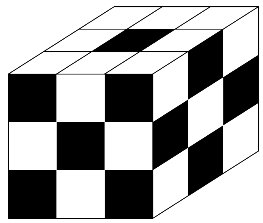
Problemas fáciles

Problema 1. En la figura se muestra un cubo formado por 27 cubos más pequeños e idénticos. Para cada cara del cubo grande, la cara opuesta está pintada de la misma manera. ¿Cuál es el número de cubos pequeños que tienen al menos una cara pintada?

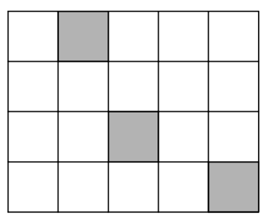
(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 20



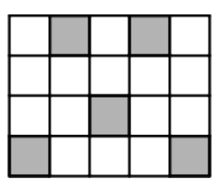
Solución. **(e)** Note que, por cómo están pintadas las caras del cubo grande, cada cubo pequeño tiene a lo mucho una cara pintada. Esto significa que el número de cubos con al menos una cara pintada es igual al número de cuadritos unitarios pintados. Esta última cantidad es igual a $2 \times (1 + 4 + 5) = 20$, por lo que hay 20 cubos pequeños con al menos una cara pintada. □

Problema 6. En la figura, se muestra un rectángulo con 3 cuadritos unitarios sombreados. ¿Cuál es el mínimo número de cuadritos adicionales que hay que sombrear para que la figura resultante tenga dos ejes de simetría?

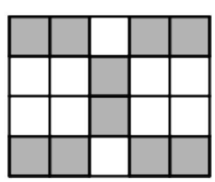
(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 18 (e) 9



Solución. **(c)** Un rectángulo solo puede tener dos ejes de simetría: uno vertical y uno horizontal. Al reflejar la figura sobre la recta vertical que pasa por el centro del rectángulo y empalmar el resultado con la original, se obtiene la siguiente figura:



Después, a esta última figura la reflejamos sobre la recta horizontal que pasa por el centro del rectángulo y se empalma con la anterior, y se obtiene la siguiente figura:



Eso significa que se necesitan sombrear al menos $10 - 3 = 7$ cuadritos más. □

Problema 17. Las edades de mis tres hermanos, junto con la mía, suman 40 años. ¿Cuánto sumaban hace 3 años?

(a) 25 años (b) 28 años (c) 31 años (d) 34 años (e) 37 años

Solución. **(b)** Tanto mi edad, como las edades de mis tres hermanos, es 3 años más que hace tres años. Entonces, a la cantidad total 40 hay que restar 3 por cada uno de nosotros, que somos cuatro. Por lo tanto, hace 3 años nuestras edades sumaban $40 - 3 - 3 - 3 - 3 = 40 - 12 = 28$ años. □

Problema 19. Tengo 15 manzanas, de las cuales corté 7 a la mitad y el resto las corté en cuartos. ¿Cuántos pedazos de manzana obtuve en total?

(a) 42 (b) 43 (c) 44 (d) 45 (e) 46

Solución. **(e)** De cada una de las 7 manzanas que corté a la mitad, se obtienen 2 pedazos y de cada una de las $15-7 = 8$ manzanas restantes que corté en cuartos, se obtienen 4 pedazos. Por lo tanto, en total obtuve $7\times2+8\times4 = 14+32 = 46$ pedazos.

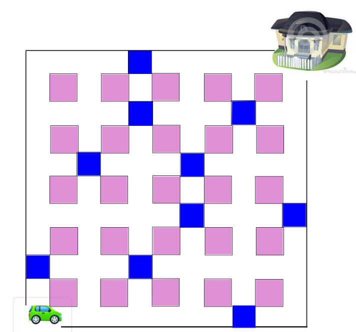
□

Problema 20. Una lámpara usa 2 pilas cada 6 horas. Las pilas se venden en paquetes de 4. ¿Cuántos paquetes de pilas se necesitan para poder usar la lámpara por 48 horas?

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

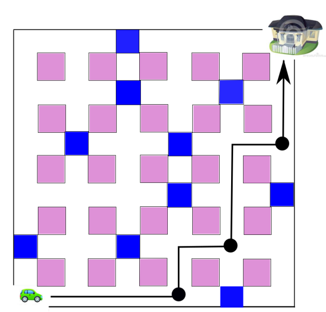
Solución. **(c)** Cada 6 horas se deben de reemplazar las 2 pilas. Luego debemos de hacer $\frac{48}{6} = 8$ reemplazos de pilas. Por lo que necesitamos $8\times2 = 16$ pilas para las 48 horas. Como las pilas vienen en paquetes de 4, se necesitan $\frac{16}{4} = 4$ paquetes. □

Problema 25. El coche irá por el camino blanco hasta la casa sin pasar dos veces por el mismo punto. ¿Cuántas veces dará vuelta a la izquierda?



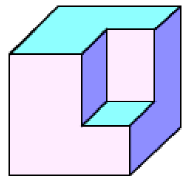
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución. **(c)** Solamente podrá recorrer el camino marcado. Se han puesto círculos donde da vuelta a la izquierda.



□

Problema 27. Haciendo tres cortes, cada uno paralelo a una cara de un cubo de madera, se obtiene una pieza como la que se muestra. Si el volumen original del cubo era $8\ \mathrm{m}^3$, ¿cuál es el área de la superficie de la pieza que se obtuvo?

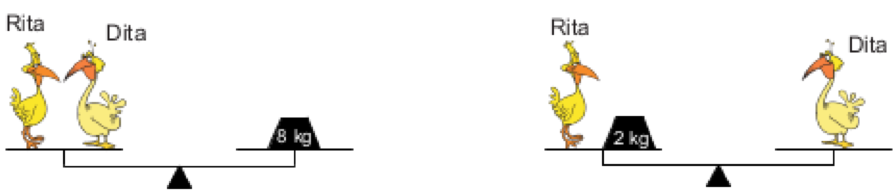


(a) $18\ \mathrm{m}^2$ (b) $24\ \mathrm{m}^2$ (c) $26\ \mathrm{m}^2$ (d) $28\ \mathrm{m}^2$ (e) imposible de determinar

Solución. **(b)** Sabemos que tres caras del cubo quedaron intactas. En cada corte, la parte paralela a la cara afectada tiene la misma superficie del pedazo que se recortó de esa cara, así que la superficie de la nueva figura es igual a la del cubo original. Si llamamos a a la longitud de una arista del cubo, tenemos que $a^3 = 8 = 2^3$, así que $a = 2\,\mathrm{m}$ y el área de la superficie de la figura es $6 \times 2^2 = 24\,\mathrm{m}^2$.

□

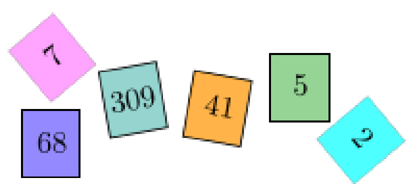
Problema 23. ¿Cuánto pesa Dita?



(a) 2 Kg (b) 3 Kg (c) 4 Kg (d) 5 Kg (e) 6 Kg

Solución. **(d)** Entre las dos pesan 8 kg, pero Dita pesa 2 kg más que Rita, así que Dita pesa 5 kg y Rita pesa 3 kg. □

Problema 22. En cada una de seis tarjetas se escribió un número. ¿Cuál es el menor número que se puede formar con ellas?



(a) 2309415687 (b) 3094157682 (c) 2574168309
(d) 123456789 (e) 102345678

Solución. **(a)** Para obtener el número más pequeño debemos elegir cada vez la tarjeta que empieza con el dígito menor; así, el orden debe ser 2, 309, 41, 5, 68 y 7. □

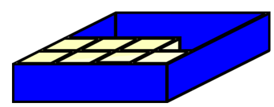
Problema 30. Una hormiga empezó en el extremo izquierdo de un tubo y caminó $\frac{2}{3}$ de la longitud del tubo. Una catarina empezó en el extremo derecho del mismo tubo y caminó $\frac{3}{4}$ de su longitud. ¿Qué fracción de la longitud del tubo separa a la hormiga de la catarina?

(a) $\dfrac{3}{8}$ (b) $\dfrac{5}{7}$ (c) $\dfrac{5}{12}$ (d) $\dfrac{1}{2}$ (e) $\dfrac{1}{12}$

Solución. **(c)** La catarina está a $\frac{1}{4}$ de la longitud partiendo del extremo izquierdo del tubo, y la hormiga está a $\frac{2}{3}$ de la longitud del tubo, también partiendo del extremo izquierdo. Así, la hormiga y la catarina están separados por $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ de la longitud del tubo.

□

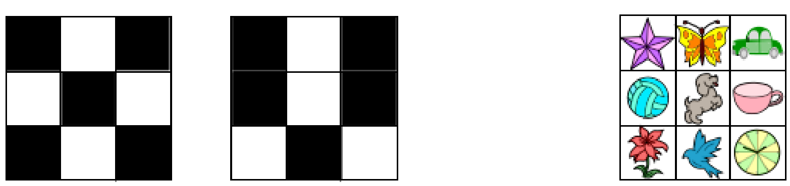
Problema 46. Esteban va a llenar con cubitos una caja que tiene base cuadrada. Los cubitos son de la misma altura que la caja. Ya están puestos algunos cubitos, como se ve en la figura. ¿Cuántos más debe poner?



(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Solución. **(e)** Como la caja es cuadrada y 4 cubitos completan un lado, en total debe haber en la caja espacio para $4 \times 4 = 16$ cubitos. Hay 7, así que faltan 9. □

Problema 47. Dos láminas cuadradas transparentes tienen algunos cuadrados opacos como se muestra en la figura. Se sobreponen en la cuadrícula de la derecha. ¿Cuál de las figuras queda visible?



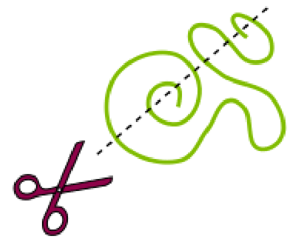
(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución. **(b)** El único cuadríto que no se cubre con las láminas, es el segundo de la fila superior.

□

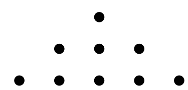
Problema 48. ¿En cuántas partes queda partida la cuerda, cuando se corta siguiendo la recta punteada?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9



Solución. **(e)** En 9 partes: quedan 4 por arriba y 5 por debajo. □

Problema 21. ¿Cuántas formas distintas hay de escoger tres puntos de la figura, de manera que los tres puntos elegidos estén alineados?



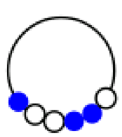
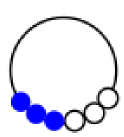
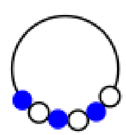
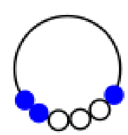
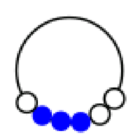
(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 14 (e) 15

Solución. **(d)** Vamos a separar las formas de escoger los puntos en la figura, en los siguientes casos:

- Un punto en cada nivel.
- Los tres puntos en el nivel intermedio.
- Los tres puntos en el nivel inferior.

En el primer caso, solo hay 3 formas. En el segundo caso solo hay una forma. El caso más interesante es el caso en el que los tres puntos están en el nivel inferior, en el cual hay 10 formas. Por lo tanto, el total es $1 + 3 + 10 = 14$. □

Problema 24. En la figura de la derecha se ve un collar con 6 cuentas, pero está enredado. ¿Cuál es la figura que muestra el mismo collar desenredado?

(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Solución. **(a)** □

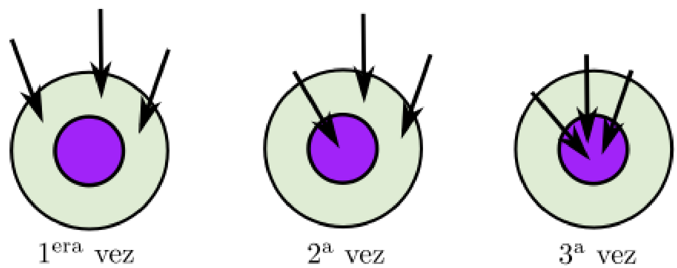
Problema 40. Se desea llenar los cuadritos de la figura de forma que la suma de cada tres cuadritos consecutivos sea 21. ¿Qué número debe ir en la segunda casilla?

7								6		

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

Solución. **(d)** Haciendo pruebas es fácil convencerse de que los números escritos en las primeras tres casillas se repetirán en el mismo orden a lo largo de la tira. Como el 6 está en la posición 9 también deberá estar en la posición 3, así que en la segunda casilla debemos escribir $21 - 7 - 6 = 8$. □

Problema 49. Diana estuvo lanzando dardos. En la figura se muestran los tres oportunidades de lanzamientos que hizo. La primera vez obtuvo 6 puntos y la segunda obtuvo 8 puntos. ¿Cuántos puntos obtuvo la tercera vez?



(a) 9 (b) 12 (c) 14 (d) 15 (e) 18

Solución. **(b)** Como la primera vez obtuvo 6 puntos, deducimos que cada dardo en el área clara vale 2 puntos. Entonces, por el segundo lanzamiento tenemos que el área central vale 4 puntos, y así el tercer lanzamiento vale 12 puntos. □

Problemas Medianos

Problema 2. ¿Cuál número se debe quitar de la lista

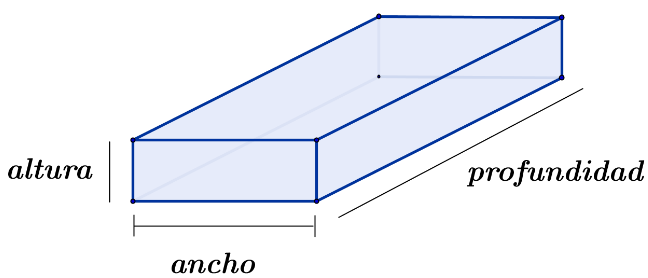
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

de manera que el promedio de los números restantes sea 6?

(a) 4 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 10

Solución. **(b)** Sea x el número que se quita de la lista. Como quedarán 10 números en la lista, entonces el promedio de los números restantes es $\frac{(1+2+3+\cdots+11)-x}{10} = \frac{66-x}{10}$, como este promedio debe ser 6. Se sigue que $\frac{66-x}{10} = 6$, por lo que $66 - x = 60$ y, por lo tanto, $x = 6$. $\square$

Problema 11. Las longitudes de la altura, el ancho y la profundidad de una caja son en centímetros, cantidades enteras y entre ellas guardan la razón $1 : 3 : 4$. ¿Cuál de los siguientes números es un posible valor del volumen de la caja?



(a) 36 cm^2 (b) 48 cm^2 (c) 72 cm^2 (d) 96 cm^2 (e) 144 cm^2

Solución. **(d)** Si a es el valor (en centímetros) de la altura, entonces por estar las dimensiones en razón $1 : 3 : 4$, el ancho tiene valor $3a$ y la profundidad $4a$. Luego el volumen es igual a $a \times 3a \times 4a = 12a^3$, de las opciones el único número que tiene la forma anterior es 96.

$\square$

Problema 12. Ana suma las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo y obtiene un total de 2021 grados. Luego se da cuenta de que olvidó sumar la medida de uno de los ángulos, ¿cuánto mide este ángulo?

(a) 61° (b) 81° (c) 90° (d) 99° (e) 139°

Solución. **(e)** La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo es un múltiplo de $180°$, como $2021 = (11)(180) + 61$, faltan $139°$ para tener el siguiente múltiplo de $180°$.

$\square$

Problema 14. 4.- Los enteros a y b cumplen que $a > b > 0$ y $a + b + ab = 80$. ¿Cuál es el valor de a?

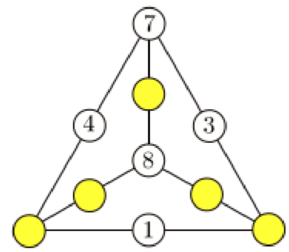
(a) 40 (b) 36 (c) 27 (d) 26 (e) 8

Solución. **(d)** La ecuación, $a + b + ab = 80$ es equivalente a $(a+1)(b+1) = 81$ que admite como parejas de soluciones enteras positivas (a, b) solamente a $(26, 2)$ $(8, 8)$ y $(2, 26)$, pero solamente la primera cumple la condición $a > b > 0$, luego $a = 26$.

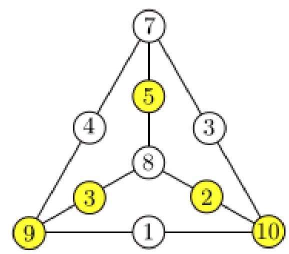
$\square$

Problema 28. En cada círculo de la figura debe escribirse un número entero. Algunos de los números ya están escritos. Si la suma de cualesquiera tres números alineados es la misma, ¿cuál es la suma de todos los números que faltan?

(a) 19 (b) 22 (c) 25 (d) 29 (e) 32

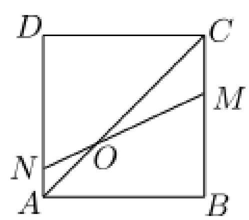


Solución. **(d)** Notamos que el circulito inferior izquierdo es común a tres segmentos y que en uno de ellos la suma hasta el momento es $7 + 4 = 11$, así que también en las otras porciones de los segmentos que comparten el circulito también debe ser 11; esto es, junto al 8 va un 3 y en el vértice inferior derecho va un 10. Pero entonces ya queda completo el lado derecho del triángulo, de manera que la suma común a todos los segmentos es $7 + 3 + 10 = 20$. De aquí ya es fácil completar toda la figura y queda como se muestra. La suma buscada es $9 + 3 + 5 + 2 + 10 = 29$.



$\square$

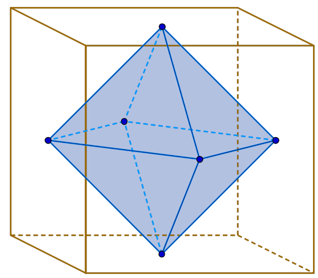
Problema 35. Si la figura representa un cuadrado con vértices A, B, C y D, y el ángulo $\angle OND$ mide 60°, ¿cuánto mide el ángulo $\angle COM$?



(a) 10° (b) 15° (c) 20° (d) 30° (e) 35°

Solución. **(b)** Tenemos que $\angle OND + \angle ONA = 180°$ y como $\angle OND = 60°$, entonces $\angle OND = 120°$. Por otro lado, AC es diagonal del cuadrado, así que $\angle CAN = 45°$. Luego tenemos que, $\angle COM = \angle NOA = 180° - \angle NAO - \angle ONA = 180° - 120° - 45° = 15°$. $\square$

Problema 13. Los centros de las caras de un cubo de lado 1 son los vértices de un octaedro regular. ¿Cuál es el volumen de tal octaedro?
Nota. *El volumen de una pirámide es igual al área de la base por la longitud de la altura.*



(a) $\frac{1}{12}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (c) $\frac{1}{8}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) $\frac{1}{6}$

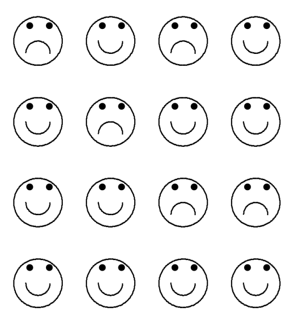
Solución. **(e)** El octaedro es la unión de dos pirámides iguales, cada una con base el cuadrado que tiene por vértices los centros de las 4 caras laterales del cubo y vértice de la pirámide el centro de la cara superior (o de la cara inferior, la otra pirámide). Sabemos que el volumen de una pirámide es igual al área de la base por la altura sobre 3. Como la base tiene área $1/2$ y la altura es igual a $1/2$, el volumen de la pirámide es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$, por lo que el volumen del octaedro es $\frac{1}{6}$.

□

Problema 31. Hay 4 botones en línea en una pantalla como se muestra. Dos de ellos muestran caras felices y dos muestran caras tristes. Si se toca una cara, su expresión y la expresión de las caras adyacentes cambia de feliz a triste y viceversa. ¿Cuál es el menor número de veces que se tiene que tocar alguna cara para lograr que todas sean carita feliz.

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Solución. **(b)** Es claro que un solo movimiento no lo logra. Si se pudiera con dos movimientos, entonces, como la primera cara es triste, sólo se tocaría una vez ya sea la primera o la segunda. En cualquier caso, esos movimientos harían que la segunda quedara triste, por lo que la tercera debería tocarse una vez y eso haría que la cuarta quedara triste. Con tres movimientos es posible, como se muestra en la figura (tocando la segunda, la tercera y, finalmente, la cuarta).



□

Problema 33. En un torneo de fútbol se jugaron 45 partidos. En cada juego el equipo ganador obtuvo 3 puntos y el perdedor obtuvo 0 puntos. En caso de empate cada uno de los equipos obtuvo 1 punto. Si el total de puntos obtenidos por todos los equipos fue 130, ¿cuántos partidos del torneo fueron empates?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 5

Solución. **(e)** Si todos los partidos hubieran sido empates se habrían repartido 90 puntos entre los equipos. La diferencia $130 - 90 = 40$ corresponde a los partidos que no fueron empates. Por lo anterior, hubo 5 empates en el torneo.
Otra manera. Si en todos los partidos hay un ganador, se reparten $45 \times 3 = 135$ puntos. La diferencia $135 - 130 = 5$ corresponde a los partidos donde hubo empate.

□

Problema 29. Cinco amigos P, Q, R, S y T se dan la mano. Tanto P como Q estrecharon la mano de uno de sus amigos solamente, mientras que R, S y T estrecharon cada uno la mano de dos. Sabemos que P estrechó la mano de T. ¿Quiénes podemos asegurar que no se dieron la mano?

(a) T y S (b) T y R (c) Q y R (d) Q y T (e) Q y S

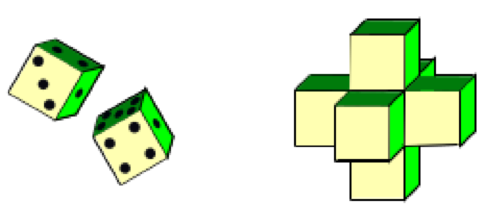
Solución. **(d)** Si Q le hubiera dado la mano a T, entonces ni P ni Q ni T le hubieran dado la mano a nadie más, lo cual no es posible pues R le dio la mano a dos amigos. La respuesta es (d). □

Problema 34. Mónica multiplicó correctamente dos números de dos dígitos en una hoja de papel. Luego puso unas calcomanías encima de tres de los dígitos como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los tres dígitos que quedaron tapados?

(a) 6 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 14

Solución. **(a)** Escribamos A, B y C en lugar de los números tachados, de forma que la operación quede $A3 \times 2B = 3C2$, donde debemos sustituir A, B y C por dígitos. Observemos que la única posibilidad para que el resultado de la multiplicación termine en 2 es sustituir B por 4. Como el único múltiplo de 24 entre 300 y 399 es 312, tenemos que C debe sustituirse por 1. Finalmente, A debe sustituirse por 1 para que la operación esté correcta. La suma de los números tachados es $4 + 1 + 1 = 6$. □

Problema 37. Julio pegó 7 dados de manera que coincidieran los números de las caras pegadas. ¿Cuántos puntos quedaron en total en la superficie?



(a) 95 (b) 102 (c) 105 (d) 112 (e) 126

Solución. **(c)** Considerando los 6 dados exteriores antes de pegarlos, el total de puntos en sus superficies es $6(1+2+3+4+5+6) = 126$. A esta cantidad hay que restarle la suma de los puntos en la superficie del dado que quedará al centro (cada uno de los dados de afuera se pega por el mismo número al dado central), que es $1+2+3+4+5+6 = 21$. Así, la cantidad de puntos que quedaron en la superficie es $126 - 21 = 105$. $\square$

Problema 36. Cuando a un barril le falta el 30 % para llenarse contiene 30 litros más que cuando está lleno hasta el 30 %. ¿Cuántos litros le caben al barril?

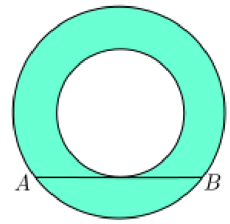
(a) 60 (b) 75 (c) 90 (d) 100 (e) 120

Solución. **(b)** Tenemos que 30 litros son el $70\,\% - 30\,\% = 40\,\%$ del barril, así que en total le caben $\frac{30\cdot 100}{40} = 75$ litros. $\square$

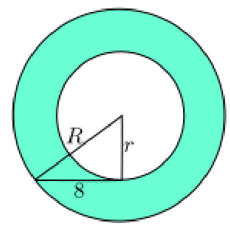
Problemas Difíciles

Problema 45. En la figura, los dos círculos tienen el mismo centro, y la cuerda AB del círculo mayor es tangente al menor. Si AB mide 16, ¿cuál es el área de la región sombreada?

(a) 32π (b) 63π (c) 64π (d) $32\pi^2$ (e) falta información



Solución. **(c)** Llamemos R al radio del círculo mayor y r al radio del círculo menor. Como la recta tangente a un círculo en un punto es perpendicular al radio por ese punto, podemos aplicar el teorema de Pitágoras: $R^2 = 64 + r^2$, de donde $R^2 - r^2 = 64$. El área sombreada es $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 64\pi$.



□

Problema 7. Sean a y b números reales diferentes tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Encuentra la suma de todos los posibles valores de $\frac{a+b}{a-b}$.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Solución. **(a)** Sumando $4ab$ de ambos lados de la ecuación original $2a^2 + 2b^2 = 5ab$, se obtiene que $2(a+b)^2 = 9ab$. Por otro lado, si se resta $4ab$ en la ecuación original, se tiene que $2(a-b)^2 = ab$. Además, si alguno entre a y b es igual a 0, la ecuación original implica que el otro debe ser también 0, lo cual no puede suceder pues $a \neq b$. Así, $ab \neq 0$ y, por lo tanto,

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{2(a+b)^2}{2(a-b)^2} = \frac{9ab}{ab} = 9,$$

por lo que $\frac{a+b}{a-b} \in \{-3, 3\}$. Para ver que ambos valores son posibles, note que la ecuación original se verifica si $(a,b) = (1,2)$, ya que $(a,b) = (1,2)$ implica $\frac{a+b}{a-b} = -3$ y también con $(a,b) = (2,1)$ ya que en este caso $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Así los únicos valores posibles para la expresión buscada son -3 y 3 y, por lo tanto, su suma es 0. □

Problema 4. ¿Cuántos números de cuatro dígitos terminan en 36 y son múltiplos de 36?

(a) 9 (b) 10 (c) 11 (d) 12 (e) 13

Solución. **(b)** Sea $\overline{ab36}$ un número de cuatro dígitos que es múltiplo de 36. Nótese que, como termina en 36 y este es múltiplo de 4, entonces solo basta revisar que $\overline{ab36}$ sea múltiplo de 9. Se ocupa que $a \neq 0$ y $a + b + 9$ sea múltiplo de 9, esto es, $a + b$ debe ser un múltiplo de 9. Las únicas posibilidades para (a,b) son $(1,8)$, $(2,7)$, $(3,6)$, $(4,5)$, $(5,4)$, $(6,3)$, $(7,2)$, $(8,1)$, $(9,0)$ y $(9,9)$, por lo que en total hay 10 números con las propiedades descritas. □

Problema 42. Varios piratas se repartieron un cofre con monedas de oro iguales, de manera que a cada uno le tocó la misma cantidad. Si hubiera habido 4 piratas menos, a cada uno le habrían tocado 10 monedas más. Si hubiera habido 50 monedas menos, a cada pirata le habrían tocado 5 monedas menos que en el reparto original. ¿Cuántas monedas se repartieron en total?

(a) 80 (b) 100 (c) 120 (d) 150 (e) 250

Solución. **(d)** Como quitar 50 monedas del total sería lo mismo que quitarle 5 monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5} = 10$ piratas. Sabemos que 4 piratas recibieron $6 \times 10 = 60$ monedas (es lo que se habría repartido en el grupo si esos 4 piratas no estuvieran), así que cada pirata recibió $\frac{60}{4} = 15$ monedas. En total hay $10 \times 15 = 150$ monedas.

□

Problema 41. En un examen de matemáticas que tenía 10 preguntas se daban 5 puntos por cada respuesta correcta y se quitaban 3 puntos por cada error. Todos los alumnos respondieron todas las preguntas. Si Javier obtuvo 34 puntos, Daniel obtuvo 10 puntos y César obtuvo 2 puntos, ¿cuántas respuestas correctas tuvieron entre los tres?

(a) 13 (b) 15 (c) 17 (d) 18 (e) 21

Solución. **(c)** La forma de calificar el examen es equivalente a darle a cada alumno 50 puntos al inicio del examen y quitarle 8 puntos por cada respuesta incorrecta (¿por qué?). Entre los tres alumnos perdieron $150 - 34 - 10 - 2 = 104$ puntos, así que fallaron en $\frac{104}{8} = 13$ respuestas. Así, entre los tres contestaron $30 - 13 = 17$ preguntas acertadamente.

□

Problema 44. ¿Cuánto vale $x - y$, si $x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2021^2$ y $y = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + 2020 \times 2022$?

(a) 0 (b) 2000 (c) 2002 (d) 2020 (e) 2021

Solución. **(e)** Tenemos que

$$\begin{aligned}
x - y &= 1^2 + 2^2 + \cdots + 2021^2 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - \cdots - 2020 \cdot 2022 \\
&= 1(1-3) + 2(2-4) + \cdots + 2020(2020 - 2022) + 2021^2 \\
&= (1 + 2 + \cdots + 2020)(-2) + 2021^2 \\
&= \frac{(2020 \cdot 2021)(-2)}{2} + 2021^2 \\
&= 2021(-2020 + 2021) \\
&= 2021.
\end{aligned}$$

□

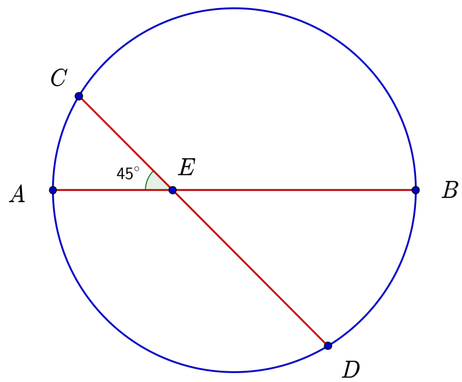
Problema 16. Beto traza n circunferencias en una hoja de papel de modo que se cumplan las dos propiedades siguientes: cualesquiera dos de las circunferencias se intersectan en exactamente dos puntos y no hay 3 circunferencias que pasen por el mismo punto. Luego Beto recorta la hoja de papel a lo largo de todas las circunferencias trazadas, con lo que obtiene $f(n)$ fragmentos de papel. Por ejemplo, $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$. Determina $f(6)$.

(a) 22 (b) 24 (c) 28 (d) 30 (e) 32

Solución. **(6)** Ya sabemos que $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$, cada circunferencia que se trace corta en dos puntos a cada una de las ya trazadas, cada dos puntos de corte seguidos dividirá en dos a una de las regiones que ya se tenían con las circunferencias anteriores, luego en cada paso aumentan el número de regiones la cantidad de nuevos puntos de corte. Así $f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, $f(4) = 8 + 2 \cdot 3 = 14$, $f(5) = 14 + 2 \cdot 4 = 22$, y $f(6) = 22 + 2 \cdot 5 = 32$.

□

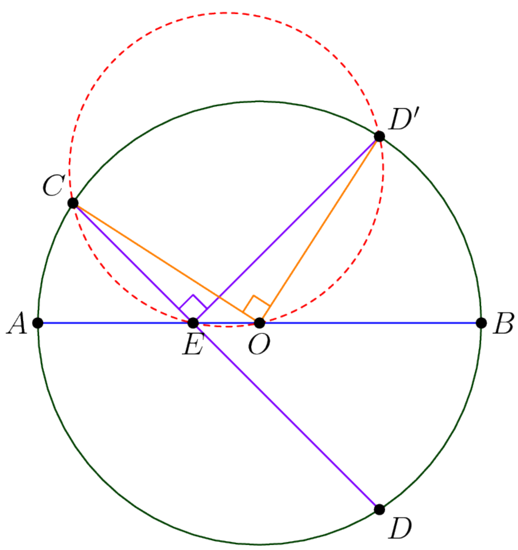
Problema 8. Sea AB un diámetro de una circunferencia de radio $5\sqrt{2}$. Sea CD una cuerda en el círculo que corta a AB en un punto E de tal forma que $\angle AEC = 45°$. ¿Cuál es el valor de $CE^2 + DE^2$?



(a) 2 (b) $2\sqrt{5}$ (c) 5 (d) $\sqrt{10}$ (e) 10

Solución. **(e)** Sea D' la reflexión de D respecto a AB y sea O el punto medio de AB. Por cómo se construyó D', se tiene que $\angle BED' = \angle CEA = 45°$, por lo que $\angle D'EC = 90°$. Además, se tiene que $\angle DED' = 90°$ y $ED = ED'$, de donde se sigue que $\angle D'DC = \angle D'DE = 45°$, lo que implica que $\angle D'OC = 2\angle D'DC = 90° = \angle D'EC$. Por consiguiente, el cuadrilátero $CEOD'$ es cíclico y, más aun, su diámetro es CD'. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras,

$$CE^2 + DE^2 = CE^2 + D'E^2 = D'C^2 = CO^2 + D'O^2 = 2CO^2 = 2\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 100.$$



Otra solución. Con la notación anterior, tenemos que el triángulo $D'ED$ es un triángulo rectángulo isósceles, por lo que $\angle CDD' = 45°$. Por la ley de los senos en el triángulo CDD' se tiene que $\frac{sen(\angle CDD')}{CD'} = \frac{1}{2(5\sqrt{2})}$, por lo que $CD' = \frac{2(5\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 10$.

$\square$

Problema 38. Cada tercer día Luis dice la verdad y los demás días miente. Hoy Luis ha dicho exactamente 4 de los siguientes enunciados. ¿Cuál es el enunciado que no dijo hoy?

(a) Tengo la misma cantidad de amigas que de amigos.

(b) Soy amigo de una cantidad prima de personas.

(c) Mi nombre es Luis.

(d) Siempre digo la verdad.

(e) Soy amigo de tres personas más altas que yo.

Solución. **(c)** El enunciado (c) es verdad y el (d) es mentira, así que los otros tres son todos falsos o todos verdaderos. Si (a), (b) y (c) fueran verdaderos Luis tendría una cantidad de amigos que es un número primo, es par y es mayor que 3, lo cual no puede ser. De lo anterior concluimos que Luis miente el día de hoy. □