SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Agosto de 2021

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2021, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, es lograr una publicación verdaderamente útil. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.

Pasando al contenido, destaca el artículo *La desigualdad del reacomodo, una desigualdad poderosa*, de Carlos Jacob Rubio Barrios. En él, se enuncia y se demuestra la desigualdad del reacomodo y se muestra su utilidad en la solución de problemas de olimpiada, así como en la demostración de otras desigualdades clásicas como son la desigualdad media armónica-media geométrica-media aritmética, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Tchebyshev. Esperamos que este artículo sea de utilidad para todos los lectores.

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este tercer número del año 2021, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel III del Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de octubre de 2020 de forma virtual.

También presentamos los problemas con soluciones del examen semifinal estatal de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, que sirve como examen de selección de las preselecciones estatales en los estados que lo deseen aplicar.

Para los más pequeños hemos incluido el examen de la tercera etapa del nivel I, de la Olimpiada de Matemáticas para Educación Básica de la Ciudad de México que se llevó a cabo en el mes de marzo de 2021. Agradecemos a Denisse Escobar, delegada de la OMMEB en la Ciudad de México, por habernos compartido el examen.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico y de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2021, las cuales se llevaron a cabo en los meses de marzo y abril de 2021, respectivamente, a distancia.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2002. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2021-2022 y, para el 1° de julio de 2022, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2021. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2021 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2022) y a la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2022).

De entre los concursantes nacidos en 2005 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2022).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2022.

La desigualdad del reacomodo, una desigualdad poderosa

Por Carlos Jacob Rubio Barrios

Nivel Avanzado

Consideremos dos conjuntos de números reales $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. De entre todas las permutaciones (a'_j) de (a_j) y (b'_j) de (b_j), ¿cuál pareja de permutaciones maximiza la suma $\sum a'_j b'_j$ y cual pareja de permutaciones la minimiza? La respuesta a esta pregunta está contenida en el siguiente resultado conocido como *desigualdad del reacomodo*.

Teorema (Desigualdad del reacomodo). Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ (o $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$) dos sucesiones de números reales. Si $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ es cualquier permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j} \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \qquad (1)$$

Por lo tanto, la suma $\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$ es máxima cuando las dos sucesiones (a_j) y (b_j) están ordenadas de manera similar (esto es, cuando ambas son no-decrecientes o cuando ambas son no-crecientes). Y la suma es mínima cuando (a_j) y (b_j) están ordenadas de forma opuesta (esto es, una de ellas es creciente y la otra es decreciente).

Demostración. Asumiremos que ambas sucesiones (a_j) y (b_j) son no-decrecientes; la prueba es similar en el otro caso. Supongamos que $(a'_j) \neq (a_j)$. Sea r el mayor índice tal que $a'_r \neq a_r$, esto es, $a'_r \neq a_r$ y $a'_j = a_j$ para $r < j \leq n$. Esto implica que a'_r está en el conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}\}$ y $a'_r < a_r$. Más aún, esto también muestra que $a'_1, a'_2, \ldots, a'_r$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Luego, podemos encontrar índices

$k < r$ y $\ell < r$ tales que $a'_k = a_r$ y $a'_r = a_\ell$. Se sigue que

$$a'_k - a'_r = a_r - a_\ell \geq 0, \quad b_r - b_k \geq 0.$$

Ahora intercambiamos a'_r y a'_k para obtener una permutación $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ de a'_1, $a'_2, \ldots, a'_n$; luego

$$\begin{cases} a''_j = a'_j & \text{si} \quad j \neq r, k \\ a''_r = a'_k = a_r, & \\ a''_k = a'_r = a_\ell. & \end{cases}$$

Consideremos las sumas

$$S'' = a''_1 b_1 + a''_2 b_2 + \cdots + a''_n b_n, \quad S' = a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} S'' - S' &= \sum_{j=1}^{n} (a''_j - a'_j) b_j = (a''_k - a'_k) b_k + (a''_r - a'_r) b_r \\ &= (a'_r - a'_k) b_k + (a'_k - a'_r) b_r = (a'_k - a'_r)(b_r - b_k). \end{aligned}$$

Como $a'_k - a'_r \geq 0$ y $b_r - b_k \geq 0$, concluimos que $S'' \geq S'$. Observemos que la permutación $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ tiene la propiedad de que $a''_j = a'_j = a_j$ para $r < j \leq n$ y $a''_r = a'_k = a_r$. De esta forma, podemos considerar la permutación (a''_j) en lugar de (a'_j) y repetimos el procedimiento anterior. Después de a lo más $n-1$ pasos, obtenemos la permutación original (a_j) a partir de (a'_j). En cada paso, la suma correspondiente es no-decreciente. Por lo tanto, se sigue que

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n. \tag{2}$$

Para obtener la otra desigualdad, pongamos

$$c_j = a'_{n+1-j}, \quad d_j = -b_{n+1-j}.$$

Entonces, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Usando la desigualdad (2) para las sucesiones (c_j) y (d_j), obtenemos que

$$c_1 d_1 + c_2 d_2 + \cdots + c_n d_n \leq a_1 d_1 + a_2 d_2 + \cdots + a_n d_n.$$

Sustituyendo los valores de c_j y d_j, obtenemos que

$$-\sum_{j=1}^{n} a'_{n+1-j} b_{n+1-j} \leq -\sum_{j=1}^{n} a_j b_{n+1-j},$$

esto es,

$$a'_1 b_1 + a'_2 b_2 + \cdots + a'_n b_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1, \tag{3}$$

que es la segunda desigualdad.
No es difícil ahora determinar las condiciones bajo las cuales se dan las igualdades

en las desigualdades anteriores. Si para cada par k, ℓ con $1 \leq k < \ell \leq n$, o bien $a'_k = a'_\ell$ o $a'_k > a'_\ell$ y $b_k = b_\ell$, entonces se sostiene la igualdad en (2). Una condición similar se cumple para la igualdad en (3): para cada k, ℓ con $1 \leq k < \ell \leq n$, o bien $a'_{n+1-k} = a'_{n+1-\ell}$ o $a'_{n+1-k} > a'_{n+1-\ell}$ y $b_{n+1-k} = b_{n+1-\ell}$. $\square$

Corolario 1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales y sea $b_1, b_2, \ldots, b_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{j=1}^{n} a_i^2,$$

con la igualdad si y solo si $(a_j) = (b_j)$.

Demostración. Sea $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$. Entonces, podemos encontrar una función biyectiva σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ sobre sí mismo tal que $a'_j = a_{\sigma(j)}$ para $1 \leq j \leq n$, esto es, σ es una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $b'_j = b_{\sigma(j)}$. Entonces, $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ es una permutación de $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Aplicando la desigualdad del reacomodo a $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ y $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j \leq \sum_{j=1}^{n} (a'_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Por otro lado, observemos que

$$\sum_{j=1}^{n} a'_j b'_j = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)} b_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j,$$

ya que σ es una biyección de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^2.$$

Supongamos que se da la igualdad en la desigualdad y que $(a_j) \neq (b_j)$. Entonces, $(a'_j) \neq (b'_j)$. Sea k el índice más grande tal que $a'_k \neq b'_k$, esto es, $a'_k \neq b'_k$ y $a'_j = b'_j$ para $k < j \leq n$. Sea m el menor entero tal que $a'_k = b'_m$. Si $m > k$, entonces $b'_m = a'_m$ y, por lo tanto, $a'_k = a'_m$. Esto implica que $a'_k = a'_{k+1} = \cdots = a'_m$ y, en consecuencia, $b'_{k+1} = \cdots = b'_m$. Pero ahora tenemos un bloque de $m+1-k$ elementos iguales entre los a'_i's y $m-k$ elementos entre los b'_i's. Se sigue que existe $m_1 > m$ tal que $a'_k = b'_{m_1}$. Usando a m_1 como pivote, obtenemos que $a'_k = a'_{k+1} = \cdots = a'_m = \cdots = a'_{m_1}$ y $b'_{k+1} = \cdots = b'_m = \cdots b'_{m_1}$. Este proceso no puede continuar indefinidamente. Concluimos que $a'_k = b'_\ell$ para algún $\ell < k$, lo cual implica que $m < k$.
Es claro que $b'_m \neq b'_k$ por la elección de k. Sabemos que la igualdad se sostiene si y solo si para cualesquiera dos índices $r \neq s$, o bien $a'_r = a'_s$ o $b'_r = b'_s$. Como $b'_m \neq b'_k$, debemos tener $a'_m = a'_k$. Pero entonces tenemos que $a'_m = a'_{m+1} = \cdots = a'_k$. Usando la minimalidad de m, vemos que $k-m+1$ elementos iguales $a'_m, a'_{m+1}, \ldots, a'_k$ deben

estar entre $b'_m, b'_{m+1}, \ldots, b'_n$ y, como b'_k es distinto de a'_k, debemos tener que $a'_k = b'_\ell$ para algún $\ell > k$. Ahora, usando que $b'_\ell = a'_\ell$, obtenemos que

$$a'_m = a'_{m+1} = \cdots = a'_k = \cdots = a'_\ell.$$

Luego, el número de elementos iguales aumentó a $\ell - m + 1 > k - m + 1$. Como este proceso no puede continuar de manera indefinida, concluimos que $(a'_j) = (b'_j)$. Se sigue ahora que $(a_j) = (b_j)$. $\square$

Corolario 2. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} \geq n,$$

con la igualdad si y solo si $(a_j) = (b_j)$.

Demostración. Sea $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tal que $a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n$. Como en la prueba del Corolario 1, podemos encontrar una permutación σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a'_j = a_{\sigma(j)}$ para $1 \leq j \leq n$. Definamos $b'_j = b_{\sigma(j)}$. Entonces, (b'_j) es una permutación de (a'_j). Usando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} b'_j \left(-\frac{1}{a'_j} \right) \leq \sum_{j=1}^{n} a'_j \left(-\frac{1}{a'_j} \right) = -n.$$

Esto prueba la desigualdad. La condición para la igualdad se puede obtener como se hizo en la prueba del Corolario 1. $\square$

A continuación veremos algunas aplicaciones de la desigualdad del reacomodo en la solución de problemas de olimpiada.

Ejemplo 1. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^4 b + b^4 c + c^4 a.$$

Solución. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \geq b \geq c > 0$ (como la desigualdad es cíclica debemos también considerar el caso $c \geq b \geq a$). Entonces, $a^4 \geq b^4 \geq c^4$. Aplicando la desigualdad derecha en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que $aa^4 + bb^4 + cc^4 \geq ba^4 + cb^4 + ac^4$, que es la desigualdad deseada.
Si $c \geq b \geq a > 0$, entonces $c^4 \geq b^4 \geq a^4$. Aplicando la desigualdad derecha en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que $cc^4 + bb^4 + aa^4 \geq ac^4 + cb^4 + ba^4$, que es la desigualdad deseada.

Ejemplo 2. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que:

$$\frac{a^2 + c^2}{b} + \frac{b^2 + a^2}{c} + \frac{c^2 + b^2}{a} \geq 2(a + b + c).$$

Solución. Como la desigualdad es simétrica, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $a \geq b \geq c > 0$. Entonces, $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ y $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.
Aplicando la desigualdad izquierda en la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = a^2 \cdot \frac{1}{b} + b^2 \cdot \frac{1}{c} + c^2 \cdot \frac{1}{a} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c$$

y también

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} = a^2 \cdot \frac{1}{c} + b^2 \cdot \frac{1}{a} + c^2 \cdot \frac{1}{b} \geq a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos la desigualdad deseada.

Ejemplo 3. Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{x^2 - z^2}{y + z} + \frac{y^2 - x^2}{z + x} + \frac{z^2 - y^2}{x + y} \geq 0.$$

Solución. La desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{z^2}{y+z} + \frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{x+y}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $x \geq y \geq z > 0$ (como la desigualdad es cíclica, también consideraremos el caso $z \geq y \geq x$). Entonces, $x^2 \geq y^2 \geq z^2$ y $\frac{1}{y+z} \geq \frac{1}{z+x} \geq \frac{1}{x+y}$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} \geq \frac{z^2}{y + z} + \frac{x^2}{z + x} + \frac{y^2}{x + y}.$$

Si ahora suponemos que $z \geq y \geq x$, entonces $z^2 \geq y^2 \geq x^2$ y $\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{x+z} \geq \frac{1}{z+y}$.
Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} &= z^2 \cdot \frac{1}{x + y} + x^2 \cdot \frac{1}{y + z} + y^2 \cdot \frac{1}{z + x} \\
&\geq z^2 \frac{1}{y + z} + x^2 \cdot \frac{1}{z + x} + y^2 \cdot \frac{1}{x + y} \\
&= \frac{z^2}{y + z} + \frac{x^2}{z + x} + \frac{y^2}{x + y}.
\end{aligned}$$

En cualquier caso, se obtiene la desigualdad deseada. La igualdad se sostiene si y solo si $x = y = z$.

Ejemplo 4. Sean x, y, z números reales positivos. Demostrar que:

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

Solución. Como la desigualdad es simétrica, podemos asumir que $x \geq y \geq z > 0$. Entonces, $x^3 \geq y^3 \geq z^3$ y $\frac{1}{yz} \geq \frac{1}{zx} \geq \frac{1}{xy}$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy} &= x^3\cdot\frac{1}{yz}+y^3\cdot\frac{1}{zx}+z^3\cdot\frac{1}{xy}\\ &\geq x^3\cdot\frac{1}{xy}+y^3\cdot\frac{1}{yz}+z^3\cdot\frac{1}{zx}=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}. \qquad (4)\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq x+y+z. \qquad (5)$$

Como $x\geq y\geq z>0$, tenemos que $x^2\geq y^2\geq z^2$ y $\frac{1}{z}\geq\frac{1}{y}\geq\frac{1}{x}$.
Por la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{x^2}{x}+\frac{y^2}{y}+\frac{z^2}{z}=x+y+z.$$

El caso cuando $z\geq y\geq x$ es análogo al anterior.
Luego, de (4) y (5) obtenemos que $\frac{x^3}{yz}+\frac{y^3}{zx}+\frac{z^3}{xy}\geq x+y+z$. La igualdad se da si y solo si $x=y=z$.

Ejemplo 5. Sean x,y,z números reales positivos. Demostrar que

$$\sum(z+x)(x+y)(y+z-x)(z-x)\geq 0,$$

donde la suma es considerada cíclicamente sobre x,y,z.

Solución. Pongamos $z+x=2a$, $x+y=2b$ y $y+z=2c$. Resolviendo este sistema de ecuaciones en x,y,z, obtenemos que $x=a+b-c$, $y=b+c-a$ y $z=c+a-b$ y la desigualdad es equivalente a la desigualdad

$$\sum ab(3c-a-b)(c-b)\geq 0, \qquad (6)$$

donde la suma se considera cíclicamente sobre a,b,c.
Como x,y,z son números reales positivos, tenemos que a,b,c son las longitudes de los lados de un triángulo.
Si $a\leq b\leq c$, entonces

$$\frac{s-2a}{a}\geq\frac{s-2b}{b}\geq\frac{s-2c}{c},$$

donde $2s=a+b+c$.
Si $b\leq a\leq c$, entonces

$$\frac{s-2b}{b}\geq\frac{s-2a}{a}\geq\frac{s-2c}{c}.$$

En cualquier caso, aplicando la desigualdad del reacomodo obtenemos que

$$a\frac{(s-2a)}{a}+b\frac{(s-2b)}{b}+c\frac{(s-2c)}{c}\leq a\frac{(s-2b)}{b}+b\frac{(s-2c)}{c}+c\frac{(s-2a)}{a},$$

esto es,

$$\frac{(c-a)(s-2a)}{a}+\frac{(a-b)(s-2b)}{b}+\frac{(b-c)(s-2c)}{c}\geq 0.$$

Simplificando, obtenemos la desigualdad (6).

Ejemplo 6. (Examen selectivo de la India para la IMO de 1997). Sean a, b y c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Solución. La desigualdad se puede reescribir en la forma

$$\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1}{b(1+c)}+\frac{ac}{1+c}\right)+\left(\frac{1}{c(1+a)}+\frac{ab}{1+a}\right)\geq 3,$$

esto es,

$$\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{ab}{1+a}\right)+\left(\frac{1}{b(1+c)}+\frac{bc}{1+b}\right)+\left(\frac{1}{c(1+a)}+\frac{ac}{1+c}\right)\geq 3. \tag{7}$$

Observemos que

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{ab}{1+a}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}.$$

Si $\frac{1}{a}\geq b$, entonces $\frac{1+a}{a}\geq 1+b$ y, por consiguiente, $\frac{1}{1+b}\geq\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$.
Si $\frac{1}{a}\leq b$, entonces $\frac{1+a}{a}\leq 1+b$ y, por consiguiente, $\frac{1}{1+b}\leq\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$.
Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+b}+b\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}\geq\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{a}}+b\cdot\frac{1}{1+b}=\frac{1}{1+a}+\frac{b}{1+b}. \tag{8}$$

De manera análoga, con los otros sumandos obtenemos que

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1+c}+c\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{b}}\geq\frac{1}{1+b}+\frac{c}{1+c}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{1+a}+a\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{c}}\geq\frac{1}{1+c}+\frac{a}{1+a}. \tag{10}$$

Finalmente, sumando las desigualdades (8), (9) y (10), obtenemos la desigualdad (7).

Ejemplo 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Demostrar que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Solución. Observemos que la suma del lado izquierdo de la desigualdad es simétrica en las a_j's y, por lo tanto, podemos suponer que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Esto implica que

$$s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n$$

y

$$\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}.$$

Para cualquier k, consideremos la permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ definida por

$$b_j = \begin{cases} a_{k+j-1} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n-k+1, \\ a_{k+j-1-n} & \text{si} \quad n-k+2 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Usando la desigualdad del reacomodo, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{a_k}{s-a_1} + \frac{a_{k+1}}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_{n+k-1}} + \\ + \frac{a_1}{s-a_{n+k}} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{s-a_n} \end{aligned}$$

para cada k. Sumando ahora sobre k, con $2 \leq k \leq n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} (n-1)\left(\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n}\right) &\geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s-a_j}\left(\sum_{\ell \neq j} a_\ell\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{s-a_j}{s-a_j} = n, \end{aligned}$$

lo cual implica que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{s-a_j} \geq \frac{n}{n-1}$.

Ejemplo 8. (Estados Unidos, 1974). Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}.$$

Solución. Si x, y son números reales positivos tales que $x \leq y$, entonces $\ln x \leq \ln y$ (la función logaritmo natural es no decreciente). Luego, por la desigualdad del reacomodo tenemos que

$$x \ln x + y \ln y \geq x \ln y + y \ln x.$$

Como la función exponencial es no decreciente, $e^{x \ln x + y \ln y} \geq e^{x \ln y + y \ln x}$, esto es, $x^x y^y \geq x^y y^x$. Por lo tanto, tenemos que

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \quad b^b c^c \geq b^c c^b, \quad c^c a^a \geq c^a a^c.$$

Multiplicando estas tres desigualdades, resulta que

$$(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

Multiplicando esta desigualdad de ambos lados por $a^a b^b c^c$, obtenemos que

$$(a^a b^b c^c)^3 \geq a^{b+c+a} b^{c+a+b} c^{a+b+c},$$

de donde se sigue que $a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$.

Ejemplo 9. (IMO, 1995). Sean a, b, c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Como la expresión del lado izquierdo de la desigualdad es simétrica, podemos suponer que $a \geq b \geq c$. Sean $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$. Como $abc = 1$, tenemos también que $xyz = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.\end{aligned}$$

Como $c \leq b \leq a$, tenemos que $x \leq y \leq z$, lo cual implica que $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}$. Por ejemplo, $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x}$ si y solo si $y^2 + yz \geq xz + x^2$ si y solo si $(y-x)(x+y+z) \geq 0$. Aplicando la desigualdad del reacomodo, obtenemos las desigualdades:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y}, \\ \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y}.\end{aligned}$$

Sumando término a término estas dos desigualdades obtenemos que

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}\right) \\ &= 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \\ &\geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y} + \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y} \\ &= x+y+z \\ &\geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad es por MG-MA. El resultado ahora es inmediato.

Algunas desigualdades clásicas vía la desigualdad del reacomodo

Observemos que en la desigualdad del reacomodo no es necesario que los a_i's y los b_i's sean positivos. Esto a menudo no sucede con otras desigualdades. Por ejemplo, en la desigualdad MH-MG-MA (media armónica - media geométrica - media aritmética) es necesario que los números sean positivos. Esta es una razón de que la desigualdad del reacomodo sea un resultado sorprendentemente fuerte. En particular, puede ser usado para deducir varias desigualdades clásicas.

A continuación usaremos la desigualdad del reacomodo para demostrar algunas desigualdades clásicas como la desigualdad MH-MG-MA, la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad de Tchebyshev.

Teorema. (Desigualdad MH-MG-MA). Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos. Entonces

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Las igualdades se sostienen si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Demostración. Sean $G = (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$ y $\alpha_k = \dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{G^k}$ para $1 \leq k \leq n$. Ahora, hagamos

$$\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_3, \ldots, \beta_{n-1} = \alpha_n, \beta_n = \alpha_1.$$

Aplicando el Corolario 2, obtenemos que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} = \frac{(a_1a_2\cdots a_{i+1})/G^{i+1}}{(a_1a_2\cdots a_i)/G^i} = \frac{a_{i+1}}{G}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{a_1}{G}.$$

Por lo tanto,

$$n \leq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{G} + \frac{a_1}{G} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{G}.$$

Aquí la igualdad se sostiene si y solo si $(\alpha_i) = (\beta_i)$ que es equivalente a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$, lo cual a su vez es equivalente a $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.
Usando el Corolario 2, tenemos también que

$$n \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{G}{a_2} + \frac{G}{a_3} + \cdots + \frac{G}{a_n} + \frac{G}{a_1}.$$

Esto implica que

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq G = (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}.$$

Aquí la igualdad se sostiene si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. $\square$

Teorema. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

La igualdad se sostiene si y solo si existe un úmero real k tal que $a_i = kb_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Si alguno de $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ o $\sum_{i=1}^{n} b_i^2$ es igual a 0, la desigualdad es inmediata. Supongamos entonces que

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \quad \text{y} \quad B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

son ambos positivos. Definamos

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{a_i}{A} & \text{si } 1 \leq i \leq n, \\ \\ \alpha_{n+i} = \dfrac{b_i}{B} & \text{si } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

obteniendo así $2n$ números: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$. Ahora, consideremos la permutación $\beta_i = \alpha_{n+i}$, $\beta_{n+i} = \alpha_i$ para $1 \leq j \leq n$.
Aplicando el Corolario 1, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\alpha_{n+i} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n+i}\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i^2 = 2.$$

Luego, se sigue que

$$2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i}{AB}\right) \leq 2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

La igualdad se sostiene si y solo si $\alpha_i = \alpha_{n+i}$ para $1 \leq i \leq n$. Esto es equivalente a

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k,$$

una constante. $\square$

La desigualdad de Tchebyshev es una consecuencia directa de la desigualdad del reacomodo.

Teorema. (Desigualdad de Tchebyshev). Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$. Entonces,

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right).$$

Demostración. Aplicando varias veces la desigualdad del reacomodo, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1, \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2, \\
&\vdots \\
a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n &\geq a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}.
\end{aligned}$$

Sumando las desigualdades anteriores, obtenemos que

$$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n),$$

de donde se sigue el resultado. $\square$

Veamos algunos ejemplos adicionales.

Ejemplo 10. Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Solución. Como la expresión es simétrica, podemos suponer que $a \leq b \leq c$. Entonces, $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ y $a^6 \leq b^6 \leq c^6$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev, tenemos que

$$3(a^8 + b^8 + c^8) = 3(a^6a^2 + b^6b^2 + c^6c^2) \geq (a^6 + b^6 + c^6)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Aplicando ahora la desigualdad MA - MG, tenemos que $a^6 + b^6 + c^6 \geq 3a^2b^2c^2$. Luego,

$$3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Además, por la desigualdad MA-MG tenemos que $a^2 + b^2 \geq 2ab$, $b^2 + c^2 \geq 2bc$ y $a^2 + c^2 \geq 2ac$, de donde se sigue que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$. Por lo tanto, $3(a^8 + b^8 + c^8) \geq 3a^2b^2c^2(ab + bc + ac)$, lo cual implica que

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{ab + bc + ac}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Ejemplo 11. Sean $a \geq b \geq c > 0$ y $0 < x \leq y \leq z$. Demostrar que

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 3\left(\frac{a+b+c}{x+y+z}\right).$$

Solución. Tenemos que $a \geq b \geq c$ y $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev con estos números, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right).$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad MA-MG tenemos que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Luego,

$$3\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq \frac{3(a+b+c)}{\sqrt[3]{xyz}},$$

de donde se sigue la desigualdad izquierda.
Aplicando una vez más la desigualdad MA-MG, obtenemos que $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$, esto es, $\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3}{x+y+z}$ y, por lo tanto, $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}$, que es la desigualdad derecha.

Ejemplo 12. (Desigualdad de Nesbitt). Sean a, b, c números reales positivos. Demostrar que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solución. Por la simetría de la expresión, podemos suponer que $a \geq b \geq c$, lo cual implica que $a+b \geq a+c \geq b+c$ y, por lo tanto, $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}$. Aplicando la desigualdad de Tchebyshev, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right).$$

Desarrollando el producto del lado derecho de esta desigualdad, obtenemos que

$$3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3 + \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right),$$

esto es,

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq 3,$$

de donde se sigue el resultado.

Ejemplo 13. Sean a, b, c números reales positivos y sea n un número natural. Demostrar que

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}.$$

Solución. Como la expresión es simétrica en a, b, c, podemos asumir que $a \geq b \geq c$. Entonces,

$$\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Por ejemplo, $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a}$ si y solo si $ac+a^2 \geq bc+b^2$ si y solo si $(a-b)(c+a+b) \geq 0$ si y solo si $a \geq b$.
Por lo tanto, tenemos que

$$a^{n-1} \geq b^{n-1} \geq c^{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b}.$$

Aplicando la desigualdad de Tchebyshev con estos números, obtenemos que

$$\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \leq 3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right).$$

Aplicando ahora la desigualdad de Nesbitt, obtenemos

$$\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right).$$

Por lo tanto,

$$3\left(\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b}\right) \geq \frac{3}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}\right),$$

de donde se sigue el resultado.

Generalizaciones de la desigualdad del reacomodo

También hay una desigualdad dual de la desigualdad del reacomodo (ver [4]), aunque es solo para números reales no negativos:

Teorema. Sean $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ y $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ dos sucesiones de números reales no negativos. Si $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ es una permutación de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, entonces

$$(a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n) \leq (a_1'+b_1)\cdots(a_n'+b_n) \leq (a_n+b_1)\cdots(a_1+b_n). \quad (11)$$

En [3] se demuestra que las desigualdades (1) y (11) son equivalentes para números reales positivos.
En [5], estas desigualdades son generalizadas a más de dos sucesiones de números no negativos:

Teorema. Consideremos un conjunto de números reales no negativos $\{a_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$. Para cada i, sea $a'_{i1}, a'_{i2}, \ldots, a'_{in}$ una permutación de los números $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ tal que $a'_{i1} \geq a'_{i2} \geq \cdots \geq a'_{in}$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} a_{ij} \leq \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} a'_{ij},$$

$$\prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} \geq \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a'_{ij}.$$

Para finalizar, dejamos una lista de desigualdades para el lector.

Ejercicios

1) Si a y b son números reales no negativos, demuestra que

$$2(a^5 + b^5) \geq (a^3 + b^3)(a^2 + b^2).$$

2) Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$$

para todo entero $n \geq 2$.

3) Si a, b, c son números reales positivos, demuestra que

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}.$$

4) Demuestra que para cualesquiera números reales positivos a, b, c, se tiene que

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

5) Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}.$$

6) (China, 1984). Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, demuestra que

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

7) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Demuestra que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n^2}{n-1}.$$

8) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos tales que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Demuestra que

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

9) Sean $a \geq c \geq 0$ y $b \geq d \geq 0$. Demuestra que $(a+b+c+d)^2 \geq 8(ad+bc)$.

10) Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales en el intervalo $[0,1]$ tales que $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Demuestra que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n-a_i}{1+na_i} \geq \frac{n^2-1}{2}$.

Bibliografía

1) R. Bulajich Manfrino, J.A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Inequalities.* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2005.

2) Dragos Hrimiuc. *The Rearrangement Inequality.* π in the Sky. The Pacific Institute for the Mathematical Sciences, December, 2000.

3) H. Minc. *Rearrangements*. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 159, pp. 497-504, 1971.

4) A. Oppenheim. *Inequalities connected with definite Hermitian forms, II*. American Mathematical Montly, vol. 61, pp. 463-466, 1954.

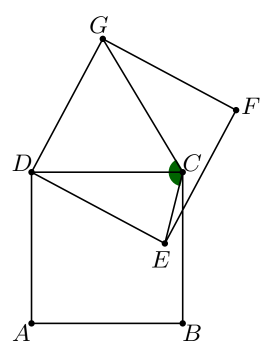
5) H. Ruderman. *Two new inequalities*. American Mathematical Montly, vol. 59, no. 1, pp. 29-32, 1952.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2021. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ una permutación de los números $1, 2, \ldots, 99$. Demuestra que el producto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_{99} - 99)$ es par.

Problema 2. En la siguiente figura, $ABCD$ y $DEFG$ son cuadrados congruentes. ¿Cuánto vale $\angle GCE$?



Problema 3. Demuestra que la ecuación $x^3+y^4 = 7$ no tiene soluciones en los enteros.

Problema 4. a) Considera números reales $x \geq 1$, $y \geq 1$. Demuestra que

$$x + y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{xy} - \frac{2}{\sqrt{xy}}.$$

b) Sean a, b, c, d números reales mayores o iguales que 1. Demuestra que si $abcd = 16$, entonces

$$a + b + c + d - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} \geq 6.$$

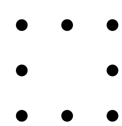
Problema 5. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 5$ y $a + b + c = 3$. Demuestra que alguno entre a, b y c es igual a 2.

Problema 6. Determina todos los números primos p tales que $13^{2p-1} + 17$ es múltiplo de p.

Problema 7. Sean x, y y z enteros positivos tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ y $\mathrm{mcd}(x, y, z) = 1$. Demuestra que tanto $x - z$ como xyz son cuadrados perfectos.

Problema 8. En el paralelogramo $ABCD$, una recta que pasa por C corta a la diagonal BD en E y a AB en F. Si F es el punto medio de AB y el área del triángulo BEC es 100 cm^2, halla el área del cuadrilátero $AFED$.

Problema 9. Los ocho puntos mostrados en la figura de abajo son los vértices de un cuadrado y los puntos medios de sus lados. Rogelio quiere dibujar algunas circunferencias que pasen por algunos de los puntos de tal manera que, para cada pareja de puntos de la figura, existe al menos una circunferencia que pasa por ellos. Determina la menor cantidad de circunferencias necesarias para lograr esto.



Problema 10. En el lado AB de un triángulo escaleno ABC están los puntos M y N de tal forma que $AN = AC$ y $BM = BC$. La recta paralela a BC por M y la recta paralela a AC por N se intersecan en S. Demuestra que $\angle CSM = \angle CSN$.

Problema 11. Sea n un entero positivo. Demuestra que 2^{n+1} divide a $\left\lfloor \left(1 + \sqrt{3}\right)^{2n+1} \right\rfloor$.

Problema 12. Sea $n \geq 2$ un entero positivo fijo y supongamos que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales que satisfacen $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2^n - 1$. Determina el valor mínimo de la suma

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1 + a_1} + \frac{a_3}{1 + a_1 + a_2} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}.$$

Problema 13. Sean a, b y c las raíces del polinomio $x^3 + 5x - 2021$. Determina el valor numérico de $a^3 + b^3 + c^3$.

Problema 14. Demuestra que no existe un triángulo rectángulo ABC con $\angle BAC = 90°$ tal que $BC = 10$ y $AD = 6$, donde D es un punto en BC tal que AD es perpendicular a BC.

Problema 15. Una persona lanza una moneda 8 veces. Para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, sea A_i el número de águilas en los primeros i lanzamientos y sea S_i el número de soles en los primeros i lanzamientos. De entre los $2^8 = 256$ posibles resultados de lanzar la moneda 8 veces, ¿en cuántos tenemos que $A_i \neq S_i$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y $A_8 = S_8$?, esto es, ¿de cuántas maneras se tienen el mismo número de águilas y de soles al final, pero no antes del final?

Problema 16. Determina todos los números reales a, b, c y d tales que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d - ab = 3.$$

Problema 17. Una valla consiste en n tablones acomodados en línea recta. Cada tablón se pinta de uno entre 100 colores. Supón que para cada dos colores distintos i y j, existe un tablón de color i localizado a la izquierda de un tablón (no necesariamente adyacente) de color j. Determina el menor valor posible de n.

Problema 18. Alexey y Bogdan juegan un juego con dos pilas de piedras. Al principio, una de las pilas contiene 2021 piedras y la segunda pila está vacía. En cada turno, cada persona debe tomar una cantidad par de piedras (mayor que cero) de una de las pilas y luego pasar la mitad de ellas a la otra, mientras que la otra mitad se desecha. Pierde el que no pueda hacer un movimiento. Si Alexey tiene el primer turno, ¿quién tiene estrategia ganadora?

Problema 19. Sean $a \geq b \geq c$ números reales positivos. Demuestra que:

$$\frac{a^2 + b^2}{a + b} + \frac{a^2 + c^2}{a + c} + \frac{c^2 + b^2}{c + b} \geq a + b + c + \frac{(a - c)^2}{a + b + c}.$$

Problema 20. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles con AB paralela a CD, $AB > CD$ y $AD = BC$. Sea I el centro de la circunferencia tangente a AB, AC y BD, donde A e I se encuentran en lados opuestos con respecto a BD. Sea J el centro de la circunferencia tangente a CD, AC y BD, donde D y J se encuentran en lados opuestos con respecto a AC. Demuestra que $IC = JB$.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Supongamos, por contradicción, que el producto es impar. Tenemos que 50 de los números son impares y, como el producto es impar, tenemos que $a_i \not\equiv i \pmod 2$ para $i = 1, 2, \ldots, 99$, esto es, cada a_i tiene paridad contraria a i. Entonces, por cada uno de los 50 enteros impares hay un entero par, esto es, hay 50 números pares. Esto es una contradicción, ya que solo hay 49 enteros pares entre 1 y 99.

Solución del problema 2. Como los cuadrados son congruentes, tenemos que $DG = DC = DE = DA$, por lo que D es el circuncentro del cuadrilátero $GCEA$. Como $\angle EDG = 90°$, obtenemos que $\angle GCE = 180° - \angle EAG = 180° - \frac{\angle EDG}{2} = 135°$.

Solución del problema 3. Analizando los cubos y las cuartas potencias módulo 13, tenemos que $x^3 \equiv 0, 1, 5, 8, 12 \pmod{13}$ y $y^4 \equiv 0, 1, 3, 9 \pmod{13}$. Es fácil ver que ninguno de los valores posibles de $x^3 + y^4$ puede ser congruente a 7 $(\mathrm{mod}\, 13)$. En particular, la ecuación dada no tiene soluciones en los enteros.

Solución del problema 4. a) La desigualdad a demostrar es equivalente a la desigualdad $(xy - 1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, la cual es evidentemente cierta.

b) Aplicando la desigualdad del inciso a), primero con los números a, b y, luego con los números c y d, tenemos que

$$a+b-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{ab}},$$
$$c+d-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\geq 2\sqrt{cd}-\frac{2}{\sqrt{cd}}.$$

Sumando estas dos desigualdades, obtenemos que

$$a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\geq 2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{cd}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{cd}}\right).$$

Aplicando una vez más la desigualdad del inciso a), con $x=\sqrt{ab}\geq 1$ y $y=\sqrt{cd}\geq 1$, obtenemos que

$$a+b+c+d-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}-\frac{1}{d}\geq 2\left(2\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}-\frac{2}{\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}}\right)=6.$$

Solución del problema 5. Elevando al cuadrado la segunda ecuación, obtenemos que $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=9$, por lo que $abc-2(ab+bc+ca)=-4$. Esto significa que

$$(a-2)(b-2)(c-2)=abc-2(ab+bc+ca)+4(a+b+c)-8=-4+4(3)-8=0,$$

de donde se sigue que alguno de los números a, b, c es igual a 2.

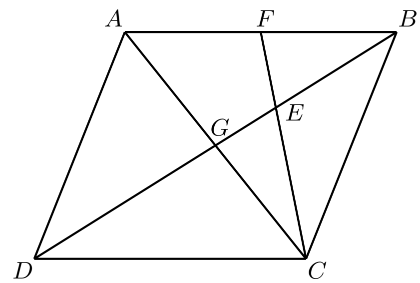
Solución del problema 6. Si $p=13$, entonces $13\mid 13^{2p-1}$ pero $13\nmid 17$. Luego, $p\neq 13$. Luego, por el teorema pequeño de Fermat, $13^{p-1}\equiv 1 \pmod p$. Por lo tanto,

$$13^{2p-1}+17=13\cdot 13^{2(p-1)}+17\equiv 13+17\equiv 30 \pmod p.$$

Como $13^{2p-1}+17$ es múltiplo de p, resulta que $p\mid 30$. Luego, los primos que satisfacen son 2, 3 y 5.

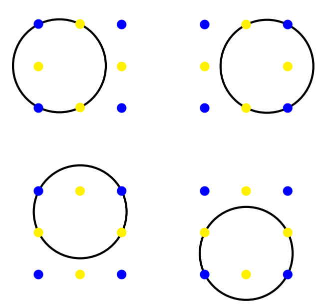
Solución del problema 7. La ecuación dada se puede reescribir como $(x-z)(y-z)=z^2$. Si existe un primo p que divide tanto a $x-z$ como a $y-z$, entonces divide también a z^2, por lo que divide a z y, por lo tanto, divide a x y a y, lo cual contradice que $\operatorname{mcd}(x,y,z)=1$. Se sigue que $\operatorname{mcd}(x-z,y-z)=1$ y, como el producto $(x-z)(y-z)$ es un cuadrado, cada factor es un cuadrado también. En particular, $x-z$ es un cuadrado perfecto. Por último, la ecuación original también se puede escribir como $xz=y(x-z)$, por lo que $xyz=y^2(x-z)$, de donde se concluye que xyz también es un cuadrado perfecto.

Solución del problema 8. Las diagonales AC y BD se cortan en G. Como $ABCD$ es un paralelogramo, entonces AC y BD se bisecan mutuamente. En particular, tenemos que BG es mediana en el triángulo ABC. Como FC también es mediana en este triángulo, tenemos que E es el gravicentro de ABC, por lo que $EC=2FE$. Así, si $[X]$ denota el área de la figura X, entonces $[FEB]=\frac{1}{2}[BEC]=50$ cm^2.



También tenemos que $BE = 2GE = \frac{2}{3}BG$. Como $BG = \frac{1}{2}BD$, obtenemos que $BE = \frac{1}{3}BD$. Esto significa que $[DCB] = 3[BEC] = 300$ cm^2 y, como los triángulos ABD y CDB son congruentes, se concluimos que $[ADB] = 300$ cm^2. Por lo tanto, $[AFED] = [ADB] - [FEB] = 300 - 50 = 250$ cm^2.

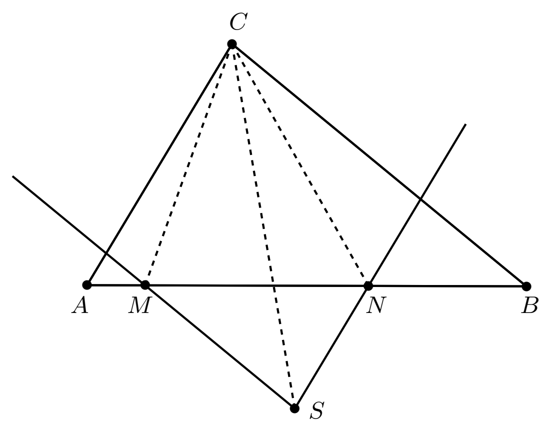
Solución del problema 9. Pintemos a los cuatro vértices del cuadrado de color azul y a los cuatro puntos medios de sus lados de color amarillo. Si dos puntos están sobre una circunferencia C, diremos que C *cubre* a ese par de puntos.
Sea C_1 la circunferencia que pasa por los cuatro puntos azules y sea C_2 la circunferencia que pasa por los cuatro puntos amarillos. La circunferencia C_1 cubre todos los pares de puntos azules y la circunferencia C_2 cubre todos los pares de puntos amarillos. Es sencillo verificar que cada uno de los $4 \cdot 4 = 16$ pares de puntos formados por un punto amarillo y uno azul, está cubierto por una de las cuatro circunferencias en la figura de abajo. Se sigue que el conjunto de estas seis circunferencias constituye una solución.



Ahora demostraremos que cinco o menos circunferencias no son suficientes. Primero observemos que cualquier circunferencia que pase por más de dos puntos azules debe ser igual a C_1 y cualquier circunferencia que pase por más de dos puntos amarillos debe ser igual a C_2, pues tres puntos determinan una única circunferencia.
Una circunferencia que pasa por dos o menos puntos azules cubre a lo más uno de los $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ pares de puntos azules. Una solución formada por cinco o menos círculos debe contener a C_1 (ya que en caso contrario solamente se cubren cinco pares a lo más). De la misma forma una tal solución también debe contener a C_2.
Cada uno de los tres círculos restantes en una solución contiene a lo más dos puntos azules y a lo más dos puntos amarillos. Un tal círculo cubre a lo más $2 \cdot 2$ pares de

puntos consistentes en un punto amarillos y uno azul. Se sigue que en total los cinco círculos cubren a lo más $0 + 0 + 3 \cdot 4 = 12$ de tales pares, mientras que hay 16 pares de ellos por ser cubiertos, lo cual implica que se necesitan al menos 6 circunferencias. El resultado se sigue.

Solución del problema 10. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $AN+BM > AB$, por lo que N está a la derecha de M. Esto implica que S y C están en lados opuestos de AB.



Ahora observemos que $\angle CNA = \angle ACN = 180° - \angle CNS$ y, en consecuencia, CN es la bisectriz externa del ángulo $\angle MNS$. Análogamente, obtenemos que CM es la bisectriz externa del ángulo $\angle NMS$. Por lo tanto, C es el excentro opuesto a S del triángulo SMN, de donde se sigue que $\angle CSM = \angle CSN$.

Solución del problema 11. Consideremos el polinomio $P(x) = x^2 - 2x - 2$. Observemos que las raíces de $P(x)$ son $1 + \sqrt{3}$ y $1 - \sqrt{3}$. Si $\alpha = 1 + \sqrt{3}$, $\beta = 1 - \sqrt{3}$ y $s_n = \alpha^n + \beta^n$ para $n \geq 0$, por relaciones de Vieta tenemos que $s_0 = 2$, $s_1 = 2$ y $s_2 = (s_1)^2 - 2\alpha\beta = 8$. Como $\alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ y $\beta^2 - 2\beta - 2 = 0$, se cumple que $\alpha^{n+2} - 2\alpha^{n+1} - 2\alpha^n = 0$ y $\beta^{n+2} - 2\beta^{n+1} - 2\beta^n = 0$, por lo que

$$s_{n+2} = 2s_{n+1} + 2s_n \tag{12}$$

para todo entero no negativo n. Como s_0 y s_1 son enteros, debe suceder que s_n es entero para todo n. Más aún, es claro que $-1 < \beta < 0$, por lo que si n es impar, entonces $-1 < \beta^n < 0$, lo que indica que $\alpha^n - 1 < s_n = \alpha^n + \beta^n < \alpha^n$. Como s_n es un entero y hay un único entero entre $\alpha^n - 1$ y α^n, debe suceder que $s_n = \lfloor \alpha^n \rfloor$ para n impar.

Demostraremos por inducción que, para todo entero no negativo m, se cumple que 2^m divide a s_{2m} y 2^{m+1} divide a s_{2m+1}, lo cual implica el resultado.

El caso $m = 0$ es claro que se cumple. Ahora, sea $m \geq 0$ tal que se cumple la hipótesis de inducción y se probará que también se cumple para $m + 1$. De la ecuación (12) para $n = 2m$, tenemos que $s_{2m+2} = 2s_{2m+1} + 2s_{2m}$. Como 2^{m+1} divide a s_{2m+1} y 2^m divide a s_{2m} por hipótesis, se cumple que 2^{m+1} divide a $2s_{2m+1} + 2s_{2m} = s_{2m+2}$.

Luego, por (12) para $n = 2m+1$, como 2^{m+1} divide tanto a s_{2m+1} como a s_{2m+2} se concluye que 2^{m+2} divide a $2s_{2m+2}+2s_{2m+1} = s_{2m+3}$, lo que completa la inducción.

Solución del problema 12. Sea $a_0 = 1$ y definamos $b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Observemos que, en particular, $b_n = 2^n$ y $b_0 = 1$. Entonces, la suma del problema es igual a

$$\frac{b_1 - b_0}{b_0} + \frac{b_2 - b_1}{b_1} + \cdots + \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{b_1}{b_0} + \cdots + \frac{b_n}{b_{n-1}} - n.$$

Aplicando la desigualdad MA-MG, obtenemos que

$$\frac{b_1}{b_0} + \cdots + \frac{b_n}{b_{n-1}} - n \geq n \cdot \sqrt[n]{\frac{b_1 b_2 \cdots b_n}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}} - n \geq n \cdot \sqrt[n]{2^n} - n = n,$$

con la igualdad si y solo si $\frac{b_1}{b_0} = \frac{b_2}{b_1} = \cdots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \sqrt[n]{2^n} = 2$. De aquí podemos mostrar inductivamente que $a_k = 2^k$ para cada k y es fácil demostrar que estos números funcionan.

Solución del problema 13. Por las fórmulas de Vieta tenemos que $a + b + c = 0$ y $abc = 2021$. Como

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc),$$

obtenemos que $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc = 3(2021) = 6063$.

Solución del problema 14. Supongamos que sí existe. Sea M el punto medio de BC. Como el triángulo ABC es rectángulo, tenemos que $AM = BM = CM = 5$. Por otro lado, como AD y BC son perpendiculares, resulta que ADM es un triángulo rectángulo con hipotenusa AM. Entonces, $5 = AM > AD = 6$, lo que es una contradicción.

Solución del problema 15. Podemos pensar el proceso como un camino en un tablero de 4×4. Empezando en el origen, caminamos una unidad a la derecha si sale águila y una unidad hacia arriba si sale sol. Queremos contar el número de caminos que no intersecan la diagonal. Si el primer paso es águila, el último debe ser sol. Entonces, tenemos un cuadrado de 3×3 donde no queremos cruzar la diagonal. Es fácil ver que hay 5 caminos haciendo los casos. Por lo tanto, en total hay $2 \cdot 5 = 10$ maneras.

Solución del problema 16. Supongamos que los números reales a, b, c, d satisfacen las ecuaciones del problema. Entonces

$$-3 = 3 - 2 \cdot 3 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2(a + b + c + d - ab),$$

lo que es equivalente a

$$(a + b - 1)^2 + (c - 1)^2 + (d - 1)^2 = 0.$$

Esto implica que $a+b=c=d=1$ y, reemplazando b por $1-a$ en la condición, obtenemos que
$$3=a^2+(1-a)^2+2=3-a(1-a),$$
de donde $a=0$, $b=1$ o $a=1$, $b=0$. En ambos casos se cumplen ambas ecuaciones. Concluimos que las soluciones son $(a,b,c,d)=(0,1,1,1)$ y $(1,0,1,1)$.

Solución del problema 17. La respuesta es 199. Claramente cada color se utiliza al menos una vez. Veamos que hay a lo más un color que aparece exactamente una vez. Esto es porque uno de ellos, digamos c_1, debe estar a la izquierda de c_2, pero entonces c_2 nunca aparecerá a la izquierda de c_1 dado que estos colores solo aparecen una vez. Así, a lo más un color puede ser usado una vez y los demás deben aparecer al menos dos veces. Se sigue que hay al menos $1+2(99)=199$ tablones. Esto es alcanzable. En efecto, consideremos el siguiente acomodo de colores: $1,2,3,\dots,99,100,99,98,\dots,3,2,1$. Es fácil ver que este acomodo cumple.

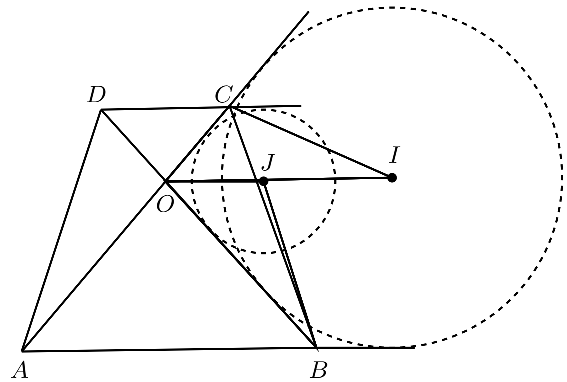
Solución del problema 18. Alexey tiene estrategia ganadora. Sea (a,b) el estado del juego dependiendo de cuántas piedras haya en cada pila, siendo $(2021,0)$ el estado inicial. Alexey buscará siempre después de cada turno suyo dejar un estado de la forma $(k-1,k)$. Comenzará con el movimiento $(2021,0)\to(673,674)$. A partir de aquí, si Bogdan hace el movimiento $(k-1,k)\to(k-1+p,k-2p)$, entonces Alexey responderá con $(k-1+p,k-2p)\to(k-1-p,k-p)$. Esto será posible ya que $k-1-p\geq k-p-p=k-2p$. Ahora, si Bogdan hace el movimiento
$$(k-1,k)\to(k-1-2p,k+p),$$
entonces Alexey responderá con $(k-1-2p,k+p)\to(k-1-p,k-p)$, lo cual será posible, ya que $k-p-1>k-1-2p$. Como en cada movimiento se reduce el número de piedras entre ambas pilas, eventualmente debe haber un perdedor y, como Alexey siempre podrá responder cualquier movimiento de Bogdan, se sigue que Alexey será el ganador.

Solución del problema 19. Observemos que
$$\begin{aligned}&\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{a^2+c^2}{a+c}+\frac{c^2+b^2}{c+b}-(a+b+c)\\ &=\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a^2+c^2}{a+c}-\frac{a+c}{2}\right)+\left(\frac{c^2+b^2}{c+b}-\frac{c+b}{2}\right)\\ &=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{(a-c)^2}{2(c+a)},\end{aligned}$$
donde $a-b\geq 0$, $a-c\geq 0$ y $b-c\geq 0$. Aplicando la desigualdad útil[2], obtenemos que
$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}+\frac{(a-c)^2}{2(c+a)}\geq\frac{(2a-2c)^2}{4(a+b+c)}=\frac{(a-c)^2}{a+b+c},$$

[2]**Desigualdad útil.** Si a,b,c son números reales y x,y,z son números reales positivos, entonces
$$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

como queríamos.

Solución del problema 20. Sea O el punto de intersección de las rectas DB y AC. Los puntos J e I están ambos en la bisectriz del ángulo $\angle COB$ (pues ambas circunferencias son tangentes a CO y OB). Luego, $\angle COJ = \frac{1}{2}(180° - \angle COD) = \angle OCD$, donde la segunda igualdad es porque el triángulo OCD es isósceles. Así, tenemos que OJ es paralela a DC y a AB.



Notemos que CJ es la bisectriz externa del ángulo $\angle DCO$. Si P es un punto en la extensión de DC más allá de C tenemos que $\angle OJC = \angle JCP = \angle OCJ$ ya que OJ y DC son paralelas. Entonces, el triángulo OCJ es isósceles con $OC = OJ$. Análogamente, obtenemos que el triángulo OIB es isósceles con $OB = OI$. En los triángulos COI y OJB, tenemos que $\angle COI = \angle JOB$, $OB = OI$ y $OC = OJ$. Por lo tanto, $CI = JB$.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2021 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Determina todos los enteros positivos n tales que $n + 200$ y $n - 269$ sean ambos cubos de números enteros.

Problema 2. Sean a y b enteros positivos tales que $2(a + b) = \text{mcd}(a, b) + \text{mcm}(a, b)$. Determina el valor de $\dfrac{\text{mcm}(a, b)}{\text{mcd}(a, b)}$.

Problema 3. Los números reales a, b y c satisfacen la condición

$$|a - b| = 2|b - c| = 3|c - a|.$$

Demuestra que $a = b = c$.

Problema 4. Los números naturales a y b se escriben en notación decimal usando los mismos dígitos, esto es, cada dígito del 0 al 9 aparece la misma cantidad de veces en

a que en b. Demuestra que si $a + b = 10^{1000}$, entonces ambos números a y b son múltiplos de 10.

Problema 5. Sean x, y números reales positivos tales que

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Determina el valor de $x + y$.

Problema 6. En el plano hay 1024 puntos tales que no hay tres que sean colineales. Cada par de puntos se une con un segmento. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Beto le asigna un dígito a cada segmento y Ana le asigna un dígito a cada punto. Beto gana si hay dos puntos cuyo dígito es el mismo que el del segmento que los une, de lo contrario pierde. Prueba que Beto tiene una estrategia ganadora.

Problema 7. Sea k un entero positivo. Demuestra que si $n \geq k + \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$, entonces $\binom{n}{k}$ tiene al menos k divisores primos distintos.

Problema 8. Determina todos los números primos p tales que $p! + p$ es un cuadrado perfecto.

Problema 9. Determina todos los enteros positivos $n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 5n - 4$ y

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Problema 10. Sea S el conjunto de secuencias de longitud 2018 cuyos términos son números del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10\}$ que suman 3860. Demuestra que

$$|S| \leq 2^{3860} \left(\frac{2018}{2048}\right)^{2018}.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2020 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2020. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a: Guillermo Courtade Morales, José Hernández Santiago, Titu Zvonaru, Leonardo Jiménez Cuellar y Luis Francisco Medina Quintero, por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2021, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación $f(x + f(y)) = 2x + 2f(y + 1)$ para todos los números reales x, y.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Primero, haciendo $x = -f(y)$ en la ecuación dada, obtenemos que $f(0) = -2f(y) + 2f(y + 1)$, esto es,

$$f(y + 1) = f(y) + \frac{1}{2}f(0) \tag{13}$$

para todo número real y. Haciendo $y = 0$, obtenemos que $f(1) = \frac{3}{2}f(0)$. Ahora, si hacemos $x = -f(y + 1)$ en la ecuación original, entonces $f(-f(y + 1) + f(y)) = -2f(y + 1) + 2f(y + 1) = 0$ para todo número real y, por lo que existe un número real a tal que $f(a) = 0$. Luego, $f(x) = f(x + f(a))$ y $f(x + f(a)) = 2x + 2f(a + 1)$ para todo número real x. Entonces, de (13) obtenemos que

$$f(x) = 2x + 2\left(f(a) + \frac{1}{2}f(0)\right) = 2x + f(0)$$

para todo número real x. Si $x = 1$, entonces $f(1) = 2 + f(0)$ y, como $f(1) = \frac{3}{2}f(0)$, tenemos que $\frac{3}{2}f(0) = 2 + f(0)$, de donde obtenemos que $f(0) = 4$. Se sigue que $f(x) = 2x + 4$, la cual satisface la ecuación original y, por lo tanto, es la única función que cumple.

Solución alternativa. Sustituyendo $y = 0$ y $x - f(0)$ en lugar de x en la ecuación dada, obtenemos que $f(x) = 2x + 2c$ para todo número real x, donde $c = f(1) - f(0)$ es una constante. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x + f(y)) &= 2(x + f(y)) + 2c = 2x + 2f(y) + 2c = 2x + 2(2y + 2c) + 2c \\ &= 2x + 4y + 6c \end{aligned}$$

y $2x + 2f(y + 1) = 2x + 2(2(y + 1) + 2c) = 2x + 4y + 4 + 4c$.
Luego, tenemos que $2x + 4y + 6c = 2x + 4y + 4 + 4c$, lo cual implica que $c = 2$. Entonces, $f(x) = 2x + 4$ es la única opción, la cual claramente satisface la ecuación original. Por lo tanto, esta es la única función que cumple.

Problema 2. Encuentra todos los números primos p, q y r tales que

$$p^2 + 1 = 74(q^2 + r^2).$$

Solución. Si q y r son ambos impares, entonces el lado derecho de la ecuación dada es divisible por 4, mientras que el lado izquierdo puede ser congruente a 1 o 2 módulo 4, lo cual no puede suceder. Esto implica que alguno de q o r debe ser par. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $q = 2$. Sustituyendo en la ecuación, obtenemos que $p^2 = 74r^2 + 295$. Viendo esta última ecuación módulo 3, si $r \neq 3$, entonces $3 \mid p$, pero claramente $p \neq 3$. Luego $r = 3$ y, por consiguiente, $p^2 = 961$, de donde, $p = 31$.
Por lo tanto, las únicas tripletas de números primos (p, q, r) que cumplen son $(31, 2, 3)$

y $(31, 3, 2)$.

La solución que acabamos de presentar es muy similar a las soluciones que recibimos de Titu Zvonaru, Leonardo Jiménez Cuellar y José Hernández Santiago.

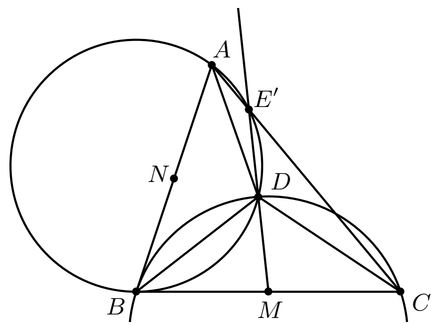
Problema 3. Se tiene una pila de cartas numeradas con los números 1, 2, $\ldots$, n en algún orden. Después, se hace la siguiente operación repetidamente: si la primera carta de la pila tiene el número k, entonces se revierte el orden de las primeras k cartas. Prueba que, después de que la operación se repite una cantidad finita de veces, la carta con el número 1 llegará a ser la primera carta de la pila.

Solución de Leonardo Jiménez Cuellar. Se hará la demostración por contradicción. Para ello, supóngase que es posible acomodar las cartas de manera que, sin importar cuántas veces se repita la operación, la carta con el número 1 nunca llegará a ser la primera carta de la pila. Sea $C = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ la colección de números escritos en las cartas que eventualmente llegan a ser la primera carta de la pila, con $1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leq n$. Por hipótesis, la carta con el número a_m ocupará la primera posición de la pila en algún momento. Tras realizar la operación en ese momento, esta se moverá a la posición a_m que, por hipótesis, no es la primera de la pila. Se sigue que no es posible que la carta con el número a_m vuelva a ser la primera carta de la pila, pues la carta con el número a_i invierte la posición de las primeras a_i cartas y $a_i < a_m$ para toda $i < m$. En general, si en algún momento dado a_j es el número más grande en alguna carta que puede llegar a ocupar la primera posición de la pila, tras ocuparla, esta no podrá volver a ser la primera carta de la pila. En consecuencia, eventualmente ninguna de las cartas con números de C puede ser la primera carta, es decir, alguna otra carta tendrá que ser la primera, lo cual genera la contradicción buscada.

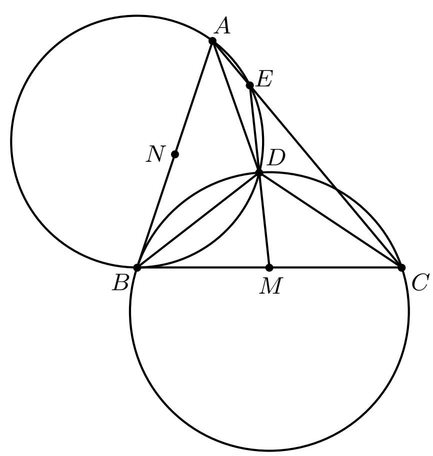
Solución alternativa. Supongamos que $n > 1$. Sea $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ y sea $F \subset S$ el conjunto de números que aparecen en la primera posición una cantidad finita de veces. Demostraremos por inducción que $k \in F$ si $1 < k \leq n$. Observemos que si k aparece en la primera posición, entonces después aparecerá en la k-ésima posición, y esta no cambiará a menos que un número más grande aparezca en la primera posición. Esto implica que $n \in F$ (ya que no hay números más grandes que n entre las cartas), con lo que hemos demostrado el caso base de la inducción. Para el paso inductivo, si todos los números más grandes que k están en F, entonces k debe estar en F, pues los números más grandes que k solo aparecen una cantidad finita de veces en la primera posición, por lo que k puede llegar a la primera posición una cantidad finita de veces. Luego, 1 no está en F porque los demás números solo aparecen una cantidad finita de veces en la primera posición y, una vez que el 1 aparece al principio, ya no se mueve de ahí. Esto concluye el problema.

Problema 4. Sea ABC un triángulo. La circunferencia ω_A pasa por A y es tangente a la recta BC en B. La circunferencia ω_C pasa por C y es tangente a la recta AB en B. Sea D el punto de intersección de ω_A y ω_C distinto de B. Sea M el punto medio del segmento BC. Las rectas MD y AC se cortan en E. Prueba que E está sobre ω_A.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Sea E' la intersección de DM con ω_A. Para probar el resultado, basta demostrar que los puntos E', A y C son colineales. Primero, por potencia desde el punto M a ω_A tenemos que $MC^2 = MB^2 = MD \cdot ME'$. Entonces, MC es tangente al circuncírculo del triángulo $E'DC$, de donde se sigue $\angle DCM = \angle DE'C$.
Como ω_C es tangente a AB, se puede ver que $\angle DCM = \angle ABD = 180° - \angle DE'A$. Por lo tanto, $\angle DE'C + \angle DE'A = 180°$, de donde se sigue la colinealidad de E', A y C.



Solución alternativa. Sea N el punto medio del segmento AB. Por ángulos seminscritos, tenemos que $\angle CBD = \angle BAD$ y $\angle DBA = \angle DCB$, por lo que los triángulos DAB y DBC son semejantes. Como M y N son puntos medios de BC y AB respectivamente, se sigue que los triángulos AND y BMD también son semejantes. En particular, $\angle DNA = \angle DMB$, lo que implica que el cuadrilátero $BNDM$ es cíclico. Como MN y AC son paralelas, entonces $\angle DBA = \angle DBN = \angle DMN = \angle DEC$, esto es, los puntos A, B, D y E son concíclicos, como se quería.



Problema 5. Sean n un entero par libre de cuadrados y p un primo tales que:

a) $\text{mcd}(n, p) = 1$,

b) $p \leq 2\sqrt{n}$,

c) existe un entero k tal que p divide a $n + k^2$.

Demuestra que existen enteros positivos distintos a, b y c tales que $n = ab + bc + ca$.
Nota: Un entero m se dice que es *libre de cuadrados* si no existe un entero x mayor que 1 tal que $x^2 \mid m$.

Solución. Sea k un entero negativo tal que $-p < k < 0$ y $p \mid n + k^2$. Luego, existe un entero m tal que $n + k^2 = pm$. Observemos que esta última ecuación se puede reescribir de la forma

$$n = pm - k^2 = (p + k)(m + k) + (p + k)(-k) + (-k)(m + k),$$

por lo que proponemos $a = p + k$, $b = m + k$ y $c = -k$, los cuales claramente son enteros. Primero, demostraremos que los tres son enteros positivos. Como $-p < k < 0$, tenemos que a y c son positivos. Ahora, supongamos que $b \leq 0$. Luego, $m \leq -k$ y, entonces, $n + k^2 = pm \leq -pk \leq -2k\sqrt{n}$. Esto implica que $n + 2k\sqrt{n} + k^2 \leq 0$ o, escrito de otra manera, $(\sqrt{n} + k)^2 \leq 0$, esto es, $\sqrt{n} = -k$. Esto significa que $2n = pm$ y, como $p \leq 2\sqrt{n}$, entonces $m \geq \sqrt{n}$, pero $m \leq -k = \sqrt{n}$, así que $m = \sqrt{n}$ y $p = 2\sqrt{n}$, el cual para ser un número primo debe suceder $n = 1$, lo que contradice que n sea par. Por lo tanto, $b > 0$.
Ahora, demostraremos que a, b y c son distintos entre sí. Si $a = c$, entonces $p = -2k$, el cual es un número primo únicamente cuando $k = -1$, pero $p \neq 2$ porque mcd$(n, p) = 1$ y n es par. Luego, $a \neq c$.
Si $a = b$, entonces $p = m$ y, por lo tanto, $n + k^2 = p^2$, esto es, $n = p^2 - k^2$. Como n es par, p y k tienen la misma paridad, por lo que $p^2 - k^2$ es múltiplo de 4, lo que contradice que n sea libre de cuadrados. Por lo tanto, $a \neq b$.
Por último, si $b = c$, entonces $m = -2k$, por lo que $n + k^2 = -2kp$, esto es, $n = -k(2p+k)$. Como n es par, k debe ser par, lo cual implica que $-k(2p+k)$ es múltiplo de 4, que es imposible pues n es libre de cuadrados.
Por lo tanto, $a = p + k$, $b = m + k$ y $c = -k$ cumplen con las condiciones buscadas.

Problema 6. Determina todos enteros positivos m y n tales que $m^2 - mn + n^2 + 1$ divide a cada uno de los números $(m + n)! + 3^{m+n}$ y $m + n + 3^{m^3+n^3}$.

Solución. Sea $p = m^2 - mn + n^2 + 1$. Primero, afirmamos que p es un primo impar. Claramente, p no puede ser par, ya que p divide al número impar $3^{m+n} + (m + n)!$, donde $m + n \geq 2$.
Supongamos, por contradicción, que p es compuesto. Entonces, p tiene un factor primo q con $q \leq \sqrt{p} \leq m+n$, lo que significa que q divide a $(m+n)!$. Como $q \mid p$ y p divide a $3^{m+n} + (m + n)!$, resulta que $q \mid 3$ y así $q = 3$. Pero esto quiere decir que 3 divide a $p = (2m - n)^2 + 1 - 3m(m - n)$, lo que es una contradicción, ya que ningún entero de la forma $x^2 + 1$ es divisible por 3. Por lo tanto, p es primo (distinto de 3).
Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que

$$3^{m^3+n^3} \equiv \left(3^{m^2-mn+n^2}\right)^{m+n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

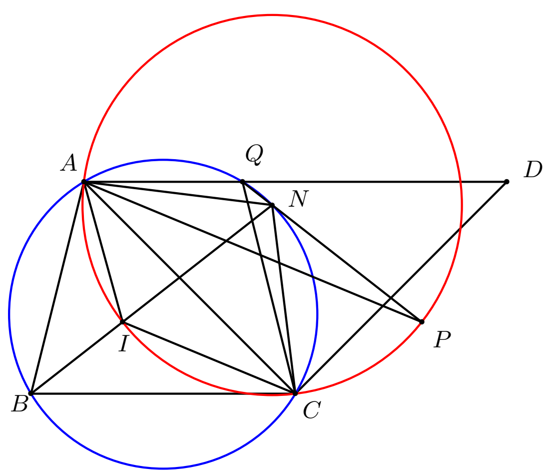
Luego, $p = m^2 - mn + n^2 + 1$ divide a $m + n + 1$, lo cual implica que $m^2 - mn + n^2 \leq m + n$, que es equivalente a $(m-1)^2 + (n-1)^2 + (m-n)^2 \leq 2$. Esto reduce las posibles soluciones a $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, y $(2,2)$. Verificando que p sea impar, solo $(2,2)$ es posible y, finalmente, para $m = n = 2$,

$$p = m^2 - mn + n^2 + 1 = 5$$

divide a $3^{m+n} + (m+n)! = 3^4 + 4! = 105$ y a $3^{m^3+n^3} + (m+n) = 3^{16} + 4$ (observemos que $3^4 \equiv 1 \pmod 5$ implica que $3^{16} + 4 \equiv 1 + 4 \equiv 0 \pmod 5$).

Problema 7. Sea $ABCD$ un trapecio con lados paralelos AD y BC y lados no paralelos AB y CD. Sea I el incentro del triángulo ABC. Se sabe que existe un punto Q en AD con $Q \neq A$ y $Q \neq D$ con la siguiente propiedad: Si P es el punto de intersección de las bisectrices internas de los ángulos $\angle CQD$ y $\angle CAD$, entonces PI y AD son paralelas. Demuestra que $PI = BQ$.

Solución de Luis Francisco Medina Quintero. Como AQ, PI y BC son paralelas, tenemos que $\angle PAQ = \angle PAC = \frac{\angle ACB}{2} = \angle ACI = \angle ICB = \angle CIP$, por lo que el cuadrilátero $AICP$ es un trapecio isósceles y, por consiguiente, $AC = PI$. Ahora, sea N la intersección de BI con el circuncírculo del triángulo ABC. Es un hecho conocido que N es el circuncentro del triángulo AIC. Ya que $AICP$ es un cuadrilátero cíclico, N debe ser su circuncentro. También, tenemos que P es el A-excentro del triángulo AQC.



Entonces,

$$\angle QPC = 90^\circ - \frac{\angle CAQ}{2} = 90^\circ - \frac{\angle ACB}{2} = 90^\circ - \angle ACI,$$

pero

$$\angle NPC = \angle NCP = 90^\circ - \frac{\angle PNC}{2} = 90^\circ - \angle PAC = 90^\circ - \angle ACI.$$

Por lo tanto, $\angle QPC = \angle NPC$, de donde se sigue que los puntos Q, N y P son colineales.
Se sabe que $NP = NI$, así que $\angle CBI = \angle NIP = \angle NPI = \angle PQD$, lo que implica que $\angle ABC = \angle CQD$. Esto significa que $ABCQ$ es un trapecio isósceles, de donde se concluye que $BQ = AC = PI$, como se quería.

Problema 8. Sea a un entero positivo. Supón que para cada entero positivo n, existe un entero positivo k tal que $kn + 1$ divide a $n^2a - 1$. Demuestra que a es un cuadrado perfecto.

Solución. Consideremos $n = a + 1$. Entonces existen enteros positivos k y ℓ tales que

$$((a + 1)k + 1)\ell = (a + 1)^2a - 1,$$

así que $a + 1$ divide a $\ell + 1$ y, en consecuencia, $\ell \geq a$. Por lo tanto, $(a + 1)^2a - 1 \geq a((a + 1)k + 1)$, de donde se sigue $a + 1 \geq k$.
Por otro lado, tenemos que $(a + 1)k + 1$ divide a $(a + 1)^2a - 1$ y también divide a $(a + 1)^2k^2 - 1$, lo cual implica que $(a + 1)k + 1$ divide a

$$((a + 1)^2k^2 - 1) - ((a + 1)^2a - 1) = (a + 1)^2(k^2 - a).$$

Como $(a + 1)k + 1$ y $(a + 1)^2$ son primos relativos, resulta que $(a + 1)k + 1$ divide a $k^2 - a$. Suponiendo que $a \neq k^2$, obtenemos que $k^2 - a \geq (a + 1)k + 1$ ya que $a - k^2 < (a + 1)k + 1$. Luego $k^2 \geq (a + 1)(k + 1) > k(a + 1)$ y, por consiguiente, $k > a + 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $a = k^2$, esto es, a es un cuadrado perfecto.

Problema 9. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 999\}$. Considera una función $f : S \to S$, tal que para cada $n \in S$,

$$f^{n+f(n)+1}(n) = f^{nf(n)}(n) = n.$$

Demuestra que existe un número $a \in S$, tal que $f(a) = a$.
(Nota: Aquí, $f^k(n) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{k}(n)\ldots)))$.

Solución. Probaremos lo siguiente: si $f(a_i) = a_{i+1}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$ donde $a_{k+1} = a_1$ y $k > 1$, entonces $2 \mid k$.
Podemos verificar fácilmente que $f^r(a_j) = a_j$ si y solo si $k \mid r$. Así, para todo entero positivo j, tenemos que k divide a $a_j + f(a_j) + 1$ y a $a_jf(a_j)$.
Tomemos un primo $p \mid k$ y, supongamos sin pérdida de generalidad, que $p \mid a_1$ (en caso contrario, $p \mid f(a_1) = a_2$). Entonces, $p \mid a_1$ y, en consecuencia, p divide a $a_2 + 1 = (a_1 + f(a_1) + 1) - a_1$. Similarmente obtenemos que $p \mid a_3$, luego p divide a $a_4 + 1$ y, en general, p divide a a_i si i es impar y divide a $a_i + 1$ si i es par. Como p divide a $a_{k+1} = a_1$ y, por lo tanto p no divide a $a_1 + 1$, se sigue que k es par.
Observemos que para cada $a \in S$, existe $b \in S$ tal que $f(b) = a$. Podemos dividir f en ciclos, esto es, considerar 999 vértices y dibujar una arista dirigida de n a $f(n)$ para cada n, y particionarlos en componentes conexas. Supongamos, por contradicción, que

no hay componentes de tamaño 1. Entonces, todo ciclo tiene una cantidad par de aristas, mientras que hay una cantidad impar de vértices, lo que es un absurdo. Concluimos que existe una componente de tamaño 1, digamos $\{a\}$. Luego, $f(a) = a$, como se quería.

Problema 10. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales positivos.Demuestra que

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n} < \sqrt{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Solución de Titu Zvonaru. Es claro que

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} > \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 - \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\right).$$

El segundo factor del lado derecho lo podemos escribir en forma de suma telescópica como sigue

$$1 - \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n} = \left(1 - \frac{1}{1+x_1}\right) + \left(\frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+x_1+x_2}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}} - \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}\right).$$

Realizando las sumas de cada paréntesis, obtenemos que

$$1 - \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n} = \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{(1+x_1)(1+x_1+x_2)} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{x_n}{(1+x_1+\cdots+x_{n-1})(1+x_1+\cdots+x_n)}.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz con los números $\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}$, $\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{1+x_1}}, \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_1+x_2)}}, \ldots, \frac{\sqrt{x_n}}{\sqrt{(1+x_1+\cdots+x_{n-1})(1+x_1+\cdots+x_n)}}$, obtenemos que

$$\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)\left(1 - \frac{1}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\right)$$
$$\geq \left(\frac{1}{\sqrt{1+x_1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(1+x_1+\cdots+x_{n-1})(1+x_1+\cdots+x_n)}}\right)^2$$
$$\geq \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}\right)^2,$$

donde la última desigualdad se sigue de la desigualdad

$$(1+x_1+\cdots+x_j)(1+x_1+\cdots+x_j+x_{j+1}) \leq (1+x_1+\cdots+x_j+x_{j+1})^2.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} > \left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}\right)^2,$$

de donde se sigue el resultado.

Examen Semifinal Estatal de la 35^{a} OMM

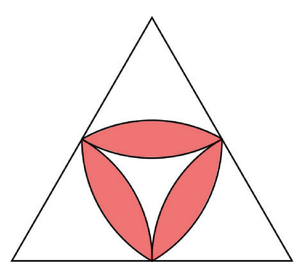
A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen semifinal estatal de la 35^a OMM propuesto por el Comité Organizador. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. En un grupo con 2021 personas, cada una tiene un número de lista del 1 al 2021. Si se sabe que cada una de las personas con número de lista del 1 al 2020 estrechó la mano de exactamente tantas personas del grupo como su número de lista, ¿con cuántas personas estrechó la mano la persona con número de lista 2021?

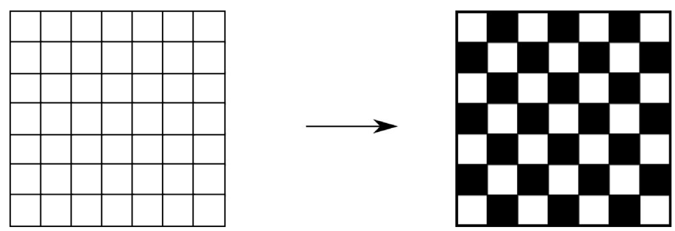
Problema 2. Un número entero n tiene tres dígitos distintos de cero. Cuando se le resta el número k formado por los mismos dígitos pero en el orden inverso, el resultado es un entero positivo cuya cifra de unidades es 6. ¿Cuánto vale $n - k$?

Problema 3. Con centro en los vértices y en los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero de lado 4, se trazan arcos de círculo para formar la figura que se muestra. ¿Cuánto vale el área sombreada?



Segundo día

Problema 4. Se quiere convertir la cuadrícula de cuadros unitarios que se muestra a la izquierda, en la cuadrícula que se muestra a la derecha. Se permite hacer la siguiente operación: *Escoger dos cuadros unitarios que compartan un lado, y cambiar el color de cada uno*, es decir, cada vez que se escoge uno blanco, este se convierte en negro y viceversa. ¿Cuál es el mínimo número de operaciones necesarias para lograrlo?

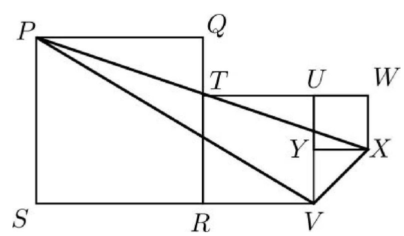


Problema 5. Los enteros del 1 al 1000 se escriben en línea, en algún orden, y se calculan todas las sumas de cada tres números consecutivos en la lista. Por ejemplo, si los cinco primeros números de la línea fueran $8, 231, 1000, 12, 400$, las tres primeras sumas serían

$$\begin{aligned} 8 + 231 + 1000 &= 1239, \\ 231 + 1000 + 12 &= 1243, \\ 1000 + 12 + 400 &= 1412. \end{aligned}$$

¿Cuál es el máximo número de sumas impares que pueden obtenerse?

Problema 6. El diagrama muestra tres cuadrados $PQRS$, $TRVU$ y $UWXY$. Los puntos P, T y X están alineados. El área de $PQRS$ es 36, y el área de $TRVU$ es 16. ¿Cuál es el área del triángulo PXV?

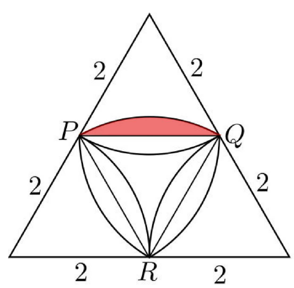


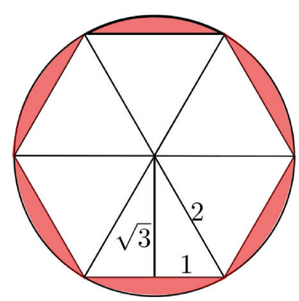
Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 35^{a} OMM

Problema 1. La persona 2020 saludó a todas, de manera que saludó a la persona con número de lista 2021 y también a la persona con número de lista 1 y, en consecuencia, la persona con número de lista 1 solo saludó a la persona con número de lista 2020. De la misma manera, la persona con número de lista 2019 estrechó la mano de todas las personas menos de la persona con número de lista 1 y, en consecuencia, la persona con número de lista 2 estrechó la mano solo de las personas con números de lista 2020 y 2019. Así sucesivamente, vemos que la persona con número de lista 2021 saludó a 1010 personas (que son las personas con números de lista del 1011 al 2020).

Problema 2. Supongamos que $n = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ con $a > c$. Entonces $k = 100c + 10b + a$, de donde $n - k = 99(a - c)$. Así, $(a - c)$ multiplicado por 9 debe teminar en 6 y, como $a - c$ es un dígito, la única posibilidad es $a - c = 4$. Por lo tanto, $n - k = 99 \cdot 4 = 396$.

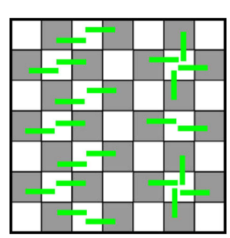
Problema 3. Sea a el área sombreada de la figura de la izquierda. Buscamos calcular $6a$. Notamos que en el círculo que se muestra a la derecha, el área sombreada también es $6a$, porque se obtiene al pegar 6 triángulos equiláteros como PQR y agregarle un casquete a cada uno.





El área total del círculo es $\pi(2^2) = 4\pi$. El área de cada triángulo equilátero de lado 2 es igual a $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ya que por el teorema de Pitágoras, su altura es $\sqrt{3}$. Por lo tanto, $6a = 4\pi - 6\sqrt{3}$.

Problema 4. Como hay 24 cuadros negros y no hay dos que compartan un lado, al menos se necesitan 24 movimientos. Veamos que 24 son suficientes. Para eso, en la figura señalamos una posibilidad con 24 operaciones poniendo pequeñas líneas entre parejas de cuadros cada vez que esa pareja se elige para hacer la operación.



Problema 5. Para que una terna tenga suma impar, debe estar formada por tres impares, o por un impar y dos pares. El número total de ternas es 998. Demostraremos que es imposible que las 998 sumas sean todas impares. Si fuera este el caso, cada vez que hay un impar, a continuación debería haber 2 pares o 2 impares; entonces los números pares p deberían estar siempre 2 juntos, alternando con un impar i:

$$\ldots ppippipp \ldots .$$

Sin embargo, hay 500 números pares, de manera que a lo más se podrían formar 250 bloques ppi y todas las otras sumas con resultado impar deberían ser con tres impares. Así que forzosamente aparecería un bloque pii y la suma en este bloque sería par.
Para ver que sí es posible lograr que 997 sumas sean impares, basta ordenar los números como sigue:

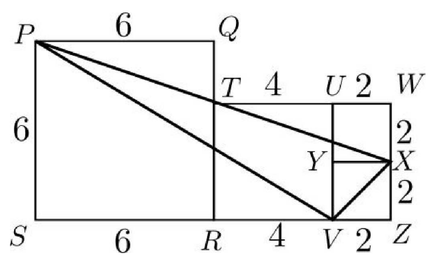
$$ippippippi \cdots iii,$$

en donde se escriben dos números pares y uno impar, hasta terminar con los pares y luego se escriben los impares que faltan. Por ejemplo:

$$1, 2, 4, 3, 6, 8, 5, 10, 12, 7, \ldots, 998, 1000, 501, 503, \ldots, 997, 999,$$

en donde la única terna que tiene suma par es $(1000, 501, 503)$.

Problema 6. Cada lado del cuadrado $PQRS$ mide 6 y cada lado del cuadrado $UVRT$ mide 4. Sea a la longitud del lado del cuadrado $UWXY$. Los triángulos PQT y TWX son semejantes, así que $\frac{PQ}{QT} = \frac{TW}{WX}$, de donde $\frac{4+a}{a} = \frac{6}{2} = 3$. Resolviendo la ecuación $4 + a = 3a$, obtenemos que $a = 2$. Sea Z la intersección de la recta WX con la recta SV.



Para obtener el área del triángulo PXV basta restar del área del trapecio $PXZS$ las áreas de los triángulos PSV y XZV. El área de un trapecio se calcula como el promedio de los lados paralelos multiplicado por la altura; en este caso, $\frac{(6+2)}{2}(6+4+2) = 48$, así que el área buscada es $48 - \frac{6(6+4)}{2} - \frac{2(2)}{2} = 16$.

Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica de la Ciudad de México

En la Ciudad de México, se realiza el Concurso de Primaria y Secundaria cada ciclo escolar. Las inscripciones se abren en julio y la primera, segunda y tercera etapa se llevan a cabo en septiembre, octubre y diciembre, respectivamente. En la primera etapa participan alrededor de 25000 niños y niñas de la CDMX. Para la segunda etapa se selecciona al 5 % de cada escuela, de manera que todas las escuelas inscritas tienen alumnos participando. Para la tercera etapa se invita alrededor de 400 participantes. Entre la tercera y cuarta etapa, hay alrededor de seis entrenamientos para prepararlos, por lo que en la tercera etapa se seleccionan alrededor de 100 participantes. Los ganadores de la cuarta etapa conforman la preselección y asisten al Concurso Regional de Educación Básica Zona Centro, que usualmente se celebra en el mes de abril. Los exámenes selectivos constan de 4 exámenes individuales y 4 exámenes por equipos, tratando de simular el formato del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB).
A continuación presentamos los problemas de la prueba individual del nivel I de la tercera etapa de la OMMEB de la Ciudad de México, la cual se llevó a cabo el día 7 de marzo de 2021. Con este examen fueron seleccionados 32 estudiantes de cuarto grado de primaria y 33 estudiantes de quinto grado de primaria.

Prueba Individual, Nivel I, Tercera Etapa

Ciudad de México, 7 de marzo de 2021

1) En un tablero de ajedrez, dos reyes se atacan si están en dos casillas que comparten un lado o se tocan en una esquina. ¿cuál es el mayor número de reyes que podemos colocar sin que se amenacen?

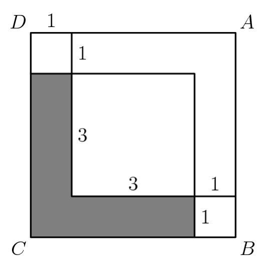
2) El frutero de mi barrio apila las naranjas de la siguiente forma: Sobre una base rectangular de 5×8 naranjas va colocando naranjas de manera que las naranjas del piso superior se apoyan en el hueco que queda entre las cuatro naranjas de abajo hasta coronar con un piso que tiene una única fila de naranjas. ¿Cuántas naranjas tienen las pirámides del frutero?

3) El año 2013 tiene dígitos cuyos valores son cuatro enteros consecutivos. ¿En qué año fue la última vez (antes del 2013) que los dígitos de un año fueron cuatro enteros consecutivos?

4) Algunos caballos y algunos jinetes están en un establo. En total hay 71 cabezas y 228 piernas. ¿Cuántos jinetes hay en el establo?

5) Soy un número de dos dígitos. Al sumarme uno se obtiene un múltiplo de 8 y al sumarme tres se obtiene un múltiplo de 7. ¿Cuál es el número más pequeño que puedo ser?

6) La figura $ABCD$ es un cuadrado. Dentro de este cuadrado se dibujan tres cuadrados más pequeños: dos de lado 1 y uno de lado 3, como se muestra en la figura. ¿Cuánto vale el área sombreada?



7) ¿Cuántos números de exactamente 3 dígitos en su representación decimal no tienen ninguno de sus dígitos igual a 1?

8) Se tienen 2019 ciudades y se quieren construir carreteras de manera que sea posible llegar de una de ellas a cualquier otra. ¿Cuál es el mínimo número de carreteras que se deben construir?

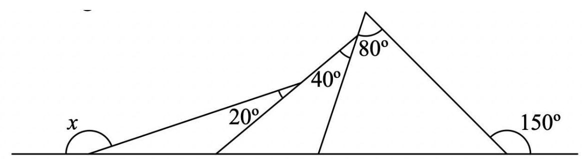
9) Una maestra reparte cantidades iguales de chocolates entre sus 5 alumnos y se queda 3 para ella. No se acuerda cuántos chocolates eran, pero recuerda que era una cantidad múltiplo de 6 entre 65 y 100. ¿Cuántos chocolates tenía antes de hacer la repartición?

10) ¿Cuál es el resultado de

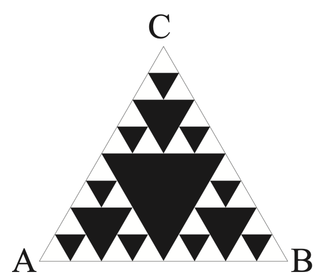
$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots - 2018 + 2019 - 2020 + 2021?$$

11) Si en un cubo de 20 centímetros de lado he logrado meter 7 kilos de arroz sin dejar ni un solo hueco, ¿cuántos kilos de arroz cabrán en un cubo con lados del doble de longitud?

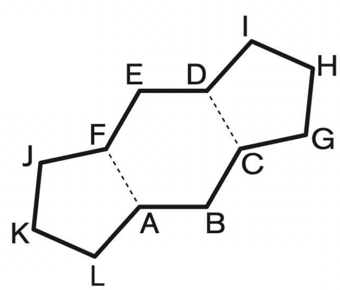
12) ¿Cuánto vale el ángulo marcado con una x?



13) En el triángulo equilátero ABC que se muestra, cada triángulo negro que apunta hacia abajo tiene sus vértices en los puntos medios de los lados de un triángulo blanco que apunta hacia arriba. Si el área del triángulo ABC es 128 cm^2, ¿cuánto vale en total el área blanca?



14) En la figura dos pentágonos regulares han sido pegados a un hexágono regular para crear un polígono de 12 lados. Si cada lado del hexágono mide 3 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura resultante?



15) Spike, Butch y Lucky son 3 perros muy hábiles para cavar agujeros. Spike puede cavar 7 agujeros en 3 horas, Butch puede cavar 8 agujeros en 4 horas y Lucky puede cabar 10 agujeros en 5 horas. Si trabajan juntos, ¿cuántos agujeros podrán cavar en 3 horas?

4^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 14 al 19 de octubre de 2020 se llevó a cabo el Concurso Nacional de la 4^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) de manera virtual. Participaron 80 estudiantes de primaria, representando a 27 entidades federativas y, 176 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas. La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

Los ganadores de medalla de oro y medalla de plata en la prueba individual junto con los ganadores de medalla de oro en la prueba por equipos en cada nivel, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán

a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2021 de forma virtual.
A continuación, listamos los nombres de los alumnos que integran la preselección nacional, así como los problemas y soluciones de la prueba individual y por equipos del Nivel III de la 4^a OMMEB.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Franco Giosef Álvarez González	Chiapas	Oro
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México	Oro
Ana Camila Cuevas González	Tamaulipas	Oro
Luis Enrique López Hernández	Hidalgo	Oro
Angel Eduardo Hernández Nuñez	Veracruz	Oro
Alejandra Muñoz Espin	Morelos	Oro
Constanza Huerta Carvajal	Ciudad de México	Oro
Javier Mena Chávez	Zacatecas	Plata
Fernando Álvarez Ruiz	Nuevo León	Plata
Sergio Barragán Arroyo	Oaxaca	Plata
Daniel Ramírez Kün	San Luis Potosí	Plata
Isaac Montaño Manríquez	Baja California Sur	Plata
María Fernanda Tinajero Sánchez	Tamaulipas	Plata
María Fernanda López Tuyub	Yucatán	Plata
Miguel Esteban Martínez Villegas	Jalisco	Plata
Valentina Yhelenna Oviedo Valle	Morelos	Plata
Fernando González Ruiz	Jalisco	Plata
Bastian Alejandro López Vásquez	Oaxaca	Plata
Natalia Laso Moltó	Ciudad de México	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel III, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 170 puntos), el Estado de Chiapas obtuvo el segundo lugar (con 140 puntos) y los Estados de Baja California Sur, Zacatecas, Nuevo León, Aguascalientes y Yucatán obtuvieron el tercer lugar (con 135 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel III fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 271 puntos). Segundo lugar: Zacatecas (con 227 puntos). Tercer lugar: Chiapas (con 222 puntos).

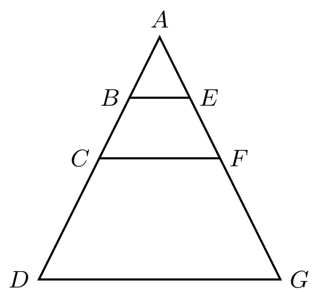
Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) En cada casilla de una cuadrícula de 3×3 hay una moneda. ¿De cuántas maneras se pueden quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado?

2) Sean a, b y c enteros positivos diferentes tales que su suma y su producto son cuadrados perfectos. Determina el menor valor posible de $abc(a + b + c)$.

3) En la siguiente figura se sabe que la altura del triángulo ABE es la mitad de la altura del triángulo ACF, y a su vez la altura del triángulo ACF es la mitad de la altura del triángulo ADG. Si el perímetro del triángulo ABE es 7 cm y el perímetro del trapecio $CDGF$ es 22 cm, ¿cuál es el perímetro, en centímetros, del trapecio $BDGE$?



4) ¿Cuántos subconjuntos de tres elementos (distintos) se pueden escoger del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ de manera que el producto de los tres números no sea divisible entre 4?

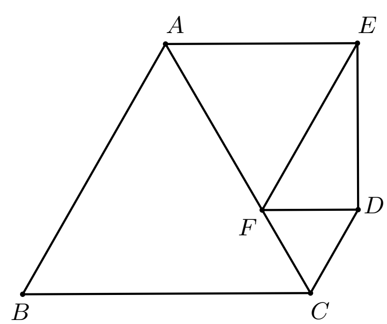
5) La lista $1, x_2, x_3, \ldots, x_n, 200$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores, es decir,

$$x_3 = 1 + x_2,\ x_4 = 1 + x_2 + x_3,\ x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4$$

y así sucesivamente. Determina el valor de x_2.

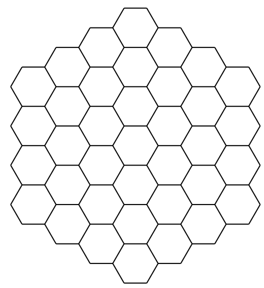
6) Los números reales distintos a, b, c, d satisfacen que $a + c = b + d$ y $a + b + cd = c + d + ab$. Determina la suma de los posibles valores de $a + c$.

7) Sean ABC, AFE y CDF triángulos equiláteros como se muestra en la figura cuyas medidas de sus lados son 6 cm, 4 cm y 2 cm, respectivamente. Si el área del pentágono $ABCDE$ es x cm^2, encuentra el valor de x^2.



8) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la

mayor cantidad de abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



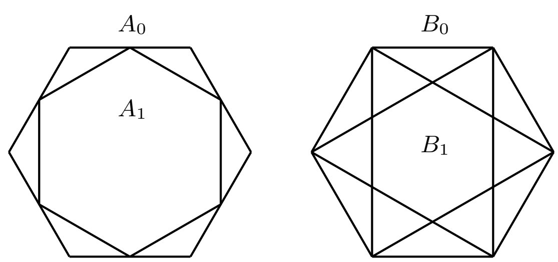
9) Sea $x_0 = a$ con a un número entero positivo. Para cada entero $n > 0$ definimos $x_n = 5x_{n-1} + 1$. ¿Cuántos valores de a menores o iguales que 2020 satisfacen que x_k no es divisible entre 9 para todo entero $k \geq 0$?

10) Sea $f(x) = x^2 + 3x + 2$. Si el producto

$$\left(1 - \frac{2}{f(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{f(3)}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{f(100)}\right)$$

puede escribirse como $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros positivos primos relativos, encuentra el valor de $a + b$.

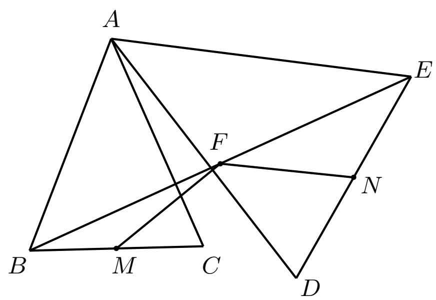
11) Los hexágonos regulares A_0 y B_0 tienen lados iguales a 1. Para cada entero positivo n, el hexágono regular A_n se construye uniendo los puntos medios de los lados del hexágono regular A_{n-1}. El hexágono regular B_n se construye traslapando dos triángulos equiláteros con vértices de B_{n-1}. En la siguiente figura se muestran los hexágonos regulares A_1 y B_1. La razón del área de A_{2020} entre el área de B_{2020} puede escribirse de la forma $(\frac{a}{b})^c$ donde a, b, c son enteros positivos y a, b son primos relativos. Si c toma el valor máximo posible, encuentra el valor de $\frac{c}{a+b}$.



12) El número de mi casa tiene cuatro dígitos diferentes. Si se suman todos los números que se pueden formar con tres de esos cuatro dígitos, se obtiene un total igual al cuadrado de la suma de esos cuatro dígitos multiplicado por mi edad e igual al número de mi casa multiplicado por $\frac{36}{13}$. Encuentra el cociente del número de mi casa entre mi edad.

Parte B

13) Sean ABC y ADE dos triángulos isósceles semejantes entre sí, donde $AB = AC$, $AD = AE$ y $\angle BAD = \angle CAE$. Llamemos M, N y F a los puntos medios de BC, DE y BE, respectivamente. Determina el valor de la razón $\frac{MF}{FN}$.



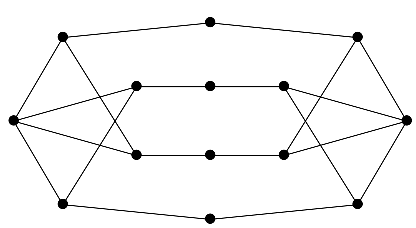
14) Determina todos los enteros a, b y c distintos de cero tales que a sea divisor de $b-c$, b sea divisor de $c-a$ y c sea divisor de $a-b$.

15) En un $2n$-ágono regular se han marcado sus vértices, sus lados, su centro y las n diagonales que pasan por el centro. Si A y B son dos vértices diametralmente opuestos del $2n-$ágono, ¿de cuántas formas se puede ir de A a B moviéndose sobre las líneas de la figura sin pasar dos veces por el mismo punto?

Prueba por Equipos, Nivel III

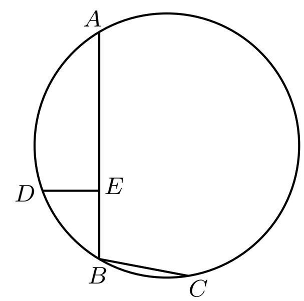
1) Daniela está parada en el vértice A del cuadrado $ABCD$. Va a lanzar una moneda: si cae águila, avanzará al siguiente vértice en el sentido de las manecillas del reloj; si cae sol, avanzará al vértice anterior en el sentido de las manecillas del reloj. Si Daniela lanza la moneda un total de 10 veces y tras el último lanzamiento Daniela cae en el vértice A, ¿de cuántas formas pudo haber sucedido esto?

2) La siguiente figura consta de 14 vértices y 20 segmentos. Se dice que dos vértices son vecinos si hay una línea que empieza en uno de ellos y acaba en otro. Raúl quiere elegir algunos vértices de manera que entre los vértices que eligió y sus vecinos, estén elegidos todos los vértices. ¿Cuál es la mínima cantidad de vértices que debe elegir Raúl para lograr esto?



3) Encuentra la suma de todos los números enteros n de tres dígitos distintos, para los cuales la suma de todos los números de dos dígitos que se pueden formar con los dígitos de n sea igual al doble de n. Por ejemplo, si $n = 123$, entonces los números de dos dígitos distintos que se pueden formar con los dígitos de n son 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

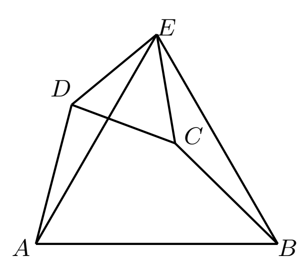
4) En la siguiente figura, los puntos A, D, B y C están sobre una misma circunferencia Γ. El punto E está sobre el segmento AB de tal manera que DE es perpendicular a AB. Si $EB = 3$ cm, $BC = 4$ cm y $AD = DC$, encuentra la medida, en cm, del segmento AE.



5) Emmanuel tiene un candado con una clave de 4 dígitos, pero se le olvidó la contraseña. Recuerda que todos los dígitos son diferentes, que el número es múltiplo de 45, que tiene exactamente un dígito par y que el número comienza con 9 o 4. Si k es el mínimo número de intentos que requiere para poder asegurar que sabe la clave del candado, ¿cuál es el valor de $100k$?

6) Sean a, b y c números reales que cumplen $a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1$. Determina el valor numérico de $abc(a + b + c)$.

7) En el cuadrilátero convexo $ABCD$, se tiene que $\angle BAD + \angle ABC = 120°$, $AD = BC = 5$ cm y $AB = 8$ cm. Además, se construye por fuera del cuadrilátero el triángulo equilátero CDE. Si el área del triángulo ABE es de x cm^2, encuentra el valor de x^2.



Nota: El cuadrilátero $ABCD$ es *convexo* si sus diagonales AC y BD están completamente contenidas en él.

8) Demuestra que si n es un entero positivo tal que $3n + 1$ y $10n + 1$ son cuadrados, entonces $29n + 11$ no puede ser un número primo.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) Como hay 9 monedas, tenemos $\binom{9}{2} = 36$ maneras de quitar dos monedas. Ahora, falta contar la cantidad de maneras en que se pueden quitar las dos monedas de casillas que comparten un lado, lo cual es equivalente a contar cuántas aristas tiene una cuadricula de 3×3 sin contar las del exterior. Es fácil ver que hay 12 de estas aristas, por lo que en total hay 24 maneras de quitar dos monedas que no se encuentren en casillas que comparten un lado.

2) Observemos que la terna $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$ satisface que $a + b + c = 16$ y $abc = 36$ son cuadrados perfectos. Demostraremos que el valor mínimo de $a+b+c$ es 16. Como a, b y c son distintos, tenemos que $a + b + c \geq 1 + 2 + 3 = 6$. Supongamos que $a + b + c = 9$. Las posibilidades de escribir a 9 como suma de tres enteros positivos distintos son: $1 + 2 + 6$, $1 + 3 + 5$ y $2 + 3 + 4$. Sin embargo, ninguno de los productos $1 \times 2 \times 6 = 12$, $1 \times 3 \times 5 = 15$ y $2 \times 3 \times 4 = 24$ es un cuadrado perfecto. Por lo tanto, el valor mínimo de $a + b + c$ es 16.
Ahora, demostraremos que el valor mínimo del producto abc es 36. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $1 \leq a < b < c$.
Si $abc = 4$, entonces $4 = abc > a^3$, de donde $a \leq 1$. Luego, $a = 1$ y $bc = 4$, lo cual no es posible.
Si $abc = 9$, entonces $9 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 9$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
Si $abc = 16$, entonces $16 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o 2. Si $a = 1$, entonces $bc = 16$, de donde la única posibilidad es $b = 2$ y $c = 8$. Sin embargo, la suma $a + b + c = 1 + 2 + 8 = 11$ no es un cuadrado. Si $a = 2$, entonces $bc = 8$, lo cual no es posible.
Si $abc = 25$, entonces $25 = abc > a^3$, de donde $a \leq 2$, esto es, $a = 1$ o $a = 2$. Si $a = 1$, entonces $bc = 25$, lo cual no es posible. Si $a = 2$, entonces abc es par, lo que es una contradicción.
El caso $abc = 36$ se puede obtener con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 12$.
Por lo tanto, el valor mínimo del producto $abc(a + b + c)$ es igual a $36 \times 16 = 576$.

3) Denotaremos por $P(X)$ al perímetro de la figura X. Por las proporciones entre las alturas, deducimos que $P(ACF) = 14$ cm, $P(ADG) = 28$ cm y $P(BCFE) = 11$ cm. Notemos entonces que:

$$\begin{aligned}
14 + 22 &= P(ACF) + P(CDGF) \\
&= AC + CF + FA + CD + DG + GF + FC \\
&= P(ADG) + 2CF \\
&= 28 + 2CF.
\end{aligned}$$

De aquí, $CF = 4$ cm y, por lo tanto, $BE = 2$ cm. Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} P(BDGE) &= BD + DG + GE + EB \\ &= (AD - AB) + DG + (GA - AE) + BE \\ &= P(ADG) - P(ABE) + 2BE \\ &= 28 - 7 + 4 \\ &= 25 \text{ cm.} \end{aligned}$$

4) Observemos que hay dos formas de que el producto de los tres números no sea divisible entre 4: que los tres números sean impares o que haya exactamente un número par que no sea divisible por 4. En el primer caso hay $\binom{10}{3} = 120$ subconjuntos y en el segundo caso hay $5\binom{10}{2} = 225$ subconjuntos, por lo que en total hay $120 + 225 = 345$ subconjuntos que satisfacen la condición.

5) Tenemos que

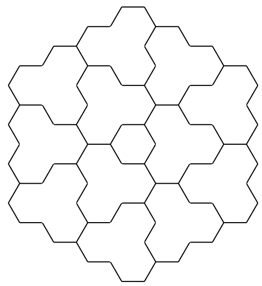
$$\begin{aligned} x_3 &= 1 + x_2, \\ x_4 &= 1 + x_2 + x_3 = 1 + x_2 + 1 + x_2 = 2(x_2 + 1) \\ x_5 &= 2^2(x_2 + 1) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= 2^{n-2}(x_2 + 1). \end{aligned}$$

Como $x_{n+1} = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, resulta que $x_2 + 1 = 5^2$ y, por lo tanto, $x_2 = 24$.

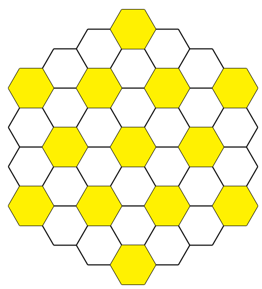
6) Sea $n = a+c = b+d$. Entonces, $c = n-a$ y $d = n-b$. Luego, la segunda condición es $a+b+(n-a)(n-b) = (n-a)+(n-b)+ab$, esto es, $2a+2b-na-nb+n^2-2n = 0$, lo cual se factoriza como $(n-2)(n-a-b) = 0$. Esto implica que $n = 2$ o $n = a + b$. En el último caso, combinando con $n = a + c$ concluimos que $b = c$, lo cual es imposible. Luego, el único valor posible de n es 2. Haciendo $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$ y $d = 2$, obtenemos que $a + c = b + d = 2$ y $a + b + cd = c + d + ab = 5$. Por lo tanto, la respuesta es 2.

7) Notemos que $EF = 2FD$ y que $\angle DFE = 60°$. Esto implica que el triángulo EFD es la mitad de un triángulo equilátero, por lo que $\angle EDF = 90°$ y $ED = \sqrt{3}FD = 2\sqrt{3}$ cm. Luego, el área del pentágono $ABCDE$ es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABC, AFE, CDF y DFE, esto es, $x = 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ cm^2 y, por lo tanto, $x^2 = 16^2(3) = 768$ cm^4.

8) En la siguiente partición de los hexágonos, a lo más un hexágono de cada parte puede estar coloreado, lo que demuestra que no pueden vivir más de 13 abejas en el panal.



Con la siguiente elección nos podemos dar cuenta que sí pueden vivir 13 abejas en el panal.



9) Tomemos $a \equiv 0 \pmod 9$. Entonces podemos formar la siguiente lista módulo 9:

$$\begin{aligned}
x_0 &\equiv 0,\\
x_1 &\equiv 5(0)+1 = 1,\\
x_2 &\equiv 5(1)+1 = 6,\\
x_3 &\equiv 5(6)+1 \equiv 4,\\
x_4 &\equiv 5(4)+1 \equiv 3,\\
x_5 &\equiv 5(3)+1 \equiv 7,\\
x_6 &\equiv 5(7)+1 \equiv 0.\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por esta razón, si $a \equiv 0, 1, 3, 4, 6, 7 \pmod 9$, entonces este ciclo se repite y llegamos a algún $x_k \equiv 0 \pmod 9$, dejando fuera del ciclo las congruencias 2, 5 y 8.

- Si $x_i \equiv 2 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(2)+1 \equiv 2 \pmod 9$.
- Si $x_i \equiv 5 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(5)+1 \equiv 8 \pmod 9$.
- si $x_i \equiv 8 \pmod 9$ entonces $x_{i+1} \equiv 5(8)+1 \equiv 5 \pmod 9$.

Así, cualquier a con estas congruencias módulo 9 cumple las condiciones del problema. Nótese que esto equivale a que $a \equiv 2 \pmod 3$. Por lo tanto, hay 673 números menores o iguales que 2020 que cumplen.

10) Para cualquier entero positivo n tenemos que

$$1-\frac{2}{f(n)}=\frac{f(n)-2}{f(n)}=\frac{n^2+3n}{n^2+3n+2}=\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Por lo tanto, el producto buscado es un producto telescópico y es igual a

$$\left(\frac{1\times 4}{2\times 3}\right)\left(\frac{2\times 5}{3\times 4}\right)\left(\frac{3\times 6}{4\times 5}\right)\left(\frac{4\times 7}{5\times 6}\right)\cdots\left(\frac{99\times 102}{100\times 101}\right)\left(\frac{100\times 103}{101\times 102}\right)$$
$$=\frac{1\times 103}{3\times 101}=\frac{103}{3(101)}.$$

Como 103 y $3(101)$ son primos relativos, la respuesta es $103+303=406$.

11) Observemos primero que si $ABCDEF$ es un hexágono regular, entonces el área del triángulo ABC es igual a $\frac{1}{6}$ del área de $ABCDEF$. Luego, si M y N son los puntos medios de AB y AC, respectivamente, el área del triángulo AMN es $\frac{1}{24}$ del área de $ABCDEF$. Esto implica que

$$[A_{i+1}]=[A_i]-6\times\frac{1}{24}[A_i]=\frac{3}{4}[A_i],$$

donde $[A_i]$ representa el área del hexágono A_i. Así, $[A_{2020}]=\left(\frac{3}{4}\right)^{2020}[A_0]$.
Por otro lado, las diagonales BD y BF trisecan la diagonal AC en el hexágono regular $ABCDEF$. Esto implica que, en la figura del hexágono B_0, los doce triangulitos tienen la misma área y, más aún, el área total de tres de ellos es igual a $\frac{1}{6}$ del área de B_0. Luego,

$$[B_{i+1}]=[B_i]-4\times\frac{1}{6}[B_i]=\frac{1}{3}[B_i].$$

De aquí obtenemos que $[B_{2020}]=\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}[B_0]$. Como $[A_0]=[B_0]$, se sigue que

$$\frac{[A_{2020}]}{[B_{2020}]}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2020}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2020}}=\left(\frac{3}{2}\right)^{4040}.$$

Por lo tanto, la respuesta es $\frac{4040}{3+2}=\frac{4040}{5}=808$.

12) Sea $abcd$ el número de mi casa, donde a,b,c,d son dígitos distintos. El total de números que se pueden formar con los cuatro dígitos a,b,c,d tomados de tres en tres es igual a 24 y son $abc, acb, bac, bca, cab, cba, \ldots, dcb$. La suma de estos 24 números es igual a

$$6(100a+100b+100c+100d+10a+10b+10c+10d+a+b+c+d)=666(a+b+c+d).$$

Luego, si n es mi edad, entonces

$$666(a+b+c+d)=n(a+b+c+d)^2=abcd\cdot\frac{36}{13}.$$

De aquí se sigue que $abcd$ es múltiplo de 13, esto es, $abcd = 13k$ para algún entero positivo k. Por lo tanto, tenemos que $666(a+b+c+d) = 36k$, esto es, $37(a+b+c+d) = 2k$. De esta ecuación obtenemos que k es múltiplo de 37, es decir, $k = 37p$ para algún entero positivo p. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos que $37(a+b+c+d) = 2(37p)$ o, de manera equivalente, $a+b+c+d = 2p$. Por lo tanto, tenemos que $666(2p) = n(2p)^2$, esto es, $333 = np$, que es lo mismo que $3^2 \cdot 37 = np$. Como p es la mitad de la suma de los dígitos a, b, c, d y p está entre $6 = 0+1+2+3$ y $30 = 6+7+8+9$, concluimos que $p = 9$, $n = 37$ y $abcd = 13k = 13 \times 37 \times p = 13 \times 37 \times 9 = 3330 + 999 = 4329$.

Parte B

13) Como $\angle DAB = \angle EAC$, por el criterio LAL los triángulos DAB y EAC son congruentes. Entonces, $BD = CE$. Como M y F son puntos medios de los lados BC y BE, respectivamente, en el triángulo EBC, tenemos que $MF = \frac{1}{2}CE$. Análogamente, tenemos que $FN = \frac{1}{2}BD$. Por lo tanto,

$$\frac{MF}{FN} = \frac{\frac{1}{2}CE}{\frac{1}{2}BD} = 1.$$

14) Consideremos dos casos.
1) Hay dos números iguales entre a, b y c. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a = b$. Como $b = a$ divide a $a - c$, se sigue que $a \mid c$. Es fácil ver que las otras dos condiciones se satisfacen. Luego, en este caso, las ternas son de la forma (a, a, c) con a divisor de c.
2) Todos los números a, b y c son distintos entre sí. Observemos que los tres enteros no pueden ser positivos, ya que por las condiciones del problema el mayor debe dividir a la diferencia de los dos menores. Si los tres enteros son negativos, multiplicando por -1 caemos al caso en que todos son positivos, lo cual no puede ser.
Si hay dos negativos y uno positivo, multiplicando por -1 tendríamos el caso de un negativo y dos positivos. Luego, basta considerar el caso de un negativo y dos positivos.
Supongamos que $a > b > 0 > c$ y sea $c = -d$ con $d > 0$. Tenemos que a divide a $b + d$ y d divide a $a - b$. Esto implica que $a \leq b + d$ y $d \leq a - b$, esto es, $a \leq b + d$ y $b + d \leq a$. Por lo tanto, $a = b + d$, esto es, $a = b - c$. Como b divide a $c - a$, tenemos que b divide a $c - (b - c) = 2c - b$, lo cual implica que b divide a $2c$. Por lo tanto, las ternas en este caso son de la forma $(b - c, b, c)$ con b divisor de $2c$.

15) Hay dos caminos que no pasan por el centro. Hay dos tipos de caminos que pasan por el centro pero que no usan ni la arista de A ni la arista de B. Del primer tipo son los que quedan en cada uno de los dos arcos que van de A a B y de estos hay $2\binom{n-1}{2}$, puesto que hay dos arcos y, en cada arco, el camino queda determinado al escoger cualquier par de aristas hacia el centro. Del otro tipo de caminos son los que una arista está en uno de los arcos de A a B y la otra arista está del otro lado; de este tipo hay $2(n-1)^2$. Ahora, hay $2n - 1$ caminos que usan la arista de A y hay

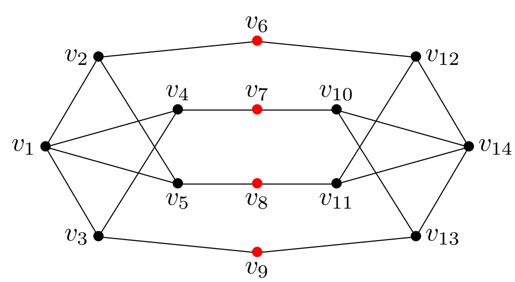
$2n-2$ caminos que usan la arista de B pero no la de A. Por lo tanto, la respuesta es

$$2+2\binom{n-1}{2}+2(n-1)^2+2n-1+2n-2=3\left(n^2-n+1\right).$$

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) De los 2^{10} casos posibles, buscamos aquellos donde $\pm1\pm1\pm\cdots\pm1$ sea un múltiplo de 4. Como la suma máxima es 10 y cambiar un positivo por un negativo resta 2, la cantidad de signos negativos puede ser 1, 3, 5, 7 o 9. Las maneras de elegir su posición son $\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9}=2^9=512$.
(Observe que $2^{10}=(1+1)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}$ y $0=(1-1)^{10}=\sum_{i=0}^{10}\binom{10}{i}(-1)^i$. Luego, $2^{10}=(1+1)^{10}-(1-1)^{10}=2(\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9})$, de donde se obtiene el resultado).

2) Primero vamos a etiquetar los vértices:



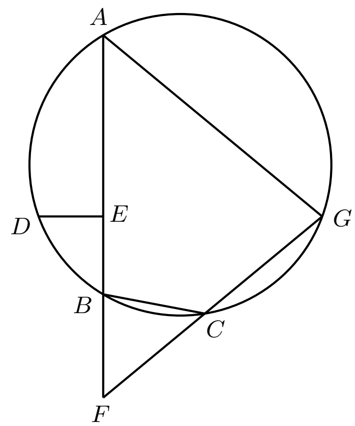
Notemos que Raúl debe elegir al menos 4 vértices de la figura ya que los vértices en rojo no son vecinos y tampoco tienen vecinos en común. Luego, eligiendo v_2, v_4, v_{11} y v_{13}, Raúl logra su cometido. Entonces, debe elegir 4 vértices.

3) Podemos escribir el número n como $n=100a+10b+c$ con $0\leq a,b,c\leq 9$ y $a\neq 0$. Cada número formado con dos dígitos de n se puede escribir como $10x+y$ con $x\in\{a,b,c\}$, $y\in\{a,b,c\}$ y $x\neq y$. Entonces, la condición del problema es equivalente a

$$\begin{aligned}2n&=2(100a+10b+c)\\&=(10a+b)+(10a+c)+(10b+a)+(10b+c)+(10c+a)+(10c+b).\end{aligned}$$

Luego,tenemos que $200a+20b+2c=22a+22b+22c$, lo cual implica que $178a=2b+20c$ o bien $89a=b+10c$.
Como $89\leq 99$, tenemos que $a\leq 1$, de donde $a=1$ y, por lo tanto, $b=9$ y $c=8$. Por lo tanto, $n=198$ es la única solución.

4) Sea F el punto sobre el rayo AB más allá de B tal que $BF=BC$. La recta FC interseca a Γ en los puntos C y G. Como el cuadrilátero $ABCG$ es cíclico y el triángulo BCF es isósceles, se sigue que $\angle BAG=\angle BCF=\angle CFB=\angle GFA$, por lo que el triángulo AFG es isósceles con $AG=GF$.



Por otro lado, como $AD = DC$, se cumple que $\angle AGD = \angle DGC$, por lo que D está sobre la bisectriz del ángulo $\angle AGF$ y, como $AG = GF$, esta bisectriz también es la mediatriz del segmento AF, por lo que la recta GD es la mediatriz de AF. Como DE es perpendicular a AF, entonces E debe ser el punto medio del segmento AF. Por último, dado que $EB = 3$ cm y $BF = BC = 4$ cm, se sigue que $AE = EF = EB + BF = 7$ cm.

5) Como el número de la clave es múltiplo de 45, significa que es múltiplo de 9 y de 5, y esto por sus respectivos criterios de divisibilidad nos lleva a que el número termina en 5 o 0 y que la suma de sus dígitos es múltiplo de 9. Ahora dividiremos el problema en dos casos:

   a) La clave termina en 0. Esto quiere decir que ya no puede empezar con 4, pues contradiría la condición de que solo uno de los dígitos es par. Así que la clave comienza con un 9. Ahora, para que la suma de los dígitos sea múltiplo de 9, necesitamos que los dos dígitos que faltan también sumen un múltiplo de 9. Esto nos deja con que el único múltiplo de 9 que se puede sumar es 9, lo que es una contradicción, ya que al ser 9 un número impar, uno de los dígitos deberá ser par y el otro impar, pero habíamos quedado que ya no podíamos tener más dígitos pares. Concluimos que este caso no tiene solución.

   b) La clave termina en 5. Este caso lo dividiremos en dos subcasos.

      1) La clave comienza con 9. En este caso tenemos que la suma de los dígitos al momento es $9 + 5 = 14$, por lo que para que al sumarle las otras dos cifras faltantes el resultado sea múltiplo de 9 necesitamos que la suma de dichas cifras deje residuo 4 al dividirse entre 9. Así que tenemos solo las opciones de que las dos cifras faltantes sumen 4 o 13. La primera posibilidad no puede suceder, ya que como 4 es par, tenemos que sumar dos dígitos pares o dos dígitos impares, haciendo imposible cumplir que solo haya un dígito par. Concluimos que la suma de los dígitos faltantes debe ser 13. Lo que nos deja con las siguientes contraseñas posibles $\{9765, 9675\}$ (9855 no porque se repite el 5).

2) La clave empieza con un 4. En este caso tenemos que la suma de los números al momento es $4+5=9$, así que la suma de las cifras faltantes debe ser también un múltiplo de 9. Como estamos sumando dos dígitos distintos, la única opción posible es que sumen 9, lo que es una contradicción. Concluimos que este subcaso no tiene solución.

Por lo tanto, solo hay dos combinaciones posibles para la clave y entonces solo deberá hacer un único intento para asegurar que sabe la contraseña, ya que después de este intento, si no se abre el candado, ya solo tiene una opción posible, así que esa será la contraseña. Esto significa que $k=1$ y, por consiguiente, $100k=100$.

6) Notemos que la ecuación $a^2-ab=1$ es equivalente a la ecuación $a^2bc-ab^2c=bc$. De las otras dos ecuaciones, obtenemos que $ab^2c-abc^2=ac$ y $abc^2-a^2bc=ab$. Sumando estas últimas tres ecuaciones, resulta que $ab+bc+ca=0$.
Por otro lado, se sabe que $a^2=ab+1$, $b^2=bc+1$ y $c^2=ca+1$. Multiplicando estas tres ecuaciones obtenemos que

$$a^2b^2c^2=a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+(ab+bc+ca)+1.$$

Como $ab+bc+ca=0$, se sigue que $abc(a+b+c)=-1$.

Solución alternativa. De la condición $a^2-ab=b^2-bc=c^2-ca=1$, obtenemos que $a(a-b)=b(b-c)=c(c-a)=1$. Multiplicando estas tres igualdades resulta que $abc(a-b)(b-c)(c-a)=1$.
Por otro lado, tenemos que

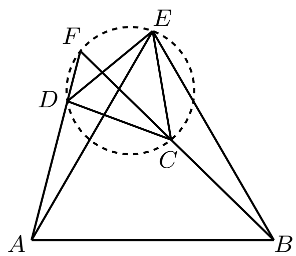
$$\begin{aligned}(a-b)(b-c)(c-a)&=ab^2-a^2b+bc^2-b^2c+ca^2-c^2a\\&=ab(b-a)+bc(c-b)+ca(a-c)\end{aligned}$$

y también $ab(b-a)=-ba(a-b)$, $bc(c-b)=-cb(b-c)$ y $ca(a-c)=-ac(c-a)$. Luego,

$$(a-b)(b-c)(c-a)=-ba(a-b)+-cb(b-c)+-ac(c-a)=-b-c-a.$$

Por lo tanto, $1=abc(a-b)(b-c)(c-a)=abc(-a-b-c)=-abc(a+b+c)$, lo cual implica que $abc(a+b+c)=-1$.

7) Sea $\alpha=\angle ADC$. Notemos que $\angle ADE=60°+\alpha$. Como $\angle BAD+\angle ABC=120°$, se sigue que $\angle BCD=240°-\alpha$, por lo que $\angle BCE=60°+\alpha$. Como $AD=BC$ y $DE=CE$, por el criterio LAL de congruencia tenemos que los triángulos ADE y BCE son congruentes, por lo que $AE=BE$, es decir, el triángulo ABE es isósceles. Más aún, la congruencia anterior implica que $\angle AED=\angle BEC$, lo que a su vez implica que $\angle AEB=\angle DEC=60°$ y, por lo tanto, el triángulo ABE es equilátero. De aquí es fácil calcular su área sabiendo que su lado mide 8 cm, esto es, $x=16\sqrt{3}$ cm^2 y, por consiguiente, $x^2=768$ cm^4.



Otra solución. La idea es la misma que en la solución anterior, mostrar la congruencia de los triángulos ADE y BCE, solamente que damos otra manera de justificar que $\angle ADE = \angle BCE$. Por ángulos suplementarios, basta ver que $\angle FDE = \angle FCE$ (donde F es la intersección de BC con AD). Esto último será inmediato si mostramos que el cuadrilátero $DCEF$ es cíclico. Pero el cuadrilátero es cíclico ya que los ángulos $\angle DFC$ y $\angle DEC$ son iguales a $60°$, el primero porque $\angle DFC = 180° - (\angle BAD + \angle ABC) = 180° - 120° = 60°$ y el segundo por ser ángulo del triángulo equilátero CDE.

8) Supongamos que $3n + 1 = a^2$ y $10n + 1 = b^2$ con a y b enteros positivos y que $29n + 11 = p$ es primo. Multiplicando las primeras dos igualdades, obtenemos que $(ab)^2 = (3n + 1)(10n + 1) = 30n^2 + 13n + 1$. Luego,

$$(ab)^2 - (n + 1)^2 = 30n^2 + 13n + 1 - (n^2 + 2n + 1) = 29n^2 + 11n = np,$$

esto es, $np = (ab - n - 1)(ab + n + 1)$. De aquí se sigue que al menos uno de los factores en el lado derecho es divisible por p y, por consiguiente, es al menos p. Como $ab + n + 1 \geq ab - n - 1$, tenemos que $ab + n + 1 \geq p$, de donde $ab \geq 28n + 10$. Se sigue que $(ab)^2 \geq (28n + 10)^2 = 784n^2 + 560n + 100$. Por otra parte, $(ab)^2 = 30n^2 + 13n + 1$, lo que es una contradicción.

Comentario. Las hipótesis del problema se verifican, por ejemplo, para $n = 8$ y $n = 96$.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

El 8 de marzo de 2021 se aplicó a distancia, el examen de la XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los 34 participantes en el entrenamiento nacional de la OMM y se enviaron los resultados de los diez mejores exámenes al comité organizador de dicho concurso, para su revisión. En esta ocasión, el país organizador fue Indonesia.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 1 de oro, 2 de plata y 4 de bronce. Además, se obtuvieron 2 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 153 puntos quedando en el lugar número 11 de 37 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero): Medalla de Oro.
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa): Medalla de Plata.
- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México): Medalla de Plata.
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas): Medalla de Bronce.
- Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro): Medalla de Bronce.

- José Alejandro Reyes González (Morelos): Medalla de Bronce.
- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León): Medalla de Bronce.
- Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León): Mención Honorífica.
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México): Mención Honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Demuestra que para todo número real $r > 2$ existen exactamente dos o tres números reales positivos x que satisfacen la ecuación $x^2 = r\lfloor x \rfloor$.
Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero menor o igual a x.

Problema 2. Para un polinomio P y un entero positivo m, se define P_m como la cantidad de parejas (a, b) de enteros positivos tales que $a < b \leq m$ y $|P(a)| - |P(b)|$ es divisible entre m. Determina todos los polinomios P con coeficientes enteros tales que $P_m \leq 2021$ para todos los enteros positivos m.

Problema 3. Sean $ABCD$ un cuadrilátero convexo y Γ su circuncírculo. Sea E el punto de intersección de las diagonales AC y BD; sea L el centro de la circunferencia tangente a los lados AB, BC y CD; y sea M el punto medio del arco $\widehat{BC}$ de Γ que no contiene a A y a D. Demuestra que el excentro del triángulo BCE opuesto a E está en la recta LM.

Problema 4. En un tablero de 32×32 hay un ratón (en dirección hacia arriba) en la esquina inferior izquierda y varias piezas de queso en algunas otras casillas. El ratón comienza a moverse. Se mueve hacia adelante excepto cuando encuentra una pieza de queso, en cuyo caso, come una parte de este queso, gira hacia la derecha y continúa moviéndose hacia adelante. Decimos que un subconjunto de casillas con queso es *bueno* si, durante el proceso, el ratón come de cada pieza de queso exactamente una vez y después se sale del tablero. Demuestra que:

a) No existen subconjuntos buenos con 888 casillas.

b) Existe un subconjunto bueno con al menos 666 casillas.

Problema 5. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que $f(f(a) - b) + bf(2a)$ es un cuadrado perfecto para todos los enteros a y b.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2021

Del 9 al 15 de abril de 2021, se llevó a cabo la décima edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) de manera virtual, debido a la emergencia sanitaria por el Covid-19, siendo Georgia la sede académica. El equipo mexicano estuvo integrado por: Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México), Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa), Samantha Ruelas Valtierra (Querétaro) y Alexandra Valdepeñas Ramírez (Coahuila).

El equipo mexicano obtuvo excelentes resultados: Ana Illanes y Karla Rebeca obtuvieron medallas de oro; Alexandra Valdepeñas y Samantha Ruelas obtuvieron medallas de bronce. México obtuvo el sexto lugar de 55 países participantes. La líder del equipo mexicano fue Cristina Sotomayor, la tutora fue Marcela Cruz Larios y como observadora participó Isabel Hubard Escalera.

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la octava ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2021. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. El número 2021 es fantabuloso. Si para algún entero positivo m, alguno de los elementos del conjunto $\{m, 2m+1, 3m\}$ es fantabuloso, entonces todos los elementos de dicho conjunto son fantabulosos. ¿Esto implica que el número 2021^{2021} es fantabuloso?

Problema 2. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tales que la ecuación

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

se cumple para todos los números racionales x y y.
Nota: $\mathbb{Q}$ denota el conjunto de todos los números racionales.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con ángulo obtuso en A. Sean E y F las intersecciones de la bisectriz exterior del ángulo $\angle BAC$ con las alturas del triángulo ABC desde B y C, respectivamente. Sean M y N puntos en los segmentos EC y FB, respectivamente, tales que $\angle EMA = \angle BCA$ y $\angle ANF = \angle ABC$. Demuestre que los puntos E, F, M y N están sobre una misma circunferencia.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con incentro I y sea D un punto arbitrario en el lado BC. La recta que pasa por D y es perpendicular a BI interseca a CI en el punto E. La recta que pasa por D y es perpendicular a CI interseca a BI en el punto F. Demuestre que la reflexión de A sobre la recta EF está en la recta BC.
Nota: la reflexión de un punto P sobre una recta r es el punto Q tal que r es la mediatriz del segmento PQ.

Problema 5. Un plano tiene un punto especial O llamado origen. Sea P un conjunto de 2021 puntos en el plano que cumple las siguientes dos condiciones:

(i) no hay tres puntos de P sobre una misma recta,

(ii) no hay dos puntos de P sobre una misma recta que pasa por el origen.

Se dice que un triángulo con vértices en P es *gordo* si O es un punto interior de dicho triángulo. Encuentre la mayor cantidad de triángulos gordos que puede haber.

Problema 6. Determine si existe un entero no negativo a para el cual la ecuación

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor = n^2 + a$$

tiene más de un millón de soluciones diferentes (m, n) con m y n enteros positivos.
Nota: la expresión $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera (o piso) del número real x. Por ejemplo, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ y $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXIII Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Carlos Emilio Ramos Aguilar). Notemos que si algún número real positivo x cumple para algún número real $r > 2$ y $\lfloor x \rfloor = 0$, entonces $x^2 = r\lfloor x \rfloor = 0$, por lo que $x = 0$, lo cual es imposible. Esto significa que $\lfloor x \rfloor \geq 1$ para cualquier x que cumpla. Así, $r = \frac{x^2}{\lfloor x \rfloor}$.
Si x y y son números reales positivos que satisfacen la ecuación para el mismo valor de r, entonces $\frac{x^2}{\lfloor x \rfloor} = \frac{y^2}{\lfloor y \rfloor}$, es decir, $x^2\lfloor y \rfloor = y^2\lfloor x \rfloor$. Si $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$, se sigue que $x^2 = y^2$, de donde se concluye que $x = y$. Así, dentro de un intervalo $(a, a+1)$ con a un entero, hay a lo más un real x tal que $x^2 = r\lfloor x \rfloor$ para un real dado $r > 2$.
Ahora, supongamos que existen cuatro números reales positivos diferentes $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ tales que

$$\frac{x_1^2}{\lfloor x_1 \rfloor} = \frac{x_2^2}{\lfloor x_2 \rfloor} = \frac{x_3^2}{\lfloor x_3 \rfloor} = \frac{x_4^2}{\lfloor x_4 \rfloor} = r,$$

con $\lfloor x_i \rfloor \geq 1$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$. Por lo anterior, $\lfloor x_1 \rfloor \neq \lfloor x_2 \rfloor$, por lo que $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor - 1$. Análogamente, obtenemos que

$$\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_2 \rfloor - 1 \leq \lfloor x_3 \rfloor - 2 \leq \lfloor x_4 \rfloor - 3.$$

En particular, tenemos que $\lfloor x_1 \rfloor \leq \lfloor x_4 \rfloor - 3$ y, por lo tanto, $x_1 < \lfloor x_1 \rfloor + 1 \leq \lfloor x_4 \rfloor - 2 \leq x_4 - 2$, es decir, $x_1 + 2 < x_4$.
Como $\frac{x_1^2}{\lfloor x_1 \rfloor} = \frac{x_4^2}{\lfloor x_4 \rfloor}$ y $x_4 \geq \lfloor x_4 \rfloor$, tenemos que $\frac{x_1^2}{\lfloor x_1 \rfloor} = x_4\left(\frac{x_4}{\lfloor x_4 \rfloor}\right) \geq x_4 > x_1 + 2$, por lo que $x_1^2 > x_1\lfloor x_1 \rfloor + 2\lfloor x_1 \rfloor$. Si $x_1 = \lfloor x_1 \rfloor + \{x_1\}$, donde $0 \leq \{x_1\} < 1$ es la parte fraccionaria de x_1, se puede ver que $(\lfloor x_1 \rfloor + \{x_1\})^2 > (\lfloor x_1 \rfloor + \{x_1\})\lfloor x_1 \rfloor + 2\lfloor x_1 \rfloor$.

Esto es equivalente a $\lfloor x_1\rfloor^2 + 2\lfloor x_1\rfloor\{x_1\} + \{x_1\}^2 > \lfloor x_1\rfloor^2 + \{x_1\}\lfloor x_1\rfloor + 2\lfloor x_1\rfloor$, esto es, $\lfloor x_1\rfloor < \frac{\{x_1\}^2}{2-\{x_1\}}$. Sin embargo, $\{x_1\}^2 < 1$ y $2 - \{x_1\} > 1$, lo que indica que $\lfloor x_1\rfloor < \frac{\{x_1\}^2}{2-\{x_1\}} < 1$, que contradice el hecho de que $\lfloor x\rfloor \geq 1$. Por lo tanto, para cada $r > 2$ hay a lo más tres números reales que cumplen la ecuación dada.
Por último, demostraremos que existen al menos dos números reales x que satisfacen la ecuación dada. Sean $\lfloor x\rfloor = k$ y $\{x\} = m$. La ecuación $x^2 = r\lfloor x\rfloor$ equivale a $k^2+2km+m^2 = kr$, la cual se puede reescribir como $m^2+m(2k)+\left(k^2-kr\right) = 0$. De la fórmula general para ecuaciones cuadráticas, obtenemos que

$$m = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4\left(k^2 - kr\right)}}{2} = -k \pm \sqrt{kr}.$$

Como $k > 0$ es un entero y $0 \leq m < 1$, tenemos que $m = \sqrt{kr} - k$. Así, si para un número real $r > 2$ dado, se encuentran dos valores de k tales que $0 \leq \sqrt{kr} - k < 1$, tendríamos dos soluciones de la ecuación original. Notemos que la condición $m \geq 0$ es equivalente a la condición $rk \geq k^2$, la cual se reduce a $r \geq k$. Además, $m < 1$ si y solo si $k + 1 > \sqrt{kr}$, que es equivalente a $k^2 + 2k + 1 > kr$, la cual se reduce a $r < k + 2 + \frac{1}{k}$.
Demostraremos que $k = \lfloor r\rfloor$ y $k = \lfloor r\rfloor - 1$ cumplen con las condiciones buscadas. Esto se puede deducir de las desigualdades $r \geq \lfloor r\rfloor > \lfloor r\rfloor - 1$ y

$$r < \lfloor r\rfloor + 1 < (\lfloor r\rfloor - 1) + 2 + \frac{1}{\lfloor r\rfloor - 1} \quad \text{y} \quad r < \lfloor r\rfloor + 1 < \lfloor r\rfloor + 2 + \frac{1}{\lfloor r\rfloor}.$$

Así, se concluye que para cada $r > 2$ existen al menos dos soluciones a la ecuación dada y a lo mucho existen tres.

Solución del problema 2. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Empezaremos suponiendo que el grado del polinomio P es mayor o igual que 2 y demostraremos que P no puede cumplir con las condiciones del problema.
Si P tiene como coeficiente principal un entero positivo, entonces $P(a)$ es positivo para a positivo suficientemente grande. Así, si demostramos que para algún m existen más de 2021 parejas (a, b) con $m \geq b > a > k$ (con k una constante positiva) y m divide a $P(a) - P(b)$, se habrá concluido este caso. Sin embargo, si el coeficiente principal de P es negativo, para a suficientemente grande se tendrá que $P(a)$ es negativo, por lo que se puede hacer lo mismo que con el caso anterior pero con $-P$ en lugar de P. Esto indica que estos dos casos son equivalentes.
Como P tiene grado mayor o igual que 2, eventualmente $P(m + 1) - P(m) \geq 1$. Sea m un entero positivo mayor que k tal que $P(m + 1) - P(m) \neq 1$ y sea p un primo que divide a $P(m + 1) - P(m)$. Sea n un entero suficientemente grande tal que $n \equiv 1 \pmod{p}$ y $np > k$ (tal entero n existe por el teorema de Dirichlet[3]). Consideremos las parejas (a, b) tales que $np \geq b > a > k$, $b - a = n$ y $a \equiv m \pmod{p}$. Demostraremos que para cada tal pareja se cumple que $|P(a)| - |P(b)| = P(a) - P(b)$ es divisible por np. Como $n \equiv 1 \pmod{p}$, tenemos que n y p son

[3]**Teorema de Dirichlet.** Sean a y k enteros primos relativos con $k > 0$. Entonces, hay una infinidad de números primos p tales que $p \equiv a \pmod{k}$.

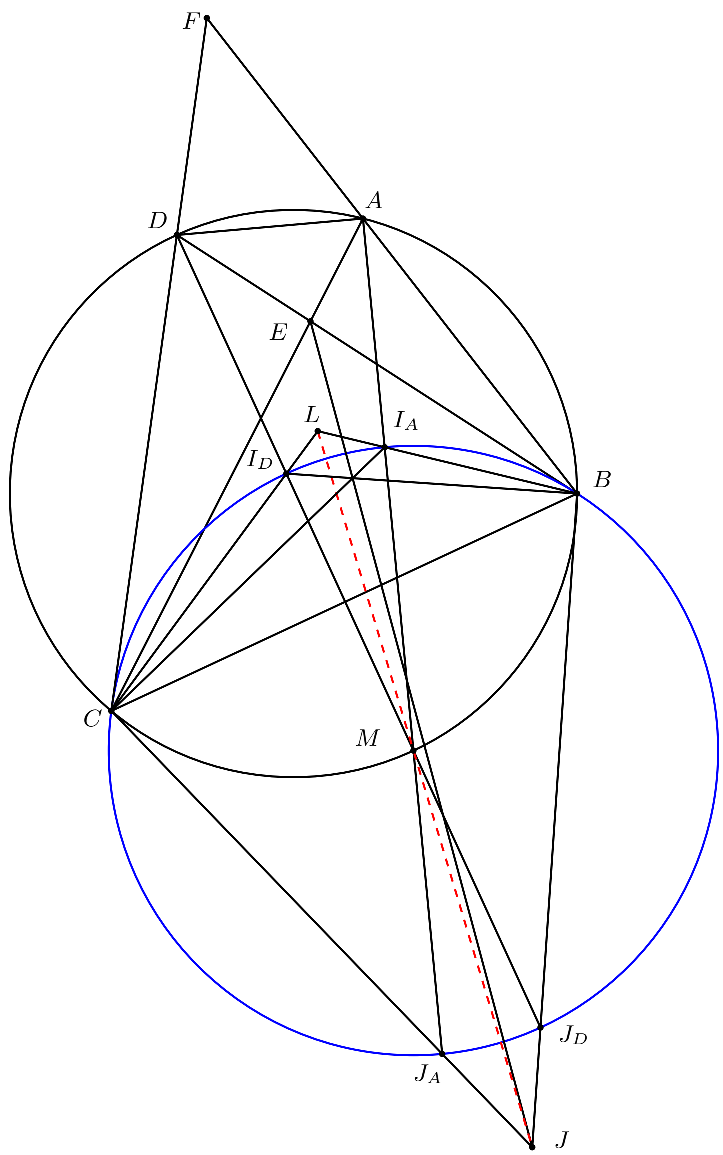
primos relativos, por lo que basta probar que n divide a $P(a) - P(b)$ y que p divide a $P(a) - P(b)$. Es un hecho conocido que, como P tiene coeficientes enteros, se cumple que $a - b$ divide a $P(a) - P(b)$. Esto significa que n divide a $P(a) - P(b)$. Además, como $a \equiv m \pmod{p}$, tenemos que $P(a) \equiv P(m) \pmod{p}$ y

$$b \equiv a + n \equiv a + 1 \equiv m + 1 \pmod{p},$$

de modo que $P(b) \equiv P(m+1) \pmod{p}$ y, como p divide a $P(m+1) - P(m)$, se cumple que p divide a $P(a) - P(b)$, como se quería.
Ahora, notemos que la cantidad de parejas (a, b) que cumplen las condiciones anteriores es mayor que $\left\lfloor \frac{np-n}{p} \right\rfloor - k$. Esto se puede ver escogiendo las a's menores que $np - n$ (para así poder elegir $b = a + n$) que son congruentes con $m \pmod{p}$. Sin embargo, tomando n suficientemente grande, como $p \geq 2$, es claro que se puede hacer que el número $\left\lfloor \frac{np-n}{p} \right\rfloor - k$ sea mayor que 2021, de donde se concluye que el grado máximo de P es 1.
Si P es constante, tenemos que $|P(a)| - |P(b)| = 0$, lo cual es divisible por cualquier entero, de modo que claramente no cumple. Luego, P es de la forma $P(x) = cx + d$ con c y d enteros. Supongamos que $c \neq \pm 1$ y, sin pérdida de generalidad, que $c > 0$ (que se puede hacer por lo mencionado al principio). Si m es de la forma cn con n un entero positivo primo relativo con c, entonces considerando las parejas (a, b) con $cn \geq b > a > k$ para cierta k constante y $b - a = n$, claramente sucede que cn divide a $P(a) - P(b)$, pues $n = b - a$ divide a $P(b) - P(a)$ y $P(b) - P(a) = c(b - a)$, lo cual es divisible por c y, como $\operatorname{mcd}(c, n) = 1$, tenemos que cn divide a $P(a) - P(b)$. Se puede ver que hay al menos $cn - n - k$ de estas parejas y, como $c \geq 2$, para n suficientemente grande, esta cantidad será mayor que 2021. Por lo tanto, $P(x) = x + d$ o $P(x) = -x + d$.
Si $P(x) = x + d$ y d es no negativo, entonces $|P(a)| - |P(b)| = a - b$ y $m > |a - b| > 0$, de modo que $P_m = 0$ para cualquier entero positivo m. Análogamente $P_m = 0$ si $P(x) = -x - d$ y $d \geq 0$. Luego, faltan por revisar los casos $P(x) = -x + d$ y $P(x) = x - d$ con $d > 0$.
Primero, consideremos el caso $P(x) = -x + d$ con $d > 0$. Supongamos que $2022 \geq d$. Si x y y son enteros positivos y $P(x)$ y $P(y)$ son ambos positivos o negativos, entonces $|P(x)| - |P(y)|$ no será divisible por m, de modo que alguno entre $P(x)$ y $P(y)$ debe ser negativo y el otro positivo. Es claro que para cada valor negativo hay a lo más un valor positivo tal que m divide a $|P(x)| - |P(y)|$ por lo dicho anteriormente. Luego, como hay a lo más 2021 negativos (pues $d \leq 2022$), se tiene que $P_m \leq 2021$ siempre. Por otro lado, supongamos que $d \geq 2023$. Tenemos que hay enteros w tales que $P(w) = k$ para todo $2022 \geq k \geq 1$ pero, como ninguno de esos enteros es $d + 1$, $d + 2, \ldots, d + 2020$ y $P(d + k) = -k$ para todo k, concluimos que hay 2022 parejas distintas tales que $|P(a)| - |P(b)| = 0$ y, entonces, para m suficientemente grande tenemos una contradicción. El caso $P(x) = x - d$ con $d > 0$ se sigue de forma análoga. Por lo tanto, los únicos polinomios que cumplen son los de la forma $P(x) = x + d$ y $P(x) = -x - d$ con $d \geq 0$ un entero, y los de la forma $P(x) = x - d$ y $P(x) = -x + d$ con $1 \leq d \leq 2022$.

Solución del problema 3. (Solución de Tomás Francisco Cantú Rodríguez). Sean I_A e I_D los incentros de los triángulos BAC y BDC respectivamente, y sean J_A y

J_D los excentros de los triángulos BAC y BDC opuestos a A y D, respectivamente. Sean J el excentro opuesto a E del triángulo BEC y F la intersección de AB y CD. Notemos que L es el incentro del triángulo BFC o el excentro de este mismo triángulo opuesto a F (dependiendo de la figura).



Observemos que los puntos I_A, M y J_A son colineales, ya que M está sobre la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ por ser $BACM$ cíclico y M el punto medio del arco $\widehat{BC}$. De manera análoga, tenemos que los puntos I_D, M y J_D son colineales. Además, es conocido que $MI_A = MB = MJ_A$ y que $MI_D = MB = MJ_D$. Esto significa que $MI_A = MB = MC = MI_D = MJ_A = MJ_D$, por lo que los puntos I_A, I_D, C, J_A, J_D y B son concíclicos y el centro de la circunferencia que pasa por ellos es M.

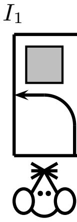
Al ser BI_A la bisectriz del ángulo $\angle CBA$ y BL la bisectriz de este mismo ángulo, tenemos que B, I_A y L son colineales. De forma análoga, se puede ver que C, I_D y L son colineales. Además, como BJ es la bisectriz externa del ángulo $\angle CBE$ y BJ_D es la bisectriz externa del ángulo $\angle CBD$ (que coincide con el ángulo $\angle CBE$), se concluye que B, J_D y J son colineales. Análogamente, obtenemos que C, J_A y J son colineales.

Usando el teorema de Pascal [4] en el hexágono cíclico $J_DBI_AJ_ACI_D$, obtenemos que la intersección de J_DB y J_AC, la intersección de BI_A y CI_D y, la intersección de J_DI_D y I_AJ_A, son colineales. Como $J_DB \cap J_AC = J$, $BI_A \cap CI_D = L$ y $J_DI_D \cap I_AJ_A = M$, concluimos que los puntos J, L y M son colineales, como se quería.

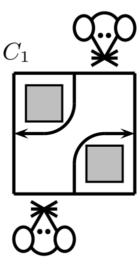
Solución del problema 4. a) Supongamos, por contradicción, que existe un subconjunto bueno con 888 casillas. Llamaremos a esas casillas, *casillas-queso* y, a las otras, *casillas-vacías*. Como cada casilla-queso es visitada una vez, cada casilla-vacía es visitada a lo más dos veces (una vez verticalmente y una vez horizontalmente). Definimos una sucesión finita s cuyo i-ésimo término es Q si el i-ésimo paso del ratón fue sobre una casilla-queso y, es V, si fue sobre una casilla-vacía. Por hipótesis, s contiene 888 Q's. Observemos que s no contiene un bloque contiguo de 4 (o más) Q's. Luego, s contiene al menos $\frac{888}{3} = 296$ de tales Q-bloques y, por lo tanto, al menos 295 V's. Pero, como cada casilla-vacía es atravesada a lo más dos veces, esto implica que hay al menos $\lceil 295/2 \rceil = 148$ casillas-vacías, para un total de $888 + 148 = 1036 > 32^2$ casillas, lo que es una contradicción.

b) Sean I_i y C_i dos mosaicos de tamaño $2^i \times 2^i$ que le permiten al ratón "girar a la izquierda" y "cruzar", respectivamente. En detalle, los mosaicos de "girar a la izquierda" permiten que el ratón ingrese en su celda inferior izquierda mirando hacia arriba y salga en su celda inferior izquierda mirando hacia la izquierda. Los mosaicos "cruzados" permiten al ratón ingresar en su celda superior derecha mirando hacia abajo y salir en su celda inferior izquierda mirando hacia la izquierda, mientras que también ingresa en su celda inferior izquierda mirando hacia arriba y sale en su celda superior derecha mirando hacia la derecha.

I_1

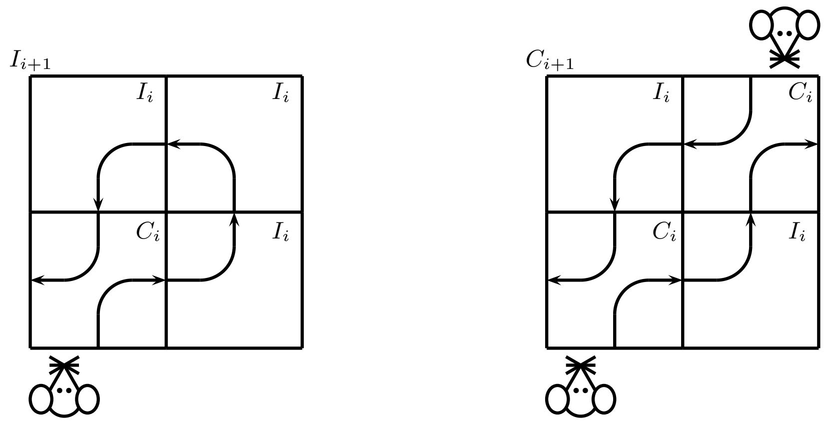


C_1

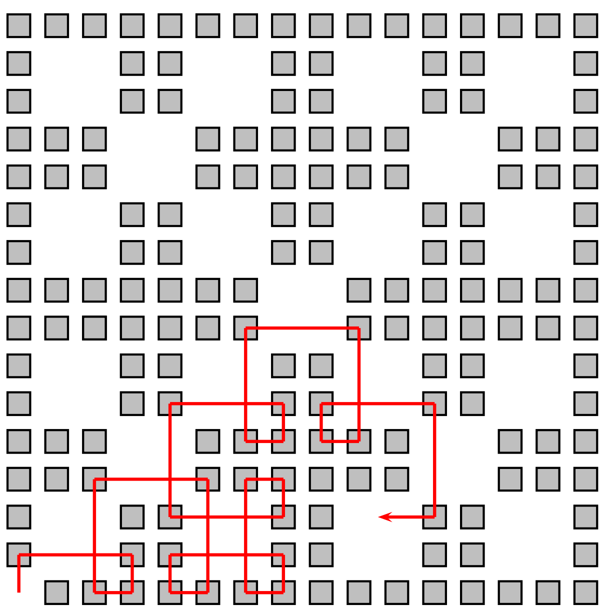


[4] **Teorema de Pascal.** Sea $ABCDEF$ un hexágono cíclico que posiblemente se puede intersecar a sí mismo. Sean $X = AB \cap DE$, $Y = BC \cap EF$ y $Z = CD \cap FA$. Entonces, X, Y y Z son colineales.

Observemos que dados dos mosaicos I_i y C_i, de tamaño $2^i \times 2^i$, podemos construir mosaicos más grandes I_{i+1} y C_{i+1}, de tamaño $2^{i+1} \times 2^{i+1}$, de manera inductiva como se muestra en la siguiente figura.



La construcción funciona porque el camino se interseca a sí mismo (o interseca al otro camino) solo dentro de un mosaico X más pequeño donde funciona por inducción. A continuación mostramos un ejemplo del recorrido que seguiría el ratón en I_4.



Para un mosaico T, sea $|T|$ el número de piezas de queso en él. Por inducción se puede demostrar que $|I_i| = |C_i| + 1$ y $|I_{i+1}| = 4|I_i| - 1$. De la condición inicial, tenemos que $|I_1| = 3$. Ahora podemos calcular fácilmente: $|I_2| = 11$, $|I_3| = 43$, $|I_4| = 171$ y

$|I_5| = 683$, de donde se sigue el resultado.

Solución del problema 5. Hay dos familias de funciones que satisfacen la condición:

1) $f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \text{cualquier cuadrado perfecto} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$

2) $f(n) = n^2$ para cada entero n.

Es fácil verificar que las dos familias de funciones son soluciones. Supongamos ahora que f es cualquier función que satisface la condición de que $f(f(a) - b) + bf(2a)$ es un cuadrado perfecto para cada par (a, b) de enteros. Denotaremos a esta condición por $(*)$. Demostraremos que f debe estar en alguna de las dos familias de funciones 1) o 2).

Afirmación. $f(0) = 0$ y $f(n)$ es un cuadrado perfecto para cada entero n.

Demostración. Haciendo $a = 0$ y $b = f(0)$ en la condición $(*)$, tenemos que

$$f(0)(f(0) + 1) = z^2$$

para algún entero z. Luego, $(2f(0) + 1 - 2z)(2f(0) + 1 + 2z) = 1$, de donde se sigue que $f(0) = -1$ o $f(0) = 0$.
Supongamos, por contradicción, que $f(0) = -1$. Para cualquier entero a, haciendo $b = f(a)$ en la condición $(*)$, resulta que $f(a)f(2a) - 1$ es un cuadrado. Luego, para cada entero a, existe un entero x tal que $f(a)f(2a) = x^2 + 1$. Esto implica que cualquier divisor primo de $f(a)$ o es igual a 2 o es congruente con 1 módulo 4, y que $4 \nmid f(a)$ para cada entero a.
Haciendo $a = 0$ y $b = 3$ en la condición $(*)$, obtenemos que $f(-4) - 3$ es un cuadrado. Luego, existe un entero y tal que $f(-4) = y^2 + 3$. Como $4 \nmid f(-4)$, tenemos que $f(-4)$ es un entero positivo congruente con 3 módulo 4 (pues todo cuadrado es congruente con 0 o 1 módulo 4). Pero, cualquier divisor primo de $f(-4)$ o es 2 o es congruente con 1 módulo 4, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(0) = 0$.
Para cada entero positivo n, haciendo $b = -n$ y $a = 0$ en la condición $(*)$, obtenemos que $f(n)$ es un cuadrado. $\square$

Reemplazando b con $f(a) - b$ en la condición $(*)$, tenemos que para todo entero a y todo entero b,

$$f(b) + (f(a) - b)f(2a) \text{ es un cuadrado.} \tag{14}$$

Ahora, sea S el conjunto de todos los enteros n tales que $f(n) = 0$. Tenemos dos casos:

Caso 1: S no está acotado por arriba. Afirmamos que $f(2n) = 0$ para cada entero n. Fijemos un entero n y sea $k \in S$ tal que $k > f(n)$. Entonces, haciendo $a = n$ y $b = k$ en la condición (14), obtenemos que $f(k) + (f(n) - k)f(2n) = (f(n) - k)f(2n)$ es un cuadrado. Pero $f(n) - k < 0$ y $f(2n)$ es un cuadrado por la afirmación demostrada antes. Esto es posible solo si $f(2n) = 0$. En conclusión, $f(n) = 0$ si n es par y la afirmación demostrada antes muestra que $f(n)$ es un cuadrado si n es impar.

Caso 2: S está acotado por arriba. Sea T el conjunto de todos los enteros n tales que $f(n) = n^2$. Demostraremos que T no está acotado por arriba. Más aún, demostraremos que $\frac{p+1}{2} \in T$ para todo número primo p suficientemente grande. Fijemos un primo p suficientemente grande y sea $n = \frac{p+1}{2}$. Haciendo $a = n$ y $b = 2n$ en la condición (14), obtenemos que $f(2n)(f(n) - 2n + 1)$ es un cuadrado para cualquier entero n. Para p suficientemente grande, tenemos que $2n \notin S$, de modo que $f(2n)$ es un cuadrado distinto de cero. En consecuencia, cuando p es suficientemente grande, $f(n)$ y $f(n) - 2n + 1 = f(n) - p$ son ambos cuadrados. Escribiendo $f(n) = k^2$ y $f(n) - p = m^2$ para algunos enteros no negativos k y m, tenemos que $(k+m)(k-m) = k^2 - m^2 = p$, lo cual implica que $k+m = p$ y $k - m = 1$ y, por lo tanto, $k = n$ y $m = n - 1$. Luego, $f(n) = k^2 = n^2$ obteniendo así que $n = \frac{p+1}{2} \in T$.
Ahora, para todo $k \in T$ y cualquier entero n, haciendo $a = n$ y $b = k$ en la condición (14), obtenemos que $k^2 + (f(n) - k)f(2n)$ es un cuadrado. Esto implica que

$$(2k - f(2n))^2 - (f(2n)^2 - 4f(n)f(2n)) = 4(k^2 + (f(n) - k)f(2n))$$

también es un cuadrado. Cuando k es suficientemente grande, tenemos que

$$|f(2n)^2 - 4f(n)f(2n)| + 1 < |2k - f(2n)|.$$

Luego,

$$(|2k-f(2n)|-1)^2 < (2k-f(2n))^2-(f(2n)^2-4f(n)f(2n)) < (|2k-f(2n)|+1)^2$$

y, como $(2k - f(2n))^2 - (f(2n)^2 - 4f(n)f(2n))$ es un cuadrado, necesariamente $f(2n)^2 - 4f(n)f(2n) = 0$ y, por lo tanto, $f(2n) \in \{0, 4f(n)\}$ para todo entero n.
Por último, vamos a demostrar que $f(n) = n^2$ para todo entero n. Fijemos n y sea $k \in T$ suficientemente grande tal que $2k \notin S$. Entonces, $f(k) = k^2$ y $f(2k) = 4f(k) = 4k^2$. Haciendo $a = k$ y $b = n$ en la condición (14), tenemos que

$$f(n) + (k^2 - n)4k^2 = (2k^2 - n)^2 + (f(n) - n^2)$$

es un cuadrado. Como T no está acotado por arriba, podemos tomar $k \in T$ tal que $2k \notin S$ y también $|2k^2 - n| > |f(n) - n^2|$. Entonces,

$$(|2k^2 - n| - 1)^2 < (2k^2 - n)^2 + (f(n) - n^2) < (|2k^2 - n| + 1)^2$$

ya que $|f(n) - n^2| < |2k^2 - n| \leq 2|2k^2 - n| - 1$. Como $(2k^2 - n)^2 + (f(n) - n^2)$ es un cuadrado, necesariamente $f(n) - n^2 = 0$, esto es, $f(n) = n^2$, obteniendo así la segunda familia de soluciones.

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2021

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2021.

Solución del problema 1. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Si m es fantabuloso y $m = 2n + 1$ entonces n también lo es, ya que tomamos el conjunto $\{n, 2n+1 = m, 3n\}$. Si m es fantabuloso y $m = 3n$, entonces n también lo es usando el conjunto $\{n, 2n+1, 3n\}$. Si m es fantabuloso, $2m+1$ y $3m$ son fantabulosos. Ahora, usando que 2021 es fantabuloso, demostraremos que $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ son fantabulosos. Usaremos la notación $a \Rightarrow b$ para indicar que si a es fantabuloso entonces b también es fantabuloso.

$$\begin{aligned}
2021 &\Rightarrow 3 \cdot 2021 = 2(3031) + 1 \Rightarrow 3031 = 2(1515) + 1 \Rightarrow 1515 = 2(757) + 1 \\
&\Rightarrow 757 = 2(378) + 1 \Rightarrow 378 = 3(126) \Rightarrow 126 = 3(42) \Rightarrow 42 = 3(14) \\
&\Rightarrow 14 \Rightarrow 2(14) + 1 = 29 \Rightarrow 3(29) = 87 = 2(43) + 1 \Rightarrow 43 = 2(21) + 1 \\
&\Rightarrow 21 = 2(10) + 1 \Rightarrow 10 \Rightarrow 3(10) = 30 \Rightarrow 2(30) + 1 = 61 \\
&\Rightarrow 3(61) = 183 = 2(91) + 1 \Rightarrow 91 = 2(45) + 1 \Rightarrow 45 = 3(15) \Rightarrow 15.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos que

$$15 = 3(5) \Rightarrow 5 = 2(2) + 1 \Rightarrow 2.$$

También tenemos que

$$15 = 2(7) + 1 \Rightarrow 7 = 2(3) + 1 \Rightarrow 3 = 2(1) + 1 \Rightarrow 1.$$

Finalmente,

$$3 \Rightarrow 3(3) = 9 = 2(4) + 1 \Rightarrow 4$$

y $2 \Rightarrow 3(2) = 6$. Entonces, los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ son fantabulosos.

Usaremos inducción fuerte para demostrar que todo número natural es fantabuloso, lo cual demostrará que 2021^{2021} es fantabuloso. Nuestros casos base son $n = 1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y nuestra hipótesis de inducción fuerte es que todo $m \leq n$ es fantabuloso.

Si $n + 1$ es impar, entonces $n + 1 = 2(n/2) + 1$ y como $n/2 \leq n$ es fantabuloso, entonces $n + 1$ es fantabuloso. Si $n + 1$ es múltiplo de 3, entonces $(n + 1)/3 \leq n$ es fantabuloso y, por lo tanto, $n + 1$ es fantabuloso. Nos faltan los casos $n + 1 = 6k + 2$ y $n + 1 = 6k + 4$.

En el caso $n + 1 = 6k + 4$, tenemos que $4k + 3 \leq 6k + 3 = n$, de donde se sigue que $4k + 3$ es fantabuloso por la hipótesis de inducción, lo cual implica que $3(4k + 3) = 12k + 9$ es fantabuloso. Pero $12k + 9 = 2(6k + 4) + 1$, esto es, $6k + 4$ es fantabuloso.

En el caso $n + 1 = 6k + 2$, tenemos que $4k + 1 \leq 6k + 1 = n$ es fantabuloso por la hipótesis de inducción y, por lo tanto, $2(4k + 1) + 1 = 8k + 3$ es fantabuloso. Luego, $3(8k + 3) = 24k + 9$ y $3(24k + 9) = 72k + 27$ son fantabulosos. Pero

$$72k+27 = 2(36k+13)+1 \Rightarrow 36k+13 = 2(18k+6)+1 \Rightarrow 18k+6 = 3(6k+2) \Rightarrow 6k+2.$$

Por lo tanto, $6k+2$ es fantabuloso. En todos los casos tenemos que $n+1$ es fantabuloso, lo cual concluye la inducción.

Solución del problema 2. (Solución de Karla Rebeca Munguía Romero). Con $y = 0$ tenemos que $f(xf(x)) = x^2 + f(0)$, mientras que con $y = xf(x)$ tenemos que $f(xf(x) + xf(x)) = f(xf(x)) + x^2$. Por lo tanto,

$$f(2xf(x)) = 2x^2 + f(0).$$

Supongamos que $f(kxf(x)) = kx^2 + f(0)$. Entonces, usando $y = kxf(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(xf(x) + kxf(x)) &= x^2 + f(kxf(x)), \\ f((k+1)xf(x)) &= (k+1)x^2 + f(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, por inducción tenemos que $f(kxf(x)) = kx^2 + f(0)$ para enteros $k \geq 1$. Ahora, usando $y = -xf(x)$ obtenemos que

$$f(0) = x^2 + f(-xf(x)).$$

Luego, $f(-xf(x)) = -x^2 + f(0)$. Supongamos que $f(kf(x)) = kx^2 + f(0)$. Entonces con $y = (k-1)xf(x)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f((k-1)xf(x)) + x^2 &= f(kxf(x)), \\ f((k-1)xf(x)) &= kx^2 + f(0) - x^2 = (k-1)x^2 + f(0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo entero k, $f(kxf(x)) = kx^2 + f(0)$.
Como $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ entonces para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}$ existen enteros a, b, c, d tales que $xf(x) = \frac{a}{b}$ y $yf(y) = \frac{c}{d}$. Luego, $(xbd)f(x)$ y $(ybd)f(y)$ son enteros. Entonces tenemos que

$$f((xbdf(x))yf(y)) = xbdf(x)y^2 + f(0)$$

y

$$f((ybdf(y))xf(x)) = ybdf(y)x^2 + f(0).$$

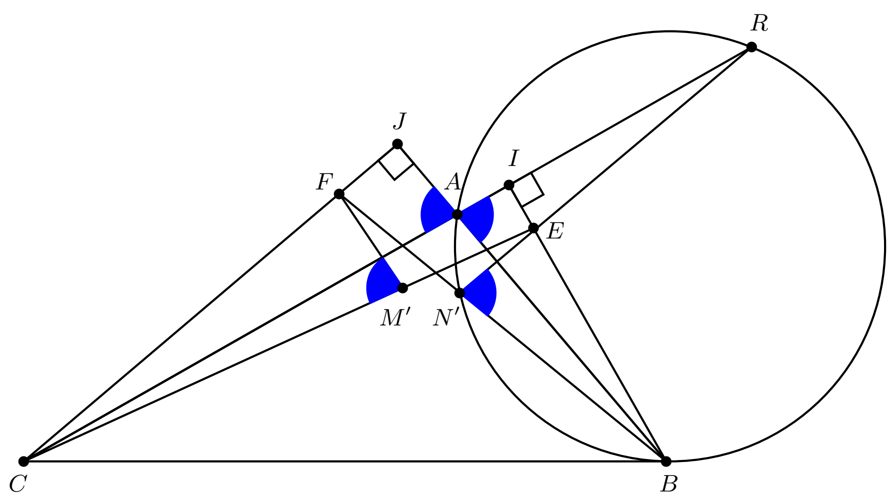
Por lo tanto, $f(x)y = f(y)x$ para todos los números racionales x, y distintos de cero. Con $y = 1$ obtenemos $f(x) = xf(1)$. Si $f(1) = k$, entonces $f(x) = kx$. Luego,

$$f(x^2k + y) = f(xf(x) + y) = f(y) + x^2 = yk + x^2,$$

pero también $f(x^2k + y) = (x^2k + y)k = x^2k^2 + yk$.
Por lo tanto, $x^2k^2 = x^2$, de lo cual concluimos que $k = \pm 1$. Entonces, $f(x) = x$ o $f(x) = -x$.
Si $f(x) = x$, entonces $f(xf(x) + y) = x^2 + y = f(y) + x^2$.
Si $f(x) = -x$, entonces $f(xf(x) + y) = x^2 - y = f(y) + x^2$.
Por lo tanto, la respuesta es $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = -x$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

Solución del problema 3. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Tenemos que $\angle ANF = \angle NAB + \angle ABN$ y $\angle ABC = \angle ABN + \angle NBC$. Como $\angle ABC =$

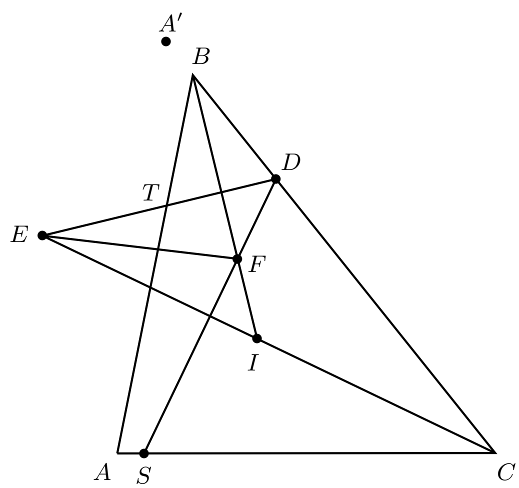
$\angle ANF$, de lo anterior se sigue que $\angle NAB = \angle NBC$ y, por consiguiente, BC es tangente al circuncírculo del triángulo ABN.
Sean M' y N' puntos en EC y BF, respectivamente, tales que $\angle EN'B = \angle FM'C = 2\alpha$ donde $2\alpha = 180° - \angle BAC$. Lo que queremos probar es que $N = N'$ y $M = M'$ porque así vamos a tener que $\angle ENB = \angle FMC = 2\alpha$ y esto implica que $FMNE$ es cíclico.



Demostraremos que $M = M'$ y $N = N'$. Para lograr esto, basta demostrar que BC es tangente al circuncírculo del triángulo ABN', porque sabemos que BC es tangente al circuncírculo del triángulo ABN (y análogamente para M). Más aún, BC es tangente al circuncírculo del triángulo ABN' si y solo si $\angle N'BC = \angle N'RB$, donde R es la intersección de $N'E$ con AC ($AN'BR$ es cíclico por las definiciones de N' y R).
Sea J la intersección de FC con AB y sea I la intersección de BE con AC. Sabemos que $\angle FJB = \angle EIR = 90°$ por condición del problema y que $\angle ARN' = \angle ABF$ por el cíclico $AN'BR$. Entonces, los triángulos REI y BFJ son semejantes y, por lo tanto, $\frac{RE}{BF} = \frac{IE}{JF}$. Sin embargo, tenemos que $\frac{IE}{JF} = \frac{EB}{FC}$ por la semejanza de los triángulos AIE y AJF y por la semejanza de los triángulos AEB y AFC (esto se puede ver pasando ángulos y viendo que los ángulos de los triángulos AIE y AJF son α, $90°$, $90° - \alpha$ y los ángulos de los triángulos AEB y AFC son α, $90° + \alpha$ y $90° - 2\alpha$). Entonces, $\frac{RE}{BF} = \frac{BE}{FC}$ y $\angle REB = 90° + \angle ERI = 90° + \angle FBJ = \angle BFC$. Usando el criterio de semejanza LAL tenemos que los triángulos REB y BFC son semejantes, por lo que $\angle FBC = \angle N'RB$. Luego, BC es tangente al circuncírculo del triángulo ABN' y, por lo tanto, $N' = N$. Análogamente obtenemos que $M = M'$.

Solución del problema 4. (Solución de Samantha Ruelas Valtierra). Llamemos S a la intersección de FD con AC, T a la intersección de DE con AB y A' a la reflexión de A por EF. Sean $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$ y $\angle CAB = 2\alpha$. Como I es incentro, tenemos que $\angle IBD = \angle TBI = \beta$, $\angle SCI = \angle ICB = \gamma$ y $\angle CAI = \angle IAB = \alpha$.

Como BI y DT son perpendiculares, entonces $DB = BT$. Análogamente, como CI y SD son perpendiculares, entonces $CS = CD$. Luego, $\angle SDC = 90° - \gamma$, $\angle EDB = 90° - \beta$ y, como $\alpha + \beta + \gamma = 90°$, entonces $\angle SDE = 90° - \alpha$. Dado que DT y FI son perpendiculares, tenemos que $\angle SFI = \alpha$. Por lo tanto, $SAFI$ es cíclico.



Ahora, como CE es mediatriz de SD, tenemos que $\angle SED = 2\alpha = \angle SAT$ y, por lo tanto, $SATE$ es cíclico. Como FB es mediatriz de DT, entonces $DF = FT$. Por lo tanto, $\angle SFT = 180° - 2\alpha$, lo cual implica que $SFTA$ es cíclico. Como $SAFI$ es cíclico, entonces $SATFI$ es cíclico. Como $ASTE$ es cíclico entonces $ASIFTE$ es cíclico. Luego, $\angle EFA = \angle EIA$, pero como I es incentro entonces $\angle EIA = \alpha + \gamma = 90° - \beta$. Como AA' es perpendicular a EF y $\angle EFA = 90° - \beta$, tenemos que $\angle FAA' = \angle FA'A = \beta$.
Llamemos K a la intersección de BC con AA'. Tenemos que $\angle FAK = \beta$ y $\angle FBK = 180° - \beta$, por lo que $FABK$ es cíclico. Ahora, $\angle FBA = \beta$ y $\angle FA'A = \beta$, entonces $\angle FBA = \angle FA'A$ y $\angle FKA = \angle FBA = \angle FAK$. Por lo tanto, $FK = FA = FA'$. Como A, A' y K son colineales, las igualdades anteriores son posibles si $K = A$ o $K = A'$. El primer caso no es posible ya que K está sobre BC y A no lo está. Por lo tanto, $K = A'$ y, por consiguiente, A' está en BC.

Solución del problema 5. Contaremos el número mínimo de triángulos que no son gordos. Sean F el conjunto de triángulos gordos y S el conjunto de triángulos que no son gordos. Si el triángulo $XYZ \in S$, llamamos a X y Z vértices *buenos* si OY está entre OX y OZ. Para $A \in P$, sea $S_A \subseteq S$ el conjunto de triángulos en S para los cuales A es un vértice bueno del triángulo.
Es fácil ver que

$$2|S| = \sum_{A \in P} |S_A|.$$

Para $A \in P$, sean $I_A \subset P$ y $D_A \subset P$ los puntos de $P \setminus \{A\}$ a la izquierda y derecha de la recta AO, respectivamente. Supongamos que para $AXY \in S$, el vértice A es bueno, entonces $X, Y \in L_A$ o $X, Y \in D_A$. Por otro lado, si $X, Y \in I_A$ o $X, Y \in D_A$, entonces $AXY \in S$ y A es un vértice bueno. Por lo tanto,

$$|S_A| = \binom{|I_A|}{2} + \binom{|D_A|}{2}. \tag{15}$$

Para $x, y \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} - 2\frac{\frac{x+y}{2}\left(\frac{x+y}{2}-1\right)}{2} = \frac{(x-y)^2}{4}. \tag{16}$$

Usando (15) y (16) obtenemos que

$$|S_A| \geq 2\binom{\frac{|I_A|+|D_A|}{2}}{2} = 2 \cdot \binom{1010}{2} = 1010 \cdot 1009, \tag{17}$$

y la igualdad sucede cuando $|I_A| = |D_A| = 1010$. Entonces,

$$|S| = \frac{1}{2}\sum_{A\in P} |S_A| \geq \frac{2021 \cdot 1010 \cdot 1009}{2} = 2021 \cdot 505 \cdot 1009. \tag{18}$$

Por lo tanto,

$$|F| = \binom{2021}{3} - |S| \leq 2021 \cdot 1010 \cdot 673 - 2021 \cdot 1009 \cdot 505 = 2021 \cdot 505 \cdot 337. \tag{19}$$

En la configuración con los 2021 puntos en un 2021-ágono regular con centro en O, las desigualdades (17), (18) y (19) se convierten en igualdades. Por lo tanto, la respuesta es $2021 \cdot 505 \cdot 337 = 343943885$.

Solución del problema 6. Sea $f(m) = \left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$. Tenemos que

$$f(m) \leq \sum_{k=1}^{m} \frac{m}{k} = m\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}.$$

Sea r el mayor entero tal que $2^{r-1} < m \leq 2^r$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} &\leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{r-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^r}\right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{2^{r-1}}{2^{r-1}+1} < r + 1.\end{aligned}$$

Por definición de r tenemos que $r - 1 = \lfloor \log_2(m) \rfloor$, entonces $r + 1 \leq \log_2(m) + 2$. Por lo tanto, para m suficientemente grande,

$$f(m) < m(\log_2(m) + 2) \leq 2m\log_2(m) \leq m^{4/3}.$$

Sea n_m el entero más grande tal que $n_m^2 \leq f(m)$. Sea $a_m = f(m) - n_m^2$. Como $(n_m + 1)^2 > f(m)$ entonces para m suficientemente grande

$$0 \leq a_m \leq 2n_m \leq 2\sqrt{f(m)} < 2m^{2/3} \leq \frac{1}{2}m^{3/4}.$$

Sea m suficientemente grande tal que $a_m \leq \frac{1}{2}m^{3/4}$ y que $m^{1/4} > 10^6$. Entonces para $k \leq m$ tenemos

$$a_{m+k} < \frac{1}{2}(m+k)^{3/4} \leq \frac{1}{2}(2m)^{3/4} \leq m^{3/4}.$$

La lista $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{2m}$ consiste de m enteros no negativos menores que $m^{3/4}$. Por lo tanto, algún número $a \in \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_{2m}\}$ debe aparecer al menos $m^{1/4} > 1000000$ veces. Luego, tenemos que hay más de un millón de parejas (s, n_s) tales que $f(s) - n_s^2 = a$.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3. *Si p es un número primo de la forma $4k + 3$ y p divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces p divide a cada uno de a y b.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 19 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Víctor Hugo Almendra Hernández

Ignacio Barradas Bribiesca

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez