SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Febrero de 2021

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2021, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su decimotercer año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, queremos dar la bienvenida a Enrique Treviño López, quien desde ahora se integra al Comité Editorial de la revista.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Homotecias entre círculos*, de nuestro amigo Leonardo Ariel García Morán. En él, se abordan algunos resultados a cerca de triángulos homotéticos y a cerca de homotecias entre círculos, en especial se enuncian los teoremas de Monge y Monge-dÁlembert que relacionan los centros de homotecia de varias parejas de círculos y se muestran algunas aplicaciones de estos teoremas en la

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

solución de problemas de olimpiada. Esperamos que esta aportación sea útil para los lectores avanzados.

De especial interés para todos, en este primer número del año 2021, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes de invitación a la OMM del año 2020. También incluimos los exámenes con soluciones de las pruebas individual y por equipos del nivel I del Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de octubre de 2020 de forma virtual. En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC), así como los problemas de la 7^a Olimpiada Iraní de Geometría (IGO), ambos certámenes llevados a cabo en el mes de octubre de 2020 de forma virtual.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2021.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2002. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2021-2022 y, para el 1° de julio de 2022, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2021. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2021 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2022) y a la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2022).

De entre los concursantes nacidos en 2005 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2022).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2022.

5ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2021, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Quinta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2021.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2021.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2021.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 5^a OMMEB se realizará del 17 al 21 de junio de 2021 de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2022.

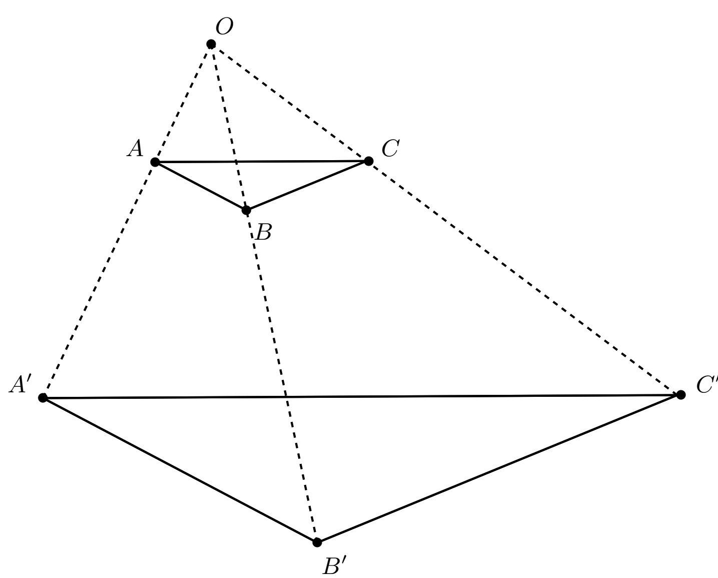
Homotecias entre círculos

Por Leonardo Ariel García Morán

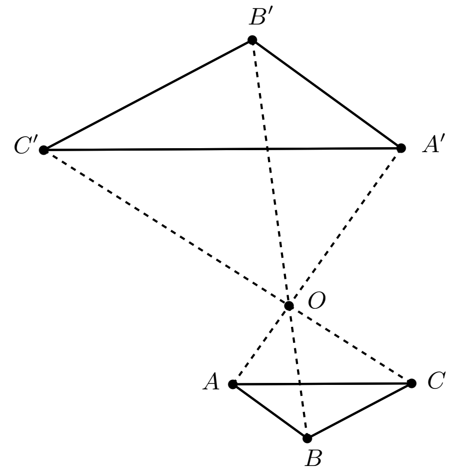
Nivel Avanzado

Introducción

Una **homotecia** es una transformación del plano que consiste en expandir o comprimir todo el plano respecto a cierto punto. Formalmente, una homotecia h con centro O y razón $k \neq 0$ es una transformación del plano que a cada punto P le asigna el punto P' en la recta OP tal que $OP' = k \cdot OP$.

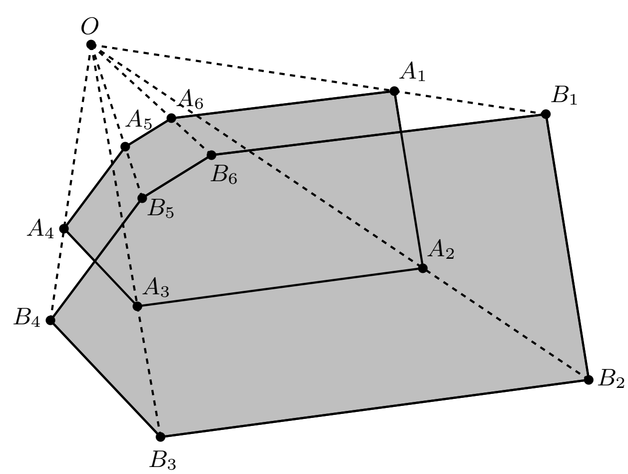


Cuando $k < 0$, la homotecia lleva puntos de un lado del punto O a puntos del otro lado, como se muestra en la siguiente figura.



La utilidad principal de las homotecias se debe al siguiente hecho: Si A y B son puntos cualquiera, entonces los triángulos OAB y $OA'B'$ son semejantes, pues $\angle AOB = \angle A'OB'$ y $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$. Esto en particular significa que $A'B' = kAB$ y que los segmentos AB y $A'B'$ son paralelos. Más aún, de $A'B' = kAB$ podemos ver que para cualesquiera tres puntos A, B y C, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, pues las razones entre sus lados correspondientes son todas iguales a k. Además, sus lados correspondientes son paralelos. Ahora podemos introducir la siguiente definición.

Decimos que dos polígonos $A_1A_2\dots A_n$ y $B_1B_2\dots B_n$ son **homotéticos** si existe una homotecia que transforma A_i en B_i para cada $i = 1, 2, \dots, n$.

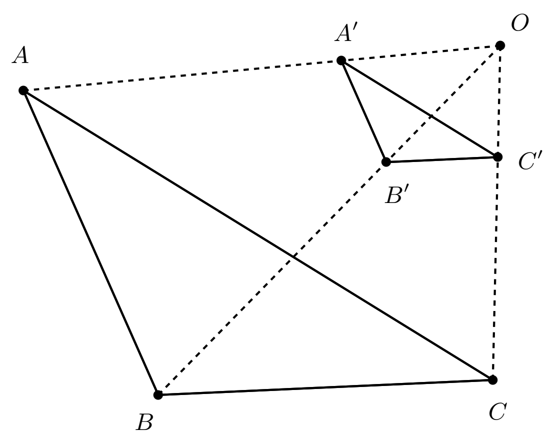


De la misma manera que lo hicimos con los triángulos, podemos ver que si $A_1A_2\dots A_n$

y $B_1B_2\dots B_n$ son homotéticos desde un punto O con razón k, entonces estos son semejantes con razón k. En particular, tenemos que $B_iB_j = kA_iA_j$ para cualesquiera i, j y, el área de $B_1B_2\dots B_n$, es igual a k^2 veces el área de $A_1A_2\dots A_n$. Finalmente, los segmentos A_iA_j y B_iB_j son paralelos para cualesquiera i, j. Para el caso de los triángulos, el recíproco de esto último también es cierto.

Teorema 1. Dos triángulos no congruentes ABC y $A'B'C'$ son homotéticos si y solo si sus lados correspondientes son paralelos.

Demostración. Solo nos falta demostrar que si los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen lados correspondientes paralelos, entonces son homotéticos. Es claro que en este caso los triángulos son semejantes, pues los lados paralelos correspondientes nos dicen que tienen los mismos ángulos. Llamemos O al punto de intersección de las rectas AA' y BB'; este debe existir, de lo contrario $ABB'A'$ sería un paralelogramo, $AA' = BB'$ y los triángulos serían congruentes.



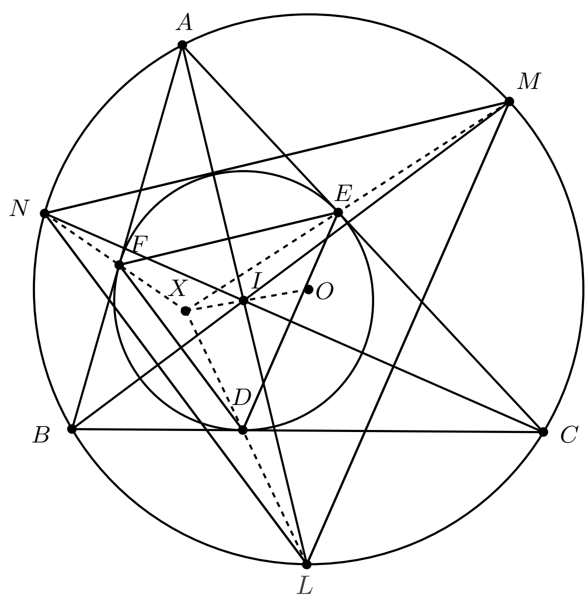
Ahora consideremos la homotecia de centro O y razón $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$, la cual lleva a A y B a A' y B', respectivamente. La imagen C^* de C bajo esta homotecia cumple que $B'C^*$ es paralela a BC y $A'C^*$ es paralela a AC. Esto implica que $C^* = C'$, pues las paralelas a BC y AC por B' y A' se intersecan en un único punto. Entonces, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son homotéticos con centro O. $\square$

Vale la pena destacar que este resultado no es válido directamente para polígonos con más lados. Por ejemplo, podemos tener un cuadrado y un rectángulo de 2×1 con lados paralelos, pero estos no pueden ser homotéticos pues ni siquiera son semejantes.
El resultado en particular significa que si dos triángulos tienen lados correspondientes paralelos, entonces las rectas que unen los vértices correspondientes concurren. Este es un resultado muy útil en una gran variedad de problemas, y lo utilizaremos para resolver el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Sea ABC un triángulo, I su incentro y O su circuncentro. El incírculo de

ABC es tangente a BC, CA y AB en D, E y F, respectivamente. Los puntos L, M y N son los puntos medios de los arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ y $\widehat{AB}$, respectivamente, del triángulo que no contienen a otros vértices del triángulo. Demostrar que las rectas LD, ME, NF y OI concurren.

Solución. Primero demostraremos que LD, ME y NF concurren en un punto X. Nuestra estrategia será demostrar que los triángulos DEF y LMN tienen lados correspondientes paralelos, lo cual implicará que las rectas LD, ME y NF concurren en un punto que es centro de una homotecia que lleva el triángulo DEF al triángulo LMN.

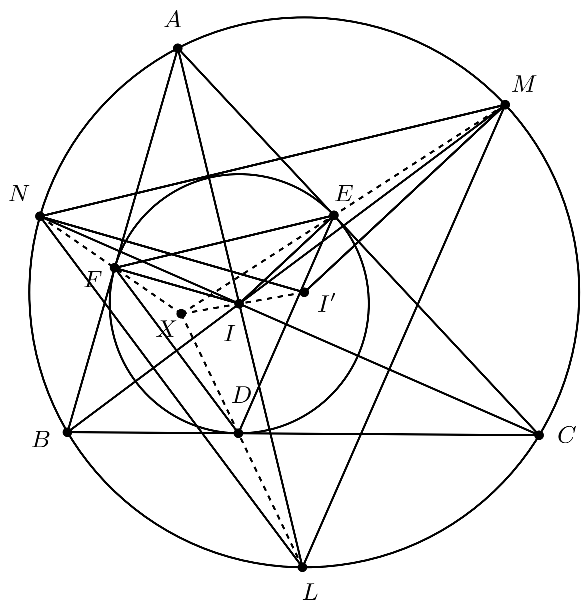


Demostraremos que EF y MN son paralelos, demostrando que ambos son perpendiculares a AI. Primero observemos que $AE = AF$, pues AE y AF son tangentes al incírculo y, como AI biseca al ángulo $\angle EAF$, se sigue que AI es perpendicular a EF. Por otro lado, tenemos que BI y CI cortan al circuncírculo del triángulo ABC en M y N respectivamente, por lo que $\angle MNI = \angle MNC = \angle MBC = \frac{1}{2}\angle B$ y

$$\angle AIN = \angle IAC + \angle ICA = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C.$$

Luego, $\angle INM + \angle AIN = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 90°$, por lo que el ángulo entre AI y MN es de 90° y AI también es perpendicular a MN. Concluimos que las rectas EF y MN son paralelas. Análogamente, obtenemos que FD es tangente a NL y DE es tangente a LM. Concluimos que los triángulos DEF y LMN son homotéticos, por lo que LD, ME y NF concurren en un punto X que es el centro de la homotecia entre los triángulos DEF y LMN.

Ahora nos falta probar que X, I y O son colineales. Para demostrar esto, demostraremos que la homotecia con centro X que manda al triángulo DEF al triángulo LMN, manda I a O.



Para esto, observemos que si I' es la imagen de I bajo esta homotecia, entonces los triángulos IEF, IED y IDF son semejantes a los triángulos $I'NM$, $I'ML$ y $I'LN$, respectivamente, todos con razón igual a la razón k de la homotecia. En particular, $I'N = kIF$, $I'M = kIE$ y $I'D = kID$, por lo que I' es el circuncentro del triángulo LMN y $I' = O$. Concluímos que X, I y O son colineales, como queríamos.

La última parte de esta solución muestra que si dos puntos son "correspondientes" en dos triángulos homotéticos (en el sentido de que forman triángulos semejantes con los lados de ambos triángulos), entonces la homotecia entre los dos triángulos también manda uno de estos puntos en el otro. Concretamente tenemos los siguientes casos especiales.

Teorema 2. Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos homotéticos con centro K. Entonces, la homotecia que manda ABC a $A'B'C'$ también manda:

- El gravicentro G del triángulo ABC, al gravicentro G' del triángulo $A'B'C'$.
- El incentro I del triángulo ABC, al incentro I' del triángulo $A'B'C'$.
- El circuncentro O del triángulo ABC, al circuncentro O' del triángulo $A'B'C'$.
- El ortocentro H del triángulo ABC, al ortocentro H' del triángulo $A'B'C'$.

En particular, las rectas GG', II', OO' y HH' todas pasan por K.

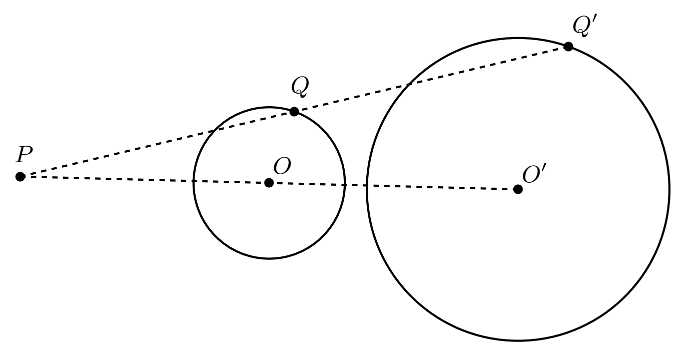
Más aún, en el ejemplo anterior sucedió algo interesante. Al aplicar la homotecia al punto I, que era el centro de cierto círculo, obtuvimos el punto O, que era centro de otro círculo. Esta situación se repite en general cuando aplicamos homotecias a un círculo.

Homotecias entre círculos

El resultado principal es el siguiente.

Teorema 3. Sea C un círculo de radio r. Al aplicar una homotecia con centro P y razón k, este círculo se convierte en un círculo de radio rk, con centro en el punto O' al que se manda P bajo esta homotecia.

Demostración. Consideremos el punto O' que se describió anteriormente. Entonces, para cualquier punto Q en el círculo, su imagen Q' satisface que $O'Q' = kPQ = kr$, por lo que Q' está en el círculo de centro O' y radio kr.

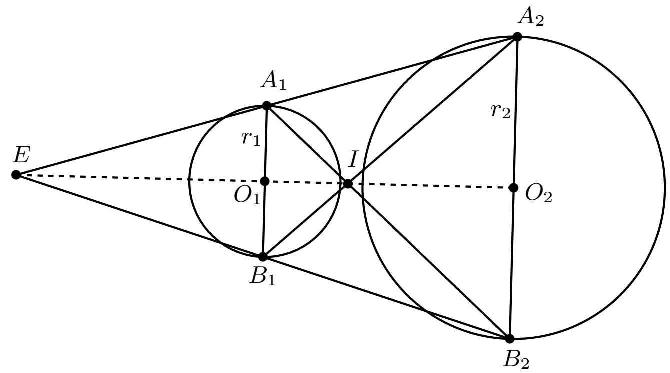


Recíprocamente, si Q está en este círculo, entonces el punto Q' en la recta PQ tal que $PQ' = \frac{1}{k}PQ$ satisface que Q es la imagen de Q' bajo la homotecia. $\square$

Ahora que sabemos que la homotecia convierte círculos en círculos, es natural hacernos la pregunta opuesta: si tenemos dos círculos dados, ¿cuándo es posible encontrar una homotecia que los relacione? Sabemos por el resultado anterior que el centro de esta homotecia, si existe, debe estar en la línea que une los centros de los círculos y, sabemos además, la razón que debe tener (salvo posiblemente el signo). Resulta ser que tal homotecia siempre existe, y no solo eso, existen dos.

Teorema 4. Dados dos círculos Γ_1 y Γ_2 con centros O_1, O_2 y radios r_1, r_2, respectivamente, con $O_1 \neq O_2$ y $r_1 \neq r_2$, existen exactamente dos homotecias que mandan Γ_1 a Γ_2, una con razón $\frac{r_2}{r_1}$ y otra con razón $-\frac{r_2}{r_1}$.

Demostración. Consideremos dos diámetros A_1B_1 y A_2B_2 de Γ_1 y Γ_2, respectivamente, de tal manera que sean perpendiculares a la recta O_1O_2 y A_1, A_2 estén del mismo lado de la recta O_1O_2.



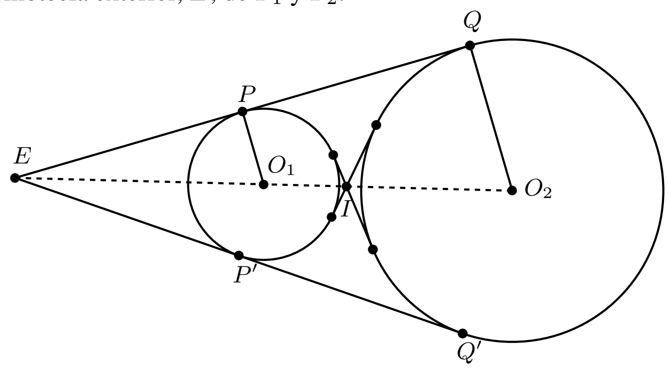
Ahora sea E la intersección de A_1A_2 con B_1B_2 e I la interssección de A_1B_2 con A_2B_1. Afirmamos que E, I son los centros de las homotecias buscadas.
Es fácil ver que el cuadrilátero $A_1B_1B_2A_2$ es un trapecio isósceles y O_1O_2 es la mediatriz común de sus bases, por lo que los puntos E, I están sobre la recta O_1O_2. Veamos ahora que los triángulos EO_2A_2 y EO_1A_1 son semejantes puesto que O_1A_1 y O_2A_2 son paralelas. Entonces, $\frac{EO_2}{EO_1} = \frac{O_2A_2}{O_1A_1} = \frac{r_2}{r_1}$, por lo que la homotecia de centro E y razón $\frac{r_2}{r_1}$ manda O_1 a O_2 y, por lo tanto, manda Γ_1 al círculo de centro O_2 y radio $\frac{r_2}{r_1} \cdot r_1 = r_2$, que es Γ_2. Análogamente, se demuestra que la homotecia con centro I y razón $-\frac{r_2}{r_1}$ manda Γ_1 a Γ_2.
Finalmente, para ver que estas homotecias son las únicas, observemos que cualquier homotecia que mande Γ_1 a Γ_2 debe mandar A_1 a uno de los puntos A_2 o B_2, pues el segmento O_2A_1' debe ser paralelo a O_1A_1. En el primer caso, se sigue que esta debe ser la homotecia desde E y, en el segundo caso, debe ser la homotecia desde I. $\square$

A los puntos I y E se les conoce como **centros de homotecia** de Γ_1 y Γ_2, I interior y E exterior. Un nombre menos común para ellos es **insimilicentro** y **exsimilicentro** respectivamente, derivados de los nombres en inglés *insimilicenter* y *exsimilicenter*.
Los casos donde $r_1 \neq r_2$, son un poco distintos. Cuando $r_1 = r_2$ tenemos un centro de homotecia interior, pero no uno exterior, pues las rectas A_1A_2 y B_1B_2 son paralelas. Cuando $O_1 = O_2$ ambos centros coinciden con el centro común de ambas circunferencias. Checar los detalles de estos dos casos queda como ejercicio.

Un último punto a notar es que en la demostración anterior realmente no necesitamos que los diámetros sean perpendiculares a O_1O_2, basta con que sean paralelos entre sí. Utilizando esto podemos obtener el siguiente resultado útil.

Teorema 5. Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias. Entonces, las tangentes comunes exteriores de Γ_1 y Γ_2 (si existen) pasan por el centro de homotecia exterior de Γ_1 y Γ_2. Similarmente, las tangentes comunes interiores de Γ_1 y Γ_2 (si existen) pasan por el centro de homotecia interior.

Demostración. Consideremos una tangente común exterior a Γ_1 y Γ_2 que las toca en P y Q, respectivamente y, sean O_1, O_2, los centros de Γ_1 y Γ_2, respectivamente. Entonces, O_1P y O_2Q son radios paralelos de Γ_1 y Γ_2, por lo que PQ contiene al centro de homotecia exterior, E, de Γ_1 y Γ_2.

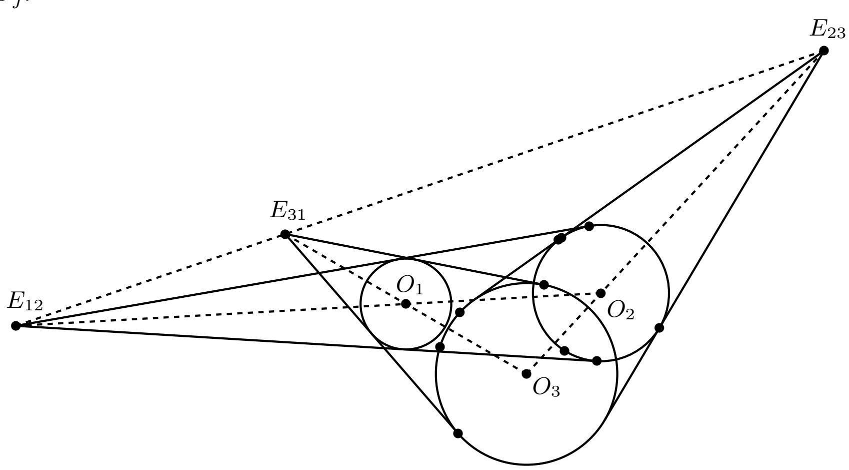


Análogamente obtenemos el resultado para las tangentes interiores. □

Finalmente, tenemos el siguiente teorema que relaciona los centros de homotecia de varias parejas de círculos.

Teorema [Monge]. Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 circunferencias con centros y radios distintos. Entonces, los centros de homotecia exteriores de las parejas de circunferencias (Γ_1, Γ_2), (Γ_2, Γ_3) y (Γ_3, Γ_1) son colineales.

Demostración. Sean O_i y r_i ($i = 1, 2, 3$), los centros y radios de Γ_1, Γ_2 y Γ_3 respectivamente. Sea E_{ij} el centro de homotecia exterior de Γ_i y Γ_j, el cual está en la recta O_iO_j.



Entonces,

$$\frac{O_1E_{12}}{E_{12}O_2} \cdot \frac{O_2E_{23}}{E_{23}O_3} \cdot \frac{O_3E_{31}}{E_{31}O_1} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Por el teorema de Menelao, concluimos que E_{12}, E_{23} y E_{31} son colineales. □

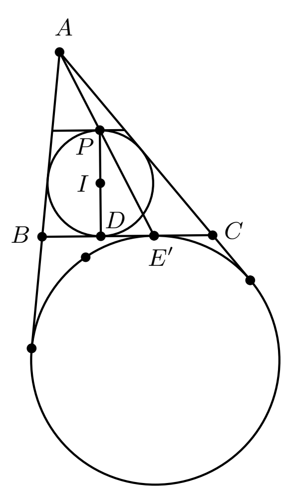
El teorema anterior tiene una versión que involucra también a los centros de homotecia interiores. La demostración es análoga a la del teorema anterior, por lo que la omitimos.

Teorema [Monge-dÁlembert]. Sean Γ_1, Γ_2 y Γ_3 circunferencias con centros y radios distintos. Entonces, el centro de homotecia interior de Γ_1 y Γ_2, el centro de homotecia interior de Γ_1 y Γ_3, y el centro de homotecia exterior de Γ_2 y Γ_3 son colineales.

Ahora que tenemos estas herramientas potentes de homotecia en círculos, podemos usarlas para resolver problemas. Comenzamos con uno de los resultados más populares dentro de la geometría de olimpiada.

Ejemplo 2. Sea ABC un triángulo con incentro I. El incírculo y el excírculo opuesto a A son tangentes a BC en los puntos D y E, respectivamente. P es un punto en el incírculo tal que DP es un diámetro del mismo. Demostrar que los puntos A, P y E son colineales.

Solución. La observación crucial es que A es el centro de homotecia exterior del incírculo del triángulo ABC y su excírculo opuesto a A, pues es la intersección de sus tangentes interiores comunes.



Sea E' la imagen de P bajo esta homotecia y consideremos la tangente al incírculo en P. Esta es perpendicular a IP, por lo que es paralela a BC, y al aplicar la homotecia se vuelve una recta paralela a BC, que debe ser tangente al excírculo del triángulo ABC

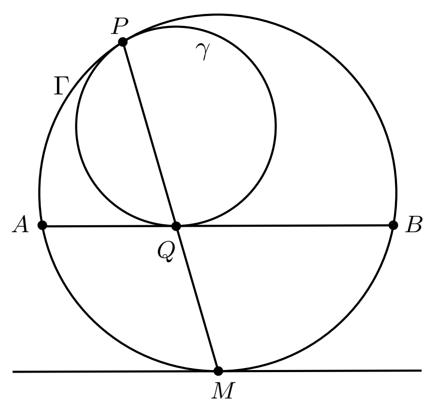
en E'. Como la recta BC es paralela a esta recta y tangente al excírculo, concluimos que la homotecia debe llevar la tangente al incírculo en P a BC, por lo que $E' = E$ y A, P y E son colineales.

Este resultado tiene una versión análoga si consideramos un diámetro del excírculo en vez del incírculo: La recta AD pasa por el punto diametralmente opuesto a E en el excírculo. Una consecuencia interesante de este resultado es la siguiente: Si X es el pie de la altura desde A, entonces EI pasa por el punto medio de AX. Esto pasa ya que I es el punto medio de DP y las rectas AX y PD son paralelas.

Un caso muy especial en el que aparecen homotecias es cuando dos circunferencias son tangentes. Entonces, el punto de tangencia es uno de los centros de homotecia entre estas dos circunferencias, pues satisface que la razón entre las distancias de este a los centros, es igual a la razón entre sus radios. Entonces, cuando trazamos dos rectas por estos puntos de tangencia, estas determinan cuerdas paralelas en los dos círculos. El "límite" cuando acercamos estas rectas nos da el siguiente resultado interesante.

Ejemplo 3. Sean Γ una circunferencia y γ otra circunferencia contenida en Γ y tangente interiormente a Γ en un punto P. Una cuerda AB de Γ es tangente a γ en Q. Demostrar que PQ pasa por el punto medio del arco $\widehat{AB}$ de Γ que no contiene a P.

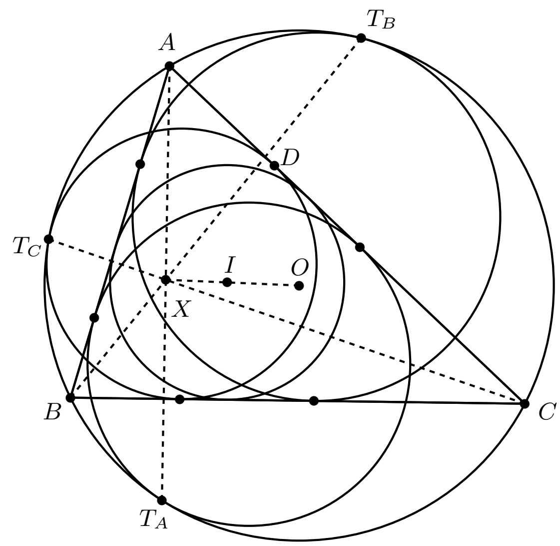
Solución. Observemos que P es el centro de homotecia exterior de γ y Γ, por lo que esta homotecia lleva Q a la segunda intersección M de PQ con Γ. Por lo tanto, esta homotecia lleva la tangente a γ en Q a la tangente a Γ en M, por lo que esta segunda tangente es paralela a la tangente a γ en Q, que es AB. Como la tangente a Γ en M es paralela a AB, concluimos que M es el punto medio del arco $\widehat{AB}$ que no contiene a P.



En el siguiente ejemplo demostramos una concurrencia relacionada con ciertos círculos tangentes al circuncírculo de un triángulo.

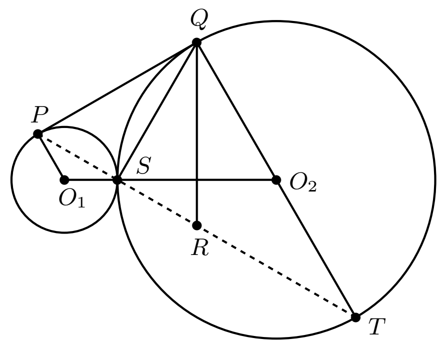
Ejemplo 4. Sean ABC un triángulo, O e I su circuncentro e incentro respectivamente, y Γ su circuncírculo. Una circunferencia Γ_A es tangente a AB y a AC, y es tangente interiormente a Γ en un punto T_A. Análogamente definimos los puntos T_B y T_C. Demostrar que las rectas AT_A, BT_B, CT_C y OI concurren.

Solución. Sea γ el incírculo de ABC. Observemos que A es el centro de homotecia exterior de los círculos γ y Γ_A, mientras que T_A es el centro de homotecia exterior de Γ_A y Γ. Por el Teorema de Monge, estos dos puntos y el centro de homotecia exterior de γ y Γ son colineales. Por lo tanto, las rectas AT_A, BT_B y CT_C pasan todas por este centro de homotecia y, OI también pasa por esta recta, pues O e I son los centros de Γ y γ, respectivamente. Por lo tanto, las cuatro rectas concurren en el centro de homotecia exterior del incírculo y el circuncírculo.



Ejemplo 5 (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2016). Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes externamente en S de tal forma que el radio de C_2 es el triple del radio de C_1. Una recta tangente a ambos círculos toca a C_1 en $P \neq S$ y a C_2 en $Q \neq S$. Sea T un punto en C_2 tal que QT es diámetro de C_2. La bisectriz del ángulo $\angle SQT$ corta a ST en R. Demostrar que $QR = RT$.

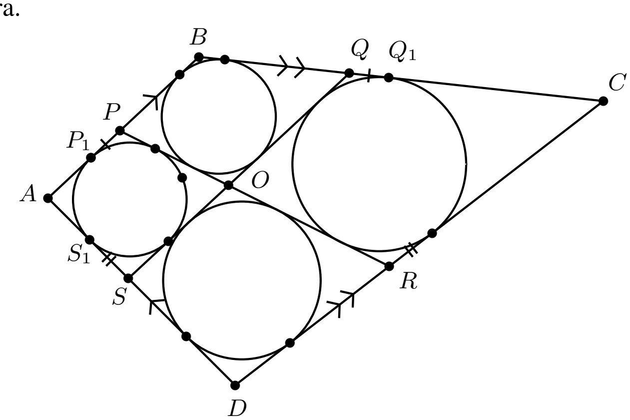
Solución. Sean O_1 y O_2 los centros de C_1 y C_2, de radios r_1 y $r_2 = 3r_1$, respectivamente. Notemos que O_1P y O_2Q son ambas perpendiculares a PQ y, por lo tanto, son paralelas. Sea P' la imagen de T bajo la homotecia con razón negativa que manda C_2 a C_1. Claramente, S es el centro de esta homotecia y esta también manda TO_2S a $P'O_1S$. Por el Teorema 1, P' se encuentra en la recta por O_1 paralela a O_2T, es decir, en O_1P. Claramente, P es una de estas dos intersecciones de O_1P con C_1 y, la otra intersección, digamos P'', se encuentra del lado contrario a P con respecto de la recta O_1O_2, esto es, del mismo lado de T. Pero si P' fuera P'', la recta $P'T$ no pasaría por S. Luego, la única posibilidad es $P' = P$.



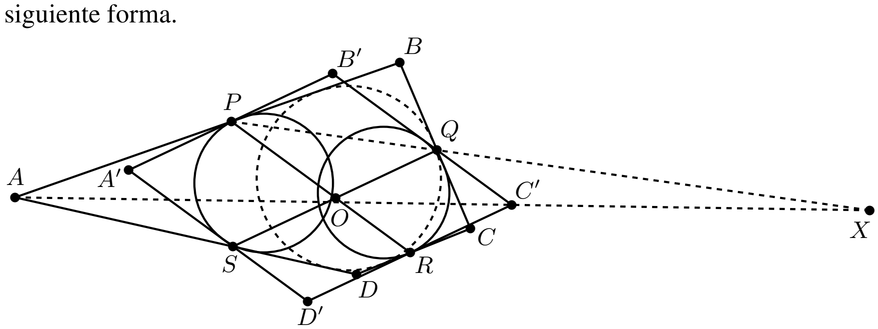
Luego, por el Teorema 4, $\frac{PS}{ST} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$. Hagamos $PS = x$ y $ST = 3x$. Además, P, S, T son colineales y, por lo tanto, $\angle PSQ = 180° - \angle QST = 90°$. Más aún, por la tangencia de PQ a C_2, tenemos que $\angle PQS = \angle QTS$. Luego, los triángulos PQS y QTS son semejantes, de donde $\frac{PS}{QS} = \frac{QS}{ST}$, esto es, $QS^2 = PS \cdot ST = 3x^2$, por lo que $QS = \sqrt{3}x$. Finalmente, tenemos que $\angle QTS = \tan^{-1}\left(\frac{QS}{ST}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30°$. Luego, $\angle SQT = 90° - \angle QTS = 60°$ y así $\angle RQT = \frac{1}{2}\angle SQT = 30°$, lo que significa que el triángulo RQT es isósceles con $QR = RT$.

Ejemplo 6 (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2015). Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo y sean P, Q, R, y S puntos en los lados AB, BC, CD, y DA, respectivamente. Los segmentos PR y QS se cortan en O. Supongamos que cada uno de los cuadriláteros $APOS, BQOP, CROQ$ y $DSOR$ tiene un incírculo. Demostrar que las rectas AC, PQ y RS son concurrentes o bien paralelas entre sí.

Solución. Denotemos por $\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C$ y γ_D a los incírculos de los cuadriláteros $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ y $DSOR$, respectivamente.
Comenzamos demostrando que el cuadrilátero $ABCD$ también tiene un incírculo, que será denotado por Ω. Denotemos a los puntos de tangencia como se muestra en la siguiente figura.



Es un hecho conocido que $QQ_1 = OO_1$ (si $BC \parallel PR$, esto es obvio; en otro caso, uno puede considerar a las dos circunferencias involucradas como el incírculo y el excírculo de un triángulo formado por las rectas OQ, PR y BC). Similarmente, tenemos que $OO_1 = PP_1$. Luego, $QQ_1 = PP_1$. Las otras igualdades de segmentos marcadas en la figura pueden demostrarse de forma similar. Estas igualdades, junto con $AP_1 = AS_1$ y sus análogas, muestran que $AB + CD = AD + BC$, por lo que $ABCD$ tiene un incírculo, como se quería.
Ahora, dibujemos las rectas paralelas a QS por P y R, y también dibujemos las rectas paralelas a PR por Q y S. Estas rectas forman un paralelogramo; denotamos sus vértices por A_1, B_1, C_1 y D_1, como se muestra en la figura de abajo. Como el cuadrilátero $APOS$ tiene un incírculo, tenemos que $AP - AS = OP - OS = A'S - A'P$. Es bien conocido que en este caso también existe una circunferencia ω_A tangente a los cuatro rayos AP, AS, $A'P$ y $A'S$. Vale la pena mencionar que, en este caso cuando, digamos, las rectas AB y $A'B'$ coinciden, la circunferencia ω_A es solamente tangente a AB en P. Definimos las circunferencias ω_B, ω_C, y ω_D de forma similar. Supongamos que las circunferencias ω_A y ω_C son de diferente radio. Sea X el centro de la homotecia de razón positiva que manda ω_A a ω_C. Ahora, por el teorema de Monge aplicado a los círculos ω_A, Ω y ω_C, tenemos que los puntos A, C, y X son colineales. Aplicando el mismo teorema a los círculos ω_A, ω_B y ω_C, obtenemos que también los puntos P, Q y X son colineales. Similarmente, los puntos R, S, y X son colineales, como se deseaba. Si el radio de los círculos ω_A y ω_C es el mismo, pero estos no coinciden, entonces la versión degenerada del mismo teorema muestra que las rectas AC, PQ y RS son paralelas a la línea por los centros de ω_A y ω_C.
Finalmente, dedicamos algunas palabras al caso en que ω_A y ω_C coinciden (y por lo tanto también coinciden con Ω, ω_B y ω_D). Puede ser manejado como un caso límite de la siguiente forma.

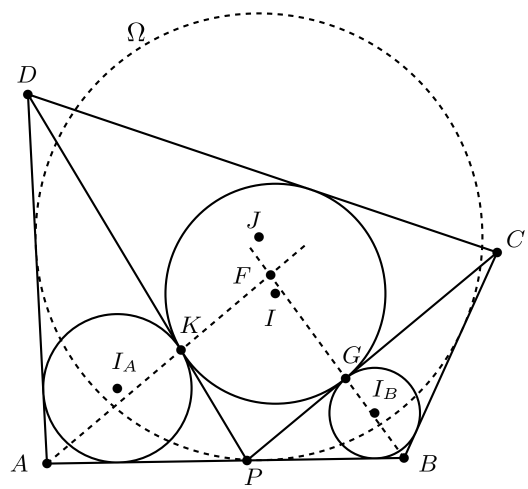


Fijemos las posiciones de A, P, O y S (por lo tanto también fijamos los círculos ω_A, γ_A, γ_B y γ_D). Ahora variamos el círculo γ_C inscrito en el triángulo QOR. Para cada una de sus posiciones, uno puede reconstruir las rectas BC y CD como las tangentes exteriores comunes a γ_B, γ_C y γ_C, γ_D diferentes de PR y QS, respectivamente. Después de tal variación, la circunferencia cambia, por lo que el resultado obtenido arriba puede ser aplicado.

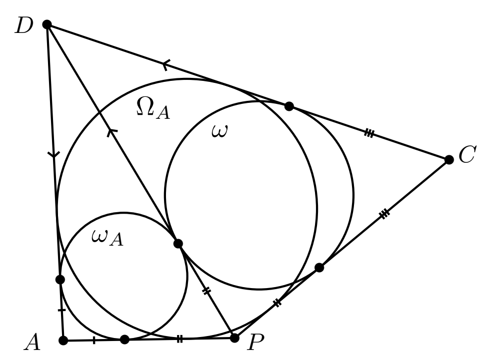
Ejemplo 7 (Lista corta, Olimpiada Internacional, 2007). El punto P está en el lado AB de un cuadrilátero convexo $ABCD$. Sea ω el incírculo del triángulo CPD y sea

I su incentro. Supongamos que ω es tangente a los incírculos de los triángulos APD y BPC en los puntos K y L, respectivamente. Sea E el punto de intersección de las rectas AC y BD, y sea F el punto de intersección de las rectas AK y BL. Demostrar que los puntos E, I y F son colineales.

Solución. Sea Ω la circunferencia tangente al segmento AB y a los rayos AD y BC; sea J su centro. Probaremos que los puntos E y F están en la recta IJ.



Denotemos a los incírculos de los triángulos ADP y BCP por ω_A y ω_B, respectivamente. Consideremos el centro de homotecia interior h_1 de ω y Ω. Consideremos también las siguientes homotecias: aquella que lleva ω a ω_A (con escala negativa y centro K), y otra que lleva ω_A a Ω (con escala positiva y centro A). Por el teorema de Monge-dÁlembert, el centro de h_1 yace en la recta AK. Análogamente, este yace en BL, así que este centro es F. Entonces, F está en la recta formada por los centros de ω y Ω, esto es, está en IJ (si $I = J$, entonces $F = I$ también, y la afirmación es obvia). Consideremos el cuadrilátero $APCD$ y marquemos los segmentos iguales de las tangentes a ω y ω_A como se muestra en la figura.



Como ω y ω_A tienen un punto de tangencia común con PD, podemos notar fácilmente que $AD + PC = AP + CD$. Por lo tanto, el cuadrilátero $APCD$ tiene un incírculo; análogamente, también tiene un incírculo el cuadrilátero $BCDP$. Sean Ω_A y Ω_B estos incírculos.
Ahora consideremos el centro de homotecia exterior h_2 de ω y Ω. Consideremos también las siguientes homotecias: aquella que lleva ω a Ω_A (con escala positiva y centro C), y aquella que lleva Ω_A a Ω (con escala positiva y centro A). Por el teorema de Monge, el centro de h_2 está en AC. Por razones análogas, también está en BD, por lo que este centro es E. Por lo tanto, E también está en la recta IJ, lo que prueba la afirmación.

Ejercicios

Concluimos el escrito con una lista de ejercicios que dejamos para que resuelva el lector.

1) (Reino Unido, 2014) Sean ABC un triángulo y P un punto en su interior. La recta AP corta al circuncírculo de ABC nuevamente en A'. Los puntos B' y C' se definen análogamente. Sea O_A el circuncentro de BCP. Los circuncentros O_B y O_C se definen análogamente. Sea O'_A el circuncentro de $B'C'P$. Los circuncentros O'_B y O'_C se definen análogamente. Demuestra que las rectas $O_AO'_A$, $O_BO'_B$ y $O_CO'_C$ concurren.

2) (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2014) Sean Γ_1 una circunferencia y P un punto fuera de Γ_1. Las tangentes desde P a Γ_1 tocan a la circunferencia en los puntos A y B. Considera M el punto medio del segmento PA y Γ_2 la circunferencia que pasa por los puntos P, A y B. La recta BM interseca de nuevo a Γ_2 en el punto C, la recta CA interseca de nuevo a Γ_1 en el punto D, el segmento DB interseca de nuevo a Γ_2 en el punto E y la recta PE interseca a Γ_1 en el punto F (con E entre P y F). Demuestra que las rectas AF, BP y CE concurren.

3) (Olimpiada Mexicana de Matemáticas, 2015) Sea I el incentro de un triángulo acutángulo ABC. La recta AI corta por segunda vez al circuncírculo del triángulo BIC en E. Sean D el pie de la altura desde A sobre BC y J la reflexión de I con respecto a BC. Demuestra que los puntos D, J y E son colineales.

4) (Olimpiada Centroamericana, 2005) En el triángulo ABC sean P, Q y R los puntos de tangencia del incírculo en los lados AB, BC y AC, respectivamente. Sean L, M y N los pies de las alturas del triángulo PQR en PQ, QR y PR, respectivamente.

   a) Demuestra que las rectas AN, BL y CM se cortan en el mismo punto.

   b) Demuestra que este punto común está en la recta que pasa por el ortocentro y el circuncentro del triángulo PQR.

5) (Olimpiada Europea Femenil, 2016) Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio se cortan en dos puntos distintos X_1 y X_2. Sea ω una circunferencia tangente exteriormente a ω_1 en T_1 y tangente exteriormente a ω_2 en T_2. Demuestra que X_1T_1 y X_2T_2 se cortan en un punto sobre ω.

6) (Lista corta para la Olimpiada Internacional, 2006). Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos $AB > CD$. Los puntos K y L se encuentran en los segmentos AB y CD respectivamente de tal forma que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Supón que existen puntos P y Q en el segmento KL tales que

$$\angle APB = \angle BCD \quad \text{y} \quad \angle CQD = \angle ABC.$$

Demuestra que los puntos P, Q, B y C son concíclicos.

7) (Lista corta para la Olimpiada Internacional, 2007). Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos AD y BC cuyas diagonales se cortan en P. Sea Q un punto ubicado entre las rectas paralelas BC y AD tal que P y Q están en distintos lados de la recta CD y $\angle AQD = \angle CQB$. Demuestra que $\angle BQP = \angle DAQ$.

8) (Brasil, 2014). Sea ABC un triángulo con incentro I e incírculo ω. La circunferencia ω_A es tangente exteriormente a ω y tangente a los lados AB y AC en A_1 y A_2, respectivamente. Sea r_A la recta A_1A_2. Análogamente se definen r_B y r_C. Sea XYZ el triángulo formado por r_A, r_B y r_C. Demuestra que el incentro de XYZ, el circuncentro de XYZ e I son colineales.

9) (Olimpiada Internacional, 2008). Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con $BA \neq BC$. Sean ω_1 y ω_2 los incírculos de ABC y ADC, respectivamente. Supón que existe una circunferencia ω que es tangente al rayo BA más allá de A, al rayo BC más allá de C y a las rectas AD y CD. Demuestra que las tangentes comunes exteriores a ω_1 y ω_2 se cortan en ω.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

2) E. Chen. *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads.* The Mathematical Association of America, Problem Book Series, 2016.

3) S. Lozanovski. *A Beautiful Journey Trough Olympiad Geometry.* `https://www.olympiadgeometry.com`

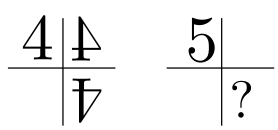
4) V. Prasolov. *Problems in Plane and Solid Geometry.*

Problemas de práctica

A continuación presentamos los exámenes de invitación a la OMM del año 2020.

Versión A

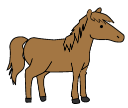
Problema 1. El número 4 está junto a dos espejos así que se refleja como se muestra en la figura. ¿Qué figura se obtiene cuando el número 5 se refleja en los dos espejos?

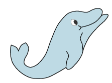


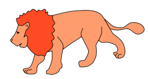
(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 2. El carrusel va dando vueltas y tarda 50 segundos en dar una vuelta completa. Al principio el caballo está enfrente; 10 segundos después está el delfín, etcétera.

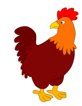
¿Qué animal queda enfrente después de 3 minutos?


(a)

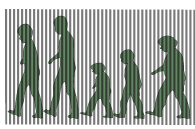

(b)

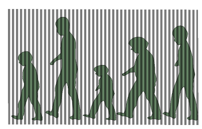

(c)

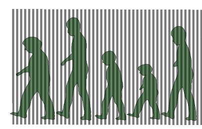

(d)

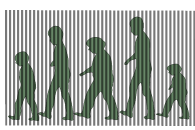

(e)

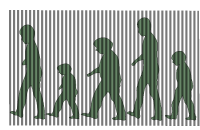
Problema 3. Ordenados en una fila detrás de una cortina se formaron Armando, Beto, Carlos, Diego y Enrique, en ese orden. Armando mide más que Diego y que Enrique; el más alto es Beto y el más bajo es Carlos; Enrique es más alto que Diego. ¿Cómo se ven sus siluetas?


(a)

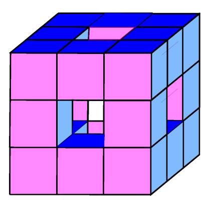

(b)


(c)


(d)


(e)

Problema 4. Con cubos de lado 1 se formó un cubo de $3 \times 3 \times 3$. Después, en cada una de las direcciones se hicieron perforaciones de adelante hacia atrás, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, quitando siempre los cubos centrales de lado 1 (ver la figura). ¿Cuántos cubos de lado 1 quedaron?



(a) 15 (b) 18 (c) 20 (d) 21 (e) 24

Problema 5. El número 2581953764 se escribe en una tira de papel. Rubén va a cortar la tira dos veces para obtener 3 números y sumarlos. ¿Cuál es la menor suma que puede lograr?

(a) 2675 (b) 2975 (c) 2978 (d) 4217 (e) 4298

Problema 6. Alan dibujó en su cuaderno un segmento de longitud 2 y le llamó A y B a sus vértices. ¿De cuántas maneras puede elegir ahora un punto C de forma que el triángulo ABC sea un triángulo rectángulo con área 1?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Problema 7. Una pedazo rectangular de piel mágica se reduce a la mitad de su longitud y a la tercera parte de su ancho después de cumplirle un deseo a su dueño. Después de tres deseos tiene un área de 4 cm^2. Si su ancho inicial era de 9 cm, ¿cuál era su largo inicial?

(a) Faltan datos (b) 96 cm (c) 288 cm (d) 32 cm (e) 144 cm

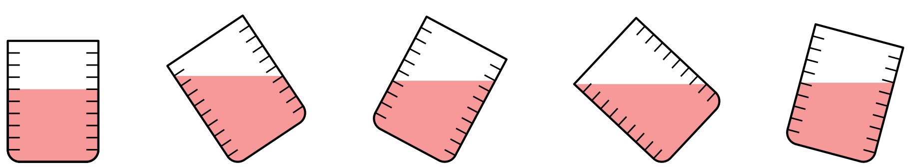
Problema 8. En el país de las joyas se pueden cambiar 3 zafiros por una moneda. Un zafiro se puede cambiar por 2 flores. ¿Cuántas flores pueden cambiarse por 2 monedas?

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12 (e) 14

Problema 9. En un examen hay 12 problemas de matemáticas que se distribuyen, para su calificación, entre miembros de un jurado. Si cada problema debe revisarse por exactamente 2 miembros del jurado y cada miembro califica exactamente 3 problemas, ¿cuántos miembros hay en el jurado?

(a) 6 (b) 8 (c) 12 (d) 18 (e) 24

Problema 10. En cinco recipientes de vidrio idénticos se ha puesto líquido, como se muestra en la figura. Cuatro de ellos tienen la misma cantidad de líquido. ¿Cuál de ellos tiene distinta cantidad?

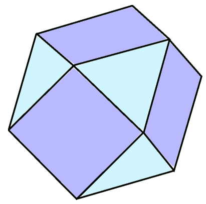


(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 11. ¿Cuántos enteros positivos n son tales que su divisor más grande (excluyendo al mismo n) es $n - 6$?

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 6 (e) Una infinidad

Problema 12. Las caras del poliedro dibujado son triángulos y cuadrados. Cada cuadrado está rodeado por 4 triángulos y cada triángulo está rodeado por 3 cuadrados.

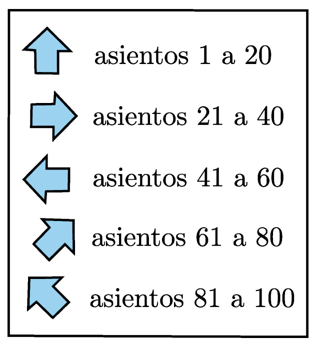


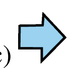
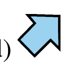
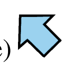
Se sabe que hay 6 cuadrados. ¿Cuántos triángulos hay?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

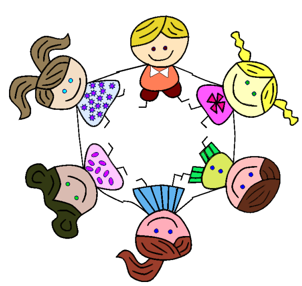
Versión B

Problema 1. Germán va con su papá al circo. Sus asientos tienen los números 71 y 72. ¿Hacia dónde deben dirigirse?

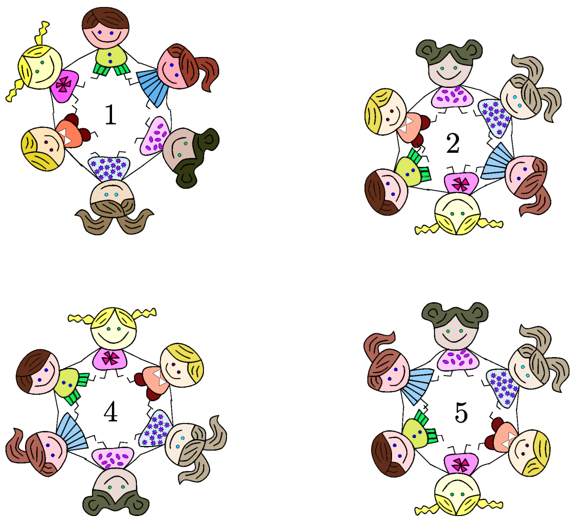


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 2. Seis niños se toman de las manos y bailan en círculo. Empiezan como se muestra y giran sin soltarse de las manos.

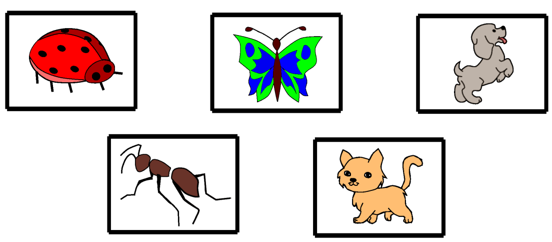


¿Cuáles de las siguientes posiciones son imposibles?

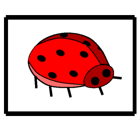


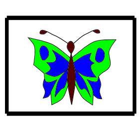
(a) 1, 2 y 4 (b) 2 (c) 2, 3 y 4 (d) 4 y 5 (e) 1, 3 y 5

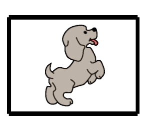
Problema 3. Las tarjetas que se muestran se colocarán en la tira de abajo.

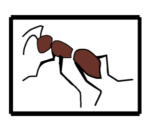


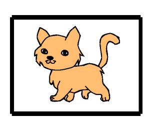
La de la hormiga o la del gato debe ir junto a la del canguro. La del perro debe ir entre la del gato y la de hormiga. La de la catarina debe ir entre la del gato y la de la mariposa. ¿Cuál va en la casilla sombreada?


(a)

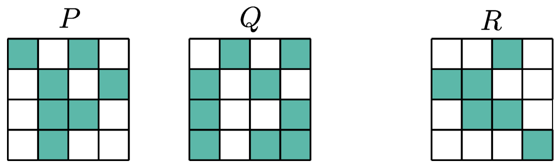

(b)


(c)

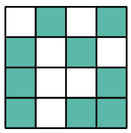

(d)

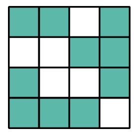

(e)

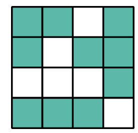
Problema 4. En la figura Q, están intercambiados los cuadros sombreados y los blancos con respecto a la figura P.

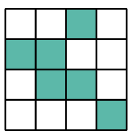


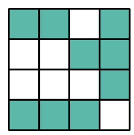
¿En cuál de las siguientes figuras ocurre lo mismo con respecto a la figura R?


(a)

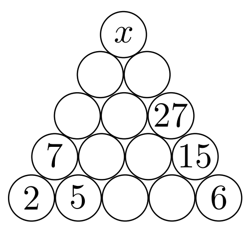

(b)


(c)


(d)

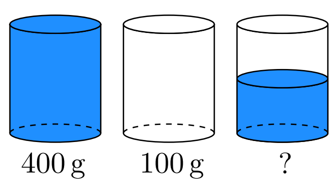

(e)

Problema 5. ¿Qué número debe escribirse en lugar de x en la figura, si en cada círculo de los primeros 4 renglones los números se obtienen sumando los dos que están inmediatamente debajo de él? (Por ejemplo, el 7 se obtuvo sumando 2 y 5.)



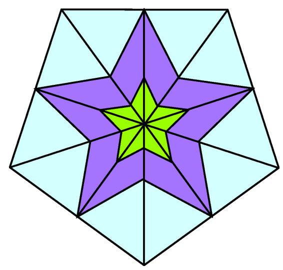
(a) 32 (b) 50 (c) 55 (d) 72 (e) 82

Problema 6. Un recipiente de vidrio lleno de líquido pesa 400 gr. Cuando está vacío pesa 100 gr. ¿Cuánto pesa cuando está lleno a la mitad?



(a) 150 gr. (b) 200 gr. (c) 225 gr. (d) 250 gr. (e) 300 gr.

Problema 7. En el pentágono regular de la figura, se construyó la estrella más grande uniendo los puntos medios de los lados del pentágono con los puntos medios de las líneas que van de los vértices del pentágono al centro del pentágono. La estrella más pequeña se construyó uniendo los puntos medios de los segmentos que van del centro del pentágono a los vértices de la estrella más grande.



Si el área de la estrella pequeña es 1 cm^2, ¿cuál es el área del pentágono?

(a) 4 cm^2 (b) 5 cm^2 (c) 6 cm^2 (d) 8 cm^2 (e) 10 cm^2

Problema 8. Un dragón tiene 5 cabezas y por cada cabeza que se le corta le crecen 5 más. Si se le cortan 6 cabezas, ¿cuántas cabezas tendrá al final?

(a) 29 (b) 30 (c) 32 (d) 33 (e) 35

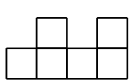
Problema 9. Ana hizo una construcción con cubos sobre una cuadrícula de 4×4. En la figura se muestra el número de cubos que hay apilados sobre cada celda.

atrás

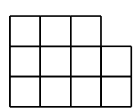
4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

frente

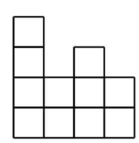
Cuando Ana mira la construcción desde el frente, ¿qué figura ve?



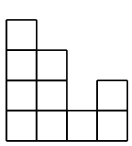
(a)



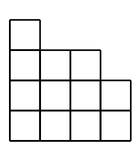
(b)



(c)



(d)



(e)

Problema 10. Solo uno de los relojes de la figura tiene la hora correcta.

$4\!:\!45$	$5\!:\!05$	$5\!:\!25$	$5\!:\!40$

Uno de ellos está adelantado 20 minutos, otro está atrasado 20 minutos y el otro está parado desde ayer. ¿Qué hora es?

(a) $4:45$ (b) $5:05$ (c) $5:25$ (d) $5:40$ (e) No se puede determinar

Problema 11. ¿Cuál es el mayor entero menor o igual que

$$\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}}}?$$

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 20 (e) 25

Problema 12. María y Luisa compitieron resolviendo una lista de 100 problemas. Algunos problemas no fueron resueltos por ninguna, pero otros los resolvieron las dos. Por cada problema resuelto, la primera en resolverlo obtuvo 4 puntos y, en caso que lo hubieran resuelto las dos, la segunda obtuvo solo 1 punto. Si cada una de ellas resolvió 60 problemas de la lista y entre las dos lograron 312 puntos, ¿cuántos problemas resolvieron en común?

(a) 57 (b) 56 (c) 55 (d) 54 (e) 53

Soluciones a los problemas de práctica

A continuación presentamos las soluciones de los exámenes de invitación a la OMM del año 2020.

Versión A

Solución del problema 1. La respuesta es (c).

Solución del problema 2. La respuesta es (d). Cada 10 segundos hay un nuevo animal enfrente; 3 minutos equivalen a $180 = 150 + 30$ segundos, así que estará el tercer animal después del caballo, es decir, el flamenco.

Solución del problema 3. La respuesta es (a). En todas las opciones, salvo en (a), Armando mide menos que Diego o que Enrique. En la opción (a) todas las condiciones se cumplen.

Solución del problema 4. La respuesta es (c). Dividamos el cubo grande en capas: la de enfrente, la central y la de atrás. En la capa de enfrente se quitó solo un cubito y lo mismo en la capa de atrás; en la segunda capa se quitaron 5 cubitos (pues solo quedaron los de las esquinas de ese nivel). Quedaron $27 - 1 - 5 - 1 = 20$ cubitos.

Solución del problema 5. La respuesta es (b). La suma menor se obtiene de manera que los números tengan menos dígitos. Como son 10 dígitos, lo mejor es partirlos en 3, 3 y 4. Además, el que tiene 4 dígitos, debe empezar con el dígito más pequeño. En este caso, lo partimos en 258, 1953 y 764. Por lo tanto, la menor suma es $258+1953+764 = 2975$.

Solución del problema 6. La respuesta es (e). El ángulo recto del triángulo puede estar en A, en B o en C, y el punto C debe estar en una paralela a distancia 1 de la recta

AB. Para cada una de estas opciones hay 2 elecciones posibles para el punto C (si pensamos que el segmento está dibujado de forma horizontal, hay una arriba y otra abajo del segmento). Por lo tanto, hay $2^3 = 8$ maneras de elegir el vértice C.

Solución del problema 7. La respuesta es (b). Cada vez que se concede un deseo, el pedazo de piel se reduce $\frac{1}{6}$ de su área. Después de conceder 3 deseos, el pedazo de piel tiene un área de $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$ veces el área original. Entonces, el pedazo de piel al principio tenía un área de $4 \times 216 = 864$ cm^2 y, como se trata de un rectángulo donde un lado mide 9 cm, el otro lado debe medir $\frac{864}{9} = 96$ cm.

Solución del problema 8. La respuesta es (d). Dos monedas equivalen a $2 \times 3 = 6$ zafiros, los cuales equivalen a $6 \times 2 = 12$ flores.

Solución del problema 9. La respuesta es (b). Como cada problema debe revisarse por 2 jueces, podemos pensar que son 24 problemas y que cada juez revisará solo 1. Como cada juez debe revisar exactamente 3 problemas, el jurado tiene $\frac{24}{3} = 8$ miembros.

Solución del problema 10. La respuesta es (b). Podemos observar que, en todos los casos, la vista frontal del líquido es un trapecio con altura igual al ancho del recipiente. Entonces, la diferencia entre la cantidad de líquido está dada por la diferencia entre la suma de las longitudes de los dos lados paralelos del trapecio. En (a), la suma es $6 + 6 = 12$; en (b) la suma es $9 + 4 = 13$; en (c) es $4 + 8 = 12$; en (d) es $10 + 2 = 12$ y en (e) es $5 + 7 = 12$.

Solución del problema 11. La respuesta es (c). Tenemos que $6 = n - (n - 6)$ y, como $n - 6$ es divisor de n y de sí mismo, tenemos que $n - 6$ es divisor de 6. Entonces, las posibilidades para $n - 6$ son 1, 2, 3 y 6; de donde las posibilidades para n son 7, 8, 9 y 12. Ahora revisamos en cada una de estas si $n - 6$ es el mayor divisor de n, lo cual solo ocurre para 7, 9 y 12.

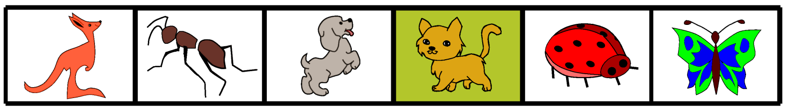
Solución del problema 12. La respuesta es (d). Como cada uno de los 6 cuadrados está rodeado por 4 triángulos, tenemos 6×4 triángulos contando cada uno de ellos 3 veces, porque cada uno comparte lado con 3 cuadrados. Por lo tanto, el número de triángulos es igual a $(6 \times 4)/3 = 8$.

Versión B

Solución del problema 1. La respuesta es (d).

Solución del problema 2. La respuesta es (c). El niño de pelo claro tiene a su derecha a la niña con dos coletas, de manera que 2, 3 y 4 son imposibles. La posición 1 se logra girando dos pasos a la derecha; la posición 5 se logra girando dos posiciones a la izquierda (o 4 a la derecha).

Solución del problema 3. La respuesta es (e). Como el perro debe estar entre el gato y la hormiga, y uno de estos debe quedar junto al canguro, el perro debe ir en la tercera casilla. Como la catarina debe quedar entre el gato y la mariposa, entonces el gato es el que va en la casilla sombreada. Las tarjetas quedan como se muestra en la siguiente figura.



Solución del problema 4. La respuesta es (b).

Solución del problema 5. La respuesta es (e). Debajo del 15 (al lado del 6) debe ir el número 9, pues $9 + 6 = 15$. Por otro lado, debajo del 27 (al lado del 15) debe ir el número 12, pues $12 + 15 = 27$. Entonces, al lado del 9 debe ir el 3 y entre el 7 y el 12 debe ir el 8. Los demás números los podemos obtener sumando hacia arriba: en el tercer renglón quedan los números 15, 20 y 27; en el segundo renglón quedan los números 35 y 47 y, en el primer renglón, en lugar de la x queda el número 82.

Solución del problema 6. La respuesta es (d). Como pesa 400 gr. cuando está lleno y 100 gr. cuando está vacío, deducimos que solo el líquido pesa 300 gr. Entonces, la mitad del líquido pesa 150 gr. que, agregados al peso del recipiente, nos dan 250 gr.

Solución del problema 7. La respuesta es (d). La estrella más grande tiene lados de longitudes el doble de tamaño que los lados de la estrella pequeña, así que su área es el cuádruple de la de la estrella pequeña, esto es, el área de la estrella más grande es igual a 4 cm^2. Por otro lado, cada triángulo determinado por el centro del pentágono y un pico de la estrella más grande, tiene área la mitad que el respectivo triángulo del pentágono, pues su base, que es la línea que va del centro del pentágono al vértice del pentágono, es el doble que la base del triángulo de la estrella y la altura es la misma. Entonces, el área del pentágono es el doble que el área de la estrella más grande, esto es, es igual a 8 cm^2.

Solución del problema 8. La respuesta es (a). Cada corte aumenta en 4 el número de cabezas, así que al final el dragón tendrá $5 + (6 \times 4) = 29$ cabezas.

Solución del problema 9. La respuesta es (e). Basta elegir el mayor número de cada columna del mapa para saber cuál torre determina la altura que se ve desde el frente.

Solución del problema 10. La respuesta es (b). El segundo reloj marca las $5:05$, esto es, 20 minutos más que el primero y 20 minutos menos que el tercero. El cuarto reloj no tiene diferencia de 20 minutos con ningún otro.

Solución del problema 11. La respuesta es (a). Tenemos que $4 < \sqrt{20} < 5$ (pues $4^2 < 20 < 5^2$). Así que $16 < 20 + 4 < 20 + \sqrt{20} < 20 + 5$, de donde

$$\sqrt{16} < \sqrt{24} < \sqrt{20 + \sqrt{20}} < \sqrt{25},$$

lo cual implica que $4 < \sqrt{20+\sqrt{20}} < 5$. De manera análoga, obtenemos ahora que $16 < 24 < 20+\sqrt{20+\sqrt{20}} < 25$, de donde $4 < \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} < 5$. Repitiendo este procedimiento (sumar 20 de cada lado de la desigualdad y luego sacar raíz cuadrada) dos veces más, obtenemos que el mayor entero menor o igual que la expresión dada es 4.

Solución del problema 12. La respuesta es (b). Sea k la cantidad de problemas que resolvieron en común. Por cada problema que resuelven en común, se suman 5 puntos a la cuenta total. Luego, el total de puntos es igual a $5k+4(60-k)+4(60-k) = 480-3k$. Por lo tanto, tenemos que $480-3k = 312$, de donde $k = 56$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2021 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Dados los números enteros del 1 al 12 escritos en cualquier orden en una mesa redonda se hace la siguiente operación: Cada número observa a sus dos vecinos, si los vecinos son más chicos entonces los números explotan. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar los números del 1 al 12 de tal manera que sobrevivan exactamente cuatro después de una operación? (Dos maneras se consideran iguales si una se obtiene a partir de la otra por una rotación).

Problema 2. Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f no es constante, demuestra que existen números reales x, y tales que $f(x + y) < f(xy)$.

Problema 3. ¿Cuáles de los números $2017, 2018, 2019$ pueden ser expresados en la forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ donde x, y, z son enteros positivos?

Problema 4. Una escuela tiene n estudiantes y m clubes. Todos los estudiantes se unen a cierta cantidad de clubes de tal forma que lo siguiente es cierto: Para cada estudiante

x, es posible escoger algunos clubes de tal forma que x es el único estudiante que pertenece a todos ellos.
Sea a_i el número de clubes a los que se unió el estudiante i, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.
Demuestra que $a_1!(m - a_1)! + a_2!(m - a_2)! + \cdots + a_n!(m - a_n)! \leq m!$.

Problema 5. Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números tales que a_0 es primo y, para $n \geq 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Demuestra que existe un entero $k > 0$ tal que a_k no es primo.

Problema 6. Llenamos un tablero de 21×25 al azar con números enteros del 1 al 4. Demuestra que existe un rectángulo tal que la suma de los números en sus cuatro esquinas es múltiplo de 4.

Problema 7. Sea k un entero positivo. ¿De cuántas maneras se pueden emparejar los números enteros del 1 al $4k$, de tal manera que los números de cada pareja tengan la misma paridad? Por ejemplo, si $k = 1$, un emparejamiento que cumple con las condiciones del problema es $\{(1, 3), (2, 4)\}$, pero un emparejamiento que no cumple es $\{(1, 2), (3, 4)\}$. Escribe la respuesta en términos de factoriales.

Problema 8. Sean p y q números primos tales que $p^3 + q^3 + 1 = p^2q^2$. Determina el valor máximo de $p - q$.

Problema 9. Determina todos los números reales x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} &= 16,\\
\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{z} &= 8,\\
\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} - \sqrt[6]{z} &= 4.
\end{aligned}$$

Problema 10. Sea $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos primos relativos y

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

$$S_2 = \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \frac{1}{2\times 5} + \frac{1}{2\times 6} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{3\times 6} + \frac{1}{4\times 5} + \frac{1}{4\times 6} + \frac{1}{5\times 6},$$

$$\begin{aligned}
S_3 = &\frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{2\times 3\times 5} + \frac{1}{2\times 3\times 6} + \frac{1}{2\times 4\times 5} + \frac{1}{2\times 4\times 6} + \frac{1}{2\times 5\times 6}\\
&+ \frac{1}{3\times 4\times 5} + \frac{1}{3\times 4\times 6} + \frac{1}{3\times 5\times 6} + \frac{1}{4\times 5\times 6},
\end{aligned}$$

$$S_4 = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} + \frac{1}{2\times 3\times 4\times 6} + \frac{1}{2\times 3\times 5\times 6} + \frac{1}{2\times 4\times 5\times 6} + \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6},$$

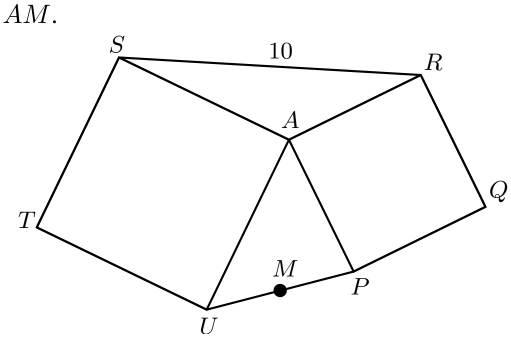
$$S_5 = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}.$$

Determina el valor de $m + n$.

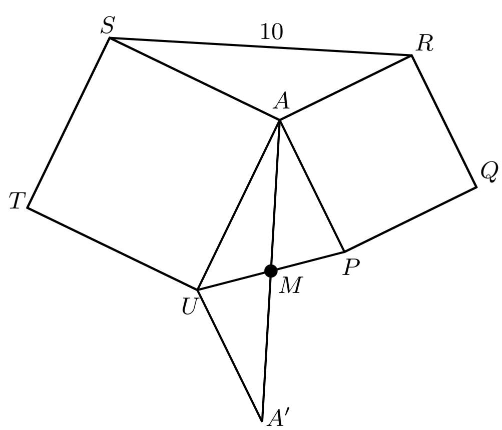
Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2020 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2020. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a: Guillermo Courtade Morales, José Hernández Santiago, Luis Francisco Medina Quintero y Carlos Galván Galván, por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2020, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean $APQR$ y $ASTU$ dos cuadrados con el vértice A en común, como se muestra en la figura. Si $SR = 10$ cm y M es el punto medio de UP, calcula la longitud, en cm, de AM.



Solución. Sea A' la reflexión de A en M. Así, $AUA'P$ es un paralelogramo y, por lo tanto, $\angle APU = \angle A'UP$.



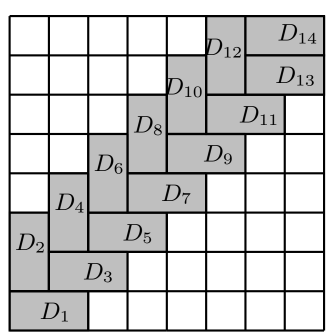
Tenemos que $RA = AP = A'U$, $UA = AS$ y $\angle A'UA = \angle A'UP + \angle PUA = \angle UPA + \angle PUA = 180^\circ - \angle UAP = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle UAP = \angle RAS$, lo que significa que los triángulos $A'UA$ y RAS son congruentes por el criterio LAL. Se sigue en particular que $A'A = RS$ y, por lo tanto, $AM = \frac{1}{2}A'A = \frac{1}{2}RS = 5$ cm. Este problema también fue resuelto por Guillermo Courtade Morales, considerando la reflexión de U en A en lugar de la reflexión de A en M.

Problema 2. Una maestra de preescolar tomó $n > 1$ rectángulos de cartón idénticos (de dimensiones números enteros) y los distribuyó a n niños; cada niño recibió un rectángulo. Cada niño cortó su rectángulo en varias piezas cuadradas iguales (los cuadrados de diferentes niños pueden ser distintos). Resultó que la cantidad total de cuadrados entre todos los niños es un número primo. Demuestra que los rectángulos iniciales eran cuadrados.

Solución. Supongamos lo contrario. Sean a y b las dimensiones del rectángulo. Sea $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ en forma reducida, esto es, x, y son primos relativos. Observemos que $\frac{a}{b} \neq 1$ implica que $xy \neq 1$. Fijemos un niño y supongamos que cortó su pedazo de cartón en piezas cuadradas de lado r. La cantidad de cuadrados cortados en uno de los lados de longitud a es entonces $\frac{a}{r}$, mientras que la cantidad de cuadrados cortados en uno de los lados de longitud b es $\frac{b}{r}$. Como $(\frac{a}{r})/(\frac{b}{r}) = \frac{x}{y}$ en forma reducida, se sigue que $x \mid \frac{a}{r}$ y $y \mid \frac{b}{r}$. Por lo tanto, xy divide a $(\frac{a}{r})(\frac{b}{r})$, que es la cantidad de cuadrados cortados por el niño. Sumando para todos los niños, obtenemos que xy divide a la cantidad total de cuadrados cortados, digamos c. Como $n > 1$, se sigue que $xy < c$. Ya que $xy > 1$, c no puede ser primo, lo que es una contradicción.

Problema 3. ¿Es posible cubrir completamente un tablero de 8×8 con fichas de 2×1 (sin que se traslapen), de tal forma que ningún par de fichas forme un cuadrado de 2×2?

Solución de Guillermo Courtade Morales. Supongamos que sí se puede. En particular, las esquinas del tablero deben ser cubiertas. Fijémonos en una esquina. Solamente hay dos formas posibles de colocar el dominó: vertical u horizontal. El resto de las posiciones de los dominós está forzado por la condición de no juntarlos en un cuadrado de 2×2, dando como resultado la configuración en la figura. El etiquetado muestra el orden en que se infiere el acomodo de las piezas de dominó.



Sin embargo, de todas maneras se forma un cuadrado de 2×2. Por lo tanto, no es posible cubrir el tablero como se pide.

Problema 4. Determina todos los números primos de la forma $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p$, donde p es un número primo.

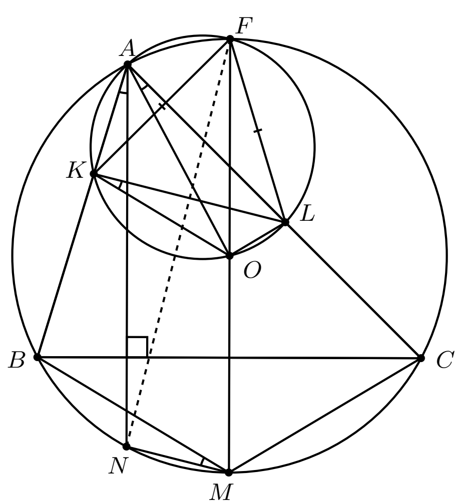
Solución de Guillermo Courtade Morales. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $a^p \equiv a \pmod{p}$ para todo entero a y todo número primo p. Entonces, para todo número primo p tenemos que

$$1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p \equiv 1 + 2 + 3 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2} \pmod{p}.$$

Si p es impar, entonces $p+1$ es par y, por lo tanto, $\frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$. Luego, tenemos que $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p \equiv 0 \pmod{p}$ y claramente $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p > p$. Esto significa que la suma $1 + 2^p + 3^p + \cdots + p^p$ no es primo si p es un primo impar. Solo queda analizar el caso $p = 2$. En este caso, tenemos que $1 + 2^2 = 5$ es un número primo. Por lo tanto, la única solución es el 5.
Este problema también fue resuelto por José Hernández Santiago.

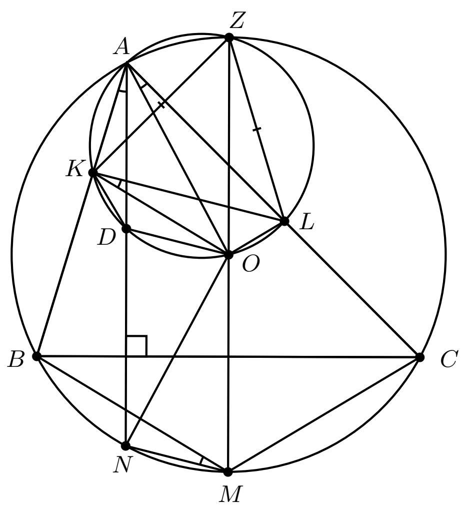
Problema 5. Sea M el punto medio del arco menor $\widehat{BC}$ en el circuncírculo del triángulo ABC. Supón que la altura trazada desde A interseca a la circunferencia en N. Las rectas por el circuncentro O del triángulo ABC, paralelas a MB y MC, cortan a AB y a AC en K y L, respectivamente. Demuestra que $NK = NL$.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Como $\angle KOL = \angle CMB = 180° - \angle KAL$, tenemos que el cuadrilátero $ALOK$ es cíclico. Supongamos que OM corta al circuncírculo del triángulo ABC en F.



Entonces, $\angle AFM = \angle ACM = \angle ALO$, por lo que F también esta en el circuncírculo del triángulo $ALOK$. Además, tenemos que $\angle LKF = \angle CAF = \angle CMF = \angle FMB = 180° - \angle KAF = \angle FLK$, por lo que F está en la mediatriz de KL. Por lo tanto, basta probar que NF es perpendicular a KL. Como NF es perpendicular a NM, basta probar que NM es paralela a KL. Por la isogonalidad conocida de AO y la altura desde A con respecto al ángulo $\angle BAC$, tenemos que[2] $\angle OAC = \angle BAN$. Por último, de la igualdad $\angle BAN = \angle BMN$ y el cíclico $AFLOK$, se sigue que $\angle OKL = \angle OAL = \angle OAC = \angle BMN$, lo cual significa que las rectas MN y KL son paralelas.

Solución de Carlos Galván Galván. Como $\angle AKO + \angle ALO = \angle ABM + \angle ACM = 180°$, el cuadrilátero $AKOL$ es cíclico. Ahora, sea Z la segunda intersección de los circuncírculos de $AKOL$ y ABC. Notemos que $\angle AZO = 180° - \angle AKO = 180° - \angle ABM = \angle ACM = \angle AZM$, por lo que Z, O y M son colineales.
Sea D la segunda intersección de AN con el circuncírculo de $AKOL$. Es conocido que AD, AO son isogonales respecto al ángulo $\angle BAC$, esto es $\angle KAO = \angle KLO = \angle LAD = \angle LKD$. De esto se sigue que $KDOL$ es un trapecio isósceles y $KD = LO$.



Notemos también que por el teorema de Reim[3] en los circuncírculos de $ADOZ$ y $ANMZ$ se tiene que MN es paralela a OD, pero es claro que AN es paralela a OM, entonces $DNMO$ es un paralelogramo y $OM = ON = DN$.
Para concluir, observemos que $\angle NOL = 360° - \angle DON - \angle DOL = 360° - \angle ODN - \angle ODK = \angle NDK$, lo cual implica que los triángulos NOL y NDK

[2] **Teorema.** En todo triángulo ABC con circuncentro O y ortocentro H, las rectas AH y AO son reflejadas con respecto a la bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$, esto es, $\angle BAH = \angle CAO$ y $\angle BAO = \angle CAH$.

[3] **Teorema de Reim.** Sean C_1 y C_2 dos circunferencias que se cortan en P y Q. Supongamos que una recta que pasa por P corta por segunda vez a C_1 y a C_2 en P_1 y P_2, respectivamente y, que otra recta que pasa por Q, corta por segunda vez a C_1 y a C_2 en Q_1 y Q_2, respectivamente. Entonces, las rectas P_1Q_1 y P_2Q_2 son paralelas.

son congruentes, de donde se sigue que $NK = NL$.

Problema 6. Determina el valor mínimo de la expresión

$$\frac{|a+b|+|b+c|+|c+a|}{|a|+|b|+|c|},$$

donde a, b y c son números reales.

Solución. Sean a, b y c números reales arbitrarios, no todos iguales a 0. Cambiando signos, podemos suponer que al menos dos entre a, b y c son no negativos. Como la expresión es simétrica en a, b y c, podemos suponer que $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
3|a+b|+3|b+c|+3|c+a| &= 3a+3b+3|b+c|+3|a+c| \\
&= 2(a+b)+(a+|a+c|)+(b+|b+c|) \\
&= 2(|a|+|b|)+(|-a|+|a+c|)+(|-b|+|b+c|) \\
&\geq 2(|a|+|b|)+|c|+|c| \\
&= 2|a|+2|b|+2|c|,
\end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue por la desigualdad del triángulo.
Por lo tanto, $\frac{|a+b|+|b+c|+|c+a|}{|a|+|b|+|c|} \geq \frac{2}{3}$. Para concluir que el valor mínimo del cociente es $\frac{2}{3}$, basta notar que la igualdad se da con $a = b = 1$ y $c = -1$.

Problema 7. Sean a, b y c números reales tales que $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ y $(a^9+b^9)(b^9+c^9)(c^9+a^9) = (abc)^9$. Demuestra que al menos uno de los números a, b o c es igual a cero.

Solución. Supongamos que $abc \neq 0$, esto es, $(a+b)(b+c)(c+a) \neq 0$. Entonces, de las hipótesis del problema y de que

$$x^9+y^9 = (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^6-x^3y^3+y^6\right),$$

para cualesquiera números reales x, y, tenemos que

$$\begin{aligned}
&a^8b^8c^8(a+b)(b+c)(c+a) = a^9b^9c^9 \\
&= (a+b)(b+c)(c+a)\prod_{\text{cíclico}}\left(a^2-ab+b^2\right)\prod_{\text{cíclico}}\left(a^6-a^3b^3+b^6\right),
\end{aligned}$$

de donde

$$a^8b^8c^8 = \prod_{\text{cíclico}}\left(a^2-ab+b^2\right)\prod_{\text{cíclico}}\left(a^6-a^3b^3+b^6\right).$$

Además, tenemos que $a^2+b^2 \geq 2|ab| \geq ab+|ab|$, por lo que $a^2+b^2-ab \geq |ab|$, donde la igualdad se cumple si y solo si $a = b$ o $a = -b$. De forma similar, obtenemos que $a^6 - a^3b^3 + b^6 \geq |ab|^3$. Luego,

$$\begin{aligned} a^8b^8c^8 &= \prod_{\text{cíclico}} \left(a^2 - ab + b^2\right) \prod_{\text{cíclico}} \left(a^6 - a^3b^3 + b^6\right) \\ &\geq (|ab| \cdot |bc| \cdot |ca|) \left(|ab|^3 \cdot |bc|^3 \cdot |ca|^3\right) \\ &= |abc|^8 \\ &= (abc)^8, \end{aligned}$$

por lo que la igualdad se tiene que dar y esta se da si y solo si $a = b = c$ (pues ninguna suma $a+b$, $b+c$, $c+a$ puede ser 0). Al sustituir en la primera condición dada, obtenemos que $8a^3 = a^3$, por lo que $a = 0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, al menos uno de los números a, b o c debe ser cero.

Problema 8. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que todo número primo p divide a $f(n)f(p-1)! + n^{f(p)}$ para todo entero positivo n. (Recuerda que $\mathbb{Z}^+$ denota al conjunto de los enteros positivos).

Solución de José Hernández Santiago. Con $n = 1$ y $p = 2$ tenemos que 2 divide a $f(1)f(1)! + 1^{f(2)} = f(1)f(1)! + 1$. Si $f(1) > 1$ entonces $2 \mid f(1)!$ y, por lo tanto, 2 divide a $f(1)f(1)!$. Luego, 2 divide a la diferencia $f(1)f(1)! + 1 - f(1)f(1)!$ que es igual a 1, lo cual es imposible. Por lo tanto, $f(1) = 1$.
Sustituyendo $n = 1$, tenemos que p divide a $f(1)f(p-1)! + 1 = f(p-1)! + 1$ para cualquier primo p. Luego, p divide a $f(n)\left(f(p-1)! + 1\right) + n^{f(p)} - f(n)$ para todo entero positivo n, de donde se sigue que p divide a $n^{f(p)} - f(n)$. Inferimos que $p \mid n$ si y solo si $p \mid f(n)$, lo que implica en particular que $f(p)$ es una potencia de p. Entonces para cada primo p, existe un entero positivo $g(p)$ tal que $f(p) = p^{g(p)}$.
Aplicando el teorema pequeño de Fermat, obtenemos la cadena de congruencias

$$n^{f(p)} = n^{p^{g(p)}} \equiv n^{p^{g(p)-1}} \equiv \cdots \equiv n^p \equiv n \pmod{p}.$$

La condición de que p divide a $n^{f(p)} - f(n)$ se convierte en que p divide a $n - f(n)$ para cada entero positivo n y cada número primo p. Si $n - f(n) \neq 0$, tomando un primo p tal que $p \geq |n - f(n)|$ obtenemos una contradicción a la divisibilidad, por lo que $n - f(n) = 0$, esto es $f(n) = n$ para cada entero positivo n.
Nos queda verificar que tal función satisface que todo número primo p divide a $n(p-1)! + n^p$ para todo entero positivo n. Por el teorema de Wilson, tenemos que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, lo cual implica que $n(p-1)! \equiv -n \pmod{p}$. Nuevamente, por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $n^p \equiv n \pmod{p}$ y, de los últimos dos resultados, se sigue que $n(p-1)! + n^p \equiv -n + n \equiv 0 \pmod{p}$, como queríamos.

Problema 9. Sean Γ_1 y Γ_2 circunferencias que se intersecan en dos puntos distintos A y B. Una recta por A interseca a Γ_1 y a Γ_2 en C y D, respectivamente. Sea P la intersección de las rectas tangentes a Γ_1 en A y C, y sea Q la intersección de las rectas tangentes a Γ_2 en A y D. Sea X el segundo punto de intersección de los circuncírculos de los triángulos BCP y BDQ, y sea Y la intersección de AB y PQ. Demuestra que C, D, X y Y son concíclicos.

Solución. Primero probaremos que X está en la recta PQ, lo que equivale a probar que $\angle BXP + \angle BXQ = 180°$. Como B, C, P, X son concíclicos, tenemos que $\angle BXP + \angle BCP = 180°$ y $\angle BCP = 180° - \angle BAC$, donde la última igualdad se da porque PC es tangente a Γ_1. De aquí, obtenemos que $\angle BXP = \angle BAC$. Análogamente, obtenemos que $\angle BXQ = \angle BAD$, lo cual implica que $\angle BXP + \angle BXQ = 180°$ como queríamos.

Sean M y N los puntos medios de AC y AD, respectivamente. Como PA y PC son tangentes a Γ_1, BP es simediana del triángulo ABC y, por lo tanto, $\angle MBA = \angle CBP = \angle CXP$. Análogamente, obtenemos que $\angle ABN = \angle QXD$. Luego,

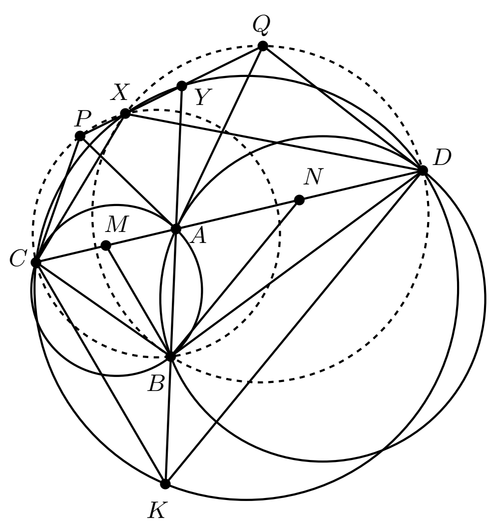
$$\angle MBN = \angle MBA + \angle ABN = \angle CXP + \angle QXD = 180° - \angle CXD.$$

Sea K la reflexión de A respecto a B. Entonces, MB y NB son paralelas a CK y DK respectivamente. Luego, $\angle CKD = \angle MBN = 180° - \angle CXD$ y C, D, X, K son concíclicos.

Sea Y' la segunda intersección del circuncírculo del triángulo CXD con la recta PQ. Entonces,

$$\angle Y'KC = \angle Y'XC = 180° - \angle PXC = 180° - \angle ABM = \angle 180° - AKC$$

y, por lo tanto, Y' está en la recta AK. Se sigue que $Y = Y'$ y Y está en el circuncírculo del triángulo CXD, como queríamos.



Problema 10. Oriol tiene una colección finita de cartas, cada una con un entero positivo escrito en ella. Decimos que la colección es *n-completa* si para cada entero k del 1 al n (inclusive), puede escoger algunas cartas de tal forma que la suma de los números escritos en ellas sea igual a k. Supón que la colección de Oriol es n-completa, pero deja de ser n-completa si se retira alguna carta de ella. ¿Cuál es la máxima suma posible de los números en las cartas?

Solución. Para simplificar lo siguiente, nos referimos simplemente como "cartas" a los números escritos en las cartas. Denotamos por $S(A)$ a la suma de las cartas de una colección A.

Lema. Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una colección de cartas con $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Si A es a_n-completa, entonces A es $S(A)$-completa.

Demostración. Usaremos inducción sobre n. El caso base $n = 1$ es evidente. Sea $|A| = n \geq 2$ y sea B la colección obtenida al quitar a_n de A. Como A es a_n-completa, B es a_{n-1}-completa, pues la representación de cualquier $x < a_n$ como suma de cartas en A, no puede usar a a_n. Por la hipótesis de inducción, B es $S(B)$-completa. Resta ver que s es suma de elementos de A para tener $S(B) < s \leq S(A)$. Pero entonces, $0 \leq S(A) - s < S(A) - S(B) = a_n$ y, como A es a_n-completa, es posible representar $S(A) - s$ como suma de cartas en A. Tomando todas las demás cartas obtenemos una representación para s, como queríamos. $\square$

Volviendo al problema original, demostraremos que la respuesta es $2n-1$. La igualdad se alcanza con la colección $\{n, 1, 1, \ldots, 1\}$, en la que hay $(n-1)$ unos. Nuevamente procedemos por inducción sobre n. Diremos que una colección n-completa es *minimal* si al quitar cualquier carta deja de ser n-completa. Entonces queremos demostrar que si A es n-completa minimal, entonces $S(A) \leq 2n - 1$. Esto es cierto para $n = 1$, ya que el único conjunto 1-completo minimal es $\{1\}$. Supongamos que para cualquier $k \leq n - 1$, un conjunto A que es k-completo minimal satisface $S(A) \leq 2k - 1$. Sea A una colección n-completa y minimal con $n \geq 2$. Entonces A también es $(n-1)$-completa, por lo que contiene una colección $(n-1)$-completa minimal B. Si $A = B$, terminamos ya que $S(B) \leq 2n - 3$, por lo que suponemos que B es estrictamente más chica. Como B es minimal, todas sus cartas son a lo más $(n-1)$, por lo que es $\text{máx}(B)$-completa y, por el lema anterior, es $S(B)$-completa. Como A es minimal y $A \neq B$ esto implica que $S(B) = n - 1$.

Finalmente, demostraremos que hay exactamente una carta que está en A pero no en B. Con esto terminamos, pues esta carta es a lo más n y la suma de las cartas de B es $n - 1$. Sea x cualquier carta que está en A pero no en B. Si $x = n$, terminamos. De lo contrario tenemos que $1 \leq n - x \leq n - 1$ y, como B es $(n-1)$-completa, podemos tomar cartas de B cuya suma es $n - x$. Agregando x a esta representación obtenemos una suma igual a n. Se sigue que la colección que se forma agregando x a B es n-completa y, como A es minimal, esta es justamente A, con lo cual terminamos.

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de las pruebas individual y por equipos del Nivel I de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Artie Aarón Ramírez Villa	Jalisco	Oro
Oscar Alexander Macgregor de la Cruz	Tabasco	Oro
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Oro
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Oro
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Oro
Olaf Daniel Magos Hernández	Nuevo León	Plata
Rodrigo Saldivar Mauricio	Zacatecas	Plata
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Plata
Ian Santiago López Ramírez	Hidalgo	Plata
Jorge Alexander Partida León	Sinaloa	Plata
Andrea Estefanía Estrada Callejas	Hidalgo	Plata
Ángel Emmanuel Ruiz Delgado	Zacatecas	Plata
Dana Karen Medina González	Yucatán	Plata
Emmanuel Esquer Coutiño	Morelos	Plata
Gauss Becerra Reynoso	Jalisco	Plata
Isaac Emanuel Rodríguez Ibarra	Chihuahua	Plata
Keira Yaneth Arvizu Islas	Tamaulipas	Plata
Lucía Mtanous Ramos	Coahuila	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Jalisco obtuvo el primer lugar (con 205 puntos), los Estados de Coahuila y Guanajuato obtuvieron el segundo lugar (con 160 puntos) y la Ciudad de México obtuvo el tercer lugar (con 95 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Jalisco (con 290 puntos). Segundo lugar: Coahuila (con 250 puntos). Tercer lugar: Guanajuato y Ciudad de México (con 220 puntos).

Prueba Individual, Nivel I

1) Nàm escribió un número en su cuaderno al cual multiplicó por 3, al resultado le sumó 3, después dividió entre 3, por último restó 3. Si su resultado final fue 3, ¿qué número escribió Nàm en su cuaderno?

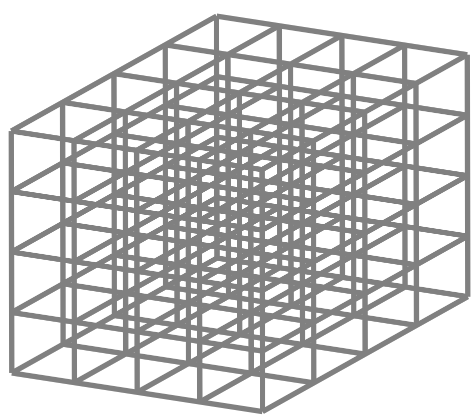
2) En cada cuadrito de la siguiente tabla se quiere escribir un número entre el $1, 2, 3, 4$ y 5, de tal manera que por un lado la suma de los números en cada renglón sea la misma y, por otro lado, la suma de los números en cada columna sea la misma. Ya se escribieron algunos de los números. ¿Cuál es la suma de los 6 números de los cuadritos?

1		4
	2	

3) Se va a aplicar un examen en el auditorio de la escuela. El auditorio tiene 20 filas de asientos, la primera fila tiene 10 asientos y cada fila sucesiva tiene un asiento más que la fila anterior. Para hacer el examen, los alumnos se deben sentar de manera que en una fila de asientos, entre cada dos alumnos deben quedar dos asientos vacíos. ¿Cuál es el máximo número de alumnos que pueden sentarse en el auditorio?

4) Diana va a colorear los números enteros positivos con uno de los colores verde, blanco y rojo, siguiendo las siguientes indicaciones:
(i) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de verde, se pinta de rojo.
(ii) La suma de dos números (que pueden ser iguales) pintados de rojo, se pinta de verde.
(iii) La suma de dos números, uno pintado de verde y otro pintado de rojo, se pinta de blanco.
Si inicia pintando al número 1 de rojo, ¿de qué color quedará pintado el número 2020?
Si concluyes que el color del 2020 es el verde, escribe como respuesta: 1; si concluyes que es el blanco, escribe como respuesta: 2; si concluyes que se colorea de rojo, escribe como respuesta: 3.

5) Se quiere construir una alambrada en forma de cubo de dimensiones 4 cm $\times 4$ cm $\times 4$ cm de manera que la alambrada quede dividida en cubitos de 1 cm $\times 1$ cm $\times 1$ cm como se ve en la figura. ¿Cuántos centímetros de alambre se necesitan?

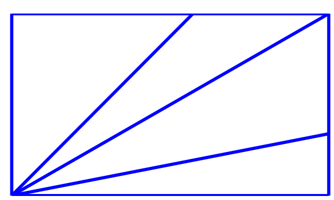


6) Un pintor realizó un mural con puros cuadrados. El primer día pintó un cuadrado de 1 m $\times 1$ m, el segundo día pintó uno de 1 m $\times 1$ m y otro de 2 m $\times 2$ m, el tercer

día pintó cuadrados de 1 m $\times 1$ m, 2 m $\times 2$ m y de 3 m $\times 3$ m y así sucesivamente. Después de haber pintado 250 metros cuadrados en total, el pintor se detuvo. ¿Qué cantidad de metros cuadrados pintó el último día el pintor?

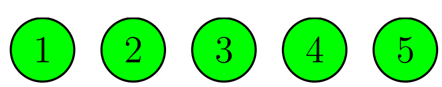
7) Se tienen tres cajas de las cuales una contiene dos bolas, cada una marcada con el número 1; otra contiene dos bolas, cada una marcada con el número 2, y la tercera contiene una bola marcada con el 1 y una bola marcada con el 2. Los contenidos están indicados con las etiquetas 11, 22 y 12 que han sido equivocadamente pegadas en las cajas, de suerte que ninguna de las cajas lleva la etiqueta correcta. Para restituir a cada caja la etiqueta que le corresponde, se permite entreabrir una caja, solo el tiempo necesario para ver que número tiene una de las bolas. ¿Qué etiqueta tiene la caja que se debe destapar?

8) En la siguiente figura hay un rectángulo que se ha dividido en triángulos. ¿Cuántos ángulos agudos hay en la figura?
Nota: *Un ángulo agudo es uno cuya medida es menor a* $90°$.

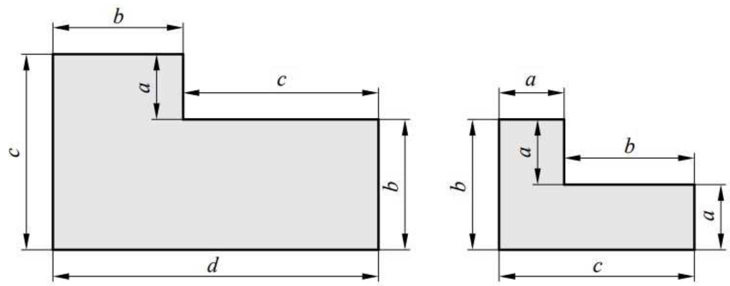


9) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ dando como resultado $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

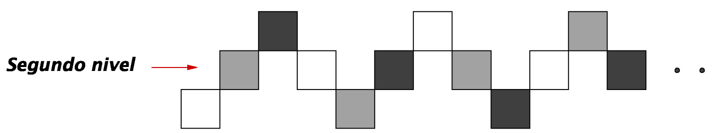
10) Usando las siguientes fichas se pueden formar 325 números diferentes. Algunos números usan solamente una ficha, otros usan dos fichas y otros usan tres, cuatro o cinco fichas. ¿Cuántos de estos números no son múltiplos de 9?



11) ¿Cuál es la razón del área de la figura de la izquierda entre el área de la figura de la derecha?

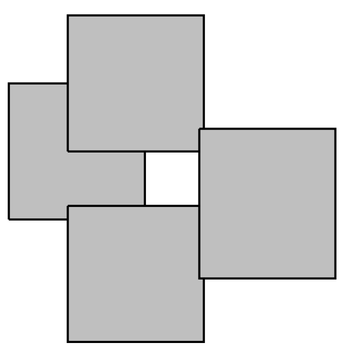


12) Se acomodan cuadrados formando escalones como en la figura hasta tener 2020 cuadrados acomodados.



Estos cuadrados se colorean intercalando los colores blanco, gris y negro. ¿Cuántos cuadrados del segundo nivel de los escalones se colorean de color gris?

13) La siguiente figura se formó traslapando (encimando) cuadrados de área 81 cm^2 cada uno y el cuadrado que se forma en el centro tiene área 9 cm^2. Si el cuadrado de arriba está exactamente arriba del cuadrado de abajo, es decir, los lados verticales de los dos cuadrados están alineados, ¿cuánto vale el área sombreada?

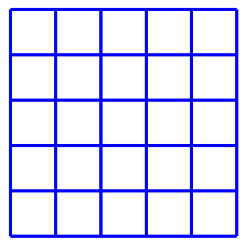


14) Considera todos los enteros positivos de la forma

$$1,\ 12,\ 123,\ \ldots, 1234567891011, \ldots$$

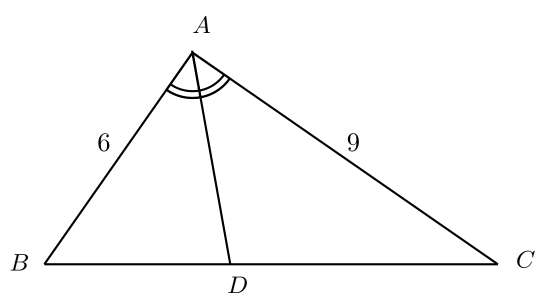
que resultan de escribir consecutivamente los primeros enteros.
De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño donde aparece la cadena de números 2022?
Nota: *Por ejemplo, el número más pequeño en el que aparece la cadena* 91 *es el décimo número, esto es, el número* 12345678**91**0.

15) Un gusano deberá recorrer todos los segmentos de la siguiente cuadrícula. Si recorre un segmento cada día, ¿cuál es el menor número de días que necesita el gusano para recorrer la cuadrícula?
Nota: *El gusano puede recorrer 2 o más veces un segmento y no da saltos.*



Prueba por Equipos, Nivel I

1) Sean ABC un triángulo con $AB = 6$, $AC = 9$ y D un punto del segmento BC tal que AD es bisectriz del ángulo $\angle A$. Si el área del triángulo ABD es igual a 8, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

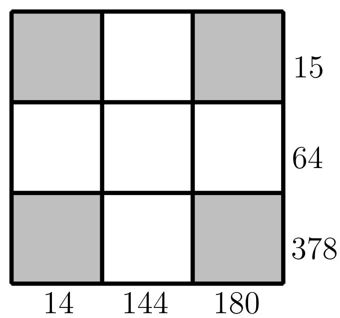


2) Ana y Eva juegan alternadamente a colocar fichas en las casillas de una cuadrícula de 9×9, con las tres reglas siguientes:

   I) en cada casilla vacía se coloca una sola ficha,
   II) en un turno pueden colocar 1, 2 o 3 fichas,
   III) perderá la que coloca la última ficha.

   Si inicia Ana, ¿quién gana?, describe la estrategia que debe seguir para ganar.

3) Los números enteros del 1 al 9 se escriben en los cuadros de la siguiente cuadrícula, uno en cada cuadro sin repetir. Los números que están a la derecha de cada fila son el producto de los dígitos escritos en la fila. Los números que están abajo de cada columna son el producto de los dígitos escritos en la columna. Encuentra el valor de la suma de los números escritos en los cuadros de las esquinas de la cuadrícula.



4) ¿Cuántos números de tres dígitos abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos?
Nota. *El número* 137 *tiene la propiedad ya que* 13 *y* 37 *son primos, pero el número* 139 *no la tiene ya que* 39 *no es primo.*

5) Un número entero se dice que es *ocholate* si cumple las siguientes condiciones:

   I) Todos sus dígitos aparecen en orden creciente.

   II) Es múltiplo de 8.

   De los números ocholates de cuatro cifras, ¿cuál es la diferencia entre el mayor y el doble del menor de ellos?
   Nota. *El número* 1456 *es ocholate y los números* 1240*,* 1448 *no son ocholates.*

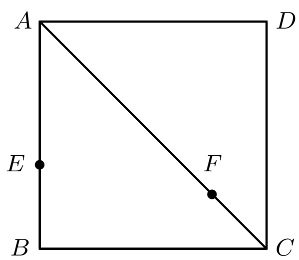
6) Usando solo los vértices de un cubo se pueden formar 56 triángulos. ¿Cuántos de estos triángulos son escalenos, es decir tienen sus tres lados de longitudes diferentes?

7) ¿Cuántos números hay en la lista $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020$ que tengan al menos un dígito igual a 2 o un dígito igual a 0?

8) Sean $ABCD$ un cuadrado con medida de sus lados igual a 5 cm. E es un punto en el lado AB con $AE = 3$ cm y F es un punto en la diagonal AC con $AF = 4FC$. Encuentra,

   I) El valor del área, en cm^2, del triángulo DEF.

   II) Las medidas de los ángulos, en grados, del triángulo DEF.



Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 5. Si en el último paso restó 3, significa que el número antes de este paso era $3 + 3 = 6$. Como en el paso anterior dividió entre 3, entonces el número antes de este paso era $6 \times 3 = 18$. Como en el paso anterior sumó 3, significa que el número antes de este paso era $18 - 3 = 15$. Por último, como al principio multiplicó por 3, significa que el número que escribió Nàm era $\frac{15}{3} = 5$.

2) La respuesta es 18. Como la primera columna tiene un 1, la máxima suma de columna es menor o igual que $1 + 5$ y, como la última columna tiene un 4, la mínima suma por columna es $4 + 1 = 5$. Entonces, la suma por columna debe ser 5 o 6. Los dos casos se muestran a continuación:

1	3	4
4	2	1

1	4	4
5	2	2

Como solo el segundo arreglo cumple con la condición de renglones, la suma buscada es $3 \times 6 = 18$.

3) La respuesta es 137. En las filas 1, 2 y 3 se pueden sentar a lo más 4 alumnos; en las filas 4, 5 y 6 se pueden sentar a lo más 5 alumnos y así sucesivamente, la cantidad de alumnos aumenta en 1 cada tres filas. En total se pueden sentar a lo más $3(4) + 3(5) + \cdots + 3(9) + 2(10) = 137$ alumnos.

4) La respuesta es 3. Revisando los primeros casos se puede ver que el 2 se colorea de verde, el 3 de blanco, el 4 de rojo, el 5 de verde, el 6 de blanco y así sucesivamente. En los primeros, casos los números rojos dejan residuo 1 al dividirse entre 3; los números verdes dejan residuo 2 y los números blancos dejan residuo 0. Este patrón va a seguir, ya que, si sumamos dos números congruentes con 1 módulo 3, obtenemos un número congruente con 2 módulo 3 y, si sumamos dos números congruentes con 2 módulo 3, obtenemos un número congruente con 1 módulo 3. Por lo tanto, como 2020 deja residuo 1 al dividirse entre 3, podemos asegurar que se pinta de color rojo.

5) La respuesta es 300. La alambrada se puede pensar como la unión de tiras de alambre de 4 cm que se colocan en tres direcciones: "ancho", "fondo" y "alto". Como en cada dirección se usan 25 tiras, se necesitan $3 \times 25 \times 4 = 300$ cm de alambre.

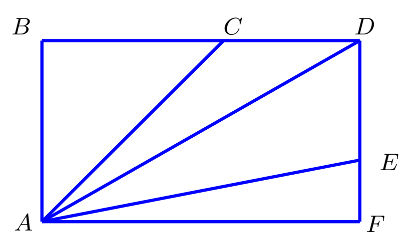
6) La respuesta es 54. En la siguiente tabla, se puede observar la cantidad de área que va pintando el pintor día a día hasta superar los 250 metros cuadrados en total.

Día	No. de cuadritos pintados	m^2 acumulados
1	1	1
2	5	6
3	14	20
4	30	50
5	55	105
6	91	196
7	140	336

Esto indica que el pintor se detuvo en el día 7 y ese día pintó $250 - 196 = 54$ m^2.

7) La respuesta es 12. Esta caja es la única que viendo una bola podemos afirmar qué número tiene la otra. De entrada sabemos que las dos bolas tienen el número. Sin pérdida de generalidad, supongamos que nos encontramos con las dos bolas que tienen el 1, a esa caja le debe corresponder la etiqueta 11. Como sabemos que la caja con la etiqueta 22 no tiene las dos bolas con el número 2 y ahora tampoco las dos con el número 1, entonces a esa caja le debe corresponder la etiqueta 12 y a la que tenía la 11 le corresponde la 22.

8) La respuesta es 13. Sean A, B, D, F los vértices del rectángulo, C y E puntos en los lados BD y DF, respectivamente. Solamente hay ángulos agudos alrededor de los puntos A, C, D y E.



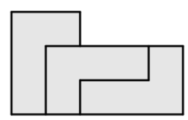
En el vértice A concurren 5 segmentos por lo que hay $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ ángulos, todos ellos menores o iguales a $90°$ y, solamente uno de ellos, es recto. Entonces, en A hay 9 ángulos agudos. En los vértices C y E hay un ángulo agudo en cada uno de ellos y en el vértice D hay 2 ángulos agudos. Luego, en total hay 13 ángulos agudos.

9) La respuesta es 100. Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo

posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede ser el cociente es 100 pues, por ejemplo si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$.

10) La respuesta es 311. Encontremos la cantidad de números que **sí** son múltiplos de 9. Con una sola ficha no hay múltiplos de 9, tampoco usando 4 o 5 fichas se puede formar un múltiplo de 9. Con dos fichas se pueden formar dos múltiplos de 9, si se escogen las fichas 4 y 5 (el 45 y el 54). Con tres fichas hay dos ternas que sirven $\{1, 3, 5\}$ y $\{2, 3, 4\}$ y en cada caso hay 6 números múltiplos de 9 que se pueden formar. Luego hay $2 + 6 + 6 = 14$ números de los que se forman que son múltiplos de 9. Por lo tanto, de los que no son múltiplos de 9 hay $325 - 14 = 311$.

11) La respuesta es 3. Observa la siguiente figura.



La razón de las áreas es 3.
Solución alternativa. La razón de las áreas es

$$\frac{ab + db}{aa + ac} = \frac{b(a + d)}{a(a + c)}.$$

Sustituyendo $b = 2a$, $c = b + a = 3a$ y $d = c + b = 3a + 2a = 5a$, obtenemos que

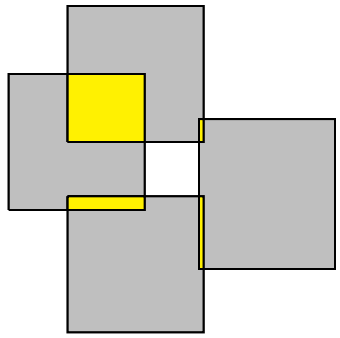
$$\frac{ab + db}{aa + ac} = \frac{2a(a + 5a}{a(a + 3a)} = \frac{2(6a)}{4a} = 3.$$

12) La respuesta es 337. Los cuadros aparecen en la siguiente sucesión, en donde se han subrayado los cuadros del segundo nivel y se ha indicado con B a un cuadro blanco, con G a un cuadro gris y con N a un cuadro negro:

$$B\,\underline{G}\,N\,\underline{B}\,G\,\underline{N}\quad B\,\underline{G}\,N\,\underline{B}\,G\,\underline{N}\cdots$$

Notamos que la sucesión se repite cada 6 términos y que exactamente ahí aparece un cuadro gris en el segundo nivel. Como $2020 = 6 \times 336 + 4$, la respuesta es 337.

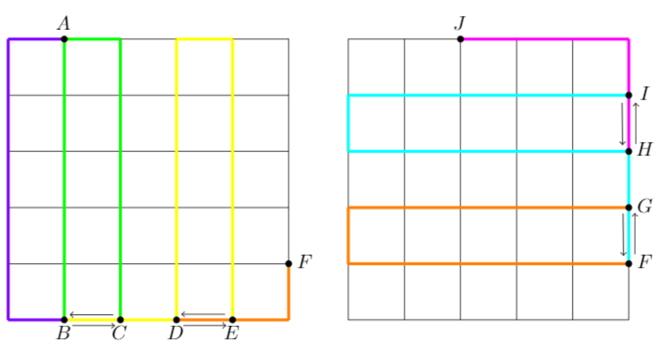
13) La respuesta es 288 cm^2. En la siguiente figura se puede observar que si se juntan los cuatro pedazos amarillos, se forma un cuadrado de lado $(9 - 3) \times (9 - 3) = 6 \times 6 = 36$ cm.



Es fácil concluir entonces que el área total sombreada es $4 \times 81 - 36 = 288$ cm^2.

14) La respuesta es 501. El número $1\,2\,3\,4\ldots\,202\,203$, donde se han escrito los primeros 203 números enteros positivos, es uno donde aparece la cadena de números 2022 y tenemos que el número de dígitos es igual a $9+(90)(2)+(100)(3)+4(3) = 501$. Este número es el más pequeño, pues la cadena 20 aparece antes de considerar el número que usa los primero 200 números, solamente cuando se consideran 20 o 120 números seguidos, así que no es posible que aparezca antes la cadena 2022.

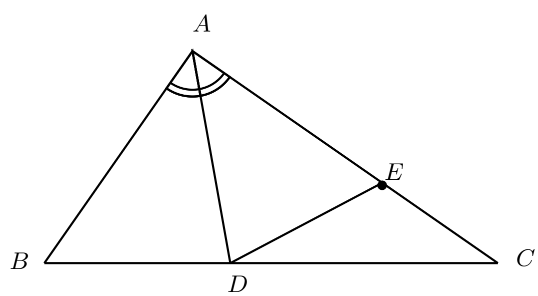
15) La respuesta es 67. Empezamos mostrando un camino que prueba que 67 es posible. Para esto, el gusano empieza en el vértice A de la figura de la izquierda y sigue el camino morado hasta llegar al punto B. De ahí sigue el camino verde hasta llegar al punto C donde, por la línea amarilla, se regresa al punto B y, siguiendo el camino amarillo, sigue hasta llegar al punto E. De nuevo, siguiendo el camino naranja, el gusano regresa al punto D y avanza por el camino naranja hasta el punto F. Después, en la figura de la derecha, del punto F se va al vértice G por el camino naranja para que, usando el camino celeste, se regrese al punto F y siga ese camino celeste hasta llegar al punto I. Finalmente, siguiendo el camino rosa, el gusano regresa al punto H y, siguiendo ese mismo camino, termina su recorrido llegando al vértice J.



Ahora, se probará que se ocupa al menos esa cantidad de días. Primero obsérvese que hay exactamente 60 segmentos en la figura. Además, existen 16 vértices de la cuadrícula que tienen exactamente tres segmentos saliendo de él (los que están sobre los lados del cuadrado más grande que no son las esquinas), llamémoslos *especiales*. Siempre que el gusano llega a un vértice tiene que salir de él (a menos que ese sea el vértice final de su recorrido), por lo que si el gusano no empieza ni termina en un vértice especial en particular, va a repetir al menos un segmento que sale de él pues usará dos la primera vez que pase por él y, como tiene que pasar de nuevo por ahí para cubrir el tercer segmento, repetirá uno cuando salga. Esto no sucede con los vértices que no son especiales pues tienen una cantidad par de segmentos saliendo de ellos.
Así, por cada vértice especial que no es el inicio ni el fin del recorrido, se va a repetir un segmento. Como son 16 vértices especiales y a lo mucho dos pueden ser el inicio o el fin del recorrido, se van a repetir al menos 14 segmentos, pero estos se pueden contar doble (un segmento repetido para un vértice puede ser el mismo segmento repetido para otro vértice), por lo que al menos se deben repetir en total $\frac{14}{2} = 7$ segmentos, dando un total de al menos 67 días para recorrer todos los segmentos de la cuadrícula.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Sea E un punto del segmento AC tal que $AE = AB = 6$. Por el criterio LAL, los triángulos ABD y ADE son congruentes, lo cual implica que sus áreas son iguales.



Por otro lado, como los triángulos ADE y DCE tienen la misma altura sobre las bases AE y EC, respectivamente, tenemos que $\frac{(ADE)}{(DCE)} = \frac{6}{3} = 2$. Luego, $(ABD) = (ADE) = 2(DCE) = 6$, por lo que $(ABC) = (ABD) + (ADC) + (DCE) = 8 + 8 + 4 = 20$, donde los paréntesis denotan área.

2) Veamos que Eva gana si usa la siguiente estrategia: Si Ana pone m fichas, Eva debe poner $4 - m$ fichas. De esta manera, en cada turno, al terminar Eva, se habrán puesto un múltiplo de 4 fichas. Como hay 81 casillas, la última ficha la pondrá Ana y entonces Eva gana.

3) Notemos que cada uno de los números 14, 15, 64, 144, 180, 378 es producto de tres dígitos y, sin importar el orden, de una única terna de dígitos:

$$\begin{aligned}
14 &= 1 \cdot 2 \cdot 7,\\
15 &= 1 \cdot 3 \cdot 5,\\
64 &= 2 \cdot 4 \cdot 8,\\
144 &= 3 \cdot 6 \cdot 8,\\
180 &= 4 \cdot 5 \cdot 9,\\
378 &= 6 \cdot 7 \cdot 9,
\end{aligned}$$

El número del cuadrado de la esquina superior izquierda es el número común de la primera fila y la primera columna, que es 1.
El número del cuadrado de la esquina superior derecha es el número común de la primera fila y la tercera columna, que es 5.
El número del cuadrado de la esquina inferior izquierda es el número común de la tercera fila y la primera columna, que es 7.
El número del cuadrado de la esquina inferior derecha es el número común de la tercera fila y la tercera columna, que es 9.
Por lo tanto, la suma buscada es igual a $1 + 5 + 7 + 9 = 22$.

1		5
7		9

4) Los números primos de dos dígitos tienen como dígito de las unidades a un número impar diferente de 5. Luego, c solamente puede ser alguno de 1 ,3, 7, 9. Los números primos de dos dígitos que terminan en 1 son los siguientes 5 números: 11, 31, 41, 61 71; los que terminan en 3 son $13, 23, 43, 53, 73, 83$ que son 6; los que terminan en 7 son $17, 37, 47, 67, 97$ que son 5 y los que terminan en 9 son $19, 29, 59, 79, 89$ que son 5.
Si $c = 1$, hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego, bc es solamente uno de $11, 31, 71$ y, en cada caso, hay $5, 6, 5$ posibles valores de ab, respectivamente. Luego, en este caso, tenemos 16 números abc.
Si $c = 3$, de nuevo hay seis posibles primos de dos dígitos de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos considerar a 13 y 73. Las posibilidades

para $a1$ son cinco y las posibilidades para $a7$ son cinco, así en este caso, hay 10 números abc.
Si $c = 7$, de los cinco posibles números $b7$ solamente nos fijaremos en 17, 37 y 97, en los otros casos ab no será primo. Primos de la forma $a1$, hay cinco, primos de la forma $a3$ hay seis y primos de la forma $a7$ hay cinco, así en este caso, hay 16 números abc que cumplen la propiedad.
Si $c = 9$, de igual manera solamente serán de interés el 19 y el 79. Para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y para el segundo hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc de los que se buscan.
Luego, en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc primos.

Solución alternativa. Los posibles valores de b son $1, 3, 7, 9$. Si $b = 1$, entonces los valores posibles de a son $1, 3, 4, 6, 7$ y los de c son $1, 3, 7, 9$, lo que da $5 \times 4 = 20$ maneras de escoger el número abc. Si $b = 3$, entonces los valores posibles a son 1, $2, 4, 5, 7, 8$ y los de c son $1, 7$, lo que da $6 \times 2 = 12$ números más de la forma abc. Si $b = 7$, entonces los valores posibles a son $1, 3, 4, 6, 9$ y los de c son $1, 3, 9$, lo que da $5 \times 3 = 15$ números más de la forma abc. Ahora si $b = 9$, entonces valores posibles de a son $1, 2, 5, 7, 9$ y el único valor posible de c es 7, lo que da $5 \times 1 = 5$ números más de la forma abc. Luego, en total hay $20 + 12 + 15 + 5 = 52$ números de tres dígitos que cumplen lo requerido.

5) Por las condiciones del problema y el criterio de divisibilidad entre 8, un número de 4 dígitos con todos sus dígitos en orden creciente debe terminar en 248, 256, 456 o 568. Por lo que hay 6 números ocholates de 4 cifras: 1248, 1256, 1456, 2456, 3456 y 4568. La diferencia entre el mayor y el doble del menor es $4568 - 2(1248) = 2072$.

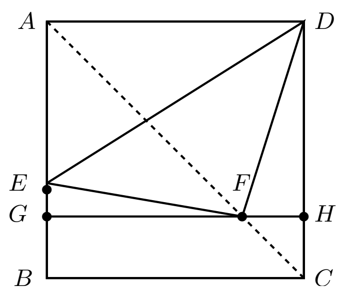
6) Hay 4 triángulos isósceles sobre cada cara de un cubo: 2 por cada diagonal de la cara. Para cada vértice del cubo hay tres caras que lo comparten, entonces usando las diagonales de estas tres caras (las diagonales que no usan el vértice del cubo tomado), se forma un triángulo equilátero (que desde luego es isósceles) y, de estos triángulos, hay 8. Por lo tanto, se forman $(4 \times 6) + 8 = 32$ triángulos isósceles. Luego, de los $\binom{8}{3} = 56$ triángulos que se forman con los vértices del cubo, hay $56 - 32 = 24$ que son escalenos.

   Solución alternativa. Si el cubo es de lado 1, las distancias posibles entre vértices del cubo son 1, $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. La distancia $\sqrt{3}$ se logra con vértices “opuestos” del cubo o extremos de diagonales mayores, de las que hay 4. Tomemos una de estas diagonales mayores, cada vértice de tal diagonal tiene adyacentes tres aristas del cubo de longitud 1 y, el tercer lado para formar el triángulo, ya quedó determinado y es una diagonal de una cara. Luego, hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ triángulos escalenos (el 4 corresponde a las 4 diagonales mayores, el 3 corresponde a los lados adyacentes a un extremo de la diagonal y el 2 corresponde a los dos extremos).

7) Contaremos la cantidad de números que no tienen dígitos iguales a 2 ni a 0. Si el número tiene un dígito, solo hay 8 opciones. Si tiene dos dígitos, hay $8 \times 8 = 64$

números. Si el número tiene tres dígitos, hay $8 \times 8 \times 8 = 512$ y, si tiene cuatro dígitos, hay $1 \times 8 \times 8 \times 8 = 512$ números. En total hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o 0 es igual a $2020 - 1096 = 924$.

8) Tracemos el segmento GH paralelo a AD y que pase por F, con G y H puntos de los lados AB y CD, respectivamente. Como HF es paralela a DA por el teorema de Tales tenemos que $\frac{DH}{HC} = \frac{AF}{FC} = 4$. Luego, $DH = 4$ cm, $HC = 1$ cm y también $EG = FH = HC = 1$ cm, $GF = 4$ cm. Esto significa que los triángulos rectángulos EGF y FHD son congruentes.



Tenemos entonces que el triángulo DEF es isósceles con $EF = FD = \sqrt{17}$ cm. Además, como $\angle HFD + \angle EFG = 90°$ tenemos que $\angle DFE = 90°$. Luego, el triángulo DEF tiene un ángulo de $90°$ y dos ángulos iguales de $45°$. Por lo tanto, su área es igual a $(DEF) = \frac{\sqrt{17} \times \sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}$ cm^2.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Del 23 al 31 de octubre de 2020 se llevó a cabo la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC) organizada desde Panamá de forma virtual, en la que participaron 13 países y un total de 51 estudiantes. Una vez más y por doce años consecutivos, México se ha posicionado como el líder indiscutible de esta competencia, obteniendo el primer lugar por países. En esta ocasión, México obtuvo 136 puntos quedando por encima de El Salvador (108 puntos), Venezuela (92 puntos) y Colombia (91 puntos), quienes ocuparon los primeros cuatro lugares por países. Cabe mencionar que durante el segundo día de la competencia, el equipo mexicano logró examen perfecto.

La delegación mexicana estuvo integrada por Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero), Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa), David García Maldonado (Oaxaca) y Eric Ransom Treviño (Nuevo León). Omar y David obtuvieron medallas de oro, mientras que Víctor Manuel y Eric obtuvieron medallas de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Héctor Flores Cantú (líder) y Rogelio Valdez Delgado (tutor).

La OMCC debía llevarse a cabo en junio de 2020, pero fue pospuesta por la pandemia de Covid19, con la esperanza de que la emergencia sanitaria permitiera en octubre los viajes internacionales de los participantes. Desafortunadamente, esto no sucedió y el comité organizador decidió realizar la competencia a distancia, para no defraudar a los jóvenes que se prepararon para este momento durante muchos meses. El formato de la competencia fue completamente nuevo, con protocolos de seguridad implementados para que todos los competidores pudieran tener plena confianza en la integridad de los resultados. Las medidas incluyeron: un centro de exámenes en cada país o territorio participante. El equipo mexicano se concentró en Cuernavaca, Morelos. Los exámenes, socialmente distanciados, se observaron mediante cámaras web y los videos se enviaron al equipo de vigilancia de Panamá. Además se realizaron actividades en línea para que los competidores interactuaran.

A continuación, presentamos los problemas de la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. Un entero positivo de cuatro dígitos se dice *virtual* si es de la forma $\overline{abab}$, donde a y b son dígitos y $a \neq 0$. Por ejemplo 2020, 2121 y 2222 son virtuales, pero 2002 y 0202 no lo son. Encuentre todos los números virtuales de la forma n^2+1, para algún entero positivo n.

Problema 2. Se tienen monedas idénticas distribuidas en varias pilas con una o más monedas en cada pila. Una operación consiste en tomar dos pilas con una cantidad total de monedas par entre ellas y repartir sus monedas entre las dos pilas de modo que ambas terminen con la misma cantidad.
Una distribución es *nivelable* si es posible, mediante 0 o más operaciones, lograr que todas las pilas queden con el mismo número de monedas.
Determine todos los enteros positivos n tales que, para todo entero positivo k, cualquier distribución de nk monedas en n pilas es nivelable.

Problema 3. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Encuentre todas las funciones $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ que satisfacen la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros a, b y c con $a+b+c=0$, se tiene que $f(a)+f(b)+f(c)=a^2+b^2+c^2$.

Segundo día

Problema 4. Considere un triángulo ABC con $BC > AC$. El círculo con centro en C y radio AC corta al segmento BC en D. Sea I el incentro del triángulo ABC y sea Γ el círculo que pasa por I y es tangente a la recta CA en A. La recta AB y Γ se cortan en F, con $F \neq A$. Demuestre que $BF = BD$.

Problema 5. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales no negativos. Sea k un entero positivo y sean $x_1, x_2, \ldots, x_k$ números reales positivos tales que $x_1x_2\cdots x_k = 1$. Demuestre que $P(x_1)+P(x_2)+\cdots+P(x_k)\geq kP(1)$.

Problema 6. Se dice que un entero positivo N es *interoceánico* si su factorización prima

$$N = p_1^{x_1}p_2^{x_2}\cdots p_k^{x_k}$$

satisface que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

Encuentre todos los números interoceánicos menores que 2020.

7ª Olimpiada Iraní de Geometría

El 31 de octubre de 2020 se aplicó en México el examen de la 7^a Olimpiada Iraní de Geometría de manera virtual. Este examen fue aplicado en 19 Estados del país, con la participación de 192 alumnos en los cuatro niveles de la competencia. En cada nivel, son 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas y cada problema vale 8 puntos. México envió a Irán los resultados de los exámenes con mayor puntuación en cada uno de los niveles elemental (5 exámenes), intermedio (8 exámenes), avanzado (5 exámenes) y libre (un examen). El examen del nivel libre es el mismo que el del nivel avanzado, solo que en el nivel libre participan alumnos de universidad. En esta ocasión, se obtuvieron 5 medallas de plata y 12 medallas de bronce.

Los resultados fueron los siguientes:

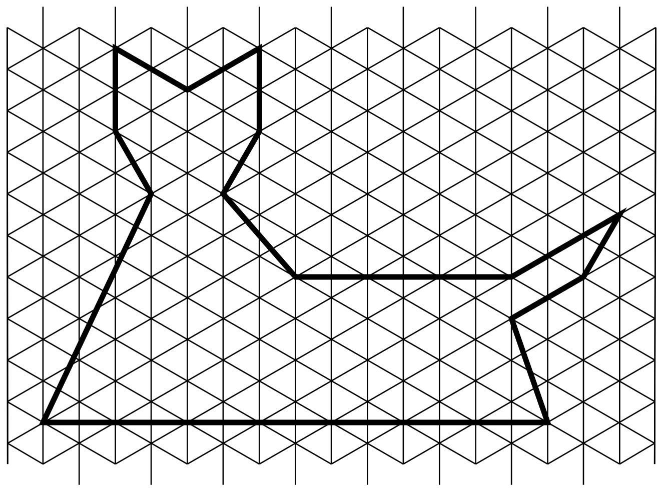
Nombre	Estado	Medalla	Nivel
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	Plata	Elemental
Alejandra Muñoz Espín	Morelos	Bronce	Elemental
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Bronce	Elemental
Eric Ransom Treviño	Nuevo León	Plata	Intermedio
Dariam Aguilar	Baja California	Plata	Intermedio
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México	Bronce	Intermedio
Andrea Escalona Contreras	Morelos	Bronce	Intermedio
David García Maldonado	Oaxaca	Bronce	Intermedio
Víctor Manuel Bernal Ramírez	Sinaloa	Bronce	Intermedio
Luis Eduardo Martínez Aguirre	Nuevo León	Bronce	Intermedio
Rogelio Guerrero Reyes	Aguascalientes	Bronce	Intermedio
José Alejandro Reyes González	Morelos	Plata	Avanzado
Tomás Francisco Cantú Rordíguez	Ciudad de México	Bronce	Avanzado
Karla Rebeca Munguía Romero	Sinaloa	Bronce	Avanzado
Manuel González Chi	Yucatán	Bronce	Avanzado
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo	Nuevo León	Bronce	Avanzado
Ana Paula Jiménez Díaz	Ciudad de México	Plata	Libre

A continuación presentamos los problemas de la 7^a Olimpiada Iraní de Geometría.

Nivel Elemental

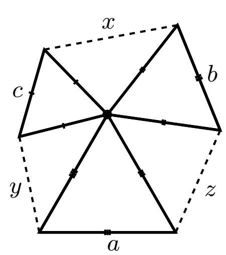
Problema 1. Dado un polígono dibujado sobre una hoja de papel, hacer un *doblez* en el polígono, será dibujar un segmento en la hoja de papel y doblarla a lo largo del segmento. Supón que tienes una hoja con la siguiente figura y que puedes recortarla

a lo largo del borde (orilla) del polígono dibujado. Iniciando con la figura anterior ya recortada y realizando a lo más 5 dobleces obtén una figura rectangular. Describe tu solución indicando los segmentos de doblez y dibujando la forma que queda después de cada doblez en tu hoja de respuesta.
Nota. Los segmentos de doblez no tienen que coincidir con las líneas de la triangulación de la hoja.



Problema 2. Sea $ABCD$ un paralelogramo ($AB \neq BC$). Los puntos E y G son puntos de la recta CD tales que AC es la bisectriz de los ángulos $\angle EAD$ y $\angle BAG$. La recta BC corta a AE y a AG en los puntos F y H, respectivamente. Muestra que la recta FG pasa por el punto medio de HE.

Problema 3. En la figura siguiente, hay tres triángulos equiláteros con lados de longitudes a, b, c que tienen un vértice común y no tienen otro punto común. Las longitudes x, y y z se definen como en la figura. Muestra que $3(x + y + z) > 2(a + b + c)$.



Problema 4. Sea P un punto arbitrario del interior del triángulo ABC. Las rectas BP y CP cortan a AC y AB en E y F, respectivamente. Sean K y L los puntos medios de los segmentos BF y CE, respectivamente. Las rectas por L y K paralelas a CF y BE, cortan a BC en S y T, respectivamente; además, sean M y N los puntos que resultan

de reflejar a S y T con respecto a L y K, respectivamente. Muestra que cuando P varía en el interior del triángulo ABC, la recta MN pasa por un punto fijo.

Problema 5. Se dirá que dos vértices de un polígono simple son *visibles* uno del otro si ellos son adyacentes, o el segmento que los une está completamente contenido en el interior del polígono (salvo los dos puntos que están en el borde). Encuentra todos los enteros positivos n para los que existe un polígono simple con n vértices, en el que todo vértice es visible por exactamente otros 4 vértices. (Un polígono simple es un polígono sin hoyos que no se interseca consigo mismo).

Nivel Intermedio

Problema 1. Sea $ABCD$ un trapecio tal que AB y CD son paralelos. Sea M el punto medio del segmento AB. El punto N en el segmento CD satisface que $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ y $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Demuestra que N es el punto medio del segmento CD.

Problema 2. Sea ABC un triángulo isósceles ($AB = AC$) con circuncentro O. El punto N es punto medio del segmento BC y el punto M es la reflexión del punto N con respecto al lado AC. Supón que T es un punto tal que $ANBT$ es un rectángulo. Prueba que $\angle OMT = \frac{1}{2}\angle BAC$.

Problema 3. En el triángulo acutángulo ABC ($AC > AB$), H es el ortocentro y M es el punto medio del segmento BC. La mediana AM interseca al circuncírculo del triángulo ABC en X. La recta CH interseca a la mediatriz de BC en E y al circuncírculo del triángulo ABC de nuevo en F. El punto J está en la circunferencia ω, que pasa por X, E y F, de tal manera que $BCHJ$ es un trapecio ($CB \parallel HJ$). Muestra que JB y EM se cortan en ω.

Problema 4. El triángulo ABC está dado. Una circunferencia arbitraria con centro J, que pasa por B y C, interseca a los lados AC y AB en E y F, respectivamente. Sea X un punto tal que el triángulo FXB es semejante al triángulo EJC (en el mismo orden) y los puntos X y C están del mismo lado respecto a la recta AB. Análogamente, sea Y un punto tal que el triángulo EYC es semejante al triángulo FJB (en el mismo orden) y los puntos Y y B están del mismo lado respecto a la recta AC. Demuestra que la recta XY pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 5. Encuentra todos los números $n \geq 4$ tales que existe un poliedro convexo con exactamente n caras y cuyas caras son todas ellas triángulos rectángulos. (Observa que el ángulo entre cualquier par de caras adyacentes en un poliedro convexo es menor que $180°$).

Nivel Avanzado

Problema 1. Sean M, N y P los puntos medios de los lados BC, AC y AB del triángulo ABC, respectivamente. E y F son dos puntos sobre el segmento BC tales que $\angle NEC = \frac{1}{2}\angle AMB$ y $\angle PFB = \frac{1}{2}\angle AMC$. Muestra que $AE = AF$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con incentro I. Supón que N es el punto medio del arco $\widehat{BAC}$ del circuncírculo del triángulo ABP y P es un punto tal que $ABPC$ es un paralelogramo. Sean Q la reflexión de A respecto a N y R el pie de la perpendicular de A sobre QI. Muestra que la línea AI es tangente al circuncírculo del triángulo PQR.

Problema 3. Considera tres círculos disjuntos donde no hay uno dentro de otro con la propiedad de que cualquier línea que separa dos de ellos interseca al interior del tercero. Muestra que la suma de las distancias entre los centros de los tres círculos es a lo mucho $2\sqrt{2}$ veces la suma de sus radios.
(Una línea separa dos círculos cuando los círculos no intersecan a la línea y están en diferentes lados de ella).
Nota. Resultados más débiles con $2\sqrt{2}$ siendo reemplazado por otra constante c se podrán valorar dependiendo del valor de $c > 2\sqrt{2}$.

Problema 4. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que existe un círculo tangente a cada uno de sus lados. Sea I el centro de este círculo. Este círculo es tangente a los lados AD, DC, CB y BA en los puntos K, L, M y N, respectivamente. Las líneas AD y BC se intersecan en E y las líneas AB y CD se intersecan en F. La línea KM interseca a las líneas AB y CD en X y Y, respectivamente. La línea LN interseca a las líneas AD y BC en los puntos Z y T, respectivamente. Demuestra que el circuncírculo del triángulo XFY y el círculo con diámetro EI son tangentes si y solo si el circuncírculo del triángulo TEZ y el círculo con diámetro FI son tangentes.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo ($AC > AB$) con ortocentro H y circuncírculo Γ. Los puntos M y P son los puntos medios de los segmentos BC y AH, respectivamente. La línea AM interseca nuevamente a Γ en el punto X y el punto N está sobre la línea BC de manera que NX es tangente a Γ. Los puntos J y K están en la circunferencia con diámetro MP tal que $\angle AJP = \angle HNM$ (B y J están en el mismo lado de AH). La circunferencia ω_1 que pasa por K, H y J y la circunferencia ω_2 que pasa por K, M y N son tangentes externamente. Demuestra que las tangentes comunes externas a ω_1 y ω_2 se intersecan sobre la línea NH.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Primer día

Solución del problema 1. (Solución de Eric Ransom Treviño). Si el número virtual $\overline{abab}$ es de la forma n^2+1 para algún entero positivo n, entonces

$$n^2+1=\overline{abab}=1000a+100b+10a+b=1010a+101b=101(10a+b),$$

por lo que $(n-10)(n+10)=n^2-100=101(10a+b)-101=101(10a+b-1)$.
Como 101 es primo, tenemos que 101 divide a $n-10$ o divide a $n+10$.
Si 101 divide a $n-10$, entonces $n=10$ o $n-10\geq 101$. La primera opción no es posible pues $n^2+1=101$ pero $n^2+1=\overline{abab}\geq 1000$. En la segunda opción, tenemos que $n\geq 111>100$ y, por lo tanto, $n^2+1>10001>\overline{abab}$. Concluimos que en este caso no hay valores posibles de n.
Si 101 divide a $n+10$, entonces $n+10=101m$ donde $m\geq 1$ (pues n es un entero positivo). Si $m\geq 2$, entonces $n\geq 101(2)-10=192>100$ y obtenemos una contradicción similar al caso anterior. Luego, $m=1$ y $n=101-10=91$. Se sigue que $n^2+1=8282$, el cual es un número virtual. Por lo tanto, el único número virtual que cumple es 8282.

Solución del problema 2. (Solución de David García Maldonado). Demostraremos que los enteros positivos n que cumplen son los de la forma 2^x con $x\geq 0$ un entero. Si

$n = 1$, es trivial, pues hay k monedas en una pila, por lo que se hicieron 0 operaciones. Si $n = 2$, se tienen $2k$ monedas distribuidas en dos pilas, por lo que hacemos una operación entre ellas y tendremos k monedas en cada pila. A partir de aquí, asumiremos que $n \geq 3$.

Si n es impar y es mayor que 1, consideramos $k = n$. Distribuimos las monedas de la siguiente manera: Se pone una moneda en una pila y se ponen $n + 1$ monedas en cada una de $n - 1$ pilas (dando un total de $1 + (n - 1)(n + 1) = n^2$ monedas). Como n es impar, $n + 1$ es par, por lo que las únicas operaciones que se podrán realizar son entre números de la misma paridad que son iguales (entre las pilas con $n+1$ monedas). Esto indica que la distribución dada de monedas no se podrá modificar, por lo que no es nivelable.

Si $n = 2^x m$ con $x \geq 1$ y m un número impar mayor que 1, consideramos $k = n = 2^x m$. Aquí, se distribuyen las monedas de la siguiente manera: Ponemos una moneda en cada una de las primeras $2^x(m - 1)$ pilas y ponemos $2^x m^2 - m + 1$ monedas en cada una de las 2^x pilas restantes. Como m es impar, entonces $2^x m^2 - m + 1$ es par, por lo que las únicas operaciones que se podrán realizar son entre números de la misma paridad que son iguales (ya sea con las pilas de $2^x m^2 - m + 1$ monedas o con las pilas de una moneda), y al hacer una operación no hay cambios en la distribución de las monedas. De aquí, concluimos que si n no es una potencia de 2, existe un valor de k y una distribución de kn monedas en n pilas que no es nivelable.

Ahora, sea $n = 2^x$ con $x \geq 2$ y k un entero positivo. Notemos que en cualquier distribución de monedas hay una cantidad par de pilas que tienen una cantidad impar de monedas. Al realizar la operación entre dos pilas, la suma de las distancias de esta cantidad de monedas a la que debería haber al final se reduce o queda igual; en efecto, si esas pilas tienen t_1 y t_2 monedas, entonces

$$|k - t_1| + |k - t_2| \geq |2k - (t_1 + t_2)| = 2\left|k - \frac{t_1 + t_2}{2}\right|,$$

lo que significa que esa suma de distancias disminuye o se queda igual al realizarse una operación y, queda igual, únicamente cuando las pilas tienen ambas una cantidad de monedas menor que k o ambas mayor que k (esto es, que $(k - t_1)(k - t_2) \geq 0$). Luego, debe llegar un momento en el que cualquier sucesión de operaciones que se realice, ya no cambiará esta suma (porque ya no se puede reducir más). Si todas las pilas tienen la misma cantidad de monedas, no hay nada más qué hacer. Si no, debe haber dos conjuntos de pilas donde todas las cantidades de monedas en las pilas de uno de los conjuntos tienen la misma paridad y son mayores que k, mientras que en el otro conjunto también se cumple que las cantidades de monedas en las pilas tienen la misma paridad pero son menores que k. Demostraremos que las cantidades de monedas en las pilas de un mismo conjunto deben ser iguales.

Para esto, tomemos las pilas de monedas que son mayores que k y, sin pérdida de generalidad, supongamos que todas tienen una cantidad impar de monedas. Demostraremos que las cantidades de monedas en las pilas deben ser congruentes entre sí módulo 2^m para todo entero positivo $m \geq 1$ en todo momento sea cual sea la operación que se les aplique, lo cual implicará que deben ser todas iguales. Procederemos por inducción sobre m. El caso base $m = 1$ es trivial, pues ya se sabe que todas tienen la misma paridad y, si al aplicar ciertas operaciones entre ellas queda una pila con una cantidad par de

monedas, entonces la suma de las distancias se puede reducir, lo cual no es posible por hipótesis. Esto significa que, después de cualesquiera operaciones que se les aplique, las cantidades de monedas deben ser siempre impares.
Ahora, supongamos que ya se sabe que todas son congruentes entre sí módulo 2^m. Demostraremos que también deben ser congruentes entre sí módulo 2^{m+1}. Supongamos que hay dos pilas con cantidades de monedas que no son congruentes módulo 2^{m+1}. Si una es congruente con x, la otra debe ser congruente con $x + 2^m$ (pues son congruentes módulo 2^m). Luego, aplicando una operación entre ellas, quedará una pila con una cantidad de monedas congruente con $\frac{x+(x+2^m)}{2} = x + 2^{m-1}$ módulo 2^m, lo que contradice la hipótesis de inducción. Por lo tanto, todas las cantidades de monedas deben ser congruentes entre sí módulo 2^{m+1} y, si después de ciertas operaciones se obtiene una pila que no sea congruente a este residuo módulo 2^{m+1}, por el hecho anterior significará que la suma de distancias se podrá reducir. Esto completa el paso inductivo.
Por lo tanto, todas las pilas tienen la misma cantidad de monedas. Para el conjunto de pilas que tienen menos de k monedas, el argumento es análogo.
De esta manera, las pilas están separadas en dos conjuntos de manera que cualesquiera dos pilas en el mismo conjunto tienen la misma cantidad de monedas y que la cantidad de monedas en una pila de un conjunto tiene distinta paridad que la cantidad de monedas de una pila en el otro conjunto. Supongamos que hay z pilas de $2y$ monedas cada una y hay $2^x - z$ pilas con una cantidad impar w de monedas. En total debe haber $2^x k$ monedas.
De lo anterior, tenemos que

$$2yz + w(2^x - z) = 2^x k.$$

Observemos que z es par, pues $2^x - z$ debe ser par. Sea $z = 2^r t$ con t un impar y $r \geq 1$. Luego, $2y\,(2^r t) + w\,(2^x - 2^r t) = 2^x k$ y, como $2^r < 2^x$ (pues $z \neq 2^x$), dividiendo entre 2^r obtenemos que

$$2yt + w\left(2^{x-r} - t\right) = 2^{x-r} k.$$

Es claro que x^{x-r} es par, por lo que $w\,(2^{x-r} - t)$ debe ser par, lo que es una contradicción pues w es impar y $2^{x-r} - t$ también es impar (pues t es impar). Se sigue que, si $n = 2^x$, cualquier distribución de nk monedas en n pilas es nivelable. Esto concluye la demostración.

Solución del problema 3. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Demostraremos que las únicas funciones que satisfacen la condición del problema son de la forma $f(x) = x^2 + xn$ donde n es un entero. Primero, verificamos que satisface la condición. Sean a, b y c números enteros tales que $a + b + c = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) + f(c) &= \left(a^2 + an\right) + \left(b^2 + bn\right) + \left(c^2 + cn\right) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)n = a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Ahora, procederemos a probar que estas son las únicas que cumplen. Sea $f(1) = 1 + k$ con k un entero. Demostraremos que $f(a) = a^2 + ak$ para todo entero a. Si se toma $a = b = c = 0$ en

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2, \tag{1}$$

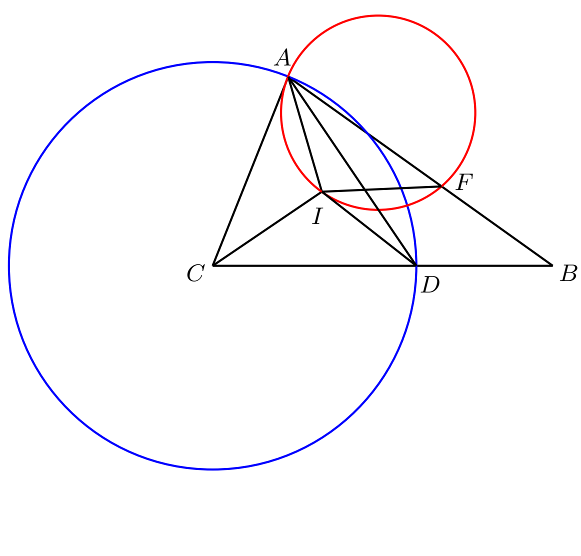
obtenemos que $3f(0) = 0$ y, por lo tanto, $f(0) = 0$. Luego, tomando $b = -a$ y $c = 0$ en (1), resulta que $f(a) + f(-a) + f(0) = a^2 + (-a)^2 + 0^2$, por lo que $f(a) + f(-a) = 2a^2$. Esto significa que si $f(a) = a^2 + ak$, entonces $f(-a) = 2a^2 - (a^2 + ak) = a^2 - ak = (-a)^2 + (-a)k$, esto es, si $f(a)$ es de la forma que se quiere, también $f(-a)$ lo será (denotaremos con **($*$)** a esta afirmación).
Usaremos inducción fuerte sobre m para probar que $f(m) = m^2 + mk$ para todo entero positivo m, que por **($*$)** se tendría que $f(m) = m^2 + mk$ para todo entero m. Como $f(0) = 0 = 0^2 + 0 \cdot k$ y $f(1) = 1 + k = 1^2 + 1 \cdot k$, ya tenemos los casos base. Para el paso inductivo, supongamos que $f(0), f(1), \ldots, f(n)$ son de la forma deseada para algún entero $n \geq 1$. Tomando $a = -1$, $b = -n$ y $c = n + 1$ en (1), por **($*$)** y por la hipótesis de inducción se sigue que

$$\begin{aligned} 1^2 + n^2 + (n+1)^2 &= f(-1) + f(-n) + f(n+1) \\ &= \left[1^2 + (-1)k\right] + \left[(-n)^2 + (-n)k\right] + f(n+1) \\ &= 1 + n^2 - (n+1)k + f(n+1), \end{aligned}$$

por lo que $f(n+1) = (n+1)^2 + (n+1)k$, lo que concluye el paso inductivo y la inducción. Por lo tanto, las únicas funciones que cumplen son las de la forma $f(x) = x^2 + xk$ con k un entero.

Segundo día

Solución del problema 4. (Solución de Eric Ransom Treviño). Sea $\alpha = \angle CAI = \angle IAF$. Como $CA = CD$, tenemos que $\angle CAD = \angle ADC$ y, como CI es bisectriz del ángulo $\angle ACD$, se sigue que CI es perpendicular a AD y, por lo tanto, CI es la mediatriz de AD. De aquí, tenemos que el triángulo AID es isósceles con $AI = ID$. Además, $AC = DC$ y $\angle ACI = \angle ICD$, por lo que los triángulos ACI y DCI son congruentes por el criterio LAL. Esto significa que $\angle CDI = \angle IAC = \alpha$.



Por otro lado, por ángulos seminscritos tenemos que $\angle IFA = \angle IAC = \alpha = \angle FAI = \angle CDI$, de donde obtenemos que $IF = AI = ID$. Por último, notemos que

$$\angle BIF = \angle IFA - \angle IBF = \angle CDI - \angle DBI = \angle DIB$$

y, como $IF = ID$, por el criterio LAL se sigue que los triángulos IFB y IDB son congruentes, concluyendo así que $FB = DB$, como se quería.

Solución del problema 5. (Solución de Víctor Manuel Bernal Ramírez). Supongamos que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + d$ donde $d, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no negativos. Entonces,

$$\begin{aligned} & P(x_1) + P(x_2) + \cdots + P(x_k) \\ &= (a_n x_1^n + \cdots + d) + (a_n x_2^n + \cdots + d) + \cdots + (a_n x_k^n + \cdots + d) \\ &= a_n\left(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n\right) + \cdots + a_1\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right) + kd. \end{aligned} \tag{2}$$

Como $x_1, x_2, \ldots, x_k$ son positivos y su producto es 1, por la desigualdad MA-MG tenemos que para cualquier entero positivo m,

$$x_1^m + x_2^m + \cdots + x_k^m \geq k\sqrt[k]{(x_1 x_2 \cdots x_k)^m} = k\sqrt[k]{1^m} = k.$$

Sustituyendo esta desigualdad en (2), obtenemos que

$$\begin{aligned} & a_n\left(x_1^n + x_2^n + \cdots + x_k^n\right) + \cdots + a_1\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_k\right) + kd \\ &\geq ka_n + \cdots + ka_1 + kd \\ &= kP(1), \end{aligned}$$

lo que termina la prueba.

Solución del problema 6. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Sea $N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$ un número interoceánico menor que 2020. Primero, como 2 es el primo más pequeño, tenemos que $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} \geq 2^{x_1+x_2+\cdots+x_k}$ y, como $2020 > N$, debe suceder que $2^{x_1+x_2+\cdots+x_k} < 2020$. Si $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \geq 11$, entonces $2^{x_1+x_2+\cdots+x_k} \geq 2^{11} = 2048$, lo cual no es posible. Se sigue que $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq 10$ y, como $p_1 + \cdots + p_k = x_1 + \cdots + x_k$, obtenemos que $p_1 + \cdots + p_k \leq 10$. Esto implica que ningún primo en la factorización canónica de N puede ser mayor que 10, por lo que los únicos primos que pueden estar en dicha factorización son 2, 3, 5 y 7. A partir de aquí se trabajan cuatro casos.

1) *N tiene solo un divisor primo*. Tenemos cuatro opciones: $N = 2^2, 3^3, 5^5$ o 7^7. Como $5^5 = 3125 > 2020$, $7^7 > 5^5$ y $3^3 = 27 < 2020$, las únicas soluciones en este caso son $N = 2^2$ y $N = 3^3$.

2) *N tiene exactamente dos divisores primos.* Notemos que si el menor de estos dos divisores no es 2, entonces $N = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \geq 3^{x_1+x_2}$. Además, $p_1 + p_2 \geq 3 + 5 = 8$, por lo que $x_1 + x_2 \geq 8$ y, por lo tanto, $N \geq 3^{x_1+x_2} \geq 3^8 = 6561 > 2020$, lo que es una contradicción. Se sigue que 2 divide a N, por lo que se tienen tres posibles

opciones: $(p_1, p_2) = (2,3), (2,5), (2,7)$.
En la primera, como $3^4 \cdot 2^1 > 3^3 \cdot 2^2 > 3^2 \cdot 2^3 > 3^1 \cdot 2^4$ (pues $3 > 2$) y $2020 > 3^4 \cdot 2^1$, obtenemos que los cuatro números $3^4 \cdot 2^1, 3^3 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3$ y $3^1 \cdot 2^4$ cumplen.
En la segunda, observemos que

$$5^6 \cdot 2^1 > 5^5 \cdot 2^2 > 5^4 \cdot 2^3 = 5000 > 2020 > 2000 = 5^3 \cdot 2^4 > 5^2 \cdot 2^5 > 5^1 \cdot 2^6,$$

por lo que solo los números $5^3 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^5$ y $5^1 \cdot 2^6$ cumplen.
En la tercera opción, tenemos que

$$7^8 \cdot 2^1 > 7^7 \cdot 2^2 > 7^6 \cdot 2^3 > 7^5 \cdot 2^4 > 7^4 \cdot 2^5 > 7^3 \cdot 2^6 > 7^2 \cdot 2^7 = 6272 > 2020 > 7^1 \cdot 2^8,$$

por lo que solo $7^1 \cdot 2^8$ cumple.

3) *N tiene exactamente tres divisores primos.* Como $p_1 + p_2 + p_3 \geq 2 + 3 + 5 = 10$ y $p_1 + p_2 + p_3 = x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$, los primos 2, 3 y 5 deben ser esos divisores primos de N. Luego, $N = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \geq 2^8 \cdot 3^1 \cdot 5^1 > 2^8 \cdot 2 \cdot 2^2 = 2^{11} > 2020$ (pues $5 > 3 > 2$, $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_2 \geq 1$ y $x_3 \geq 1$), por lo que en este caso no hay soluciones.

4) *N tiene cuatro divisores primos.* Entonces $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 + 3 + 5 + 7 = 17 > 10$ que, por lo dicho al principio, implica que no hay soluciones en este caso.

Finalmente, concluimos que las soluciones son $2^2, 3^3, 3^4 \cdot 2^1, 3^3 \cdot 2^2, 3^2 \cdot 2^3, 3^1 \cdot 2^4, 5^3 \cdot 2^4, 5^2 \cdot 2^5, 5^1 \cdot 2^6$ y $7^1 \cdot 2^8$.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3. *Si p es un número primo de la forma $4k + 3$ y p divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces p divide a cada uno de a y b.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las Casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 19 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez