rivas Itzel.
4. González Torres Joshua Sebastián.
5. Martínez Santos Angel Isaí.
6. Mireles Vázquez Miguel Ángel.
7. Neri Mora Gustavo Axel.
8. Olivares Rodríguez Juan Braulio.
9. Pancardo Botello Isaac.
10. Sámano Saucedo Saúl Iván.

La puntuación obtenida por los estudiantes durante la ORO 2020 corresponde a una fracción de la puntuación del cuarto y final selectivo, la fracción faltante corresponde al puntaje obtenido durante la realización de dos exámenes más. Con la ponderación de ambas puntuaciones se seleccionará a los mejores 6 puntajes para que sean la delegación oficial que representará al Estado de Guanajuato durante el Concurso Nacional de la XXXIV Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

A continuación presentamos los problemas del tercer examen selectivo de la XXXIV Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Guanajuato. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. Un refugio de animales consiste de 5 jaulas en una fila, marcadas de izquierda a derecha como se muestra a continuación.

Rojo Lobo	Plata León	Café Zorro	Blanco Vaca	Gris Caballo

Hay un animal en cada jaula. Los 5 animales son, de hecho, un lobo, un león, un zorro, una vaca y un caballo y, sus colores son rojo, plata, café, blanco y gris. Sin embargo, ninguna de las marcas corresponde a los animales (por ejemplo, el lobo no es rojo y el león no es plateado). Más aún, ningún animal está en o es adyacente a la jaula que corresponde a su tipo o color. Si el caballo no está en la jaula de en medio, ¿cuál es el color del caballo?

Problema 2. Sean $PQRS$ un trapecio isósceles con bases PQ y RS. Demuestra que el gravicentro del triángulo PQS está en la recta RF, donde F es la proyección de S a PQ.

Problema 3. Encuentra todos los pares de enteros positivos tales que el último dígito de su suma sea 3, su diferencia sea un número primo y su producto sea un cuadrado perfecto.

Segundo día

Problema 4. Para cada entero positivo k de tres dígitos (con el primer dígito distinto de cero), sea k_0 el número que se obtiene a partir de k borrando todos sus dígitos iguales a 0. Por ejemplo, si $k = 207$, entonces $k_0 = 27$. ¿Cuántos enteros positivos k de tres dígitos satisfacen que k_0 es un divisor de k distinto de k?

Problema 5. Sea DEF un triángulo con $\angle DFE = 90°$ y sean D_0, E_0 y F_0, los puntos medios de los lados EF, FD y DE, respectivamente. Dos triángulos equiláteros DE_0F_1 y ED_0F_2 son construidos fuera del triángulo DEF. Determina la medida del ángulo $\angle F_0F_1F_2$.

Problema 6. Considera la sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de números reales positivos con $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} + a_n = (a_{n+1} - a_n)^2$$

para todo entero $n \geq 1$. Determina el número de valores posibles que puede tomar el término a_{2020}.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

61^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas (Virtual)

Del 18 al 28 de septiembre de 2020, se llevó a cabo la edición 61 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), de forma virtual. El equipo mexicano estuvo integrado por

- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
- Ana Paula Jiménez Díaz (Ciudad de México),
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León),
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa),
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas),

el cual fue concentrado en Cuernavaca, Morelos, del 20 al 22 de septiembre para presentar los exámenes.
Tomás obtuvo medalla de oro; Pablo, Omar, Ana Paula y Emilio obtuvieron medallas de bronce; Daniel obtuvo mención honorífica. Como país, México ocupó el lugar número 45 de 105 países participantes. El jefe de la delegación fue Rogelio Valdez Delgado y el tutor fue Leonardo Ariel García Morán. Como observadores A participaron Marco Antonio Figueroa Ibarra y Maximiliano Sánchez Garza.
Tomás Francisco Cantú Rodríguez ha obtenido la cuarta medalla de oro para México en este certamen y Ana Paula Jiménez Díaz recibió por segundo año consecutivo el premio **Maryam Mirzakhani**, otorgado por la IMO desde el año 2017.

A continuación presentamos los problemas de la 61^a Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Considere el cuadrilátero convexo $ABCD$. El punto P está en el interior de $ABCD$. Asuma las siguientes igualdades de razones:

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Demuestre que las siguientes tres rectas concurren en un punto: la bisectriz interna del ángulo $\angle ADP$, la bisectriz interna del ángulo $\angle PCB$ y la mediatriz del segmento AB.

(Problema sugerido por Polonia)

Problema 2. Los números reales a, b, c, d son tales que $a \geq b \geq c \geq d > 0$ y $a + b + c + d = 1$. Demuestre que

$$(a + 2b + 3c + 4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

(Problema sugerido por Bélgica)

Problema 3. Hay $4n$ piedras de pesos $1, 2, 3, \ldots, 4n$. Cada piedrita se colorea de uno de n colores de manera que hay cuatro piedritas de cada color. Demuestre que podemos colocar las piedritas en dos montones de tal forma que las siguientes dos condiciones se satisfacen:

- Los pesos totales de ambos montones son iguales.
- Cada montón contiene dos piedritas de cada color.

(Problema sugerido por Hungría)

Problema 4. Sea $n > 1$ un entero. A lo largo de la pendiente de una montaña hay n^2 estaciones, todas a diferentes altitudes. Dos compañías de teleférico, A y B, operan k teleféricos cada una. Cada teleférico realiza el servicio desde una estación a otra de mayor altitud (sin paradas intermedias). Los teleféricos de la compañía A parten de k estaciones diferentes y acaban en k estaciones diferentes; igualmente, si un teleférico parte de una estación más alta que la de otro, también acaba en una estación más alta que la del otro. La compañía B satisface las mismas condiciones. Decimos que dos estaciones están *unidas* por una compañía si uno puede comenzar por la más baja y llegar a la más alta con uno o más teleféricos de esa compañía (no se permite otro tipo de movimientos entre estaciones).
Determine el menor entero positivo k para el cual se puede garantizar que hay dos estaciones unidas por ambas compañías. (Problema sugerido por India)

Problema 5. Se tiene una baraja de $n > 1$ cartas, con un entero positivo escrito en cada carta. La baraja tiene la propiedad de que la media aritmética en cada par de cartas es también la media geométrica de los números escritos en alguna colección de una o más cartas. ¿Para qué valores de n se tiene que los números escritos en las cartas son todos iguales? (Problema sugerido por Estonia)

Problema 6. Pruebe que existe una constante positiva c para la que se satisface la siguiente afirmación:
Sea $n > 1$ un entero y sea $\mathcal{S}$ un conjunto de n puntos del plano tal que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes de $\mathcal{S}$ es al menos 1. Entonces, existe una recta ℓ separando $\mathcal{S}$ tal que la distancia de cualquier punto de $\mathcal{S}$ a ℓ es al menos $cn^{-1/3}$.
(Una recta ℓ *separa* un conjunto de puntos $\mathcal{S}$ si ℓ corta a alguno de los segmentos que une dos puntos de $\mathcal{S}$).

Nota. Los resultados más débiles que se obtienen al sustituir $cn^{-1/3}$ por $cn^{-\alpha}$ se podrán valorar dependiendo del valor de la constante $\alpha > 1/3$.

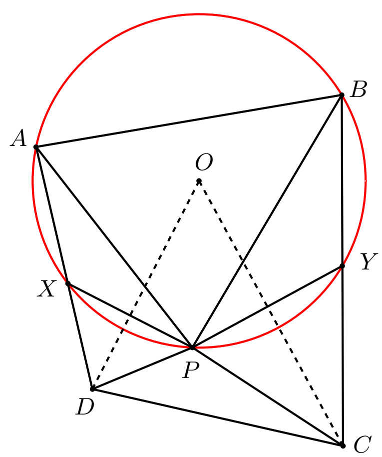
(Problema sugerido por Taiwán)

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

61^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas (Virtual)

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 61^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Carlos Emilio Ramos Aguilar). Sea X el punto sobre el segmento AD tal que $\angle APX = \angle XAP = \angle DAP$, el cual también cumple que $AX = XP$. Análogamente se define el punto Y sobre el segmento BC tal que $BY = YP$, por lo que $\angle BPY = \angle YBP = \angle CBP$.



Por las razones dadas en el problema, si $\angle PAD = \alpha$ y $\angle CBP = \beta$, entonces $\angle PBA = 2\alpha$, $\angle DPA = 3\alpha$, $\angle BAP = 2\beta$ y $\angle BPC = 3\beta$. Luego, tenemos que $\angle APX = \alpha$ y $\angle BPY = \beta$, por lo que $\angle AXP = 180^\circ - 2\alpha$ y $\angle BYP = 180^\circ - 2\beta$.

Como $\angle BAP = 2\beta$ y $\angle PBA = 2\alpha$, se sigue que los cuadriláteros $AXPB$ y $BYPA$ son cíclicos y, por lo tanto, $ABYPX$ es cíclico.
Más aún, $\angle DXP = 180^\circ - \angle AXP = 2\alpha$ y $\angle XPD = 2\alpha$, lo que implica que $DX = DP$. Análogamente, obtenemos que $CY = CP$. Esto significa que las bisectrices de los ángulos $\angle PCB$ y $\angle ADP$ son las mediatrices de los segmentos PY y PX, respectivamente, las cuales deben intersecarse en el centro O de la circunferencia circunscrita de $ABYPX$. Este también debe estar sobre la mediatriz del segmento AB, lo que concluye el problema.

Solución del problema 2. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). Usando la desigualdad MA-MG con pesos[4] para a, b, c, d y considerando que $a+b+c+d = 1$, tenemos que $a^a b^b c^c d^d \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Luego, si demostramos que

$$(a + 2b + 3c + 4d)\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) < 1,$$

habremos acabado.
Esta desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$(a + 2b + 3c + 4d)\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right) < (a + b + c + d)^3,$$

la cual a su vez es equivalente a la desigualdad

$$\begin{aligned} b^3 + 2c^3 + 3d^3 + a^2d + b^2d + c^2d &< 2ab^2 + 2ac^2 + 2ad^2 + a^2b + b^2c + bd^2 + \\ &\quad + 6(abc + abd + acd + bcd). \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora, como $a \geq b \geq c \geq d > 0$, tenemos que $a^2d \leq a^2b$, $b^2d \leq abd$, $c^2d \leq acd$, $3d^3 \leq 3bcd$, $2c^3 \leq 2ac^2$, $b^3 \leq ab^2$ y

$$ab^2 + 2ad^2 + bc^2 + bd^2 + 6abc + 5abd + 5acd + 3bcd > 0.$$

Sumando estas últimas siete desigualdades, obtenemos la desigualdad (5), como se quería.

Solución del problema 3. Emparejamos las piedritas con pesos que suman $4n + 1$, resultando en el conjunto S de $2n$ parejas: $\{1, 4n\}, \{2, 4n - 1\}, \ldots, \{2n, 2n + 1\}$. Basta con partir el conjunto S en dos conjuntos, cada uno con n parejas, de tal manera que cada conjunto tenga dos piedritas de cada color.
Se introduce el multigrafo G (esto es, un grafo donde hay lazos y, posiblemente, múltiples aristas entre vértices) de n vértices tal que cada vértice corresponde a un color. Para cada pareja de piedritas en S, se agrega una arista entre vértices que corresponden a los colores de esas piedritas. Nótese que cada vértice tiene grado 4. Además, una partición deseada corresponde a colorear las aristas de G en dos colores, digamos azul

[4]**Desigualdad MA-MG con pesos.** Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales no negativos. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son números reales no negativos tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$, entonces

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n},$$

con la igualdad si y solo si $a_i = a_j$ para todos los enteros i, j tales que $\lambda_i \neq 0$ y $\lambda_j \neq 0$.

y rojo, de tal manera que cada vértice tiene grado 2 con respecto a cada color, esto es, que cada vértice tenga el mismo grado azul y rojo, donde por "grado azul" (respectivamente, "grado rojo") nos referimos al grado de un vértice al considerar únicamente las aristas azules (rojas) en el multigrafo.
Para completar la solución, basta con dar una coloración como se describió antes para cada componente conexa G' de G. Como todos los grados de los vértices son pares, en G' existe un circuito Euleriano C (esto es, un circuito que pasa por cada arista de G' exactamente una vez). Obsérvese que el número de aristas en C es par pues es igual al doble del número de vértices en G'. Entonces todas las aristas se pueden pintar de rojo o azul tal que dos aristas adyacentes en C tengan diferentes colores (se puede mover a través de C y colorear las aristas de una en una alternando entre los colores azul y rojo). Así en G' cada vértice tiene el mismo grado azul y rojo, como se quería.

Solución del problema 4. (Solución de Ana Paula Jiménez Díaz). Se probará que $k = n(n-1)+1$ cumple con lo que se busca. Primero, se verá que existe un acomodo para el cual las compañías A y B no conectan a las mismas dos estaciones si $k = n(n-1)$.
Para ver esto, se enumeran las estaciones del 1 al n^2 con respecto a la altura que tengan. Entonces los teleféricos de la compañía A se moverán de la siguiente manera, donde "$a \to b$" significa que hay un teleférico que va de la estación de altura a a la estación de altura b.

$$\begin{aligned}
&1 \to n+1 \to 2n+1 \to \cdots \to n(n-1)+1\\
&2 \to n+2 \to 2n+2 \to \cdots \to n(n-1)+2\\
&\ \vdots\\
&n \to 2n \to 3n \to \cdots \to n^2.
\end{aligned}$$

Para la compañía B, los teleféricos se moverán de la siguiente manera.

$$\begin{gathered}
1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n\\
n+1 \to n+2 \to n+3 \to \cdots \to 2n\\
\vdots\\
n(n-1)+1 \to n(n-1)+2 \to n(n-1)+3 \to \cdots \to n^2.
\end{gathered}$$

Obsérvese que la compañía A une dos estaciones si y solo si sus alturas son congruentes módulo n, mientras que si dos estaciones son unidas por la compañía B, entonces las alturas de estas difieren por a lo mucho $n-1$. Esto implica que no puede haber dos estaciones conectadas tanto por A como por B.
Ahora se verá que, si $k = n(n-1)+1$, deben existir dos estaciones unidas por ambas compañías. Considérese la gráfica de n^2 vértices donde hay aristas dirigidas, una por cada teleférico, siendo las aristas que representan un teleférico de A rojas y las de B azules. Al fijarse en un solo color, la gráfica constará únicamente de caminos, ya sea con un solo vértice o un camino de flechas. Estos se pueden interpretas como componentes conexas. Sea r la cantidad de componentes conexas de A y sean $c_1, c_2, \ldots, c_r$ la

cantidad de vértices en cada una. Análogamente, sea s la cantidad de componentes conexas de B y sean d_1, d_2, $\ldots$, d_s la cantidad de vértices en cada una. Nótese que $c_1 + c_2 + \cdots + c_r \leq n^2$, así como $d_1 + d_2 + \cdots + d_s \leq n^2$. Como la componente conexa con c_i vértices tiene $c_i - 1$ aristas (que representan teleféricos), entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right) - r = \sum_{i=1}^{r}(c_i - 1) = k,$$
$$\left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right) - s = \sum_{i=1}^{s}(s_i - 1) = k.$$

De aquí que,

$$r = \left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right) - k \leq n^2 - n(n-1) - 1 = n - 1,$$
$$s = \left(\sum_{i=1}^{s} d_i\right) - k \leq n^2 - n(n-1) - 1 = n - 1.$$

Como hay a lo mucho $n-1$ componentes conexas de la compañía A, debe haber una que tiene al menos $\lceil \frac{n^2}{n-1} \rceil = n + 2$ vértices, dígase la componente conexa C_j. Por otro lado, como hay a lo mucho $n-1$ componentes conexas de la compañía B y los vértices de C_j deben estar repartidos en esas componentes, por el principio de las casillas existe una componente conexa de B, D_m, tal que tiene dos vértices de la componente conexa C_j. Estos dos vértices representan estaciones las cuales, por cómo se definieron las aristas de la gráfica, están unidas tanto por la compañía A como por la compañía B, como se quería.

Solución del problema 5. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Se probará que esto sucede para todo entero positivo n. Con el fin de llegar a una contradicción, asúmase que para cierto $n > 1$ esto no ocurre. Entonces digamos que las cartas tienen los números $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ escritos en ellas donde $1 < k \leq n$ y cada uno de esos números puede aparecer varias veces. Ahora se demostrará que $\operatorname{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$. Para ver esto sean $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ los números en cada carta con $r_1 = a_1$ y $r_n = a_k$ y supóngase que $\operatorname{mcd}(r_1, \ldots, r_n) = d > 1$. Entonces, $r_i = x_i d$ para cada i. Ahora, nótese que los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ también cumplen con la condición del problema. En efecto, para cualesquiera $1 \leq i < j \leq n$ existen enteros positivos $m, i_1, i_2, \ldots, i_m$ tales que

$$\frac{r_i + r_j}{2} = \sqrt[m]{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_m}}.$$

Entonces,

$$\frac{x_i + x_j}{2} = \frac{1}{d}\left(\frac{r_i + r_j}{2}\right) = \frac{1}{d}\sqrt[m]{r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_m}} = \sqrt[m]{\frac{r_{i_1}}{d}\frac{r_{i_2}}{d}\cdots\frac{r_{i_m}}{d}} = \sqrt[m]{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}}.$$

Así, los números $x_1, \ldots, x_n$ también cumplen y $\operatorname{mcd}(x_1, \ldots, x_n) = 1$, por lo que se puede asumir que $\operatorname{mcd}(a_1, \ldots, a_n) = 1$.

Si $a_k = 1$, entonces $a_1 = \cdots = a_k = 1$, lo cual contradice la suposición inicial. Luego $a_k > 1$, por lo que debe existir un primo p que divide a a_k. Se probará por inducción fuerte que p divide a r_j para $1 \leq j \leq n$. El caso $j = k$ es trivial. Asúmase el resultado para $j = t+1, t+2, \ldots, k-1, k$ y se procede a probarlo para $j = t$. Por la condición del problema, deben existir $q, i_1, i_2, \ldots, i_q$ enteros positivos tales que

$$\frac{a_t + a_{t+1}}{2} = \sqrt[m]{a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \cdots a_{i_q}^{\alpha_q}} \tag{6}$$

donde $\alpha_i \geq 1$ y $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q = n$. Si $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_q} \leq a_t$, entonces por la desigualdad MA-MG con pesos se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{a_t + a_{t+1}}{2} &= \sqrt[m]{a_{i_1}^{\alpha_1} a_{i_2}^{\alpha_2} \cdots a_{i_q}^{\alpha_q}} \leq \frac{\alpha_1 a_{i_1} + \alpha_2 a_{i_2} + \cdots + \alpha_q a_{i_q}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q} \\ &\leq \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q)\, a_t}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_q} = a_t \\ &< \frac{a_t + a_{t+1}}{2}, \end{aligned}$$

lo cual claramente es una contradicción. Se sigue que $a_{i_b} > a_t$ para algún i_b. Por la hipótesis de inducción, se tiene que p divide a a_{i_b} y, como ambos lados de la ecuación (6) son enteros positivos, se sigue que p divide a $\frac{a_t + a_{t+1}}{2}$, es decir, p divide a $a_t + a_{t+1}$. Dado que $p \mid a_{t+1}$, entonces $p \mid a_t$, como se buscaba. Esto completa la inducción.

Por lo tanto, aunque se tiene que $\operatorname{mcd}(a_1, \ldots, a_k) = 1$, se encontró un número primo que los divide a todos, lo que genera la contradicción buscada.

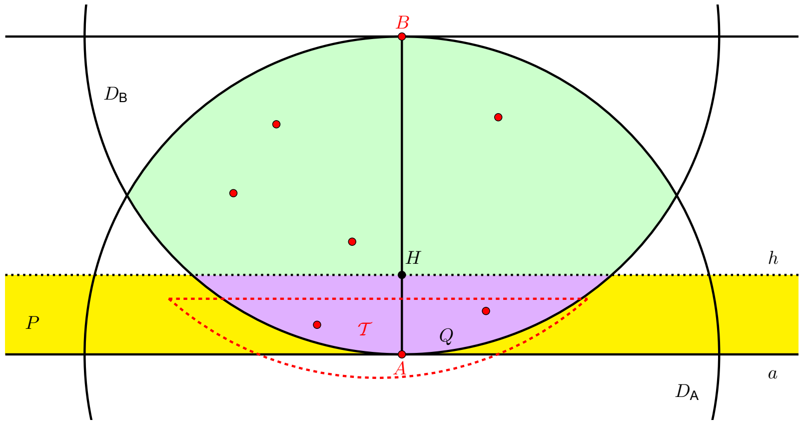
Solución del problema 6. Se probará que la afirmación deseada se cumple para $c = \frac{1}{8}$. Sea $\delta = \frac{1}{8} n^{-1/3}$. Para cualquier recta ℓ y cualquier punto X, sea X_ℓ la proyección de X a ℓ; una notación similar se usa para un conjunto de puntos.

Supóngase que, para alguna línea ℓ, el conjunto $\mathcal{S}_\ell$ contiene dos puntos adyacentes X y Y con $XY = 2d$. Entonces la recta perpendicular a ℓ que pasa por el punto medio de XY separa a $\mathcal{S}$, y todos los puntos de $\mathcal{S}$ están a una distancia mayor o igual a d de ℓ. Entonces, si $d \geq \delta$, la recta deseada se ha encontrado. Con el fin de llegar a una contradicción, asúmase que no existen tales puntos en cualquier proyección.

Se elijen dos puntos A y B en $\mathcal{S}$ con la máxima distancia $M = AB$ (esto es, AB es un *diámetro* de $\mathcal{S}$); por la condición del problema, $M \geq 1$. Sea ℓ la recta AB. El conjunto $\mathcal{S}$ está contenido en la intersección de dos discos D_A y D_B de radio M entrados en A y B, respectivamente. Entonces, la proyección $\mathcal{S}_\ell$ está contenida en el segmento AB. Más aún, los puntos en $\mathcal{S}_\ell$ dividen al segmento en a lo mucho $n-1$ partes, cada una de longitud menor o igual a 2δ. Por lo tanto,

$$M < n \cdot 2\delta. \tag{7}$$

Elíjase un punto H en el segmento AB con $AH = \frac{1}{2}$. Sea P la región entre las líneas a y h que son perpendiculares a AB y pasan por A y H, respectivamente; asúmase que P contiene su frontera, que consiste de las líneas a y h. Sean $\mathcal{T} = P \cap \mathcal{S}$ y $t = |\mathcal{T}|$.



Por la suposición hecha, el segmento AH contiene al menos $\left\lceil \frac{1}{2} : (2\delta) \right\rceil$ puntos de $\mathcal{S}_\ell$, lo que lleva a que

$$t \geq \frac{1}{4\delta}. \tag{8}$$

Nótese que $\mathcal{T}$ está contenido en $Q = P \cap D_B$. El conjunto Q es un segmento circular, y su proyección Q_a es un segmento de longitud

$$2\sqrt{M^2 - \left(M - \frac{1}{2}\right)} < 2\sqrt{M}.$$

Por otro lado, para cualesquiera dos puntos $X, Y \in \mathcal{T}$, se tiene $XY \geq 1$ y $X_\ell Y_\ell \leq \frac{1}{2}$, por lo que $X_a Y_a = \sqrt{XY^2 - X_\ell Y_\ell^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. En resumen, t puntos constituyen $\mathcal{T}_a$, estos caen sobre el segmento de longitud menor que $2\sqrt{M}$, y están a una distancia mayor o igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ entre ellos. Esto implica que $2\sqrt{M} > (t-1)\frac{\sqrt{3}}{2}$, o

$$t < 1 + \frac{4\sqrt{M}}{\sqrt{3}} < 4\sqrt{M}, \tag{9}$$

pues $M \geq 1$.
Combinando las desigualdades (7), (8) y (9), se obtiene finalmente que

$$\frac{1}{4\delta} \leq t < 4\sqrt{M} < 4\sqrt{2n\delta} \qquad \text{o} \qquad 512n\delta^3 > 1,$$

lo cual no se cumple para el valor elegido de δ.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \ (\text{mod } m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$ y $c \equiv d \ (\text{mod } m)$, entonces $a \equiv d \ (\text{mod } m)$.*
2. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$ y $b \equiv d \ (\text{mod } m)$, entonces $ab \equiv cd \ (\text{mod } m)$.*
3. *Si $a \equiv c \ (\text{mod } m)$, entonces $a^n \equiv c^n \ (\text{mod } m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \ (\text{mod } m)$, entonces $a \equiv c \ (\text{mod } \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \ (\text{mod } p)$.*

Teorema 3. *Si p es un número primo de la forma $4k + 3$ y p divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces p divide a cada uno de a y b.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las Casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 19 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Mauricio Adrián Che Moguel

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Luis Eduardo García Hernández

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Isabel Alicia Hubard Escalera

Leonardo Martínez Sandoval

Mónica Mateos Cisneros

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez

Cintillo Legal

Tzaloa, Año 2020 No. (1, 2, 3, 4), revista electrónica de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, es una publicación trimestral editada y distribuida por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Av. Cipreses s/n km. 23.5, Carretera Federal México-Cuernavaca, Col. San Andrés Totoltepec, Delegación Tlalpan, C.P. 14400, Ciudad de México, Tel. 55 5849-6709, http://www.smm.org.mx, smm@smm.org.mx.
http://www.ommenlinea.org/publicaciones/revista-tzaloa-2/

Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios.

Reservas del Uso de Derecho: En trámite.