SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Mayo de 2021

Contenido

Presentación IV

Artículos de matemáticas: Vieta Jumping **1**

Problemas de práctica **11**

Soluciones a los problemas de práctica **15**

Problemas de Entrenamiento **24**
- Problemas de Entrenamiento. Año 2021 No. 2 24
- Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2020 No. 3 25

4ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (Virtual) **34**
- Prueba Individual (Nivel II) 35
- Prueba por Equipos (Nivel II) 38
- Soluciones de la Prueba Individual (Nivel II) 40
- Soluciones de la Prueba por Equipos (Nivel II) 44

34ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Concurso Nacional (Virtual) **48**

Problemas de Olimpiadas Internacionales **60**
- XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 60

Soluciones de Olimpiadas Internacionales **63**
- XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 63

Apéndice **71**

Bibliografía **74**

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas **76**

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2021, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Vieta Jumping*, de Adán Medrano Martín del Campo. En él, se aborda la técnica conocida como "Vieta Jumping" que es usada en la solución de problemas que involucran ecuaciones cuadráticas de enteros positivos, técnica que se popularizó desde 1988 a partir del problema 6 de la IMO de ese año. Esperamos que este artículo sea de utilidad para todos los lectores.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este segundo número del año 2021, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes de las pruebas individual y por equipos del nivel II del Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de octubre de 2020 de forma virtual. También presentamos los problemas con soluciones del 34 Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), realizado en noviembre de 2020 también de forma virtual. En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, la cual se llevó a cabo en el mes de noviembre de 2020 de forma virtual.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.

- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2002. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2021-2022 y, para el 1° de julio de 2022, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2021. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2021 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2022) y a la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2022).

De entre los concursantes nacidos en 2005 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2022).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2022.

5ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2021, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Quinta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2021.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2021.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2021.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 5^a OMMEB se realizará del 17 al 21 de junio de 2021 de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2022.

Vieta Jumping

Por Adán Medrano Martín del Campo

Nivel Avanzado

Introducción

La técnica conocida como *Vieta Jumping* es usada en problemas que involucran ecuaciones diofantinas cuadráticas de enteros positivos. Dicha técnica utiliza las fórmulas de Vieta para producir así soluciones para una ecuación diofantina a partir de otra solución. Apelando a la propiedad del buen orden de los enteros positivos, esta técnica busca llegar a una solución *minimal* para nuestra ecuación diofantina: esto es, una solución que minimice algún parámetro entero positivo asociado a la solución, comúnmente siendo este parámetro la suma de las soluciones.

La técnica se popularizó a partir de 1988 gracias al problema 6 de la IMO de ese año (que resolveremos posteriormente en este artículo), la cual fue celebrada en Australia. En [1], Arthur Engel escribió la siguiente nota acerca de la dificultad de este problema, la cual también se encuentra documentada en inglés en [2]:

"Ninguno de los seis miembros del comité de problemas Australiano pudo resolverlo. Dos de los miembros fueron Georges Szekeres y su esposa, ambos afamados solucionadores y proponentes de problemas. Dado que era un problema de teoría de números, fue enviado a los cuatro investigadores de teoría de números Australianos con más renombre. Se les pidió trabajar en el problema por seis horas. Ninguno pudo resolverlo en ese tiempo. El comité de problemas lo mandó al jurado de la 29 IMO marcado con un doble asterisco, colocándolo así como *problema super difícil*, posiblemente demasiado difícil para proponer. Tras una larga discusión, el jurado tuvo la valentía de elegirlo como el problema final de la competencia. Once estudiantes escribieron soluciones perfectas."

Encontrando valores de un parámetro

Veremos cómo se aplica la técnica de Vieta Jumping para encontrar los posibles valores de un parámetro en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Sean a, b enteros positivos tales que ab divide a $a^2 + b^2 + 1$. Muestra que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

Solución. Fijemos un entero positivo k con conjunto de soluciones no vacío y consideramos las soluciones (a, b), consistiendo de enteros positivos, de la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k.$$

Tomemos una solución (a, b) con suma $a + b$ mínimo y $a \geq b$. Podemos reescribir nuestra ecuación anterior como $a^2 - kab + b^2 + 1 = 0$, la cual veremos como una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - kbx + b^2 + 1 = 0.$$

Por construcción, a es solución a dicha ecuación y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta, obtenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 + 1 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2 + 1}{a}$$

de la primera igualdad se obtiene que c es entero, y de la segunda que c es positvo. Esto implica que (b, c) es solución a la ecuación original. Por la minimalidad de $a + b$, tenemos que $c \geq a$ y, como $a \geq b \geq 1$,

$$a^2 \leq ac = b^2 + 1 \leq a^2 + 1$$

y por lo tanto $a = b$. Con esto concluimos que para cada k entero positivo, las soluciones (a, b) en entero positivos con suma $a + b$ mínima a la ecuación original cumplen que $a = b$, por lo que basta considerar $a = b$ para encontrar los posibles valores de k. Tenemos pues que

$$k = \frac{2a^2 + 1}{a^2} = 2 + \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Z}$$

y la única posibilidad para a, b es $a = b = 1$ por lo que $k = 3$, como queríamos mostrar.

Ejemplo 2. Encuentra todos los enteros k tales que existen enteros positivos a, b tales que

$$\frac{b + 1}{a} + \frac{a + 1}{b} = k.$$

Solución. Notemos que podemos reescribir la ecuación del problema como

$$a^2 - a(kb-1) + b^2 + b = 0.$$

Fijamos un entero positivo k con conjunto de soluciones no vacío y dicho conjunto de soluciones (a, b) en enteros positivos de nuestra ecuación. Tomamos una solución con $a+b$ mínimo de entre estas soluciones, con $a \geq b$. Considerando la ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - x(kb-1) + b^2 + b = 0$$

observamos que a es una solución y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb - 1 \\ ac &= b^2 + b \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - 1 - a = \frac{b^2 + b}{a}.$$

Esto muestra que c es un entero positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por la minimalidad de $a + b$ obtenemos que $a \leq c$ y, como $b \leq a$, tenemos que

$$(a-1)^2 + (a-1) < a^2 \leq ac = b^2 + b \leq a^2 + a$$

y concluimos que $a = b$. Esto quiere decir que entre las soluciones (a, b) en enteros positivos a la ecuación original, aquella que minimiza el valor de $a + b$ satisface que $a = b$ y, por lo tanto, basta explorar las parejas que cumplen $a = b$ para encontrar los posibles valores de k. Tenemos que

$$k = 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 2 + \frac{2}{a} \in \mathbb{Z}$$

por lo que $a = 1$ o 2 dando $k = 4$ o 3, respectivamente.

Encontrando conjuntos de soluciones

En los siguientes ejemplos no solo usaremos Vieta jumping para encontrar los posibles valores de un parámetro, sino para caracterizar todas las soluciones de un sistema sujeto a condiciones como ecuaciones o divisibilidad.

Ejemplo 3. Encuentra todas las parejas de enteros (a, b) tales que

$$ab \mid a^2 + b^2.$$

Solución. Notemos que si (a, b) es una solución entonces $(a, \pm b)$ y $(-a, \pm b)$ son soluciones también. Asumiremos entonces que a, b son enteros positivos, y bastará encontrar las soluciones con dichas condiciones. Fijemos un entero positivo k y una pareja (a, b) de enteros positivos con $a \geq b$ y $a + b$ mínimo tal que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = k.$$

Esto nos da una ecuación cuadrática en a: $x^2 - kbx + b^2 = 0$ donde a es solución, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2}{a}$$

por lo que c es un entero positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por la minimalidad de $a + b$, obtenemos que $a \leq c$ y, como $b \leq a$, tenemos que

$$b^2 \leq a^2 \leq ac = b^2$$

y por lo tanto $a = b$, lo cual implica que $k = 2$. Hemos mostrado entonces que este es el único valor entero que k puede obtener. Ahora bien, si $k = 2$ entonces $a^2+b^2 = 2ab$, de donde

$$(a - b)^2 = 0$$

por lo que las únicas parejas de enteros positivos que satisfacen el problema son aquellas de la forma (a, a), y como el problema nos pide soluciones en enteros, las parejas que satisfacen el problema son

$$(a, a), \quad (a, -a),$$

para todo entero a distinto de 0.

Ejemplo 4. Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$a \mid b^2 - b + 1 \quad \text{y} \quad b \mid a^2 - a + 1.$$

Solución. Una pareja (a, b) que cumple con el problema satisface que $\text{mcd}(a, b) = 1$, de donde

$$\text{mcd}(a, a - b) = \text{mcd}(b, a - b) = 1.$$

Las condiciones de divisibilidad del problema son equivalentes a que ab divide a ambos $b^3 - b^2 + b$ y $a^3 - a^2 + a$. Restando, obtenemos que ab divide a

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2 - a - b + 1)$$

y, por lo tanto, $ab \mid a^2 + b^2 - a - b + 1$, pues $\text{mcd}(ab, a - b) = 1$.
Ahora, fijemos un entero k y una pareja (a, b) de enteros positivos con $a \geq b$ y $a + b$ mínimo tal que

$$\frac{a^2 + b^2 - a - b + 1}{ab} = k.$$

Esto nos da una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - x(bk + 1) + (b^2 - b + 1) = 0$$

donde a es solución, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb + 1 \\ ac &= b^2 - b + 1 \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb + 1 - a = \frac{b^2 - b + 1}{a}$$

por lo que c es un entero. Además, como $a \geq 1$, $b \geq 1$ y $b^2 - b + 1 = b(b-1) + 1 \geq 1$, el entero c es positivo y la pareja (b, c) es también una solución al problema original. Por la minimalidad de $a + b$ obtenemos que $a \leq c$ y, como $b \leq a$, tenemos que

$$b^2 \leq a^2 \leq ac = b^2 - b + 1$$

de donde $b = 1$. Entonces tenemos que

$$k = \frac{a^2 - a + 1}{a} = a - 1 + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$$

de donde $a = 1$ y por lo tanto $k = 1$. Hemos mostrado entonces que este es el único valor entero posible de k. Ahora bien, si $k = 1$ entonces $a^2 + b^2 - a - b + 1 = ab$, por lo que

$$(a - b)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 = 0$$

y la única pareja (a, b) que satisface esta ecuación es $(1, 1)$, dando nuestra única solución.

Saltos a través de la IMO

Resolveremos algunos problemas involucrando técnicas pertinentes a Vieta jumping que han aparecido en la IMO o en la lista corta de la IMO. Llegó el momento de resolver aquel famoso problema de 1988 y algunas de sus revanchas en años posteriores.

Ejemplo 5. (IMO 1988/6) Sean a, b enteros positivos. Muestra que si

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

es entero, entonces es un cuadrado perfecto.

Solución. Procedemos por contradicción. Consideremos la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$$

y fijemos un entero positivo k que no es cuadrado perfecto. Supongamos que su conjunto de soluciones es no vacío y consideremos una solución (a, b) con $a + b$ mínimo y $a \geq b$. Podemos reescribir nuestra ecuación como una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - kbx + b^2 - k = 0.$$

Por construcción, a es solución a dicha ecuación y llamaremos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= kb \\ ac &= b^2 - k \end{aligned}$$

de donde

$$c = kb - a = \frac{b^2 - k}{a}$$

por lo que c es un entero. Mostraremos ahora que c es positivo. Notemos que $c \neq 0$, de lo contrario $k = b^2$ pero k no es un cuadrado perfecto por hipótesis. Si c es negativo, entonces $-kbc \geq k$ y por lo tanto

$$0 = c^2 - kbc + b^2 - k \geq c^2 + b^2 > 0$$

lo cual es una contradición, de donde c es positivo. Esto muestra que la pareja (b, c) es una solución en enteros positivos a nuestra ecuación y, por la minimalidad de $a + b$, obtenemos que $b \leq a \leq c$. Esto nos dice que

$$b^2 \leq a^2 \leq ac = b^2 - k$$

lo cual es imposible, contradiciendo la existencia de soluciones a la ecuación

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k$$

con k no cuadrado perfecto.

Ejemplo 6. (IMO 2003/2) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

es un entero positivo.

Solución. Notemos primero que el denominador de la fracción en cuestión es

$$D = b^2(2a - b) + 1$$

el cual debe ser positivo, pues el numerador lo es. Tenemos entonces dos posibilidades:

- Si $D = 1$ entonces $b = 2a$ y obtenemos la pareja $(a, 2a)$.
- Si $D > 1$ entonces $D > b^2$ de donde

  $$1 \leq \frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} < \frac{a^2}{b^2}$$

  y por lo tanto $a > b$.

Ahora, fijemos un entero positivo k y tal que el conjunto de soluciones en enteros positivos a la ecuación

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k$$

es no vacío. Nuestro objetivo es caracterizar dichas soluciones. Podemos reescribir nuestra ecuación como $a^2 - 2kab^2 + k(b^3 - 1) = 0$, dando una ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0$$

donde a es una solución, y llamemos c a la segunda solución de dicha cuadrática. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$\begin{aligned} a + c &= 2kb^2 \\ ac &= k(b^3 - 1) \end{aligned}$$

de donde

$$c = 2kb^2 - a = \frac{k(b^3 - 1)}{a}$$

por lo que c es un entero no negativo. Notemos que $c = 0$ si y solo si $b = 1$, en cuyo caso $a = 2k$ y obtenemos las soluciones $(2k, 1)$. Si $b > 1$ entonces ambos a, c son enteros positivos. Esto nos dice que fijando $b > 1$ junto con k, si una de las soluciones a nuestra cuadrática es entero positivo entonces la segunda también lo es. Como $a + c = 2kb^2$, entonces

$$\text{máx}\{a, c\} \geq kb^2$$

y sin pérdida de la generalidad asumimos que $a \geq c$. Obtenemos entonces que

$$0 < c = \frac{k(b^3 - 1)}{a} < \frac{kb^3}{kb^2} = b.$$

Habiendo probado ya que $b = 2c$ o bien $c \geq b$, concluimos que $b = 2c$. Esto nos dice que

$$a = 2kb^2 - \frac{b}{2} = \frac{2k(b^3 - 1)}{b}$$

de donde $k = \frac{b^2}{4}$ y se sigue que $a = \frac{b^4 - b}{2}$. Esto nos da las soluciones $(8c^4 - c, 2c)$. Con esto hemos caracterizado todas las posibles soluciones a nuestra ecuación cuadrática para cada b, k, y por lo tanto hemos encontrado todas las soluciones del problema, las cuales son $(2n, 1)$, $(n, 2n)$, $(8n^4 - n, 2n)$, para todo n entero positivo y estas claramente cumplen que la fracción original es un entero.

Ejemplo 7. (IMO 2007/5) Sean a, b enteros positivos. Muestra que si

$$\frac{(4a^2 - 1)^2}{4ab - 1}$$

es entero, entonces $a = b$.

Solución. Primero notemos que si la expresión del problema es un entero, entonces $4ab - 1$ divide a

$$b^2(4a^2 - 1)^2 - (4ab - 1)(4a^3b - 2ab + a^2) = (a - b)^2.$$

Probaremos que si

$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$$

es entero, entonces $k = 0$. Para esto procederemos por contradicción: fijamos k entero positivo y supongamos que su conjunto de soluciones es no vacío. Elegimos una solución (a, b) con $a + b$ mínimo y $a \geq b$. Tomando la ecuación cuadrática en a:

$$x^2 - x(2b + 4bk) + b^2 + k = 0$$

obtenemos que a es una solución a dicha cuadrática, y llamemos c a la segunda solución. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$a + c = 2b + 4bk$$
$$ac = b^2 + k$$

de donde

$$c = 2b + 4bk - a = \frac{b^2 + k}{a}$$

y así, c es un entero positivo. Luego, (b, c) es solución de nuestra ecuación con b y c enteros positivos. Por la minimalidad de $a + b$ obtenemos que $b \leq a \leq c$. Entonces

$$a^2 - b^2 \leq ac - b^2 = k = \frac{(a-b)^2}{4ab-1}$$

pero esto implica que

$$a < (a + b)(4ab - 1) \leq a - b < a$$

lo cual es imposible, contradiciendo la existencia de soluciones a la ecuación

$$\frac{(a-b)^2}{4ab-1} = k$$

para $k > 0$. De este modo, solo es posible encontrar soluciones para $k = 0$, donde es necesario que $a - b = 0$, o de manera equivalente $a = b$ como queríamos.

Ejemplo 8. (IMO, Lista Corta 2019/N8) Sean a, b enteros positivos. Muestra que

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

no es un cuadrado perfecto.

Solución. Procedemos por contradicción. Fijemos un entero positivo c tal que para algunos a, b enteros positivos tenemos

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil = c^2.$$

Usando la definición de la función techo, obtenemos

$$c^2 - a^2 - 1 < \frac{4a^2}{b} \leq c^2 - a^2$$

o de manera equivalente,

$$0 \leq c^2 b - a^2(b+4) < b.$$

Consideramos la sustitución $x = c + a$ y $y = c - a$ de modo que $c = \frac{x+y}{2}$ y $a = \frac{x-y}{2}$. Entonces nuestra desigualdad anterior puede reescribirse como

$$0 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 b - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 (b+4) < b$$

o de manera equivalente, como

$$0 \leq -x^2 - y^2 + xy(b+2) < b.$$

Llamaremos $d = xy(b+2) - x^2 - y^2$, de modo que x, y satisfacen la ecuación cuadrática

$$x^2 + xy(b+2) + y^2 + d = 0$$

donde adicionalmente sabemos que $0 \leq d < b$ y por construcción $x > y$. Fijando b, d, y obtenemos una ecuación cuadrática cuyas soluciones son x, z. Usando las fórmulas de Vieta tenemos que

$$x + z = y(b+2)$$
$$xz = y^2 + d$$

de donde

$$z = y(b+2) - x = \frac{y^2 + d}{x}$$

de donde z es un entero positivo. Supongamos que fijando únicamente b, d tomamos inicialmente una pareja (x, y) con $x > y$ que satisface la ecuación cuadrática con suma mínima $x + y$. Como la pareja (y, z) también satisface nuestra ecuación cuadrática, por la minimalidad de $x + y$ tenemos que $x \leq z$, de donde

$$\frac{y^2 + b}{y} > \frac{y^2 + d}{x} = z \geq \frac{y(b+2)}{2}$$

lo cual implica que $2 > y^2$ y, por lo tanto, $y = 1$. Esto implica que nuestra ecuación cuadrática original es de la forma $x^2 - x(b+2) + 1 + d = 0$ o de manera equivalente, $d + 1 = x(b + 2 - x) > 0$ pero para valores enteros de x, el menor valor positivo de $x(b + 2 - x)$ es $b + 1$, que es mayor que $d + 1$ ya que $d < b$ por hipótesis. Esto contradice la existencia de soluciones a nuestra ecuación cuadrática, y por lo tanto al problema original, terminando nuestra prueba por contradicción.

Ejercicios

1) (Brilliant [3], Ariel Gershon). Sean a y b enteros positivos tales que $ab - 1$ divide a $a^2 + b^2$. Muestra que
$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5.$$

2) (Brilliant [3]). Encuentra todas las parejas (n, m) de enteros positivos con $1 \leq n < m \leq 100$ tales que n divide a $m^2 - 1$ y m divide a $n^2 - 1$.

3) (Crux Mathematicorum [4]). Sean a, b y c enteros positivos tales que $0 < a^2 + b^2 - abc < c$. Muestra que $a^2 + b^2 - abc$ es un cuadrado perfecto.

4) (Vietnam, 2002). Encuentra todos los enteros positivos n para los cuales la ecuación
$$(a + b + c + d)^2 = n^2 abcd$$
tiene una solución en enteros positivos.

5) (Putnam, 1993). Muestra que para cada número real N, la ecuación
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + bcd + cda + dab$$
tiene solución en enteros positivos, todos mayores que N.

6) (Vandervelde, 2013 [5]). Sean a, b, c enteros positivos tales que $abc + 1$ divide a $a^2 + b^2 + c^2$. Muestra que
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc + 1}$$
puede escribirse como la suma de dos cuadrados perfectos positivos.

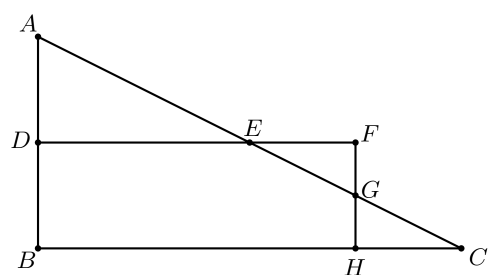
Bibliografía

1. Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1999.
2. Yimin Ge, *The Method of Vieta Jumping*, `https://blogs.sch.gr/sotskot/files/2011/01/Vieta_Jumping.pdf`.
3. Brilliant, *Vieta Root Jumping*, `https://brilliant.org/wiki/vieta-root-jumping/`
4. Shirali, S., Problema 1420. *Crux Mathematicorum*, Volumen 15, Número 2, Febrero de 1989. `https://cms.math.ca/wp-content/uploads/crux-pdfs/Crux_v15n02_Feb.pdf`
5. Vandervelde, S. *A Rational Function Whose Integral Values Are Sums of Two Squares*, `http://myslu.stlawu.edu/~svanderv/sumsquares.pdf`

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2021. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

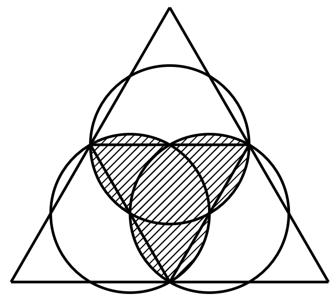
Problema 1. En la siguiente figura, $BDFH$ es un rectángulo. Si las áreas de los triángulos ADE, EFG y GHC son 24, 6 y 6, respectivamente, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



Problema 2. Se tienen 100 focos apagados acomodados en una fila y hay un botón en frente. Al presionar el botón, todos los focos se encienden. Al presionarlo de nuevo, se apagan los focos en posiciones pares. Cuando se vuelve a presionar el botón, cambian de estado los focos que están en una posición múltiplo de 3. En general, al presionar el botón por k-ésima ocasión, los focos en posiciones divisibles por k cambian de estado. Si el botón se oprime 100 veces, ¿cuántos focos quedaron encendidos al final?

Problema 3. ¿Cuántas progresiones aritméticas de diferencia común un entero cumplen que contienen a 1 y a 2021?

Problema 4. Se tiene un triángulo equilátero de lado 4 y se trazan líneas paralelas a los lados que pasan por los puntos medios, como se muestra en la figura.



Luego se trazan círculos cuyos diámetros son los segmentos que unen los puntos medios de cada lado. ¿Cuánto vale el área sombreada?

Problema 5. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ enteros que no son múltiplos de 5 tales que cada uno de los números

$$a_1^{10} + a_2,\ a_2^{10} + a_3,\ a_3^{10} + a_4,\ \ldots,\ a_9^{10} + a_{10},\ a_{10}^{10} + a_1,$$

es múltiplo de 5. Demuestra que cada uno de los números $a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_{10} + 1$, es múltiplo de 5.

Problema 6. Sean a y b números reales positivos tales que $\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1$. Demuestra que

$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = a - b.$$

Problema 7. Sea BCD un triángulo acutángulo isósceles con $BC = BD$. Sea P el pie de la perpendicular desde C hasta BD. Prolonguemos CP hasta intersecar al circuncírculo del triángulo BCD en A. La recta AD corta al circuncírculo del triángulo ABP en A y E. La recta EP corta a CD en M. Prueba que M es el punto medio de CD.

Problema 8. ¿Cuántos triángulos isósceles se pueden formar con los vértices de un polígono regular de 21 lados?

Problema 9. Sean p_1, p_2 y p_3 tres números primos tales que $p_1 < p_2 < p_3$, $2p_2 = p_3 - 25$ y $p_1p_3 = 3p_1p_2 + 16$. Determina los valores de p_1, p_2 y p_3.

Problema 10. ¿Cuántos números menores que 100000 tienen como dígito más grande un 7 y como segundo dígito más grande un 2? Ejemplos: 2007 cumple, 2777 cumple, 7777 no cumple, 6121 no cumple, 22107 cumple.

Problema 11. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Sea

$$m = \min\left\{a_1 + \frac{1}{a_2},\ a_2 + \frac{1}{a_3},\ \ldots,\ a_{n-1} + \frac{1}{a_n},\ a_n + \frac{1}{a_1}\right\}.$$

Demuestra que

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq m.$$

Problema 12. Un número "chida" es un número divisible por la suma de los cuadrados de sus dígitos. Ejemplo, 2010 es chida porque $2^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 5$ y 5 divide a 2010. Demuestra que existen infinitos números n tales que n y $n+1$ son chidas.

Problema 13. Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en una circunferencia ω con centro O. Un punto variable X se escoge en el arco menor $\widehat{AB}$ de ω y los segmentos CX y AB se cortan en D. Denotemos por O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADX y BDX, respectivamente. Determina todos los puntos X para los cuales se minimiza el área del triángulo OO_1O_2.

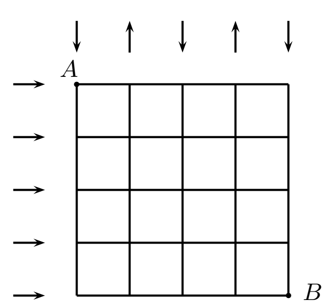
Problema 14. Sea $a_0 > 0$ un número real y sea

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1 + 2020 \cdot a_{n-1}^2}}$$

para cada entero positivo n. Demuestra que $a_{2020} < \dfrac{1}{2020}$.

Problema 15. En cada casilla de un tablero de 8×8 se encuentra un caballero o un mentiroso. Como es costumbre, los caballeros siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten. Supón que todas las personas en el tablero dicen la siguiente afirmación: "La cantidad de mentirosos en mi columna es estrictamente mayor que la cantidad de mentirosos en mi fila". Determina cuántas configuraciones posibles son compatibles con estas afirmaciones.

Problema 16. Un pueblo tiene 5 calles verticales y 5 calles horizontales. En las calles horizontales se puede mover a la derecha, pero no a la izquierda. En la primera calle vertical se puede mover solo hacia abajo, en la siguiente calle solo hacia arriba, en la tercera solo hacia abajo, en la cuarta solo hacia arriba y en la quinta solo hacia abajo. Si Héctor está en el punto A y quiere llegar al punto B, ¿de cuántas maneras puede hacerlo? (Héctor debe seguir el sentido de las calles).



Problema 17. Consideremos $n \geq 3$ números reales positivos distintos. Demuestra que hay a lo más $n-2$ potencias enteras de 3 distintas que pueden ser expresadas como suma de tres elementos distintos entre estos n números.

Problema 18. En cierto bosque habitan varios enanos, cada uno de los cuales tiene tres sombreros numerados con alguno de los números $1, 2, \ldots, 28$. Los tres sombreros de un mismo enano tienen números distintos. Cada día se celebran tres festivales en este bosque. En el primer festival, cada enano usa el sombrero con el número menor, en el segundo, usa el sombrero con el segundo menor número y, en el último, usa el que tiene el número mayor. Después de esto, se dan cuenta de que cualesquiera dos enanos usaron sombreros con el mismo número en a lo más un festival. Determina la mayor cantidad posible de enanos.

Problema 19. Seis circunferencias tienen un punto en común. Prueba que una de ellas contiene en su interior o frontera el centro de otra circunferencia.

Problema 20. Se define una sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ por $a_1 = a$, donde a es cualquier número entero y, para cada entero positivo n, $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$. Demuestra que a_{n+1} y $2n + 1$ son primos relativos para cada entero positivo n.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Es claro que los triángulos ADE, GFE, GHC y ABC son todos semejantes entre sí. Si $[X]$ representa el área de la figura X, sabemos que $\left(\frac{AD}{FG}\right)^2 = \frac{[ADE]}{[GFE]} = \frac{24}{6} = 4$, por lo que $AD = 2FG$. Con un razonamiento similar, podemos ver que $FG = GH$. Debido a que $BDFH$ es un rectángulo, entonces $AB = AD + DB = AD + FH = AD + FG + GH = AD + 2FG = 2AD$. Luego, $\frac{[ABC]}{[ADE]} = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = 4$ y, por lo tanto, $[ABC] = 4[ADE] = 4(24) = 96$.

Solución del problema 2. Notemos que un foco en la posición n cambia de estado cuando se presiona el botón por k-ésima vez si y solo si k divide a n. Como todos inician apagados y se desea saber cuáles terminan encendidos, se ocupa que la posición en la que se encuentra el foco tenga una cantidad impar de divisores positivos, lo cual indica que este debe ser un cuadrado perfecto. Como solo hay 10 cuadrados perfectos entre 1 y 100, se concluye que exactamente 10 focos quedarán encendidos al final.

Solución del problema 3. Sea r la diferencia común de la progresión. Dado que r es un entero y es igual a la diferencia entre cualesquiera dos términos consecutivos de la progresión, tenemos que r divide a $2021 - 1 = 2020$. Observemos que por cada divisor (positivo o negativo) de 2020, hay exactamente una progresión aritmética que contiene a 1 y 2021, ya sea que aparezca primero 1 (cuando $r > 0$) o que aparezca primero 2021 (cuando $r < 0$). Como $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, se sigue que hay exactamente $2(2+1)(1+1)(1+1) = 24$ progresiones aritméticas que satisfacen el problema.

Solución del problema 4. El área que buscamos consiste de 4 triángulos equiláteros de lado 1 junto con 6 gajos que se forman de tomar una sexta parte del círculo de radio 1 y quitándole un triángulo equilátero. El círculo de radio 1 tiene área π y un triángulo equilátero de lado 1 tiene área $\sqrt{3}/4$. Entonces, tenemos que el área buscada es igual a

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 6\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Solución del problema 5. Como a_i no es múltiplo de 5, entonces por el teorema pequeño de Fermat, $a_i^4 \equiv 1 \pmod 5$. Entonces, $a_i^{10} \equiv a_i^2 \pmod 5$. Luego, $a_1^{10} + a_2 \equiv a_1^2 + a_2 \pmod 5$. Como los cuadrados módulo 5 son congruentes con 0, 1 o 4, tenemos que $a_2 \equiv -1 \pmod 5$ o $a_2 \equiv -4 \pmod 5$. Como $(-1)^2 \equiv (-4)^2 \equiv 1 \pmod 5$, entonces

$$a_2^{10} + a_3 \equiv a_2^2 + a_3 \equiv 1 + a_3 \pmod 5.$$

Luego, $a_3 \equiv -1 \pmod 5$. Pero entonces $a_4 \equiv -(a_3)^2 \equiv -1 \pmod 5$. Continuando de esta forma, obtenemos que $a_4 \equiv -1, a_5 \equiv -1 \pmod 5), \dots, a_1 \equiv -1, a_2 \equiv -1 \pmod 5$. Por lo tanto, $a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_{10} + 1$ son todos múltiplos de 5.

Solución del problema 6. La condición dada es equivalente a $a(b+1) + b(a+1) = (a+1)(b+1)$, esto es, $ab = 1$. Luego, $b = \frac{1}{a}$. Se sigue que

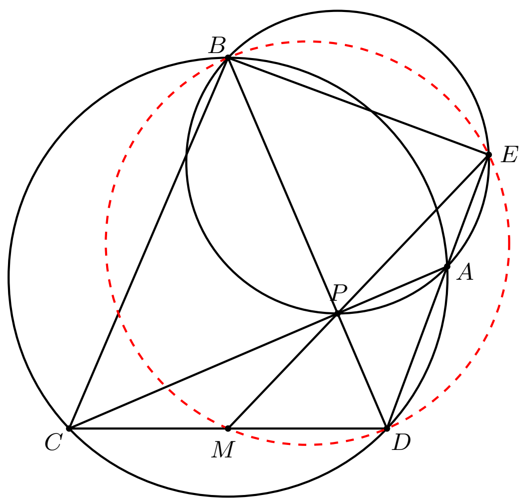
$$\frac{a}{b^2+1} - \frac{b}{a^2+1} = \frac{a^3}{a^2+1} - \frac{1}{a(a^2+1)} = \frac{a^4-1}{a(a^2+1)} = \frac{a^2-1}{a} = a - \frac{1}{a} = a - b,$$

como se quería.

Solución del problema 7. Como los cuadriláteros $ABCD$ y $APBE$ son cíclicos, tenemos que

$$\angle BDM = \angle BDC = \angle BAC = \angle BAP = \angle BEP = \angle BEM,$$

lo que indica que el cuadrilátero $BEDM$ es cíclico. Además, $\angle BEA = 180^\circ - \angle APB = 90^\circ$ y, por consiguiente, $\angle DMB = 180^\circ - \angle BED = 90^\circ$, es decir, BM es perpendicular a CD. Como $BC = BD$, se sigue que M debe ser el punto medio de CD, como se quería.



Solución del problema 8. Coloquemos el 21-ágono en un círculo. Fijemos un vértice A y tracemos un diámetro que pase por ese vértice. Quedan 10 vértices de cada lado del diámetro. Escogemos un vértice B de un lado. Para que se forme un triángulo isósceles con A y B de tal forma que A sea el vértice que comparten los dos lados iguales del triángulo, necesitamos escoger el vértice C en la reflexión de B con respecto al diámetro. Entonces, con cada vértice A podemos formar 10 triángulos isósceles. De allí tenemos $21 \cdot 10 = 210$ triángulos isósceles al cambiar el vértice A. Sin embargo, al hacer esto, contamos algunos triángulos más de una vez. En el caso de que el triángulo ABC es equilátero, entonces cuando A está en la posición de B o C se genera el mismo triángulo. Hay 7 triángulos equiláteros que se pueden formar con vértices de un 21-ágono regular. En la cuenta de 210 triángulos isósceles, contamos a los equiláteros 3 veces, así que hay que restarlos dos veces. Por lo tanto, la respuesta es $210 - 2 \cdot 7 = 196$.

Solución del problema 9. Tenemos que $p_1 \mid p_1p_3$ y $p_1 \mid 3p_1p_2$, por lo que $p_1 \mid 16$. Entonces, $p_1 = 2$. Luego, tenemos el sistema de ecuaciones $2p_2 = p_3 - 25$ y $2p_3 = 6p_2 + 16$, esto es, $p_3 - 2p_2 = 25$ y $p_3 - 3p_2 = 8$. Restando las dos ecuaciones, obtenemos que $p_2 = 17$ y, en consecuencia, $p_3 = 59$.

Solución del problema 10. Podemos asumir que el número tiene 5 dígitos usando dígitos 0 a la izquierda si son necesarios, ya que los dígitos 0 no afectan cuál es el dígito más grande o cuál es el segundo dígito más grande. En general, tenemos 5 lugares dónde poner los sietes. Para el resto, dividimos en casos dependiendo de cuántos dígitos 2 aparecen en el número.

- *Hay exactamente un siete.* Hay 5 maneras de colocar el siete. Si hay cuatro 2's, entonces hay una manera de colocarlos. Si hay tres 2's, tenemos 4 maneras de escoger dónde ponerlos y 2 opciones (0 o 1) para el dígito restante. Si hay dos 2's, hay $\binom{4}{2} = 6$ maneras de escoger dónde poner esos dígitos y tenemos 2^2 opciones para escoger 0 o 1 en cada uno de los dígitos restantes. Si hay un 2, entonces tenemos 4 maneras de escoger dónde ponerlo y tenemos 2^3 maneras de escoger 0 o 1 para cada uno de los 3 dígitos restantes. En total son $5(1+4\cdot 2+6\cdot 4+4\cdot 8) = 325$.

- *Hay exactamente dos sietes.* Hay $\binom{5}{2} = 10$ formas de colocar los dos sietes. Si hay un 2, hay 3 posiciones donde se puede colocar y 2^2 opciones para escoger 0 o 1 en cada uno de los dígitos restantes. Si hay dos 2's, hay $\binom{3}{2} = 3$ formas de colocarlos y 2 opciones para el dígito restante. Si hay tres 2's, solo hay una forma de colocarlos. Se sigue que en este caso hay $10(1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4) = 190$ números.
- *Hay exactamente tres sietes.* Hay $\binom{5}{3} = 10$ formas de colocar los tres sietes. Si hay un 2, hay 2 lugares donde se puede colocar y 2 opciones para el dígito restante. Si hay dos 2's, estos deben ocupar las dos posiciones restantes. Así, hay en total $10(1 + 2 \cdot 2) = 50$ números.
- *Hay exactamente cuatro sietes.* Hay $\binom{5}{4} = 5$ formas de colocar los cuatro sietes. El dígito restante debe ser un 2. En este caso hay solamente 5 números que cumplen.

Por lo tanto, en total hay $325 + 190 + 50 + 5 = 570$ números que cumplen.

Solución alternativa. Podemos contar de la siguiente manera. Supongamos que hay k sietes en el número, los cuales se pueden colocar de $\binom{5}{k}$ maneras. Los otros $5-k$ dígitos deben cumplir que son 0, 1 o 2 y que aparece al menos un 2. Hay 3^{5-k} posibilidades y 2^{5-k} de ellas no tienen 2's, entonces en total hay $3^{5-k} - 2^{5-k}$ maneras de escoger esos $5 - k$ dígitos. Como k solo puede valer 1, 2, 3 o 4, concluimos que la respuesta es

$$5\left(3^4 - 2^4\right) + 10\left(3^3 - 2^3\right) + 10\left(3^2 - 2^2\right) + 5(3 - 2) = 570.$$

Solución del problema 11. Sea g la media geométrica de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, esto es, $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Demostraremos que existe un índice j tal que $a_j \leq g$ y $a_{j+1} \geq g$ (considerando $j + 1$ módulo n). En efecto, consideremos un índice i tal que $a_i \leq g$ (el cual debe existir por ser g la media geométrica de los n números). Si $a_{i+1} \geq g$, no hay más qué hacer. Si no, entonces $a_{i+1} < g$ y se hace el mismo procedimiento para $i + 1$. Eventualmente, existe un índice j tal que $a_j \geq g$ (por ser g la media geométrica de los n números). Por lo tanto, concluimos que

$$m \leq a_j + \frac{1}{a_{j+1}} \leq g + \frac{1}{g},$$

como se quería.

Solución del problema 12. Consideremos el número

$$n_k = 1\underbrace{0\cdots0}_{k}10,$$

para algún entero $k \geq 0$. Entonces, la suma de los cuadrados de los dígitos de n_k es 2 y el número es múltiplo de 2 porque acaba en 0. Por lo tanto, n_k es chida. Ahora,

$$n_k + 1 = 1\underbrace{0\cdots 0}_{k}11.$$

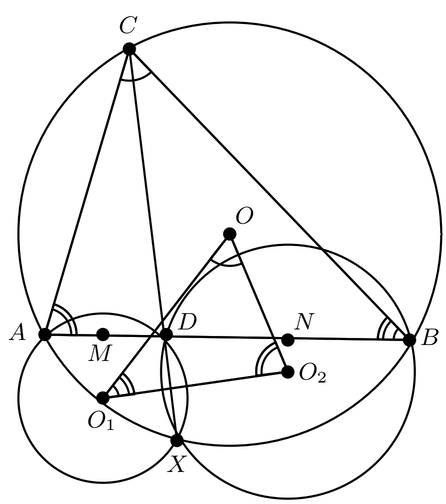
Como el número consiste de tres 1's y muchos 0's, entonces la suma de los cuadrados de los dígitos de $n_k + 1$ es 3. Sin embargo, la suma de los dígitos de $n_k + 1$ también es 3, así que el número es múltiplo de 3. Por lo tanto, $n_k + 1$ es chida.
Entonces, para cualquier entero $k \geq 0$, n_k y $n_k + 1$ son chidas, por lo que hay infinitos enteros n tales que n y $n + 1$ son chidas.

Solución del problema 13. La respuesta es el punto X tal que XC es perpendicular a AB.
Como el eje radical de dos circunferencias no concéntricas es perpendicular a la recta que une a sus centros, tenemos que $XA \perp OO_1$, $XB \perp OO_2$ y $XD \perp O_1O_2$. Denotando por $\angle(l, m)$ el ángulo, en el sentido contrario a las manecillas del reloj, que hay que rotar a l para obtener una recta paralela a m, lo anterior significa que

$$\angle(\overline{O_1O_2}, \overline{O_1O}) = \angle(\overline{XD}, \overline{XA}) = \angle CXA = \angle CBA,$$

$$\angle(\overline{O_2O}, \overline{O_2O_1}) = \angle(\overline{XB}, \overline{XD}) = \angle BXC = \angle BAC,$$

de donde se sigue que los triángulos OO_1O_2 y CBA son semejantes. Luego, todos los triángulos OO_1O_2 posibles son semejantes entre sí, por lo que basta minimizar O_1O_2. Sean M y N los puntos medios de AD y BD, respectivamente.



Notemos que O_1M y O_2N son perpendiculares a MN, por lo que $O_1O_2 \geq MN$, con la igualdad si y solo si O_1O_2NM es un rectángulo. En este caso, O_1O_2 y MN

son paralelas y, como O_1O_2 y XD son perpendiculares, resulta que XC y AB son perpendiculares.

Solución del problema 14. Demostraremos por inducción en n que

$$0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2020n}}$$

para todo entero $n \geq 1$.
Como $a_0 > 0$, tenemos que $a_1 = \frac{a_0}{\sqrt{1+2020a_0^2}} > 0$ y $a_1 = \frac{a_0}{\sqrt{1+2020a_0^2}} < \frac{a_0}{\sqrt{2020a_0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2020}}$.
Si $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2020n}}$, entonces $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+2020a_n^2}} > 0$ y

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+2020a_n^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+2020}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2020n}}\right)^2}+2020}} = \frac{1}{\sqrt{2020(n+1)}},$$

lo que concluye la inducción.
En particular, tenemos que $a_{2020} < \frac{1}{\sqrt{2020\cdot 2020}} = \frac{1}{2020}$.

Solución del problema 15. Demostraremos primero que todas las columnas tienen la misma configuración de personas. Supongamos que este no es el caso y sean C_1 y C_2 dos columnas con configuraciones distintas. Sean c_1 y c_2 las cantidades de mentirosos en dichas columnas y supongamos sin pérdida de generalidad que $c_1 \geq c_2$. Luego, existe un mentiroso en C_1 en la misma posición que un caballero en C_2, y supongamos que esto pasa en la fila R con r mentirosos. Entonces, por la afirmación, tenemos que $c_1 \leq r < c_2$, lo que es una contradicción, ya que $c_1 \geq c_2$. Concluimos que nuestra suposición es falsa y, por lo tanto, todas las columnas tienen la misma configuración.
Ahora, es claro que si todos en el tablero son caballeros, la configuración no es compatible, pues habría 0 mentirosos en cada fila y en cada columna. Con esto vemos que además debe haber por lo menos un mentiroso.
De manera recíproca, si todas las columnas tienen la misma configuración, tenemos por lo menos un mentiroso, entonces la configuración es compatible. En efecto, si una persona en una fila y una columna con r y c mentirosos, respectivamente, es un mentiroso, entonces $r = n \geq c$ y, por lo tanto, puede decir la afirmación; si es un caballero, entonces $r = 0 < c$ y, por lo tanto, puede decir la afirmación.
Se sigue que podemos escoger libremente la primera columna, con la excepción de ser todos caballeros y con ello queda determinado el acomodo, dando un total de $2^8 - 1 = 255$ posibilidades.

Solución del problema 16. Denotemos a los puntos en el tablero usando coordenadas. Las 5 calles horizontales serán numeradas $1, 2, 3, 4, 5$ de arriba hacia abajo y las calles verticales $1, 2, 3, 4, 5$ de izquierda a derecha. Sea $C = (a, b)$ un punto en la calle vertical a y calle horizontal b. Calcularemos el número de caminos n_C de A a C. Si $a = 1$, entonces $n_C = 1$ ya que la única manera de llegar es moviéndose hacia abajo. Si $C = (2, 5)$, entonces también $n_C = 1$. Ahora, para $a = 2$ y $b < 5$, tenemos la siguiente recurrencia:

$$n_{(2,b)} = n_{(1,b)} + n_{(2,b+1)},$$

ya que podemos llegar a $(2, b)$ de $(2, b + 1)$ moviéndonos hacia arriba o de $(1, b)$ moviéndonos a la derecha. Por lo tanto, podemos ver que $n_{(2,4)} = 1 + 1 = 2$, $n_{(2,3)} = 1 + 2 = 3$, $n_{(2,2)} = 1 + 3 = 4$, $n_{(2,1)} = 1 + 4 = 5$. Para llegar a $(3, 1)$, solo podemos llegar de $(2, 1)$ ya que la calle vertical 3 es de sentido hacia abajo. Por lo tanto, $n_{(3,1)} = 5$. Ahora, usando que para llegar a $(3, b)$ con $b > 1$ necesitamos llegar con un paso derecho de $(2, b)$ o con un paso hacia abajo de $(3, b-1)$, entonces tenemos que

$$n_{(3,b)} = n_{(2,b)} + n_{(3,b-1)}.$$

De allí podemos calcular que $n_{(3,2)} = 4 + 5 = 9$, $n_{(3,3)} = 3 + 9 = 12$, $n_{(3,4)} = 2 + 12 = 14$ y $n_{(3,5)} = 1 + 14 = 15$. Como la cuarta calle vertical tiene sentido hacia arriba, tenemos que $n_{(4,5)} = n_{(3,5)} = 15$. Además, tenemos la recurrencia

$$n_{(4,b)} = n_{(4,b+1)} + n_{(3,b)}.$$

Por lo tanto, $n_{(4,4)} = 14 + 15 = 29$, $n_{(4,3)} = 12 + 29 = 41$, $n_{(4,2)} = 9 + 41 = 50$ y $n_{(4,1)} = 5 + 50 = 55$. Finalmente, llegamos a la última calle vertical. Tenemos que $n_{(5,1)} = n_{(4,1)} = 55$ y para $b > 1$,

$$n_{(5,b)} = n_{(4,b)} + n_{(5,b-1)}.$$

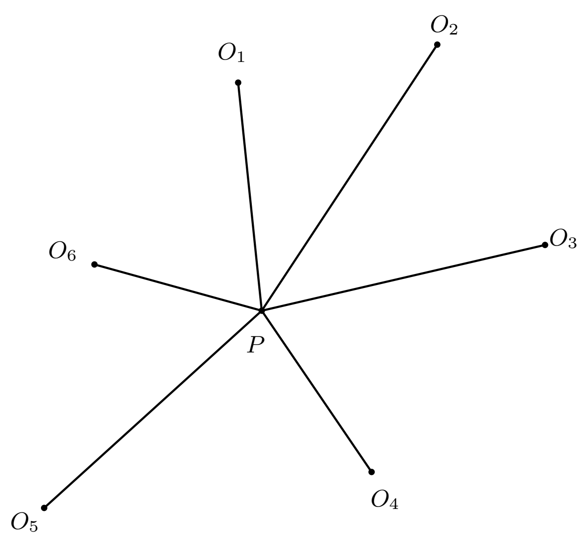
Usando esta recurrencia obtenemos que $n_{(5,2)} = 50 + 55 = 105$, $n_{(5,3)} = 41 + 105 = 146$, $n_{(5,4)} = 29 + 146 = 175$ y $n_{(5,5)} = 15 + 175 = 190$.
Por lo tanto, el número de caminos de A a B es 190.

Solución del problema 17. Consideremos una terna (a, b, c) de estos números, con $a < b < c$ y $a + b + c = 3^k$. Sea 3^ℓ la menor potencia entera de 3 que es mayor que c. Observemos que $c < a + b + c = 3^k$ y $3c > a + b + c = 3^k$ implican que $c > 3^{k-1}$. Entonces, $\ell = k$. De esta forma, nuestras posibles potencias de 3 que podemos expresar como suma de tres números distintos, son uno de los n posibles valores de 3^ℓ asignados a cada uno de los n elementos. Sin embargo, los dos números más chicos de este conjunto no pueden ser el número mayor en ninguna terna, por lo que concluimos que podemos considerar únicamente a lo más $n - 2$ valores de ℓ asignados a los $n - 2$ números más grandes. Se sigue el resultado.

Solución del problema 18. La respuesta es 182. Para el ejemplo, consideremos cada posible terna de números (a, b, c) en el rango especificado con $a < b < c$ y $a + b = c$, y hagamos que un enano utilice sombreros con esos números. Es claro que no hay dos enanos con dos sombreros en común; por ejemplo, si dos enanos compartieran los sombreros a y b, entonces también deberían compartir c por la condición $a + b = c$, lo que es una contradicción.
Ahora contemos la cantidad de tales ternas. Si el primer número es n, el segundo puede ser cualquiera entre $n + 1$ y $28 - n$, dando $28 - 2n$ posibilidades. Luego, hay $26 + 24 + \cdots + 2 = 182$ posibilidades y, por lo tanto, 182 es cota inferior. A continuación

mostramos que también es cota superior.
Consideremos crear una cota superior para el número de enanos cuyo sombrero con el segundo menor número es el mismo, digamos n. Entonces hay a lo más $n-1$ posibles enanos, puesto que el número menor debe ser distinto para todos los enanos con el mismo número de en medio. Similarlmente, debe haber a lo más $28-n$ posibles enanos, puesto que el número más grande debe ser distinto para todos los enanos con el mismo número de en medio. Por lo tanto, hay a lo más $\text{mín}\{n-1, 28-n\}$ enanos que tienen todos cierto número de en medio igual a n.
Es claro que estos números de en medio deben estar entre 2 y 27, inclusive, así que sumando las posibilidades en este intervalo, vemos que hay a lo más $1+2+3+\cdots+12+13+13+12+\cdots+3+2+1 = 2\left(\frac{13\cdot 14}{2}\right) = 182$ enanos. Se sigue el resultado.

Solución del problema 19. Sea P el punto en común de las seis circunferencias. Si dos de los centros de las seis circunferencias, digamos A y B, cumplen que A, B y P son colineales en ese orden, entonces B está en el interior del radio AP de la circunferencia de centro A, por lo que se cumple lo buscado. Luego, supongamos que no sucede lo dicho anteriormente. Etiquetemos a los centros de las circunferencias de acuerdo al orden que aparecen respecto a P como se muestra en la figura.



Notemos que $\angle O_1PO_2+\angle O_2PO_3+\angle O_3PO_4+\angle O_4PO_5+\angle O_5PO_6+\angle O_6PO_1 = 360°$. Esto significa que alguno de los seis ángulos debe ser menor o igual a $\frac{360°}{6} = 60°$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que ese ángulo es $\angle O_1PO_2$. Ahora, alguno de los segmentos O_1P y O_2P debe ser más grande. De nuevo, sin pérdida de generalidad, supongamos que O_2P es el más grande, por lo que $O_2P \geq O_1P$. Como los ángulos dentro del triángulo O_1PO_2 deben sumar $180°$, alguno de ellos debe ser mayor o igual que $60°$, a decir el mayor de los ángulos. Ese puede estar en el vértice P o en el vértice O_1 (que es el ángulo opuesto a O_2P). Si lo está en P, entonces todos los ángulos son iguales a 60° y, por lo tanto, O_1 está sobre la circunferencia de centro O_2. Si está en O_1, entonces $O_2P \geq O_1O_2$ (pues el ángulo más grande abre el lado O_2P), lo que indica que O_2 está dentro o sobre la circunferencia de centro O_2, como se quería.

Solución del problema 20. Consideremos la función $f(x) = x^2 - x - 1$. Supongamos, por el contrario, que existe un primo p tal que $p \mid a_{n+1}$ y $p \mid 2n + 1$ para algún entero positivo n.
Sea m el menor entero mayor que 1 tal que $p \mid a_m$. Entonces, $a_{m+1} \equiv f(0) = -1 \pmod p$, $a_{m+2} \equiv f(-1)^2 = 1 \pmod p$ y $a_{m+3} \equiv f(1)^2 = -1 \pmod p$. Si $a_r \equiv 2 \pmod p$ para algún entero positivo r, entonces $a_{r+1} \equiv f(2) = 1 \pmod p$.
Luego, $m = n + 1$, pues si $m < n + 1$ y $a_m \equiv 0 \pmod p$, la sucesión a_n módulo p se empezaría a ciclar entre -1 y 1. Además, podemos inferir también lo siguiente:

I) $a_i \not\equiv 0, \pm 1, 2 \pmod p$ para todo i, donde $1 \leq i \leq n$, pues en caso contrario por el párrafo anterior la sucesión vista módulo p se empezaría a ciclar entre -1 y 1.

II) $a_i \not\equiv a_j \pmod p$ para cualquier pareja de índices (i, j) donde $1 \leq i < j \leq n + 1$, pues en caso contrario, la sucesión sería eventualmente periódica sin que el periodo contenga un número divisible por p.

III) $|\{a_k \bmod p : k \in \mathbb{N}\}| \geq n + 1 \geq (p + 1)/2$, donde $|\{a_k \bmod p : k \in \mathbb{N}\}|$ es la cantidad de residuos distintos módulo p en la sucesión.

Una sencilla sustitución nos muestra que $f(i) \equiv f(1 - i) \pmod p$ para todo entero positivo i.
Sean $\{a_k \bmod p : k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de los residuos módulo p de los términos de la sucesión, $\{a_1 \bmod p\}$ el conjunto que contiene al residuo de a_1 módulo p y $\{f(x) \bmod p : x \in \mathbb{N}, x \not\equiv 0, \pm 1, 2 \pmod p\}$ el conjunto de los números que son residuos módulo p para algún entero x distinto de $0, \pm 1$ y 2 módulo p. Entonces, por I) tenemos que $\{a_k \bmod p : k \in \mathbb{N}\}$ está contenido en $\{a_1 \bmod p\} \cup \{f(x) \bmod p : x \in \mathbb{N}, x \not\equiv 0, \pm 1, 2 \pmod p\}$. El primer conjunto tiene un elemento, mientras que por $f(i) \equiv f(1 - i) \pmod p$ podemos concluir que el segundo conjunto tiene a lo más $(p - 3)/2$ elementos.
Por lo tanto, llegamos a que el conjunto $\{a_k \bmod p : k \in \mathbb{N}\}$ tiene a lo más $1 + (p - 3)/2 = (p - 1)/2$ elementos, lo que contradice a III). Concluimos que nuestra suposición inicial es falsa y así, a_{n+1} y $2n + 1$ son primos relativos, como queríamos.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2021 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Demuestra que $(n+1)^2 > 3\sqrt[n]{(n!)^2}$ para todo entero positivo n.

Problema 2. Determina todos los enteros positivos n para los cuales existe un entero positivo d con la propiedad de que n es divisible por d y $n^2 + d^2$ es divisible por $d^2n + 1$.

Problema 3. Sean a y b números reales que satisfacen

$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1,$$
$$b^3 - 3b^2 + 5b = 5.$$

Determina el valor de $a + b$.

Problema 4. Nueve celdas de un tablero de 10×10 están infectadas. Dos celdas son vecinas si tienen un lado en común. En cada minuto, las celdas que tengan al menos dos vecinos infectados se vuelven infectadas. ¿Puede llegar a suceder que todas las celdas del tablero estén infectadas?

Problema 5. Sean $0 < x < y < z < p$ números enteros con p número primo. Si x^3, y^3 y z^3 dejan el mismo residuo al dividirse entre p, demuestra que $x + y + z$ divide a $x^2 + y^2 + z^2$.

Problema 6. En el cuadrilátero convexo $ABCD$, tenemos que $AB = AD, CB = CD$ y $\angle ABC = 90°$. Los puntos E y F están en AB y AD, respectivamente y, los puntos P y Q, están en EF (P se encuentra entre E y Q), los cuales satisfacen la relación $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$. Los puntos X y Y están en CP y CQ, respectivamente, de tal forma que BX es perpendicular a CP y DY es perpendicular a CQ. Demuestra que X, P, Q, Y son concíclicos.

Problema 7. Definimos la sucesión $q_1, q_2, \ldots$ de la siguiente manera: $q_1 = 2$ y, para $n > 1$, q_n es el factor primo más grande de $1+q_1q_2 \cdots q_{n-1}$. Demuestra que el número 5 no está en la sucesión.

Problema 8. Sea n un entero positivo. Hay n carros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y un estacionamiento con n lugares numerados del 1 al n en orden. Cada carro C_i quiere estacionarse en su lugar preferido a_i. Los carros llegan al estacionamiento en orden. Si el lugar preferido de un carro está ocupado, entonces se estaciona en el primer lugar vacío adelante. Si no hay ningún lugar vacío, entonces no se estaciona. ¿Para cuántas n-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se pueden estacionar todos los carros?
Ejemplo: Con la tupla $(2, 3, 3, 1)$ se estacionan 4 carros: $C_1 \to 2, C_2 \to 3, C_3 \to 4, C_4 \to 1$; mientras que con la tupla $(4, 3, 3, 1)$ no se estacionan los cuatro carros, pues $C_1 \to 4, C_2 \to 3$ y C_3 no se estaciona.

Problema 9. Para un entero positivo n, sea $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ el n-ésimo número triangular. Demuestra que hay una infinidad de ternas de números triangulares consecutivos que suman otro número triangular. Por ejemplo, $T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10 = T_4$, esto es, la suma de los primeros tres números triangulares es igual al cuarto número triangular.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos ℓ, m y n tales que

$$5^\ell \cdot 43^m + 1 = n^3.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2020 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2020. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a: Guillermo Courtade Morales, José Hernández Santiago, Titu Zvonaru y Luis Francisco Medina Quintero, por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2020, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Determina todos los enteros x, y tales que $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Solución de Guillermo Courtade Morales (misma que las soluciones de Titu Zvonaru y José Hernández Santiago). La ecuación se puede reescribir como

$$(x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) = (x + y)^2.$$

A partir de aquí se trabajan dos casos.

- Si $x + y = 0$, entonces se obtienen las parejas (x, y) de la forma $(x, -x)$, las cuales sí cumplen.
- Si $x + y \neq 0$, se obtiene la ecuación $x^2 - xy + y^2 = x + y$, la cual se puede expresar como
$$x^2 + x(-y - 1) + \left(y^2 - y\right) = 0.$$
Por la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, se llega a que
$$x = \frac{y + 1 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2}.$$
Como esta debe ser una solución real, se tiene que $-3y^2 + 6y + 1 \geq 0$. Por la fórmula general, esto implica que $1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \leq y \leq 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y, como y es un número entero, debe suceder que $0 \leq y \leq 2$.
Si $y = 0$, entonces $x^2 = x$, por lo que $x = 0$ o $x = 1$, obteniendo así la pareja $(1, 0)$ (la pareja $(0, 0)$ no cuenta pues se asumió $x + y \neq 0$).
Si $y = 1$, se tiene $x^2 - x + 1 = x + 1$, de donde se sigue que $x = 0$ o $x = 2$, obteniendo así las parejas $(0, 1)$ y $(2, 1)$.
Si $y = 2$, se tiene $x^2 - 2x + 4 = x + 2$, por lo que $x = 1$ o $x = 2$, obteniendo así las parejas $(1, 2)$ y $(2, 2)$.

El análisis anterior concluye el problema.

Solución alternativa. La ecuación es $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)^2$.
Si $x + y = 0$, entonces todas las parejas de la forma $(k, -k)$, con k entero, son soluciones.
Si $x + y \neq 0$, la ecuación es equivalente a la ecuación $x^2 - xy + y^2 = x + y$ y, esta a su vez, es equivalente a la ecuación $(x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$. Si $x \geq 3$, entonces $x - 1 \geq 2$ y, por consiguiente, $(x - 1)^2 \geq 4$ lo que implica que el lado izquierdo de la ecuación anterior es mayor que 2. Por lo tanto, $x \leq 2$. De manera análoga, obtenemos que $y \leq 2$. Por otro lado, si $x < 0$, entonces $x - 1 < -1$ y, por

consiguiente, $(x-1)^2 > 1$, esto es, $(x-1)^2 \geq 4$ pues x es un entero. Por lo tanto, $x \geq 0$ y, de manera análoga, obtenemos que $y \geq 0$. Luego, los valores posibles de x y y son $0, 1$ y 2. De aquí, obtenemos las soluciones $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$ y $(2,2)$.

Problema 2. Determina todos los números reales q tales que la ecuación

$$x^4 - 40x^2 + q = 0$$

tenga cuatro raíces reales en progresión aritmética.

Solución de Titu Zvonaru (misma solución que la de José Hernández Santiago). Supongamos que las raíces de la ecuación son $x_1 = a - 3r$, $x_2 = a - r$, $x_3 = a + r$ y $x_4 = a + 3r$ (las cuales forman una progresión aritmética con diferencia igual a $2r$), donde a es un número real y r es un número real no negativo. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0, && (1)\\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= -40, && (2)\\ x_1x_2x_3x_4 &= q. && (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 en (1) obtenemos que $a = 0$, por lo que $x_1 = -3r$, $x_2 = -r$, $x_3 = r$ y $x_4 = 3r$. Usando esto en (2), obtenemos que $-10r^2 = -40$, de donde se sigue que $r = 2$. Por lo tanto, $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = 6$ y, de (3), concluimos que $q = 144$, el cual es el único valor posible.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Viendo la ecuación dada como una cuadrática en x^2, usando la fórmula general y después obteniendo raíz, se tiene que las cuatro raíces $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ son

$$\begin{aligned} x_1 &= -\sqrt{20 + \sqrt{400 - q}}, \quad & x_2 &= -\sqrt{20 - \sqrt{400 - q}},\\ x_3 &= \sqrt{20 - \sqrt{400 - q}}, \quad & x_4 &= \sqrt{20 + \sqrt{400 - q}}. \end{aligned}$$

Como estos números forman una progresión aritmética, debe suceder que $x_1 - x_2 = x_2 - x_3$. Sustituyendo los valores obtenidos, resulta que

$$-\sqrt{20 + \sqrt{400 - q}} + \sqrt{20 - \sqrt{400 - q}} = -\sqrt{20 - \sqrt{400 - q}} - \sqrt{20 - \sqrt{400 - q}},$$

lo cual equivale a $3\sqrt{20 - \sqrt{400 - q}} = \sqrt{20 + \sqrt{400 - q}}$. Elevando al cuadrado y reacomodando, obtenemos que $10\sqrt{400 - q} = 160$, cuya única solución es $q = 144$, de donde sigue que $x_1 = -6$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 6$, la cual claramente es una progresión aritmética. Por lo tanto, el único valor posible de q es 144.

Problema 3. Demuestra que la ecuación $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ tiene una infinidad de soluciones en los enteros.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Tomando $a = 18k^2 - 2$, $b = 6k$ y $c = 18k^2 - 1$, podemos ver que

$$\left(18k^2 - 2\right)^2 + (6k)^2 = 256k^2 - 36k^2 + 4 = \left(18k^2 - 1\right)^2 + 3,$$

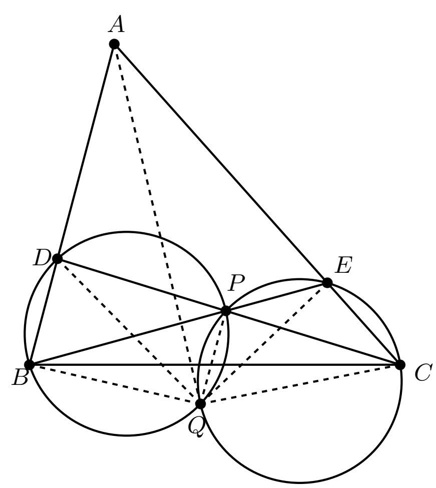
lo cual implica que hay una infinidad de soluciones (una por cada valor entero de k).

Solución de José Hernández Santiago. Para cada entero n, es fácil ver que los números $a = 2^{2n+1} - 2$, $b = 2^{n+1}$ y $c = 2^{2n+1} - 1$, satisfacen la ecuación $a^2 + b^2 = c^2 + 3$ y, por lo tanto, esta ecuación tiene una infinidad de soluciones en los enteros.

Solución de Titu Zvonaru. Para cada entero k es fácil comprobar que los números $a = 2k$, $b = 2k^2 - 2$ y $c = 2k^2 - 1$, son una solución de la ecuación dada. Esto nos da una infinidad de soluciones en los enteros.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sean D y E puntos sobre los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $BD = CE$. Los segmentos BE y CD se cortan en P y las circunferencias circunscritas a los triángulos BDP y CEP se cortan por segunda vez en Q. Demuestra que AQ es bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Solución de Titu Zvonaru. Observemos que $\angle BDQ = \angle BPQ = \angle ECQ$, ya que los cuadriláteros $BDPQ$ y $QPEC$ son cíclicos. Análogamente, tenemos que $\angle QBD = \angle QEC$. Luego, los triángulos QBD y QEC son semejantes y, como $BD = EC$, resulta que son congruentes. Esto significa que $d(Q, AB) = d(Q, AC)$ donde $d(X, \ell)$ es la distancia del punto X a la recta ℓ. Esto implica que Q está en la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, como se quería.



Problema 5. Demuestra que $\frac{1}{\varphi(n)}+\frac{1}{\sigma(n)} \geq \frac{2}{n}$ para todo entero positivo n y determina cuándo se da la igualdad.
(Nota: $\sigma(n)$ denota a la suma de los divisores positivos de n y $\varphi(n)$ denota al número de enteros positivos menores o iguales que n y primos relativos con n).

Solución de José Hernández Santiago. Es fácil ver que la igualdad se satisface si $n = 1$. Supongamos que $n > 1$. Demostraremos que la desigualdad es estricta en este caso. Aplicando la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$\frac{1}{\varphi(n)} + \frac{1}{\sigma(n)} \geq \frac{2}{\sqrt{\varphi(n)\sigma(n)}}.$$

Luego, basta demostrar que $\frac{2}{\sqrt{\varphi(n)\sigma(n)}} > \frac{2}{n}$, o de manera equivalente, $\frac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2} < 1$. Consideremos la función $f(n) = \frac{\varphi(n)\sigma(n)}{n^2}$. Es fácil ver que esta función es multiplicativa, esto es, $f(mn) = f(m)f(n)$ si $\text{mcd}(m,n) = 1$. Luego, será suficiente demostrar que $f(n) < 1$ si $n = p^k$ con p número primo y $k \geq 1$ entero.
Tenemos que

$$\begin{aligned} f(p^k) &= \frac{\varphi(p^k)\sigma(p^k)}{(p^k)^2} = \frac{\varphi(p^k)}{p^k} \cdot \frac{\sigma(p^k)}{p^k} = \frac{(p-1)p^{k-1}}{p^k} \cdot \frac{1}{p^k} \sum_{i=0}^{k} p^i \\ &= \frac{p-1}{p} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{p^{k-i}} = \frac{p-1}{p} \cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{p^i} = \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^{k+1}}}{1 - \frac{1}{p}} \\ &< \frac{p-1}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = 1. \end{aligned}$$

Problema 6. Sea $a_0 = 1$ y $a_n = a_{n-1}\left(4 - \frac{2}{n}\right)$ para $n \geq 1$. Para cada entero $n \geq 1$, demuestra que

a) a_n es un entero positivo.

b) a_n es divisible por cada número primo p tal que $n < p \leq 2n$.

c) Si n es primo, entonces $a_n - 2$ es divisible entre n.

Solución. a) Demostraremos que $a_n = \frac{2^n(2n-1)!!}{n!}$ para todo entero positivo n, donde $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$. Claramente, tenemos que $a_1 = 1(4-\frac{2}{1}) = 2 = \frac{2^1 \cdot 1!}{1!}$. Supongamos que el resultado es verdadero para cierto entero $n \geq 1$. Entonces,

$$a_{n+1} = a_n\left(4 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{2^n(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{2^{n+1}(2n+1)!!}{(n+1)!},$$

lo que concluye la inducción.
Por otro lado, observemos que

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot 2^n = \frac{(2n-1)!!}{n!} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n},$$

el cual es un entero.
b) Sea p un número primo tal que $n < p \leq 2n$. Es fácil ver que p y $n!$ son primos relativos, pues si $p \mid n!$, entonces p divide a un entero menor o igual que n, lo que es una contradicción. Como $\frac{2^n(2n-1)!!}{n!}$ es un entero, se sigue que $n!$ divide a $2^n(2n-1)!!$.
Si $n = 1$, entonces $1 < p \leq 2$ y, por consiguiente, $p = 2$ y $2 \mid a_1$.
Si $n > 1$, entonces $1 < n < p \leq 2n$ y, por consiguiente, $p > 2$. En este caso, se sigue que $p \mid (2n-1)!!$ ya que en $(2n-1)!!$ están todos los impares entre n y $2n$. Por lo tanto, p divide a $(2n-1)!! \cdot 2^n$. Como p y $n!$ son primos relativos, concluimos que $p \cdot n!$ divide a $(2n-1)!! \cdot 2^n$, de donde se sigue que p divide a $\frac{2^n(2n-1)!!}{n!} = a_n$.
c) Si $n = 2$, entonces $a_2 - 2 = \frac{2^2 \cdot 3!!}{2!} - 2 = 4$ y, claramente, $n = 2$ divide a $a_n - 2$.
Supongamos que $n > 2$ es primo. Demostraremos que

$$\frac{(2n-1)!!}{n} \equiv -1 \pmod{n}.$$

Tenemos que n es primo impar y $2n - 1 > n$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{(2n-1)!!}{n} &= \frac{1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot n \cdot (n+2) \cdot (n+4) \cdots (2n-1)}{n} \\
&= 1 \cdot 3 \cdots (n-2)(n+2)(n+4) \cdots (2n-1) \\
&\equiv 1 \cdot 3 \cdots (n-2) \cdot 2 \cdot 4 \cdots (n-1) = (n-1)! \pmod{n}.
\end{aligned}$$

Como n es primo, podemos aplicar el teorema de Wilson, esto es, $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. Por lo tanto, $\frac{(2n-1)!!}{n} \equiv -1 \pmod{n}$. Entonces,

$$-a_n \equiv (n-1)! a_n = \frac{2^n(2n-1)!!}{n} \equiv -2^n \equiv -2 \pmod{n},$$

donde la primera congruencia se sigue por el teorema de Wilson, la segunda por lo demostrado previamente y la tercera por el teorema pequeño de Fermat. Así, $a_n - 2 \equiv 0 \pmod{n}$, como queríamos.

Problema 7. Considera la sucesión

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, \ldots, 2022, 2022,$$

donde cada entero positivo entre 1 y 2022 inclusive, aparece exactamente dos veces. Determina si es posible reordenar los términos de la sucesión, de tal manera que para cada $1 \leq k \leq 2022$, haya exactamente k números entre los dos términos que son iguales a k.

Solución. Demostraremos que no es posible. Supongamos lo contrario y consideremos las parejas $(1, 1), (3, 3), \ldots, (2021, 2021)$. Las posiciones que tienen al número impar $2k - 1$ deben tener la misma paridad para $k = 1, 2, \ldots, 1011$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que hay más parejas en posiciones pares que en posiciones impares. Luego, debe haber al menos $2\left\lceil \frac{1011}{2} \right\rceil = 1012$ posiciones pares ocupadas.
Por otro lado, las parejas $(2, 2), (4, 4), \ldots, (2022, 2022)$ deben ocupar posiciones con

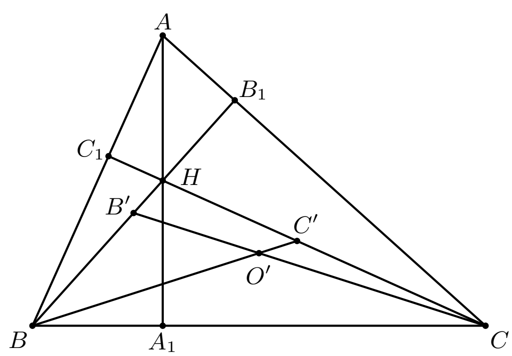
distinta paridad, por lo que aquí se ocupan la misma cantidad de posiciones pares que de impares, esto es, 1011. Por lo tanto, hay al menos $1011 + 1012 = 2023$ posiciones pares ocupadas, lo que es una contradicción pues hay exactamente 2022 posiciones pares en la sucesión.

Problema 8. Sea ABC un triángulo acutángulo con ortocentro H. Sean A_1, B_1 y C_1 los pies de las alturas del triángulo ABC opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente. Sean B_2 y C_2 los puntos medios de BB_1 y CC_1, respectivamente. Sea O la intersección de las rectas BC_2 y CB_2. Demuestra que O es el circuncentro del triángulo ABC si y solo si H es el punto medio de AA_1.

Solución de Titu Zvonaru. Si R es el circunradio del triángulo ABC, es conocido que $AH = 2R\cos\angle A$ y $HA_1 = 2R\cos\angle B\cos\angle C$.
Primero, supongamos que O es el circuncentro del triángulo ABC. Tenemos que $\angle OBC = 90^\circ - \angle A$ y $\angle C_1BO = 90^\circ - \angle C$. Como C_2 es punto medio de CC_1, los triángulos C_1BC_2 y C_2BC tienen la misma área, por lo que

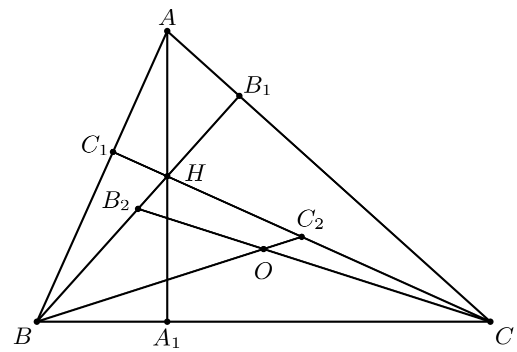
$$BC_1 \cdot BC_2 \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \angle C) = BC \cdot BC_2 \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - \angle A).$$

De la ecuación anterior y del hecho de que $BC_1 = BC \cdot \cos\angle B$, obtenemos que $\cos\angle B\cos\angle C = \cos\angle A$, lo cual indica que $AH = HA_1$, esto es, H es el punto medio de AA_1.
Ahora, supongamos que H es el punto medio de AA_1 y sea O' el circuncentro del triángulo ABC. Sean C' y B' las intersecciones de CC_1 con BO' y de BB_1 con CO', respectivamente.



Como $AH = 2R\cos\angle A$, $HA_1 = 2R\cos\angle B\cos\angle C$ y $AH = HA_1$, tenemos que $\cos\angle B\cos\angle C = \cos\angle A$, lo cual implica que los triángulos C_1BC' y $C'BC$ tienen la misma área, por lo que C' es el punto medio de CC_1, esto es, $C' = C_2$. De manera análoga, obtenemos que $B' = B_2$. Concluimos que $O = O'$.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Para la primera parte, supongamos que O es el circuncentro del triángulo ABC. Como los triángulos BB_1C y AA_1C comparten el $\angle C$ y un ángulo de 90°, resulta que son semejantes. Luego, $\angle B_2CA = \angle OCA = \angle BCC_1 = \angle BCH = 90^\circ - \angle B$. Por lo tanto, B_2 es en el triángulo BB_1C como H es en el triángulo AA_1C, lo que indica que H es el punto medio de AA_1.



Para el recíproco, supongamos que H es el punto medio de AA_1. Claramente los triángulos ABA_1 y CBC_1 son semejantes y, por consiguiente, C_2 es en CC_1 como H es en AA_1. Así, $\angle C_1BC_2 = \angle A_1BH$, de modo que, $\angle C_1BH = \angle CBC_2 = 90^\circ - \angle A = \angle CBO$. Como se vió en la primera parte, $\angle B_2CA = \angle OCA = \angle BCH = 90^\circ - \angle B$, entonces $\angle OCB = \angle C - \angle OCA = \angle C - 90^\circ + \angle B = 90^\circ - \angle A$, con lo cual $BO = CO$ y $\angle BOC = 2\angle A$. Estas dos propiedades implican directamente que O debe ser el circuncentro del triángulo ABC.

Problema 9. Determina todas las parejas (m, n) de enteros positivos tales que $\dfrac{n^2+1}{2m}$ y $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ sean números enteros.

Solución de Titu Zvonaru (misma que la solución de José Hernández Santiago). Como $\frac{n^2+1}{2m}$ es un entero, necesariamente n es impar, lo que implica que 2^{n-1} es un cuadrado. Como $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ también es un entero, se sigue que $2^{n-1}+m+4$ es un cuadrado mayor que 2^{n-1}. Así, $2^{n-1}+m+4 \geq \left(2^{\frac{n-1}{2}}+1\right)^2 = 2^{n-1}+2^{\frac{n+1}{2}}+1$, por lo que $m \geq 2^{\frac{n+1}{2}}-3$. Además, para $n \geq 5$ es fácil verificar que $2^{\frac{n+1}{2}} < 2^{\frac{n+3}{2}}-6$. Luego, para $n \geq 5$ tenemos que

$$\frac{n^2+1}{2m} \leq \frac{n^2+1}{2^{\frac{n+3}{2}}-6} < \frac{n^2+1}{2^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Demostraremos por inducción sobre n que

$$\frac{n^2+1}{2^{\frac{n+1}{2}}} < 1.$$

para todo entero impar $n \geq 15$. El caso $n = 15$ es fácil. Ahora consideremos un entero $k \geq 15$ impar tal que se cumple la desigualdad. Como $(k+2)^2+1 < 2k^2+2$ para $k \geq 15$, se sigue que

$$\frac{(k+2)^2+1}{2^{\frac{k+3}{2}}} = \frac{(k+2)^2+1}{2\cdot 2^{\frac{k+1}{2}}} < \frac{2k^2+2}{2\cdot 2^{\frac{k+1}{2}}} = \frac{k^2+1}{2^{\frac{k+1}{2}}} < 1,$$

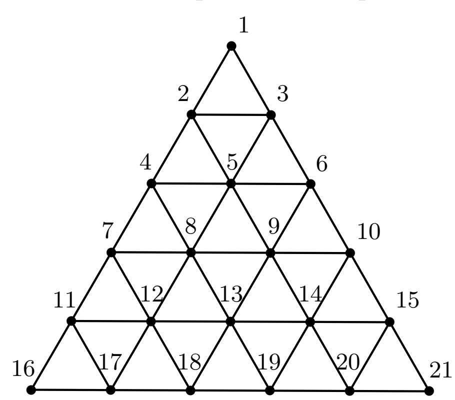
lo que completa la inducción. Entonces, para $n \geq 15$, tenemos que

$$\frac{n^2+1}{2m} \leq \frac{n^2+1}{2^{\frac{n+1}{2}}} < 1,$$

por lo que $\frac{n^2+1}{2m}$ no puede ser un entero. De aquí, obtenemos que los valores posibles de n son: $1, 3, 5, 7, 9, 11$ o 13. Se debe cumplir que m divide a $\frac{n^2+1}{2}$, que $\sqrt{2^{n-1}+m+4}$ sea un entero y que $m \geq 2^{\frac{n+1}{2}} - 3$. Revisando los posibles casos para cada posible valor de n, obtenemos que las únicas parejas (m, n) que cumplen son $(1, 3)$ y $(61, 11)$.

Problema 10. Sea n un entero mayor que 1. Cierta escuela tiene $1 + 2 + \cdots + n$ alumnos y cuenta con n salones, con espacio para $1, 2, \ldots, n$ personas, respectivamente. Los niños juegan un juego en k rondas como sigue: en cada ronda, cuando suena la campana, los alumnos se distribuyen en los salones de tal forma que no excedan su capacidad y, si dos alumnos compartían salón en alguna ronda, ya no pueden hacerlo en esta. Para cada n, determina el máximo valor posible de k.

Solución. Numeremos a los alumnos del 1 al $1 + 2 + \cdots + n$. Consideremos entre todos los posibles juegos, uno que maximice k. Sea D_1 la distribución de los alumnos después de la primera ronda. De manera análoga definimos D_i para $2 \leq i \leq k$.
Supongamos que $k \geq 2$ y consideremos D_1 y D_2. Para escoger los estudiantes en el salón más grande de D_2, podemos tomar a lo más una persona de cada salón de D_1. Como hay exactamente n salones, esto significa que debemos escoger exactamente una persona de cada salón de D_1. Luego, si A y B son los estudiantes en el salón más pequeño en D_1 y D_2, respectivamente, inferimos que $A \neq B$ y cualquier otra distribución D_k $(k \neq 1, 2)$ debe tener a A y B juntos en el n-ésimo salón. Por lo tanto, existe a lo más una distribución D_k aparte de D_1 y D_2, así que $k \leq 3$.
Ahora mostramos que $k = 3$ es posible. Construimos D_1, D_2 y D_3 de acuerdo al siguiente diagrama, donde los números representan a las personas.



La distribución D_1 se obtiene tomando las n filas, D_2 se obtiene tomando las n diagonales / y D_3 se obtiene tomando las n diagonales \.
Es claro que cualesquiera dos alumnos están en el mismo salón a lo más una vez, pues dos filas o diagonales tienen a lo más un círculo en común.

4^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos del Nivel II de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro
Alonso Baeza Quevedo	Baja California Sur	Oro
Galileo López Loreto	Jalisco	Oro
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Oro
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Oro
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Oro
José Ángel Reynaga Álvarez	Jalisco	Plata
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Plata
Woojoong Kwon	Ciudad de México	Plata
Ángel Tadeo Sánchez Sánchez	Hidalgo	Plata
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	Plata
Sebastián Gutiérrez Suárez	Sinaloa	Plata
Yérik Damián Flores Torres	Puebla	Plata
Kevin Gibrán Sánchez Martínez	Zacatecas	Plata
Alan Alejandro López Grajales	Chiapas	Plata
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Plata
Catherine González Díaz	Guerrero	Plata
Mario Alberto Valdez Soto	Sinaloa	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Baja California Sur obtuvo el primer lugar (con 254 puntos), la Ciudad de México obtuvo el segundo lugar (con 230 puntos) y el Estado de Morelos obtuvo el tercer lugar (con 212 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 436 puntos). Segundo lugar: Baja California Sur y Jalisco (con 396 puntos). Tercer lugar: Morelos (con 385 puntos).

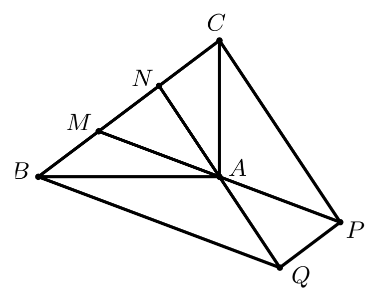
Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Juan nació después del año 1970 pero antes del año 2000. Si en el año n^2 Juan cumple n años, ¿cuántos años cumple Juan en el año 2020?

2) Un píxel está formado por 3 leds: uno rojo, uno verde y uno azul, donde cada uno puede prender con 4 intensidades de luminosidad diferentes (además de que pueden estar apagados). Cada configuración de estos tres leds determina el color del píxel. ¿Cuántas configuraciones hay con el led azul prendido?

3) Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle BAC = 90°$ y área 12 cm^2. Sean M y N puntos en la hipotenusa BC tales que $BM = MN = NC$. Se prolongan los segmentos MA y NA más allá de A, hasta los puntos P y Q tales que $MA = AP$ y $NA = AQ$. Encontrar el valor del área del cuadrilátero $BCPQ$ en cm^2.

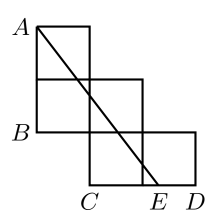


4) Una máquina A es capaz de cortar una determinada área de césped en 120 minutos. Una máquina B corta esa misma área en 240 minutos. Si se ponen a trabajar las dos máquinas al mismo tiempo para cortar esa área, ¿en cuántos minutos estará cortado el césped?

5) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

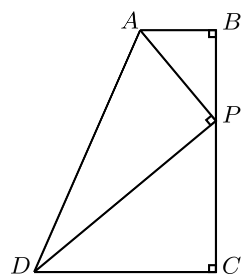
6) Cada número de 3 cifras decimales se divide entre la suma de sus 3 cifras y da un resultado. Por ejemplo, el número 207 se divide entre $2 + 0 + 7 = 9$ y el resultado es $\frac{207}{9} = 23$. ¿Cuál es el mayor valor que se puede obtener como resultado, al considerar todos los números de tres cifras?

7) La siguiente figura está formada por 5 cuadrados iguales de área 36 cm^2 cada uno. Los puntos A, B, C y D son vértices de cuadrados. El punto E del segmento CD es tal que el segmento AE divide a los 5 cuadrados en dos partes de la misma área. Determinar la medida, en cm, del segmento CE.



8) ¿Cuántos números de la lista $1, 2, 3, \ldots, 2019, 2020$ tienen al menos un dígito igual a 2 o igual a 0?

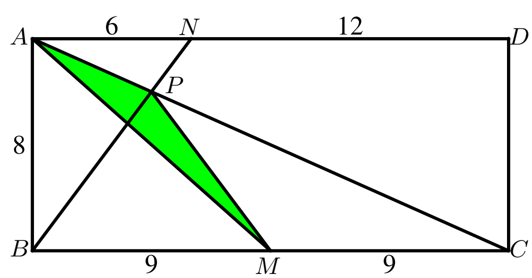
9) En la siguiente figura se tiene $AB = 5$ cm, $BC = 16$ cm y $DC = 12$ cm. Si $BP < PC$, ¿cuánto mide, en cm^2, el área del triángulo APD?



10) Se consideran todos los enteros positivos que se construyen escribiendo consecutivamente los primeros números enteros positivos. Por ejemplo, el que aparece en el primer lugar es el 1, en segundo lugar aparece 12, en el lugar 3 aparece 123, y así sucesivamente (en el lugar 12 aparece 123456789101112). De los números anteriores, ¿cuántos dígitos tiene el número más pequeño en el que aparece la cadena 2022? Por ejemplo, el número de dígitos del número más pequeño en el que aparece la cadena 91 es 11 pues aparece por primera vez en el décimo número 12345678**91**0, el cual tiene 11 dígitos.

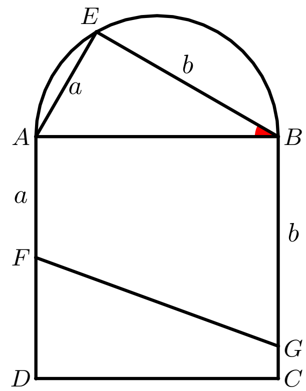
11) ¿Cuántos subconjuntos de 3 elementos (distintos) del conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ cumplen que el producto de los 3 números del subconjunto es divisible entre 4? Nota: Los subconjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ y $\{2, 3, 1\}$ se consideran iguales.

12) En la figura se muestra un rectángulo $ABCD$ con $AB = 8$ cm y $BC = 18$ cm; M es el punto medio de BC, N es el punto del segmento AD tal que $AN = 6$ cm y P es el punto de intersección de AC con BN. Determinar el área, en cm^2, del triángulo APM.



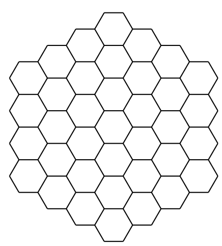
Parte B

13) Sea $ABCD$ un cuadrado. Se dibuja, por fuera del cuadrado, un semicírculo que tenga al lado AB como diámetro. Se escoge un punto E en la semicircunferencia. Sean G y F puntos de los segmentos BC y AD, respectivamente, tales que $GB = BE$ y $AF = AE$. Sean $a = AF$ y $b = GB$. Si las áreas entre $ABGF$ y $FGCD$ están a razón $\frac{a+b}{3a-b}$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle EBA$?



14) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

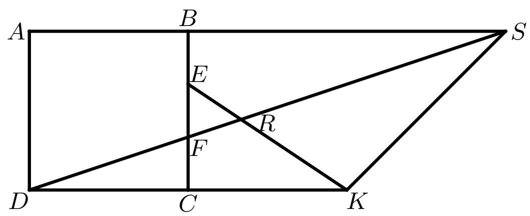
15) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



Prueba por Equipos, Nivel II

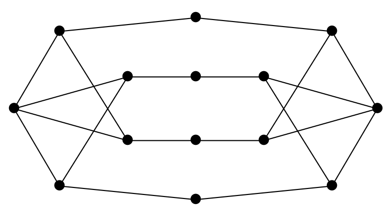
1) Determinar la cantidad de números enteros que son múltiplos de 3 y tienen 5 dígitos distintos escogidos dentro de la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pero dos de sus dígitos son 1 y 2, en ese orden. Por ejemplo, 31725 y 31254 son números de los que queremos, mientras que 32715 y 31724 no.

2) En la figura se muestra un cuadrado $ABCD$ de área 36 cm^2. Los puntos E y F sobre BC son tales que $BE = EF = FC$; el punto K sobre la recta CD es tal que C es el punto medio del segmento DK. La recta DF intersecta a las rectas EK y AB en R y S, respectivamente. Determinar el área, en cm^2, del triángulo KRS.

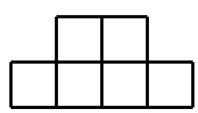


3) ¿Cuántos números de tres dígitos, abc (con $a \neq 0$), tienen la propiedad de que los números de dos dígitos ab y bc son números primos? Por ejemplo, un número que cumple es 237 pues tanto 23 como 37 son números primos.

4) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?

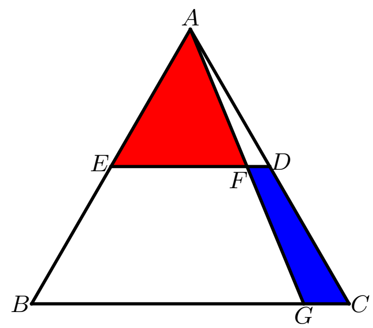


5) Una ficha sombrero es una como la que se muestra en la figura, donde cada cuadrito es de 1×1. Se quiere cubrir una cuadrícula de 6×40 con fichas sombrero, de tal manera que las fichas no se traslapen, no se salgan del tablero y los lados de las fichas sean paralelos a los lados de la cuadrícula. ¿De cuántas formas distintas puede llenarse el tablero, considerando que las fichas pueden rotarse?



6) Encontrar la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

7) En la figura, ABC es un triángulo equilátero cuyos lados miden 28 cm. Los puntos medios de AB y AC son E y D, respectivamente. ¿Cuál debe ser el valor de la longitud del segmento BG, en cm, para que el área del triángulo AEF sea igual al doble del área del cuadrilátero $CDFG$?



8) En un país, se tienen ciudades que inician con cada letra del abecedario (el cual cuenta con 26 letras). Hay una ciudad cuyo nombre empieza con la letra a, dos ciudades cuyos nombres empiezan con la letra b, tres ciudades con la letra c, cuatro ciudades con d y así sucesivamente. Solo se puede pasar de una ciudad a otra si las letras con las que empieza su nombre son vecinas en el abecedario; por ejemplo, c es vecino de b y d, así como a es vecino de b y z. ¿Se pueden recorrer todas las ciudades sin repetir?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) Como Juan nació antes del año 2000, su año de nacimiento es el año actual n^2 menos la edad que tiene n. Así, $1970 < n^2 - n < 2000$. Puesto que $44^2 = 1936$, $45^2 = 2025$ y $46^2 = 2116$, entonces Juan no puede cumplir 46 años en el año 46^2 ni puede cumplir 44 años en el año 44^2, así que debe cumplir 45 años en el año 2025, de modo que nació en 1980 y en el año 2020 cumplió 40 años.

2) Las posibilidades de que el led azul esté prendido son 4. Cada uno del led rojo y el azul tienen 5 posibilidades. Entonces, el resultado es $4 \times 5 \times 5 = 100$.

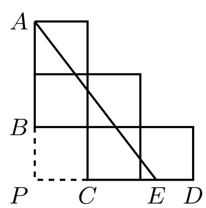
3) Como M y N dividen al segmento BC en tres partes iguales, las áreas de de los triángulos ACN, NAC y MAB son todas iguales a $\frac{12}{3} = 4$ cm^2. También tenemos que los triángulos NAM y QAP son congruentes y así el área del triángulo QAP es igual a 4 cm^2. Por otro lado, los triángulos BAQ y BAN tienen la misma altura desde B y la misma base pues $NA = AQ$, así que el área del triángulo ABQ es igual a 8 cm^2. El mismo razonamiento aplica para determinar que el área del triángulo CAP es igual a 8 cm^2. Entonces, el área total es $8+8+4+4+4+4 = 32$ cm^2.

4) En una hora, A poda la mitad del césped y B poda la cuarta parte, de manera que entre las dos podan $\frac{3}{4}$ partes del área total. Necesitan podar una cuarta parte más, es decir, un tercio de lo que podan en una hora. Como $\frac{60}{3} = 20$, la cantidad total de minutos es $60 + 20 = 80$.

5) Como hay 9 monedas, entonces hay $\binom{9}{2} = \frac{9\times 8}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar dos monedas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuántas aristas tiene una cuadrícula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay $36 - 12 = 24$ maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

6) Notamos primero que el cociente entre dos números es más grande cuando el numerador es lo máximo posible y el denominador es lo mínimo posible. Si la suma de cifras es cualquier número entero entre 1 y 9, lo máximo que puede ser el cociente es 100 pues, por ejemplo, si la suma fuera 7, el mayor numerador que puede tener suma de dígitos igual a 7 es 700 y entonces $\frac{700}{7} = 100$. Si la suma de los dígitos es 10 o más, como el numerador a lo más es 999, entonces el cociente es menor o igual a $\frac{999}{10} = 99.9$. Por lo tanto, la respuesta es 100.

7) El área de los 5 cuadrados es $36 \times 5 = 180$ cm^2, así que buscamos que AE parta la figura en dos regiones de área 90 cm^2 cada una. Completemos la figura con un cuadrado como se muestra en la figura.



Como cada cuadrado mide 6 cm de lado, se tiene que $AP = 18$ cm y $PE = 6+CE$ cm. De esta manera, obtenemos que $\frac{18(6+CE)}{2} = 90 + 36 = 126$ cm, de donde $18(6 + CE) = 252$ cm y entonces $CE = \frac{252}{18} - 6 = 14 - 6 = 8$ cm.

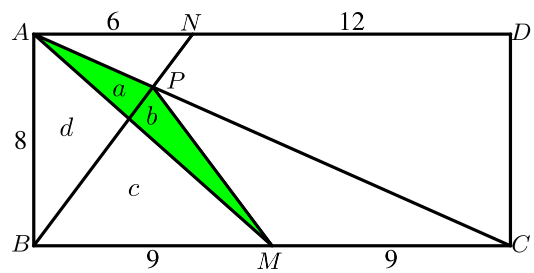
8) Contemos la cantidad de números en la lista que no tienen ningún dígito igual a 0 o a 2. Hay 8 opciones en las que el número tiene un dígito; hay $8 \times 8 = 64$ en las que el número tiene 2 dígitos; hay $8\times 8\times 8 = 512$ con 3 dígitos y hay $1\times 8\times 8\times 8 = 512$ con 4 dígitos. En total, hay $8 + 64 + 512 + 512 = 1096$ números cuyos dígitos no son ni 2 ni 0, por lo que la cantidad de números que tienen al menos un dígito igual a 2 o igual a 0 es $2020 - 1096 = 924$.

9) Notemos que los triángulos ABP y PCD son semejantes, por lo que $\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD}$, esto es, $\frac{5}{BP} = \frac{16-BP}{12}$. Como $BP < PC$, necesariamente $BP = 6$ cm y $PC = 16 - BP = 10$ cm. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{61}$ cm y $PD = \sqrt{CD^2 + PC^2} = 2\sqrt{61}$ cm. Por lo tanto, el área del triángulo APD es igual a $\frac{AP\times PD}{2} = 61$ cm^2.

10) El número 20 solamente aparece antes del 200 en 20 y en 120 y ahí no aparece 2022. Entonces, la secuencia 2022 aparece por primera vez en el lugar 203: $123\ldots 202203$. Contemos los dígitos usados: Del 1 al 9 hay 9 dígitos; del 10 al 99 hay $2 \times 90 = 180$ dígitos, del 100 al 199 hay $3 \times 100 = 300$ dígitos y, finalmente, del 200 al 203 hay $3 \times 4 = 12$ dígitos. El total es $9 + 180 + 300 + 12 = 501$.

11) Hay $\binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ subconjuntos de 3 elementos de X. Para que un subconjunto de 3 elementos no cumpla con la condición puesta, es porque o bien los tres números deben son impares o bien porque hay dos impares y uno par no múltiplo de 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$ subconjuntos; en el segundo hay $5\binom{10}{2} = \frac{5\times10\times9}{2} = 225$ subconjuntos. Por lo tanto, la respuesta es $1140 - 120 - 225 = 795$.

12) Sean h y H las respectivas alturas de los triángulos APN y CPB desde P. Como estos triángulos son semejantes en razón $1 : 3$, tenemos que $3h = H$; además $H + h = 8$, de donde $h = 2$ cm y $H = 6$ cm.
Ahora, sean a, b, c y d las áreas que se indican en la siguiente figura.



Notemos que $a + b = (a + d) - (d + c) + (c + b)$. Pero $a + d = \frac{6\times8}{2} - \frac{6\times2}{2} = 18$ cm^2, $d + c = \frac{9\times8}{2} = 36$ cm^2 y $c + b = \frac{9\times6}{2} = 27$ cm^2. Por lo tanto, $a + b = 18 - 36 + 27 = 9$ cm^2.

Parte B

13) Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Luego, $[ABGF] = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ y, por lo tanto, $[FGCD] = [ABCD] - [ABGF] = a^2 + b^2 - \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Se sigue entonces que

$$\frac{a+b}{3a-b} = \frac{[ABGF]}{[FGCD]} = \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2\left(a^2+b^2\right) - (a+b)\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Esta última ecuación implica que

$$2\left(a^2+b^2\right) - (a+b)\sqrt{a^2+b^2} = (3a-b)\sqrt{a^2+b^2},$$

esto es, $2\left(a^2+b^2\right) = 4a\sqrt{a^2+b^2}$ y, por consiguiente, $b = \sqrt{3}a$. Esto significa que el triángulo AEB es la mitad de un triángulo equilátero. Por lo tanto, $\angle EBA = 30°$.

14) Tomemos $a \equiv 0 \pmod 9$. Entonces podemos formar la siguiente lista módulo 9:

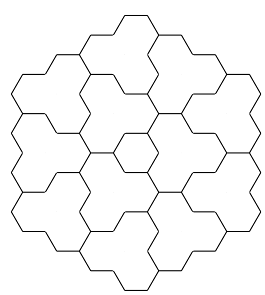
$$
\begin{aligned}
x_0 &\equiv 0,\\
x_1 &\equiv 5(0) + 1 = 1,\\
x_2 &\equiv 5(1) + 1 = 6,\\
x_3 &\equiv 5(6) + 1 \equiv 4,\\
x_4 &\equiv 5(4) + 1 \equiv 3,\\
x_5 &\equiv 5(3) + 1 \equiv 7,\\
x_6 &\equiv 5(7) + 1 \equiv 0.\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por esta razón, si $a \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 7 \pmod 9$, entonces este ciclo se repite y llegamos a algún $x_k \equiv 0 \pmod 9$, dejando fuera del ciclo las congruencias 2, 5 y 8.

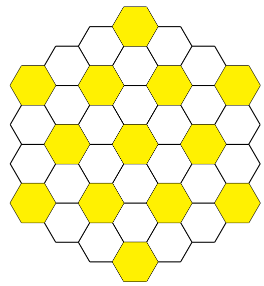
- Si $x_i \equiv 2 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(2) + 1 \equiv 2 \pmod 9$.
- Si $x_i \equiv 5 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(5) + 1 \equiv 8 \pmod 9$.
- si $x_i \equiv 8 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(8) + 1 \equiv 5 \pmod 9$.

Así, cualquier a con estas congruencias módulo 9 cumple las condiciones del problema. Nótese que esto equivale a que $a \equiv 2 \pmod 3$. Por lo tanto, hay 673 números menores o iguales que 2020 que cumplen.

15) En la siguiente partición de los hexágonos, a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado, lo que demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal.



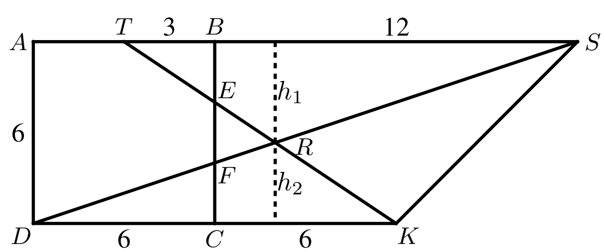
Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) Tenemos $\binom{5}{2} = 10$ formas de escoger las posiciones donde pondremos al dígito 1 y al dígito 2. Por el criterio de divisibilidad del 3, para que el número resultante sea múltiplo de 3, la suma de sus dígitos en las tres posiciones restantes debe ser múltiplo de 3 ya que 1 y 2 suman 3. Ahora encontraremos las ternas de números distintos a, b, c en el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ tales que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Observemos que la única manera de lograr ternas de números distintos que sumen un múltiplo de 3, es escogiendo un dígito entre 3 y 6, uno entre 4 y 7 y escogiendo el dígito 5. Luego, las ternas posibles son $\{3, 4, 5\}$, $\{3, 7, 5\}$, $\{6, 4, 5\}$ y $\{6, 7, 5\}$. Si $N = abc$ es el número de tres dígitos que se forma con las tres posiciones restantes después de colocar al 1 y al 2, entonces por cada una de las ternas anteriores, obtenemos 6 valores de N, lo que hace un total de 24 valores posibles de N. Por lo tanto, en total hay $10 \times 24 = 240$ números que satisfacen las condiciones del problema.

2) Notemos que los triángulos BFS y CFD son semejantes en razón 2 : 1, pues BS es paralela a CD y $BF = 2FC$, por lo que $BS = 12$ cm. Sea T la intersección de EK con AB. Análogamente, los triángulos TBE y KCE son semejantes en razón 1 : 2, lo que implica que $BT = 3$ cm.

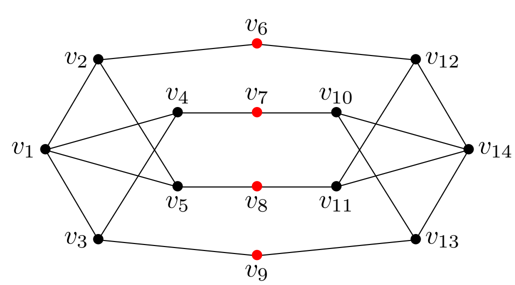


Ahora, observemos que los triángulos TRS y KRD son semejantes por ser TS y DK paralelas y $\angle DRK = \angle SRT$. De aquí, si h_1 y h_2 son las alturas desde R hasta AB y CD, respectivamente, entonces $\frac{h_1}{h_2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, así que $5h_2 = 4h_1$ y, como $h_1 + h_2 = 6$, se sigue que $h_2 = \frac{8}{3}$ cm, por lo que $[DRK] = \left(\frac{8}{3} \times \frac{12}{2}\right) = 16$ cm^2. También, $[DKS] = \frac{12\times 6}{2} = 36$ cm^2, lo cual implica que

$$[KRS] = [DKS] - [DRK] = 36 - 16 = 20 \text{ cm}^2.$$

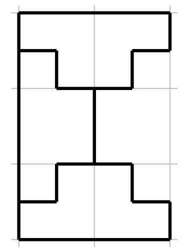
3) Los números primos de dos dígitos tienen como dígito de las unidades a un número impar distinto de 5. Luego, c solamente puede ser alguno de $1, 3, 7$ o 9. Hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 1: $11,\ 31,\ 41,\ 61,\ 71$; hay 6 números primos de dos dígitos que terminan en 3: $13, 23, 43, 53, 73, 83$; hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 7: $17, 37, 47, 67, 97$ y, hay 5 números primos de dos dígitos que terminan en 9: $19, 29, 59, 79, 89$. Veamos las distintas posibilidades de c.
Caso $c = 1$. Hay cinco primos de la forma $b1$, pero como ab es también primo, b no puede ser 4 o 6. Luego, bc es solamente uno de $11, 31, 71$; de donde el número de posibilidades para ab es $5 + 6 + 5 = 16$.
Caso $c = 3$. De nuevo hay seis posibles primos de dos dígitos de la forma $b3$, pero como ab debe ser primo, solamente debemos de considerar a 13 y 73. Las posibilidades para $a1$ son cinco y para las de $a7$ son cinco. Entonces, aquí tenemos 10 números abc.
Caso $c = 7$. De los cinco posibles números $b7$, solamente nos fijaremos en 17, en 37 y en 97; en los otros ab no será primo. Hay 5 primos de la forma $a1$; hay 6 primos de la forma $a3$ y hay 5 primos de la forma $a7$. Así, en este caso tenemos 16 números abc.
Caso $c = 9$. De igual manera solamente son de interés el 19 y el 79. Para el primero hay cinco primos de la forma $a1$ y hay cinco de la forma $a7$, por lo que en este último caso hay 10 números abc.
Luego, en total hay $16 + 10 + 16 + 10 = 52$ números de tres dígitos abc con ab y bc números primos.

4) Primero vamos a etiquetar los vértices:

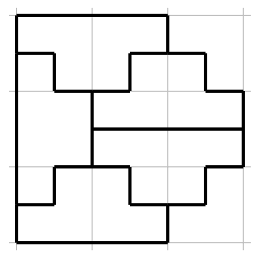


Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces, debe elegir 4 vértices.

5) Notemos que para que las esquinas puedan llenarse, las primeras tres fichas deben colocarse como se muestra.



Después de eso hay dos opciones: colocar una ficha para completar un rectángulo o colocar dos fichas extra como se ve en la siguiente figura



en cuyo caso volveremos a una situación como la que se tenía. Esto muestra que cada múltiplo de 4 tenemos dos opciones para continuar el llenado del tablero, y esto será así hasta que lleguemos al final del tablero. De esta manera, en total habrá $\frac{40}{4} - 1 = 9$ momentos en los que se puede elegir, por lo que en total hay $2^9 = 512$ formas de llenar el tablero.

6) Podemos escribir el número n como $n = 100a + 10b + c$ con $0 \leq a, b, c \leq 9$ y $a \neq 0$. Cada número formado con dos dígitos de n se puede escribir como $10x + y$ con $x \in \{a, b, c\}$, $y \in \{a, b, c\}$ y $x \neq y$. Entonces, la condición del problema es equivalente a

$$\begin{aligned} 2n &= 2(100a + 10b + c) \\ &= (10a + b) + (10a + c) + (10b + a) + (10b + c) + (10c + a) + (10c + b). \end{aligned}$$

Así, tenemos que $200a + 20b + 2c = 22a + 22b + 22c$, lo cual implica que $178a = 2b + 20c$ o bien $89a = b + 10c$.
Como $89 < 99$, necesariamente $a \leq 1$, lo cual implica que $a = 1$ y, por lo tanto, $b = 9$ y $c = 8$. Luego, $n = 198$ es el único número que satisface las condiciones.

7) Denotamos el área de XYZ por $[XYZ]$. Como D y E son puntos medios de AC y AB, respectivamente, tenemos que $[ADE] = \frac{1}{4}[ABC]$ y $\frac{FE}{DE} = \frac{GB}{CB}$. Luego $[AFE] = \frac{FE}{DE} \times \frac{1}{4}[ABC] = \frac{GB}{4CB}[ABC] = \frac{GB}{112}[ABC]$.
Por otra parte, sabemos que $[BEFG] = 3[AFE] = \frac{3GB}{112}[ABC]$ y $[BEDC] = \frac{3}{4}[ABC]$, por lo que $[GFDC] = [BEDC] - [BEFG] = \frac{84-3GB}{112}[ABC]$. Como $[AFE] = 2[GFDC]$, se sigue que $\frac{GB}{112}[ABC] = \frac{2(84-3GB)}{112}[ABC]$, es decir, $GB = 168 - 6GB$. Por lo tanto, $GB = 24$ cm.

Solución alternativa. Con la notación de la solución anterior. Si $x = FD$, por la semejanza de los triángulos AFD y AGC, tenemos que $GC = 2x$. Si h es la altura del triángulo AEF, entonces h también es la altura sobre las bases del trapecio $CDFG$. Ahora, $[AFE] = \frac{(14-x)h}{2}$ y $[CDFG] = \frac{(x+2x)h}{2}$; si estas dos áreas cumplen que la primera es el doble de la segunda, entonces $14 - x = 6x$, de donde $x = 2$, luego $BG = 28 - 2(2) = 24$ cm.

8) Demostraremos que no existe tal recorrido. Consideremos la siguiente coloración de las ciudades: Si una ciudad empieza con la i-ésima letra del abecedario e i es par, entonces se colorea de rojo; en caso contrario, se colorea de azul. Observemos que, si se puede pasar de una ciudad a otra, entonces estas deben ser de colores distintos. Si existiera un recorrido que pasa por todas las ciudades sin repetir, por la observación anterior tendríamos que la cantidad de ciudades azules y la cantidad de ciudades rojas diferirían por 1 a lo mucho. Sin embargo, hay $1 + 3 + 5 + \cdots + 25 = 169$ ciudades azules y $2 + 4 + 6 + \cdots + 26 = 182$ ciudades rojas. Como $182 - 169 > 1$, concluimos que tal recorrido no puede existir.

34^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 15 de noviembre de 2020 se llevó a cabo en forma virtual el Concurso Nacional de la 34^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 185 estudiantes provenientes de 31 Estados del país (Veracruz no participó).

Los 19 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
José Alejandro Reyes González (Morelos).
Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).
Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).
Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa).
Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
Juan Carlos Tapia Baeza (Quintana Roo).
Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
Kevin Brian Rodríguez Sánchez (Baja California).
Isaac Pancardo Botello (Guanajuato).
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León).
Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
Pedro Antonio González Soto (Nuevo León).
Manuel Isaac González Chi (Yucatán).
Jorge Hiram Arroyo Almeida (Zacatecas).

Los 9 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el

Caribe fueron:

Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur).
Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México).
Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León).
Itzel Cano Rivas (Guanajuato).
Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas).
Isaac Montaño Manríquez (Baja California Sur).
Bruno Ancona Sala (Yucatán).

Las 9 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
Katia García Orozco (Chihuahua).
Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro).
Alexandra Valdepeñas Ramírez (Coahuila).
Vianey Guadalupe Cortes Hernández (Tlaxcala).
Cynthia Naely López Estrada (Jalisco).
Adriana García Arias (Chihuahua).
Andrea Escalona Contreras (Morelos).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 34^a OMM.

1. Ciudad de México.
2. Nuevo León
3. Sinaloa.
4. Guanajuato.
5. Jalisco.
6. Aguascalientes.
7. Morelos.
8. Tamaulipas.
9. Chihuahua.
10. Zacatecas.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica se llamó "**Copa Superación 2020**" y fue ganado por Baja California Sur. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Aguascalientes y Guerrero, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del 34 Concurso Nacional de la OMM (Virtual). Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. A un conjunto de 5 enteros positivos distintos, se le llama *virtual* si el máximo común divisor de cualesquiera 3 de sus elementos es mayor que 1, pero el máximo común divisor de cualesquiera 4 de sus elementos es igual a 1. Demuestra que en cualquier conjunto virtual, el producto de sus 5 elementos tiene al menos 2020 divisores positivos distintos.
Nota: *El máximo común divisor de dos o más números enteros es el mayor entero positivo que divide a cada uno de ellos.*

(Problema sugerido por Víctor Hugo Almendra Hernández).

Solución de Vianey Guadalupe Cortés Hernández. Denotando (a,b,c) como el máximo común divisor de a,b,c, sean $(a,b,c)=w$, $(a,b,d)=x$, $(b,c,d)=y$, $(a,c,d)=z$. Tenemos que $w,x,y,z>1$. Supongamos que $(x,w)=k$. entonces $k\mid w$, $k\mid x$ y, como $w\mid a,b,c$ y $x\mid a,b,d$, tenemos que $k\mid a,b,c,d$. Entonces, $(a,b,c,d)=k$, pero $(a,b,c,d)=1$, por lo tanto $(x,w)=1$. Análogamente, $(w,y)=(w,z)=(x,y)=(x,z)=(y,z)=1$.
Ahora sean a_1,b_1,c_1 tales que $a=a_1w, b=b_1w, c=c_1w$. Ya que $(a_1w,b_1w,d)=x$ y $(x,w)=1$, entonces $x\mid a_1,b_1$. Por lo tanto, $a_1=a_2x, b_1=b_2x, d=d_1x$. De $(b,c,d)=y$ tenemos $(b_2xw,c_1w,d_1x)=y$. Como $(x,y)=1,(w,y)=1$, entonces $y\mid b_2,c_1,d_1$. Por lo tanto, $b_2=b_3y, c_1=c_2y, d_1=d_2y$. De $(a,c,d)=z$ tenemos que $(a_2xw,c_2wy,d_2yx)=x$ y, como $(z,x)=1,(z,w)=1,(z,y)=1$, resulta que $z\mid a_2,c_2,d_2$. Por lo tanto, $a_2=a_3z, c_2=c_3z, d_2=d_3z$. Luego, $a=a_3wxz, b=b_3wxy, c=c_3wyz, d=d_3yzx$.
Haciendo un análisis similar al de arriba pero con los 5 números a,b,c,d,e tenemos que si $(a,b,c)=x_1$, $(a,b,d)=x_2$, $(a,b,e)=x_3$, $(a,c,d)=x_4$, $(a,c,e)=x_5$, $(a,d,e)=x_6$, $(b,c,d)=x_7$, $(b,c,e)=x_8$, $(b,d,e)=x_9$ y $(c,d,e)=x_{10}$, entonces

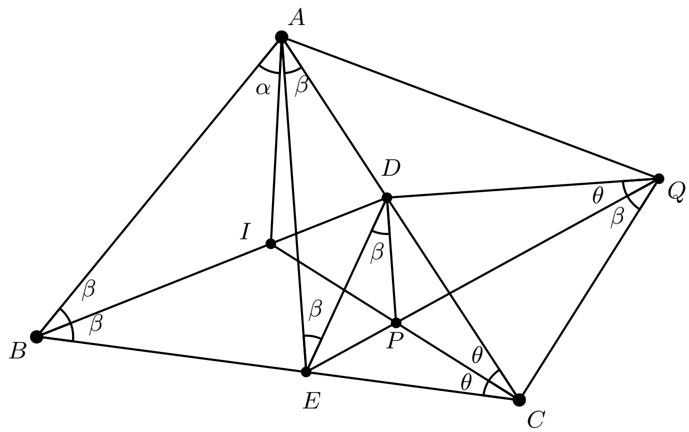
$$\begin{aligned}
a &= a'x_1x_2x_3x_4x_5x_6,\\
b &= b'x_1x_2x_3x_7x_8x_9,\\
c &= c'x_1x_4x_5x_7x_8x_{10},\\
d &= d'x_2x_4x_6x_7x_9x_{10},\\
e &= e'x_3x_5x_6x_8x_9x_{10}.
\end{aligned}$$

La razón por la que podemos llegar a esa expresión para a,b,c,d,e es que $(x_i,x_j)=1$ para $i\neq j$.
Entonces $abcde=a'b'c'd'e'x_1^3x_2^3x_3^3\cdots x_{10}^3$. Como $a',b',c'd,e'\geq 1$, $abcde$ tiene al menos $(3+1)^{10}=4^{10}=2^{20}>2020$ divisores distintos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo con incentro I. La recta BI corta a AC en D. Sean P un punto en CI tal que $DI=DP$ ($P\neq I$), E la segunda intersección del segmento BC con el circuncírculo del triángulo ABD y Q la segunda intersección de la recta EP con el circuncírculo del triángulo AEC. Muestra que $\angle PDQ=90°$.

(Problema sugerido por Leonardo Ariel García Morán).

Solución de Katia García Orozco. Sean $\angle ABD=\beta$, $\angle BAD=2\alpha$ y $\angle BCI=\theta$. Como I es incentro, entonces BI es la bisectriz del ángulo $\angle ABC$, CI es la bisectriz del ángulo $\angle BCA$. Entonces, $\angle ABI = \beta = \angle IBC$, $\angle BCI = \theta = \angle ICA$. Por lo tanto, $2\alpha + 2\beta + 2\theta = 180°$. Como E está en el circuncírculo del triángulo ABD, el cuadrilátero $ABED$ es cíclico, por lo que $\angle DBE = \angle EAD = \beta$ y $\angle BAE = \angle BDE = \angle BAD - \angle EAD = 2\alpha - \beta$. También, tenemos que $\angle ADB = \angle AEB = \beta + 2\theta$ ya que $\angle ADB = 180° - \angle BAD - \angle ABD = 180° - 2\alpha - \beta = \beta + 2\theta$. Del cíclico también sabemos que $\angle ABD = \angle AED = \beta$.



Como $\angle ADB = 2\theta + \beta$, entonces $\angle BDC = 2\alpha + \beta$. Además, como $\angle DCI = \theta$ y $\angle DIC = 180° - \angle DCI - \angle IDC$, tenemos que $\angle DIC = 2\alpha + 2\beta + 2\theta - 2\alpha - \beta - \theta = \beta + \theta$.
Como $ID = DP$, entonces $\angle DIP = \angle DPI = \beta + \theta$. Por lo tanto,

$$\angle IDP = 180° - \angle DIP - \angle DPI = 180° - 2(\beta + \theta) = 2\alpha.$$

Pero $\angle IDE = 2\alpha - \beta$, entonces $\angle EDP = \angle IDP - \angle IDE = 2\alpha - (2\alpha - \beta) = \beta$. Como $\angle EDP = \angle AED$, las rectas AE y DP son paralelas, lo cual implica que $\angle PDC = \angle EAD = \beta$.
En el triángulo EDC, tenemos que $\angle EDP = \angle PDC = \beta$ y $\angle ECP = \angle CPD = \theta$. Por lo tanto, P es el incentro del triángulo EDC. Luego, $\angle DEP = \angle PEC = \alpha$.
Como Q está en el circuncírculo del triángulo AEC, tenemos que $AECQ$ es cíclico. Luego, $\angle AEQ = \angle ACQ = \angle AED + \angle DEP = \alpha + \beta$ y $\angle EAC = \beta = \angle EQC$. Como $\angle PDC = \angle PQC = \beta$ entonces $PDQC$ es cíclico y, por lo tanto, $\angle DCQ = \alpha + \beta = \angle DPQ$ y $\angle DCP = \theta = \angle DQP$.
Por último, en triángulo DPQ tenemos que $\angle DPQ = \alpha + \beta$ y $\angle DQP = \theta$. Por lo tanto, $\angle PDQ = 180° - \angle DPQ - \angle DQP = 2\alpha + 2\beta + 2\theta - \alpha - \beta - \theta = \alpha + \beta + \theta = 90°$.

Problema 3. Sea $n \geq 3$ un número entero. Dos jugadores, Ana y Beto, juegan a lo siguiente. Ana etiqueta los vértices de un n-ágono regular con los números del 1 al n, en el orden que ella quiera. Cada vértice debe quedar etiquetado con un número distinto. Luego, se coloca un guajolote en cada uno de los vértices.
Estos guajolotes están entrenados para lo siguiente. Si Beto silba, cada guajolote se

mueve al vértice adyacente que tenga la etiqueta con el número mayor. Si Beto aplaude, cada guajolote se mueve al vértice adyacente que tenga la etiqueta con el número menor.
Beto gana si después de dar algún número de silbidos y aplausos, en el orden que él quiera, logra que todos los guajolotes queden en el mismo vértice. Ana gana si puede etiquetar los vértices de modo que Beto no pueda hacer lo anterior. Para cada $n \geqslant 3$, determina qué jugador tiene una estrategia que garantice su victoria.

(Problema sugerido por Isaías Fernando de la Fuente Jiménez y Víctor Hugo Antonio de la Fuente).

Solución de Karla Rebeca Munguía Romero. Representaremos a los guajolotes con fichas. Para simplificar, consideraremos si Beto silba es como decir "mayor" y si aplaude es como decir "menor". Al principio del juego hay una ficha en cada vértice. Después de que Ana haya etiquetado los vértices, marquemos cada vértice con una segunda etiqueta que diga "mayor" o "menor" de tal manera que la etiqueta marca que tendría que decir Beto para que la ficha se mueva en contra de las manecillas del reloj. Es decir, si una ficha está en un vértice con la etiqueta "mayor", si Beto dice "mayor" entonces la ficha va en contra de las manecillas del reloj y si Beto dice "menor" entonces la ficha va en la dirección de las manecillas del reloj. Esto se puede hacer porque los números en los vértices están fijos. Entonces si 2 fichas están en vértices con la misma palabra, se mueven en la misma dirección sin importar lo que diga Beto.
Demostraremos que si n no es primo (o $n = 2$), entonces Ana puede ganar. Si n es par podemos pintar los vértices de rojo y azul intercalándolos, de forma que la mitad sean rojos y la mitad sean azules. Todas las fichas que estaban en un punto rojo se van a un punto azul y viceversa, así que siempre hay $n/2$ fichas en cada color y Beto no puede ganar. Entonces Ana gana cuando n es par. En general, si n no es primo, sea d un divisor de n tal que $1 < d < n$. Vamos a pintar con d colores en orden. Digamos que los colores son $1, 2, 3, \ldots, d$. Ahora, dividimos los n vértices en n/d secciones donde cada sección consiste de vértices consecutivos. En la primera sección incluimos los números que son $1 \pmod d$ en orden creciente en el sentido de las manecillas del reloj, en la segunda sección incluimos los números que son $2 \pmod d$ de la misma manera, y así sucesivamente. Las etiquetas en todas las secciones son de la forma "mayor", "menor", ..., "menor", "mayor", es decir los extremos de la sección dicen "mayor" y la parte interna dice "menor". Esto es porque si son puntos "internos" entonces al estar en orden creciente con las manecillas del reloj, para moverse en contra de las manecillas del reloj hay que decir "menor", y, si estan en los extremos, entonces si está en el extremo izquierdo, a su izquierda tenemos el número más grande de otra sección y a la derecha el número que sigue en la misma congruencia. Por lo tanto, para moverse a la izquierda, hay que decir "mayor". Es análogo para el punto en la extrema derecha (donde izquierda es en contra de las manecillas del reloj y derecha es en la dirección de las manecillas del reloj). Consideremos fichas de dos secciones distintas que tienen el mismo color. Entonces los dos números tienen la misma etiqueta y sus vecinos tienen la misma etiqueta, entonces nunca se van a encontrar en el mismo lugar esas dos fichas ya que siempre se mueven en la misma dirección. Por lo tanto, Beto no puede ganar.
Ahora supongamos que n es primo impar. Supongamos que Beto no puede ganar. En-

tonces hay dos fichas que llamaremos k y R que no se juntan (esto es porque si dos fichas se juntan, se moverán juntas de allí en adelante y permanecerán juntas). Sea d la distancia entre k y R, donde la distancia entre dos vértices es el número de lados entre ellos contanto en dirección en contra de las manecillas del reloj. Digamos que Beto siempre dice la instrucción (mayor o menor) necesaria para que k se mueva siempre en contra de las manecillas del reloj. En un movimiento, si R fue en contra de las manecillas del reloj, d permanece constante, si no, entonces d disminuye en 2 (al menos que $d = 1$, que haría que d subiera a $n - 1$) pues k avanza 1 y R retrocede 1. Sea S_k la secuencia de instrucciones para mover a k una vuelta completa en contra de las manecillas del reloj y S_R la secuencia análoga para R. Después de dar una vuelta con las instrucciones de S_k, la distancia d cambia a $d - 2c \pmod n$ donde c es la cantidad de instrucciones en posiciones correspondientes de S_k y S_R que fueron distintas. Si S_k y S_R no son idénticas, entonces la distancia disminuye (módulo n) de 2 en 2. Por lo tanto eventualmente llega a 0 (cuando "disminuye" de 1 a $n - 1$, la distancia se vuelve par, entonces puede bajar de 2 en 2 hasta 0). Como asumimos que k y R no se juntan, entonces las instrucciones de S_k deben ser idénticas a las instrucciones de S_R. Llamando d a la distancia inicial, vemos que si $S_k = S_R$, entonces después de d movimientos, k está donde estaba R. Entonces las siguientes d instrucciones deben ser las mismas, ya que son los pasos que dio R. Pero después de las siguientes d instrucciones llega a donde llegó R después de las primeras d, entonces las siguientes d instrucciones son las mismas, y así sucesivamente. Por lo tanto, las n instrucciones son periódicas módulo d. Pero como n es primo y $1 \leq d \leq n - 1$, entonces existe m tal que $md \equiv 1 \pmod{n}$, lo cual implica que las instrucciones tienen periodo 1, que implica que todas las instrucciones deben ser iguales. Sin pérdida de generalidad digamos que todas las instrucciones son "mayor". Entonces para todos los números, tenemos que el vértice adyacente en contra de las manecillas del reloj es mayor. Numeremos los vértices en contra de las manecillas del reloj $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Entonces, $v_1 < v_3 < v_5 < \cdots < v_n < v_2 < v_4 < v_6 < \cdots < v_{n-1} < v_1$, lo cual es imposible. Luego, las instrucciones S_k y S_R no pueden ser idénticas. Por lo tanto, Beto puede ganar.

Problema 4. Sea $n \geq 3$ un número entero. En un juego hay n cajas colocadas en forma circular. Al principio cada caja contiene un objeto que puede ser piedra, papel o tijeras, de manera que no hay dos cajas adyacentes con el mismo objeto, y cada uno de los objetos aparece en al menos una caja.

Como en el juego de piedra, papel y tijeras, decimos que piedra gana a tijeras, tijeras gana a papel y papel gana a piedra.

El juego consiste en mover objetos de una caja a otra siguiendo la siguiente regla:

Se escogen dos cajas adyacentes y un objeto de cada una, de forma que los objetos sean distintos, y se pasa el objeto perdedor a la caja donde está el ganador. Por ejemplo, si de una caja A se escogió piedra y de la caja adyacente, B, se escogió tijeras, entonces tijeras se va a la caja A.

Demuestra que, aplicando la regla un número suficiente de veces, es posible lograr que al final todos los objetos estén juntos en una misma caja.

(Problema sugerido por Víctor Hugo Antonio de la Fuente).

Solución de Alexandra Valdepeña Ramírez. Denotemos a las opciones como s para tijeras, r para piedra (roca) y p para papel. Primero demostremos que existe un lugar donde r, p, s están juntas en algún orden. Supongamos que no: por las condiciones, están todas en al menos una caja, pero nunca consecutivas. Entonces tomemos una p, al lado, sin pérdida de generalidad, tiene una s. Luego esa s, tiene que tener al otro lado una p (si no ya tendríamos p, s, r). Pero luego esa p tiene al lado otra s y así sucesivamente. Claramente esto continua, donde la s necesita otra p, la p otra s por las condiciones del problema. Entonces no tendríamos una r.
Por lo tanto, existe una parte del círculo donde están los 3 objetos consecutivos en algún orden.
Supongamos que están de la forma
$\boxed{\text{s}}\boxed{\text{r}}\boxed{\text{p}}$

Las tijeras se van con la roca y tenemos
$\boxed{}\boxed{\text{sr}}\boxed{\text{p}}$
La roca se va con el papel
$\boxed{}\boxed{\text{s}}\boxed{\text{rp}}$
las tijeras con la roca $\boxed{}\boxed{}\boxed{\text{srp}}$

De esta forma, quedan las tres cosas en una orilla (en la caja de la orilla originalmente solo era de papel). Todas las configuraciones se pueden organizar de forma que queden los tres objetos en una caja de la "orilla". Prueba: $\boxed{\text{s}}\boxed{\text{r}}\boxed{\text{p}}$ ya se probó, es sencillo ver que $\boxed{\text{p}}\boxed{\text{r}}\boxed{\text{s}}$ es lo mismo pero volteado (todas terminarán igual en la caja de papel pero ahora en la izquierda). Para $\boxed{\text{s}}\boxed{\text{p}}\boxed{\text{r}}$ primero movemos la roca con el papel, luego el papel con las tijeras, luego la roca va con el papel como en el diagrama:

$$\boxed{\text{s}}\boxed{\text{p}}\boxed{\text{r}} \Rightarrow \boxed{\text{s}}\boxed{\text{pr}}\boxed{} \Rightarrow \boxed{\text{sp}}\boxed{\text{r}}\boxed{} \Rightarrow \boxed{\text{spr}}\boxed{}\boxed{}.$$

Para $\boxed{\text{r}}\boxed{\text{p}}\boxed{\text{s}}$ tenemos lo mismo pero volteado. Para $\boxed{\text{r}}\boxed{\text{s}}\boxed{\text{p}}$ movemos el papel con la tijera, luego las tijeras con la roca, luego el papel con las tijeras como en el diagrama:

$$\boxed{\text{r}}\boxed{\text{s}}\boxed{\text{p}} \Rightarrow \boxed{\text{r}}\boxed{\text{sp}}\boxed{} \Rightarrow \boxed{\text{rs}}\boxed{\text{p}}\boxed{} \Rightarrow \boxed{\text{rsp}}\boxed{}\boxed{}.$$

Finalmente, $\boxed{\text{p}}\boxed{\text{s}}\boxed{\text{r}}$ es como la anterior pero volteada.
Entonces tenemos que podemos mover cualquier configuración de tres cajas consecutivas con 3 objetos distintos a dos cajas vacías y una caja en la orilla con los 3 objetos. La estrategia para concluir es probar que una vez que existe una caja con los 3 objetos, esta se puede ir recorriendo o "comiendo" los demás objetos. Es decir, todos los objetos se pueden ir a la caja de al lado. Prueba:

- Sin pérdida de generalidad (porque de todas formas los 3 objetos están en la caja) supongamos que la caja de al lado tiene un s. Este s se va a traer al papel, luego el papel a la roca, luego la roca a las tijeras. Ahora tenemos los 3 objetos más uno nuevo en la caja de la orilla.

- Es sencillo ver que funciona porque el objeto va a traer su "opuesto" quien va a traer a uno diferente y una vez que tenemos los 3 podemos atraer cualquier cosa.

- Esto sigue finitamente hasta que llegamos al momento en que todos los objetos quedan en una caja (la otra caja adyacente a las dos vacías que se formaron con los movimientos del inicio).

Problema 5. Una cuarteta de enteros positivos distintos $\{a, b, c, d\}$, se dice que es **pandémica** si hay 2 de ellos tales que su producto es múltiplo del máximo común divisor de los otros 2. Por ejemplo, la cuarteta $\{4, 6, 2, 8\}$ es pandémica pues el máximo común divisor de 2 y 6 es 2, y este divide a $4 \times 8 = 32$.

Encuentra el máximo valor de n, para el cuál toda cuarteta de enteros positivos distintos menores o iguales que n es pandémica.

(Problema sugerido por Isaías Fernando de la Fuente Jiménez y Víctor Hugo Antonio de la Fuente).

Solución de Samantha Ruelas Valtierra. Notemos que si encontramos el menor número n para el cual existe una cuarteta de enteros positivos distintos menores o iguales a n que no es pandémica terminamos, ya que $n-1$ sería la respuesta del problema porque como n es el menor tal que ya no se puede, pues $n-1$ es el mayor en el que se puede. Veamos que necesita una cuarteta para que no sea pandémica: si $\{a, b, c, d\}$ no es pandémica entonces el máximo común divisor de cualesquiera dos no divide a la multiplicación de los otros dos. Entonces:

$$\begin{aligned}
(a,b) = x_1 &\quad\Rightarrow\quad x_1 \nmid cd,\\
(a,c) = x_2 &\quad\Rightarrow\quad x_2 \nmid bd,\\
(a,d) = x_3 &\quad\Rightarrow\quad x_3 \nmid bc,\\
(b,c) = x_4 &\quad\Rightarrow\quad x_4 \nmid ad,\\
(b,d) = x_5 &\quad\Rightarrow\quad x_5 \nmid ac,\\
(c,d) = x_6 &\quad\Rightarrow\quad x_6 \nmid ab.
\end{aligned}$$

Ninguno de los x_i puede ser igual a 1 ya que 1 divide a cualquier número y eso contradice que x_i no divida a los otros dos.

Supongamos que existe un primo p que divide a a, b y c. Notemos que $\{a/p, b/p, c/p, d\}$ sigue siendo pandémica. Tenemos $(a/p, b/p) = (a,b)/p = x_1/p$. Si $x_1/p \mid cd/p$ entonces $x_1 \mid cd$ contradiciendo que $\{a, b, c, d\}$ es pandémica. Similarmente, si $x_2/p \mid bd/p$ o $x_4/p \mid ad/p$, también llegamos a una contradicción. Ahora $(a/p, d) = x_3$ si $p \nmid d$ y $(a/p, d) = x_3/p$ si $p \mid d$. En el caso que $p \mid d$, entonces $(a/p, d) = x_3/p$ y si $x_3/p \mid bc/p^2$ entonces $x_3 \mid bc$, contradiciendo que $\{a, b, c, d\}$ es pandémica. En el caso que $p \nmid d$, $(a/p, d) = x_3$. Si $x_3 \mid bc/p^2$, entonces $x_3 \mid bc$, contradiciendo que $\{a, b, c, d\}$ es pandémica. Para x_5, x_6 es análogo al caso x_3. Entonces, si un primo divide a a, b, c lo podemos dividir de los 3 y obtener una cuarteta más pequeña que también es pandémica. Por lo tanto, podemos seguir dividiendo hasta que llegamos a una cuarteta pandémica $\{a, b, c, d\}$ donde cualquier terna tiene máximo común divisor igual a 1. En particular, si $p \mid a$ y $p \mid b$, entonces $p \nmid c$ y $p \nmid d$.

Para minimizar, asumimos que para cada pareja solo hay un primo que la divide y decimos que $x_i = p_i$ para un primo p_i. Luego, podemos escribir los números de la siguiente manera:

$$a = p_1 p_2 p_3, \quad b = p_1 p_4 p_5, \quad c = p_2 p_4 p_6, \quad d = p_3 p_5 p_6.$$

Como queremos minimizar, podemos asumir que los seis primos son $2, 3, 5, 7, 11, 13$ en algún orden. Para encontrar el mínimo queremos considerar las permutaciones de $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ tales que el número mayor es lo más pequeño posible. Conjeturamos que ese número es 231. Entonces, el número buscado sería 230.
Intentaremos hacer un acomodo con el número mayor que es menor a 231. Notemos que si en algún momento tenemos que elegir entre un número mayor a 231 y uno menor, no tiene sentido escoger el mayor, ya que nos daría una cuarteta con número grande mayor a 231. Sabemos que cada primo debe salir dos veces, luego notemos que multiplicar $11 \cdot 13$ por cualquier número es mayor a 231, entonces eso ya se pasa. Por lo tanto, el 11 no va con el 13. Como cada primo va con otros cuatro y el 11 no va con el 13, el 13 debe aparecer con cada uno de los primos $2, 3, 5, 7$. Haremos una matriz de congruencias; si un primo está en ese número se le pondrá una marca como en el siguiente ejemplo:

	2	3	5	7	11	13
a	X			X		X
b		X	X			X
c		X		X	X	
d	X		X		X	

Notemos que $21 \cdot 13 > 231$, entonces el número divisible entre 7 y 13, debe ser divisible por 2. El otro 13 tendría que estar conectado con 3 y 5 o con 2 y 5. Si lo conectamos con 2 y 5, entonces ya usamos dos 2's y dos 13's entonces a, b son divisibles por $2 \cdot 13$. Por lo tanto, podemos asumir que 13 va con 3 y 5 ($b = 3 \cdot 5 \cdot 13$ y $a = 2 \cdot 7 \cdot 13$). Los otros dos números son divisibles por 11 y al menos uno de ellos es divisible por 7, entonces como $11 \cdot 7 \cdot 5 > 231$ y $11 \cdot 7 \cdot 3 = 231$ si queremos encontrar una cuarteta no-pandémica más chica necesitamos $c = 11 \cdot 7 \cdot 2$. Pero eso nos forzaría a que $d = 3 \cdot 5 \cdot 11$, pero entonces $(b, c) = 15$. Por lo tanto, si tenemos una cuarteta no-pandémica $\{a, b, c, d\}$, entonces $\text{máx}\{a, b, c, d\} \geq 231$. La cuarteta $\{182, 195, 231, 110\}$ no es pandémica, entonces la mínima es con máximo igual a 231. Por lo tanto, la respuesta es 230.

Problema 6. Sea $n \geq 2$ un número entero. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales distintos de 0 que satisfacen la ecuación

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\cdots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right).$$

Encuentra todos los posibles valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(Problema sugerido por Victor Domínguez Silva).

Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega. Como todos los cuadrados son positivos, tenemos que $x_1^2 > 0, x_2^2 > 0, \ldots, x_n^2 > 0$ (no son 0 porque los x_is son distintos de 0). Entonces, si definimos

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\cdots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right),$$

podemos saber que es positivo porque el producto de n términos positivos es positivo ($x_i^2 > 0, x_{i+1}^2 > 0 \Rightarrow x_i^2 + \frac{1}{x_{i+1}^2} > 0$).
Usando la desigualdad MA-MG en cada uno de los términos (se puede hacer porque $x_i^2 > 0, \frac{1}{x_{i+1}^2} > 0$) tenemos

$$\frac{x_i^2 + \frac{1}{x_{i+1}^2}}{2} \geq \sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}^2}},$$

entonces

$$x_i^2 + \frac{1}{x_{i+1}^2} \geq 2\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}^2}}.$$

Si hacemos esto para los n términos, nos va a quedar que

$$P = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\cdots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) \geq 2^n\sqrt{\frac{x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2}{x_2^2 x_3^2 \cdots x_n^2 x_1^2}} = 2^n.$$

Por lo tanto, $P \geq 2^n$.
Ahora, vamos a reescribir a $x_i^2 + \frac{1}{x_{i+1}^2}$ como

$$\frac{(x_i x_{i+1})^2 + 1}{x_{i+1}^2} = \frac{(x_i x_{i+1})^2}{x_{i+1}^2} + \frac{1}{x_{i+1}^2} \geq \frac{(x_i x_{i+1} + 1)^2}{2x_{i+1}^2}. \tag{4}$$

La última desigualdad es por la desigualdad útil que dice $\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} \geq \frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2}$.
Por lo tanto, multiplicando todos los términos tenemos que

$$P = \left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\cdots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) \geq \frac{1}{2^n}\left(\frac{(x_1x_2+1)(x_2x_3+1)\cdots(x_nx_1+1)}{x_1x_2\cdots x_n}\right)^2.$$

Para todas las cuentas hemos usado que $x_{n+1} = x_1$ y en general que $x_{n+k} = x_k$. Podemos notar que $\frac{x_i x_{i+1}+1}{x_{i+1}} = x_i + \frac{1}{x_{i+1}}$. Estos son los términos que se están multiplicando en

$$P = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right).$$

Entonces, usando esta igualdad en (4) tenemos que

$$P \geq \frac{1}{2^n}P^2.$$

Como $P > 0$, podemos dividir entre P y llegar a que $P \leq 2^n$. Como ya sabíamos que $P \geq 2^n$ entonces $P = 2^n$. Para que se dé la igualdad necesitamos que se dé la igualdad en cada una de las desigualdades de la forma

$$x_i^2 + \frac{1}{x_{i+1}^2} \geq 2\sqrt{\frac{x_i^2}{x_{i+1}^2}},$$

entonces tenemos que

$$x_i^2 = \frac{1}{x_{i+1}^2}.$$

Esto es equivalente a que

$$\frac{1}{x_i^2} = x_{i+1}^2 = \frac{1}{x_{i+2}^2}.$$

Por lo tanto, $x_i^2 = x_{i+2}^2$.
Si n es impar, como tenemos $x_i^2 = x_{i+2}^2$, eso es equivalente a $x_i^2 = x_{i+2k}^2$, entonces $x_1^2 = x_{1+(n+1)}^2 = x_2^2$ ya que $n+1$ es par porque n es impar. Entonces $x_1^2 = x_2^2$ y $x_1^2 = 1/x_2^2$. Por lo tanto $x_2^4 = 1$. Como x_2 es real entonces $x_2 = 1$ o $x_2 = -1$. Como $x_i^2 = x_{i+2}^2$ entonces todos los x_i^2 con i impar son iguales y todos los x_i^2 con i par son iguales. Como $x_1^2 = x_2^2$, entonces todos son 1 o todos son -1. Como $x_1 + 1/x_2 > 0$ entonces no pueden ser de signo contrario, por lo tanto $x_1 = x_2 = 1$ o $x_1 = x_2 = -1$. Entonces tenemos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ o $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = -1$. Si todos fueran -1, entonces $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = -2$ y $P = (-2)^n = -2^n \neq 2^n$. Por lo tanto, si n es impar, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$. Es fácil verificar que si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, entonces se cumple la ecuación que queremos.
Si n es par para algún $k > 0$ real, tenemos que

$$x_1^2 = x_3^2 = \cdots = x_{n-1}^2 = k$$

y

$$x_2^2 = x_4^2 = \cdots = x_n^2 = \frac{1}{k}.$$

Si $x_i = -\sqrt{k}$, entonces $x_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{k}}$ daría $x_i + \frac{1}{x_{i+1}} = -\sqrt{k} + \sqrt{k} = 0$ y $P = 0$, que no se puede. Analogamente si $x_i = -\frac{1}{\sqrt{k}}$, $x_{i+1} \neq \sqrt{k}$. Por lo tanto, si uno es negativo todos son negativos y si uno es positivo todos son positivos. Sea r un real distinto de 0 ($r = \sqrt{k}$ o $r = -\sqrt{k}$). Entonces

$$x_1 = x_3 = \cdots x_{n-1} = r$$

y

$$x_2 = x_4 = \cdots = x_n = \frac{1}{r}.$$

Con estos valores nos queda

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_3}\right)\cdots\left(x_n + \frac{1}{x_1}\right) = (2r)\left(\frac{2}{r}\right)(2r)\cdots\left(\frac{2}{r}\right) = 2^n$$

y

$$\left(x_1^2 + \frac{1}{x_2^2}\right)\left(x_2^2 + \frac{1}{x_3^2}\right)\cdots\left(x_n^2 + \frac{1}{x_1^2}\right) = (2r^2)\left(\frac{2}{r^2}\right)^{n/2} = 2^n.$$

Por lo tanto, concluimos que si n es impar entonces

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 1, \ldots, 1)$$

y, si n es par, entonces

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (r, \frac{1}{r}, r, \frac{1}{r}, \ldots, r, \frac{1}{r})$$

para algún número real $r \neq 0$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 13 al 22 de noviembre de 2020 se llevó a cabo la edición número 35 de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, organizada desde Perú de forma virtual, en la que participaron 23 países y un total de 83 estudiantes. La delegación mexicana fue concentrada en Cuernavaca, Morelos, del 15 al 17 de noviembre para presentar los exámenes. En esta ocasión, México obtuvo el segundo lugar de 23 países participantes, a tan solo tres puntos de Perú. Además, se obtuvo la Copa Puerto Rico, premio que se otorga al país con mayor avance en los últimos tres años (en 2018 se obtuvo el cuarto lugar y en 2019 se obtuvo el tercer lugar).

La delegación mexicana estuvo integrada por Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León), Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero) y Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas). Tomás obtuvo medalla de oro con examen perfecto; Pablo, Omar y Daniel obtuvieron medallas de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Luis Eduardo García Hernández (líder), Carlos Jacob Rubio Barrios (tutor), Mauricio Adrián Che Moguel (observador) y Rogelio Valdez Delgado (observador).

A continuación, presentamos los problemas de la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno tal que $AB < AC$. Los puntos medios de los lados AB y AC, son M y N, respectivamente. Sean P y Q puntos en la recta MN tales que $\angle CBP = \angle ACB$ y $\angle QCB = \angle CBA$. La circunferencia circunscrita del triángulo ABP interseca a la recta AC en D ($D \neq A$) y la circunferencia circunscrita del triángulo AQC interseca a la recta AB en E ($E \neq A$). Demuestre que las rectas BC, DP y EQ son concurrentes.

Problema 2. Para cada entero positivo n, se define T_n como el menor entero positivo tal que $1 + 2 + \cdots + T_n$ es múltiplo de n. Por ejemplo, $T_5 = 4$ puesto que 1, $1 + 2$, $1 + 2 + 3$ no son múltiplos de 5, pero $1 + 2 + 3 + 4$ sí es múltiplo de 5.
Determine todos los enteros positivos m tales que $T_m \geq m$.
Nota. Todo entero positivo es múltiplo de sí mismo.

Problema 3. Sea $n \geq 2$ un entero. Una sucesión $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n números enteros se dice *limeña* si

$$\operatorname{mcd}\{a_i - a_j \text{ tal que } a_i > a_j \text{ y } 1 \leq i, j \leq n\} = 1,$$

es decir, el máximo común divisor de todas las diferencias $a_i - a_j$, con $a_i > a_j$, es 1.
Una *operación* consiste en escoger dos elementos a_k y a_ℓ de una sucesión, con $k \neq \ell$, y reemplazar a_ℓ por $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$.
Demuestre que, dada una colección de $2^n - 1$ sucesiones limeñas, cada una formada por n números enteros, existen dos de ellas, digamos β y γ, tales que es posible transformar β en γ mediante un número finito de operaciones.
Notas.

- Las sucesiones $(1, 2, 2, 7)$ y $(2, 7, 2, 1)$ tienen los mismos elementos pero son diferentes.
- Si todos los elementos de una sucesión son iguales, entonces esa sucesión no es limeña.

Segundo día

Problema 4. Demuestre que existe un conjunto $\mathcal{C}$ de 2020 enteros positivos y distintos que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

- Cuando se calcula el máximo común divisor de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.
- Cuando se calcula el mínimo común múltiplo de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.

Problema 5. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2),$$

para cualesquiera números reales x, y.

Problema 6. Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sean H el ortocentro y O el circuncentro del triángulo ABC y, sea P, un punto interior del segmento HO. La circunferencia de centro P y radio PA interseca nuevamente a las rectas AB y AC en los puntos R y S, respectivamente. Denotamos por Q al punto simétrico del punto P con respecto a la mediatriz de BC. Demuestre que los puntos P, Q, R y S pertenecen a una misma circunferencia.

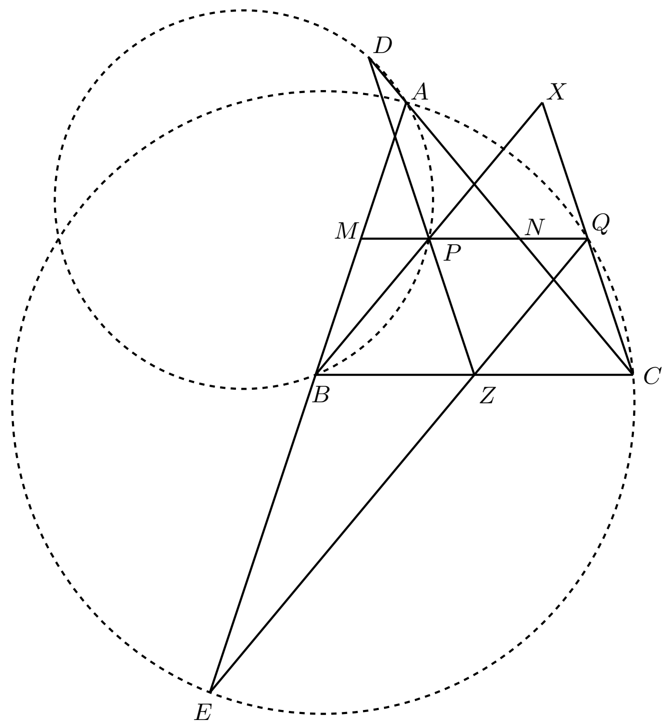
Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Primer día

Solución del problema 1. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero). Sea Z la intersección de las rectas EQ y DP. Si demostramos que Z está sobre el segmento BC, habremos concluido.
Sea X la intersección de BP y CQ. Sean $\beta = \angle CBA$ y $\theta = \angle ACB$. Como $AB < AC$, se tiene que $\beta > \theta$. Además, $\angle QCA = \angle QCB - \angle ACB = \angle CBA - \angle ACB = \beta - \theta$ y $\angle PBA = \angle CBA - \angle CBP = \angle CBA - \angle ACB = \beta - \theta$.
Ahora, demostraremos que el cuadrilátero $PZQX$ es un paralelogramo. Como $APBD$ es cíclico, entonces $\angle PDA = \angle PBA = \beta - \theta = \angle QCA$, lo que implica que PD y QC son paralelas. Por otro lado, como $AECQ$ es cíclico, se tiene que $\angle QEA = \angle QCA = \beta - \theta = \angle PBA$, por lo que PB y ZQ son paralelas. Así, el cuadrilátero $PZQX$ cuenta con dos pares de lados paralelos, por lo que es un paralelogramo.
Como $\angle XBA = \beta - \theta = \angle XCA$, el cuadrilátero $ABCX$ es cíclico; más aun, $\angle XCB = \angle CBA$ y $\angle CBX = \angle ACB$. Así, por criterio ALA de congruencia, los triángulos ABC y XCB son congruentes, lo que indica que AX y BC son paralelas entre sí y paralelas a MN.
Por el teorema de Tales en el triángulo AXB, se puede ver que P es el punto medio de BX. Análogamente, Q es el punto medio de XC. Como $XQZP$ es un paralelogramo, entonces $PZ = XQ = QC$.



Si Z' es la intersección de las rectas DP y BC, entonces el cuadrilátero $PZ'CQ$ es un paralelogramo por tener dos pares de lados opuestos paralelos. Esto significa que $PZ' = QC = PZ$, lo cual implica que $Z = Z'$ pues Z y Z' están del mismo lado respecto a la recta DP. De aquí se concluye que Z está sobre el segmento BC, como se quería.

Solución del problema 2. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). Demostraremos que $T_m \geq m$ si y solo si $m = 2^\alpha$ para algún entero $\alpha \geq 0$; esto es, los enteros positivos m que cumplen la condición del problema son las potencias de 2.
Primero vamos a demostrar que si $m = 2^\alpha$, entonces $T_m \geq m$. Sea n un entero positivo tal que 2^α divide a $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Se sigue que $2^{\alpha+1}$ divide a $n(n+1)$. Por otro lado, $\text{mcd}(n, n+1) = 1$, por lo que $2 \mid n$ o $2 \mid n+1$.
Si $2 \mid n$, entonces $2^{\alpha+1}$ divide a n, por lo que $n+1 > n \geq 2^{\alpha+1}$, esto es, $n \geq 2^{\alpha+1}-1$.
Si $2 \mid n+1$, entonces $2^{\alpha+1}$ divide a $n+1$, de donde se sigue que $n+1 \geq 2^{\alpha+1}$.
En cualquier caso, tenemos que $n \geq 2^{\alpha+1} - 1$, lo que implica que $T_m \geq 2^{\alpha+1} - 1$. Además, como $2^\alpha \geq 1$, resulta que $2^{\alpha+1} = 2^\alpha + 2^\alpha \geq 2^\alpha + 1$ y, por consiguiente, $T_m \geq 2^{\alpha+1} - 1 \geq 2^\alpha = m$, como se quería.
Ahora, demostraremos que si m no es una potencia de 2, entonces $T_m < m$. Supongamos que m es un número impar mayor que 1. Entonces, $1 + 2 + \cdots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2} = m\left(\frac{m-1}{2}\right)$, el cual es divisible por m pues $\frac{m-1}{2}$ es un número entero. De

aquí se sigue que $T_m \leq m - 1 < m$.
Por otra parte, si m es par, entonces $m = 2^{\alpha}k$, donde $\alpha \geq 1$ y k es un número impar mayor que 1. Sea j el menor entero positivo tal que $jk \equiv 1 \pmod{2^{\alpha+1}}$; esto es, j es el inverso multiplicativo de k módulo $2^{\alpha+1}$, el cual existe pues k es impar. Sea $i = \min\left\{2^{\alpha+1} - j, j\right\}$. Si $i \geq 2^{\alpha}$, entonces $2^{\alpha+1} \geq 2^{\alpha}$ y $j \geq 2^{\alpha}$, lo que implica que $j = 2^{\alpha}$. Luego, $jk - 1 = 2^{\alpha}k - 1$ es impar, lo cual no es posible pues $2^{\alpha+1}$ divide a $jk - 1$. Por lo tanto, $i < 2^{\alpha}$.
Si $i = j$, consideremos $n = ik - 1$ (el cual es mayor a 1 pues $k > 1$). Así, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{ik(ik-1)}{2} = ik\left(\frac{ik-1}{2}\right)$, donde $\frac{ik-1}{2}$ es un entero, pues $2^{\alpha+1}$ divide a $ik - 1 = jk - 1$. De aquí se sigue que $k \mid ik$ y $2^{\alpha} \mid \frac{ik-1}{2}$, por lo que $2^{\alpha}k \mid ik\left(\frac{ik-1}{2}\right)$, esto es, $T_m \leq n$. Además, $ik < 2^{\alpha}k = m$, lo que indica que $T_m \leq n < m$.
Si $i = 2^{\alpha+1} - j$, consideremos $n = ik$. Entonces, $1 + 2 + \cdots + n = ik\left(\frac{ik+1}{2}\right)$, donde $\frac{ik+1}{2}$ es un entero, pues

$$ik \equiv (2^{\alpha+1} - j)k \equiv (-j)k \equiv -1 \pmod{2^{\alpha+1}}.$$

De aquí, obtenemos que $k \mid ik$ y $2^{\alpha} \mid \frac{ik+1}{2}$, de donde concluimos que $2^{\alpha}k \mid ik\left(\frac{ik+1}{2}\right)$, esto es, $T_m \leq n$. Además, $ik < 2^{\alpha}k = m$, por lo que $T_m \leq ik < m$, lo que concluye el problema.

Solución del problema 3. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Se empezará demostrando que dentro de las $2^n - 1$ sucesiones limeñas, hay dos que son congruentes módulo 2 término a término. Para esto, nótese que una sucesión de n se puede ver de 2^n formas módulo 2 (pues cada entrada puede ser congruente a 0 o 1 módulo 2). Si todos los números tienen la misma paridad, entonces todas las diferencias entre dos de sus elementos serían pares, lo que contradice que sean sucesiones limeñas. Esto significa que hay $2^n - 2$ opciones de sucesiones limeñas módulo 2. Por el Principio de Casillas, debe haber dos de ellas que término a término tengan la misma paridad. Se mostrará si dos sucesiones limeñas son congruentes módulo 2 término a término, entonces es posible hacer una cantidad finita de pasos para transformar una de ellas en la otra.
Ahora, se probará que si se tiene una sucesión limeña de n elementos, entonces después de aplicarle cualquier operación lo seguirá siendo. Dado que en cada operación únicamente se cambia un término, todas las diferencias que no incluyen a ese término no cambian. Con el fin de llegar a una contradicción, supóngase que se hizo una operación con los elementos a_k y a_ℓ de tal forma que ahora $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$ y que la nueva sucesión no es limeña. Las sucesiones que involucran a a_ℓ ahora son

$$|a'_\ell - a_k| = |2a_k - a_\ell - a_k| = |a_k - a_\ell|$$

y, para $j \neq k, \ell$,

$$|a'_\ell - a_j| = |2a_k - a_\ell - a_j| = |(a_k - a_\ell) + (a_k - a_j)|\,.$$

Como la sucesión no es limeña, existe un número primo p que divide a todas las diferencias. Como una de ellas es $|a'_\ell - a_k| = |a_\ell - a_k|$, entonces $a_\ell \equiv a_k \pmod{p}$. Además, no se cambió nada en las diferencias que no involucran a a'_ℓ, por lo que

$a_k \equiv a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \pmod{p}$. Eso significa que todos los elementos de la sucesión antes de hacer la operación eran divisibles por p, lo que indica que todas las diferencias eran divisibles por p, contradiciendo al hecho de que la sucesión es limeña.

Nótese que si la sucesión β se puede convertir en la sucesión α y la sucesión γ se puede convertir en la sucesión α, entonces la sucesión γ se puede convertir en la sucesión β. En efecto, esto se debe a que las operaciones son revertibles. Si se hace una operación con los elementos a_k y a_ℓ de una sucesión limeña de tal manera que $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$, se puede hacer una operación con los elementos a_k y a'_ℓ de tal forma que $a''_\ell = 2a_k - a'_\ell = 2a_k - (2a_k - a_\ell) = a_\ell$. Así, se podría convertir la sucesión γ en la sucesión α y, después, revertir los pasos que se siguen para convertir β en α, y así convertir γ en β.

Luego, para cada sucesión limeña α, considérese la sucesión α_1 a la cual se puede llegar tomando como sucesión inicial α de tal forma que la suma de los valores absolutos de los elementos sea la mínima posible (en caso de que haya más de una, se elije cualquiera de esas). Esta claramente existe pues la suma mínima de dichos valores absolutos está acotada por 0 y siempre es un entero. Supóngase que hay dos elementos de la sucesión α_1 que tienen el mismo signo, dígase a_i y a_j, de modo que $|a_j| > |a_i|$. Al hacer la operación $a'_j = 2a_i - a_j$, si a_i y a_j son positivos, se tendría que $|a_j| > |a'_j|$ pues $2a_j > 2a_i$, y $a'_j > -a_j$ pues $a'_j = 2a_i - a_j > -a_j$. Cuando a_i y a_j son negativos, también tendríamos que $|a_j| > |a'_j|$ (pues $2a_i > 2a_j$ y $a_i < 0$, implican que $a_j < 2a_i - a_j < -a_j$), lo cual contradice la minimalidad de α_1. De aquí se sigue que cualesquiera dos elementos positivos deben ser iguales y cualesquiera dos negativos también. Si no hay ceros entre los elementos de la sucesión α_1, solo hay dos diferencias posibles: 0 y la diferencia entre un elemento positivo y uno negativo. Esta última es igual a un número mayor o igual que 2, lo que significa que el máximo común divisor de las diferencias es al menos 2, que es una contradicción. Esto significa que debe haber al menos un cero entre los elementos. Al realizar la operación entre el elemento que es igual a cero y un negativo, este último se vuelve positivo y así se convierten todos los números negativos en positivos. Como el valor de la suma de los valores absolutos no cambia con estas operaciones y es mínima, todos los números positivos deben ser iguales (por el argumento dicho anteriormente). Así, cualquier elemento de la sucesión es igual a 0 o a a, donde a es un entero positivo. Como la sucesión es limeña y todas las diferencias son iguales a 0 o a, debe suceder que $a = 1$. Por lo tanto, se llega a una sucesión que tiene únicamente 0's y 1's entre sus entradas.

Finalmente, obsérvese que cualquier operación conserva la congruencia módulo 2 de los elementos de la sucesión pues $2a_k - a_j \equiv -a_j \equiv a_j \pmod{2}$. Así, si se tienen dos sucesiones β y γ que son congruentes entrada a entrada módulo 2, al considerar las sucesiones β_1 y γ_1 que solo tienen 0's y 1's a las que llegan, debe suceder que $\beta_1 = \gamma_1$. Por lo tanto, hay una manera de convertir β a γ por medio de una cantidad finita de operaciones, esto convirtiendo β en $\beta_1 = \gamma_1$ y, después, convirtiendo γ_1 en γ, como se quería.

Segundo día

Solución del problema 4. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero). Escogemos 4040 primos distintos $p_1 < p_2 < \cdots < p_{2020} < q_1 < q_2 < \cdots < q_{2020}$. Sea $A = p_1 p_2 \cdots p_{2020}$.

Vamos a demostrar que el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2020}\}$ cumple las condiciones, donde $a_i = \frac{Aq_i}{p_i}$ para $1 \leq i \leq 2020$. Notemos primero que $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, pues el tener $a_i = a_j$, es equivalente a $\frac{Aq_i}{p_i} = \frac{Aq_j}{p_j}$, es decir, $q_i p_j = q_j p_i$ lo cual es falso, pues son primos distintos. Además todos son enteros, pues $p_i \mid A$ para cada $1 \leq i \leq 2020$.

Notemos que, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, 2020\}$, $i \neq j$, se tiene que

$$\text{mcd}(a_i, a_j) = \text{mcd}(\frac{Aq_i}{p_i}, \frac{Aq_j}{p_j}) = \frac{A}{p_i p_j},$$

ya que $\frac{A}{p_i p_j} \mid a_i, a_j$ pero $q_i \nmid a_j$, $p_i \nmid q_i$, $q_j \nmid a_i$ y $p_j \nmid q_j$.

Por lo tanto, si tuviéramos $\text{mcd}(a_i, a_j) = \text{mcd}(a_\ell, a_m)$ con $(i, j) \neq (\ell, m)$, debería ocurrir que $\frac{A}{p_i p_j} = \frac{A}{p_\ell p_m}$ lo cual implica que $\ell = i, m = j$ o $\ell = j, m = i$, es decir, serían la misma pareja. Entonces la condición 1 se cumple.

Notemos que $\text{mcm}(a_i, a_j) = \text{mcm}(\frac{Aq_i}{p_i}, \frac{Aq_j}{p_j}) = Aq_i q_j$. En efecto $\frac{A}{p_i} \mid a_i$, $\frac{A}{p_j} \mid a_j$ y entonces $A \mid \text{mcm}(a_i, a_j)$. También, $q_i \mid a_i$ y $q_j \mid a_j$, y como $\text{mcd}(A, q_i) = \text{mcd}(A, q_j) = 1$, tenemos que $Aq_i q_j \mid \text{mcm}(a_i, a_j)$, por lo cual $Aq_i q_j \leq \text{mcm}(a_i, a_j)$. Pero además $a_i, a_j \mid Aq_i q_j$, lo que implica que $Aq_i q_j \geq \text{mcm}(a_i, a_j)$, de donde se concluye que $\text{mcm}(a_i, a_j) = Aq_i q_j$.

Si tuviéramos $\text{mcm}(a_i, a_j) = \text{mcm}(a_\ell, a_m)$ con $(i, j) \neq (\ell, m)$, debería ocurrir que $Aq_i q_j = Aq_\ell q_m$, es decir, $q_i q_j = q_\ell q_m$, lo cual implica que $\ell = i, m = j$ o $\ell = j, m = i$, es decir, serían la misma pareja. Entonces la condición 2 también se cumple y el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2020}\}$ satisface el problema.

Solución del problema 5. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). Sea $P(x, y)$ la afirmación: "los números reales x y y satisfacen la ecuación $f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2)$". Si f cumple la ecuación, entonces $P(x, y)$ es verdadera para cualesquiera números reales x, y.

El enunciado $P(0, y)$ es $f(0) + f(0)y = y + f(0)$ y, tomando $y \neq 0$, tenemos que

$$f(0) = 1. \tag{5}$$

$P(1, 1)$ es $f(f(0)) + f(1) = 2 + f(1)$, que por (5) es $f(1) + f(1) = 2 + f(1)$, entonces

$$f(1) = 2. \tag{6}$$

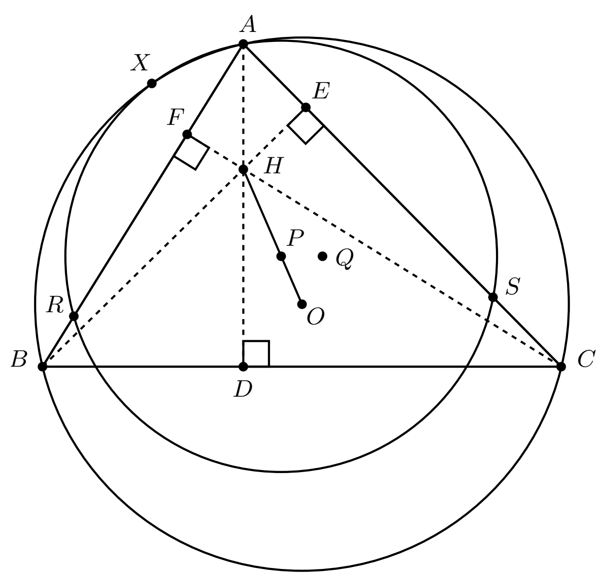
$P(1, y)$ es $f(f(1-y)) + yf(1) = y + 1 + f(1)$, que por (6) es $f(f(1-y)) = y + 3 - 2y = 3 - y$. Sustituyendo y por $1 - x$ en esta última ecuación obtenemos que

$$f(f(x)) = x + 2. \tag{7}$$

Por (7), f es inyectiva, pues si $f(x) = f(y)$ entonces $f(f(x)) = f((y))$, por lo que $x + 2 = y + 2$, y así $x = y$. También es suprayectiva, pues si r es un real, entonces

$f(f(r-2)) = r$. Por lo tanto, f es biyectiva.
Sea f^{-1} la función inversa de f. Es decir, para cada real x, $f^{-1}(x)$ es el único real tal que $f(f^{-1}(x)) = x$. Ahora definamos para cada real x el número $a_x = x - f^{-1}(x) = x - f(x-2)$. Luego $f(x - a_x) = f(f(x-2)) = x$.
$P(x, a_x)$ es $f(xf(x - a_x)) + a_x f(x) = x + a_x + f(x^2)$, y por lo anterior esto es $f(x^2) + a_x f(x) = x + a_x + f(x^2)$, y esta última igualdad, escribiendo $f(x - a_x)$ en vez de x obtenemos que $a_x f(f(x - a_x)) = x + a_x$, esto es, $a_x(x - a_x + 2) = x + a_x$. Simplificando esta última ecuación, obtenemos que $x(a_x - 1) = a_x(a_x - 1)$, lo cual implica que $x = a_x$ o $a_x = 1$.
Si $x = a_x$ entonces $f(0) = x$. Por (5) esto implica que $x = 1$ y $f(x-1) = x$. Si $a_x = 1$ entonces $f(x-1) = x$, y en cualquier caso $f(x-1) = x$ para todo número real x. Así, si f cumple la ecuación funcional, se tiene que $f(x) = x + 1$ para cada número real x.
Finalmente, es fácil verificar que si $f(x) = x + 1$ para todo número real x, entonces $f(x)$ satisface la ecuación funcional y, por lo tanto, es la única solución.

Solución del problema 6. (Solución de Pablo Alhui Valeriano Quiroz). Sea X el reflejado de A respecto a OH. Entonces OP es mediatriz de AX, lo que implica que $PA = PX$ y $OA = OX$.

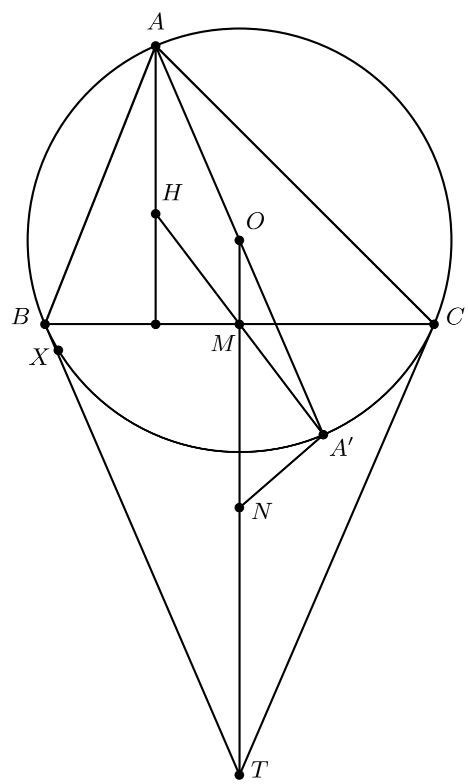


Como O es el circuncentro de ABC y P es el de ARS, X es la segunda intersección de estos últimos dos circuncírculos. Dado esto, como BR y CS se cortan en A, debemos tener que X es el centro de la similitud que manda BR a CS (ABC es escaleno y así $X \neq A$). Como P y O son los respectivos circuncentros de BXC y RXS, son puntos correspondientes en dicha similitud.
Sea K el circuncentro del triángulo RPS. Si demostramos que K está sobre la mediatriz de BC, como Q y P son reflejados con respecto a la mediatriz de BC, tendremos

que $KQ = KP = KR = KS$, es decir, P, Q, R, S estarán todos sobre la circunferencia con centro K y radio KP, por lo que acabaríamos el problema. Sea N el circuncentro del triángulo OBC, que al igual que O está sobre la mediatriz de BC. Queremos mostrar entonces que K, N, O son colineales.

Como K y N son puntos correspondientes en la similitud que manda el triángulo XRS al triángulo XBC, así como lo son R y B, tenemos que los triángulos XRB y XKN son semejantes y, en particular, tenemos que $\angle XBA = \angle XBR = \angle XNK$. Si probamos que $\angle XNO = \angle XNK$, que por lo anterior es equivalente a probar que $\angle XNO = \angle XBA$, acabamos.

Para ello, sean M el punto medio de BC, A' el punto diametralmente opuesto a A en el circuncírculo del triángulo ABC y T la intersección de las tangentes por B y C al circuncírculo del triángulo ABC.



Tenemos que $\angle XBA = \angle XA'A$, por lo que queremos ver que $\angle XA'A = \angle XNO$. Por lo tanto, si demostramos que $XNA'O$ es cíclico, acabamos. Esto pasa si y solo si $\angle OXA' = \angle ONA'$. Pero $\angle AXA' = 90°$ y, en consecuencia, $\angle OXA' = 90° - \angle AXO$. De $OA = OX$ obtenemos que $\angle AXO = \angle XAO$ y, como A y X son reflejados respecto a OH, se tiene que $90° - \angle AXO = \angle HOA$, por lo que $\angle AXO = 90° - \angle HOA$.

Queremos ver entonces que $\angle ONA$ es igual a $\angle OXA' = 90° - \angle AXO = \angle HOA$. Para esto basta mostrar que los triángulos HAO y $A'ON$ son semejantes. Como ON

es paralela a AH, ya tenemos que $\angle HAO = \angle NOA'$. Queda ver que $\frac{HA}{AO} = \frac{A'O}{ON}$ para concluir con el criterio de semejanza LAL.
Como T es la intersección de las tangentes, tenemos que $\angle OBT = 90° = \angle OCT$, y entonces T es diametralmente opuesto a O en el circuncírculo del triángulo OBC. Luego, O, N, T son colineales y $OT = 2ON$, lo que implica que $ON = \frac{1}{2}OT$. Tomando en cuenta también que $AO = \frac{1}{2}AA'$, tenemos que

$$\frac{HA}{AO} = \frac{A'O}{ON} \iff \frac{HA}{\frac{1}{2}AA'} = \frac{A'O}{\frac{1}{2}OT} \iff \frac{HA}{AA'} = \frac{A'O}{OT}.$$

Acabamos si demostramos la última igualdad. Para ver esto, mostraremos que los triángulos HAA' y $A'OT$ son semejantes. Pero, como OM es paralela a AH y, es conocido que H, M, A' son colineales (siendo M el punto medio de HA'), tenemos que los triángulos MOA' y HAA' son semejantes. Por lo tanto, lo que queremos ver es que los triángulos MOA' y $A'OT$ son semejantes. Estos últimos triángulos comparten $\angle O$.
Entonces queda ver que $\frac{OM}{OA'} = \frac{OA'}{OT}$ para concluir por el criterio de semejanza LAL. Esto pasa si y solo si $OA'^2 = OM \cdot OT$. Pero $OA'^2 = OC^2$ y $\angle OCT = 90° = \angle OMC$ (y $\angle MOC = \angle COT$). Por lo tanto, los triángulos OMC y OCT son semejantes, de donde $\frac{OM}{OC} = \frac{OC}{OT}$ y se sigue que $OM \cdot OT = OC^2 = OA^2$. Se deduce subsecuentemente que $OM \cdot OT = OA^2$, el triángulo MOA' es semejante al triángulo $A'OT$, el triángulo HAA' es semejante al triángulo $A'OT$, el triángulo HAO es semejante al triángulo $A'ON$, el cuadrilátero $OXNA'$ es cíclico y, finalmente, $PQRS$ es cíclico, como queríamos probar.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3. *Si p es un número primo de la forma $4k + 3$ y p divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces p divide a cada uno de a y b.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las Casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 19 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez