SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2021, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Noviembre de 2021

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel medio superior que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2021, Número 4

El comité editorial de la revista *Tzaloa*, te da la bienvenida a su cuarto y último número del año 2021. Con este número ya son 52 números publicados de manera ininterrumpida en 13 años consecutivos desde su creación, en 2009. El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. De esta forma, queremos dar la bienvenida a Violeta Hernández Palacios, quien desde ahora se integra al Comité Editorial de la revista y, aprovechamos la ocasión, para agradecer y dar una afectuosa despedida a Victor Antonio Domínguez Silva, quien participó en este comité desde mayo de 2020.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

Pasando al contenido, destaca el artículo *¿Cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas?*, de nuestro amigo Héctor "Ray" Flores Cantú. En él, Héctor nos da algunas recomendaciones sobre cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas y, en general, cómo leer textos complejos. Estamos seguros que estas recomendaciones serán de gran ayuda para todos los lectores y, en particular, para los participantes que se están preparando para el próximo concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas.
De especial interés para todos, en este cuarto y último número del año 2021, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel I del Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2021 de forma virtual.
En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de las pruebas individual y por equipos del Nivel Elemental de la Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (IIMC 2021) que se realizó de forma virtual, siendo Indonesia el país organizador. También incluimos los problemas con soluciones de la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas y de la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe, realizadas de forma virtual en los meses de julio y agosto de 2021, respectivamente.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

35ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2002. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2021-2022 y, para el 1° de julio de 2022, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2021. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2021 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXIV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2022) y a la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2022).

De entre los concursantes nacidos en 2005 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXIV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2022).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XI Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2022.

¿Cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas?

Por Héctor Raymundo Flores Cantú

Nivel Básico

Estás presentando un examen importante de la olimpiada mexicana de matemáticas. Son 3 problemas difíciles que debes resolver en 4 horas y media. Este es el primer día de examen y te sientes satisfecho por tu desempeño. Resolviste el problema 1 sin dificultades, el problema 2 te costó algo de trabajo pero estás convencido de que está completo y en el problema 3 generaste algunas ideas. Aunque no llegaste a la solución, crees que podrías obtener algunos puntos.

Cuando termina el examen vas con los demás y están hablando sobre uno de los problemas. Escuchas lo que dicen y tratas de entender las ideas pero algo no te hace sentido. Preguntas y uno de ellos te comenta su solución. Ese sentimiento de satisfacción que tenías al salir del examen se va convirtiendo lentamente en lo que podríamos llamar un mini ataque de pánico... "leíste mal" el problema 2.

A mi me pasó como participante en algún examen y cada año que voy con una delegación muchas veces hay al menos una persona del equipo que lee mal alguno de los problemas. Primero pensé que solo me pasaba a mi, pero luego me di cuenta que realmente es algo muy frecuente. Le pasa a cualquiera.

Los problemas de olimpiada plantean situaciones a veces muy complejas en pocas frases. Tienen una estructura gramatical compleja y tienen mucha información. En este artículo quiero comentarte algunas recomendaciones sobre cómo leer problemas de olimpiada de matemáticas y, en general, cómo leer textos complejos. De paso, vamos a practicar un poco de lenguaje matemático y teoría de conjuntos. Estos dos últimos temas resultarán muy importantes para facilitarle a tu cerebro el trabajo de entender problemas complejos. Pero iniciemos con algunas recomendaciones simples que he observado que muchos participantes no siguen.

Sugerencia # 1:
Lee una sola frase y detente a pensar
antes de continuar con la lectura.

Nuestra memoria a corto plazo solo tiene capacidad de procesar un máximo de 3 o 4 "bloques" de información nueva (ver [4]). Esto significa que necesitas darle tiempo a tu cerebro de asimilar los conceptos que se presentan en cada frase. Aún si la frase es sencilla, te recomiendo que dediques un poco de tiempo a reflexionar en ella antes de seguir leyendo. Veamos como ejemplo la primera frase de un problema de la olimpiada nacional de matemáticas. En caso de que no lo tengas claro. Una frase empieza con una mayúscula y termina con un punto.

Frase # 1.1:
Sea $n \geq 2$ un número entero.

Esta puede parecer una frase sencilla, pero tiene suficiente información para que empecemos a pensar. Hay muchos problemas que inician con algo similar, n un entero o entero positivo. Una sugerencia particular para problemas que incluyen algo así es inmediatamente tener en mente un valor especial de esa n. Por ejemplo, $n = 2$, $n = 4$ o algún otro valor pequeño. Esto va a ser particularmente importante si se trata de un problema que incluya más propiedades complejas. A mí me sorprende la cantidad de participantes que intentan resolver los problemas complicados sin tener en mente que se debe primero reflexionar sobre los casos particulares ($n = 1$, $n = 2$, etc.). Problemas que inician de esta forma son tantos que quisiera resaltar esto como sugerencia, aunque no es estrictamente una sugerencia sobre lectura del problema.

Sugerencia # 2:
En problemas que hablen de n entero (positivo), no intentes resolver el problema
para n sin analizar antes los casos particulares.

Bueno, esta frase inicial no tiene mucha más información así que podemos continuar con la lectura del problema. La segunda frase de este problema será significativamente más compleja que la primera. Dice lo siguiente.

Frase # 1.2:
Para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_k$ de enteros positivos tales que
$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$, considera las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq k$.

Podemos estar de acuerdo que esta segunda frase es más difícil de asimilar. La mayoría de los participantes que presentaron el examen el año en que se aplicó este problema tuvieron considerables dificultades para siquiera entender lo que ahí se decía. Esto fue

posiblemente porque no estaban acostumbrados a pensar en elementos matemáticos más complejos que números o figuras geométricas.
Comentaba que cada problema presenta una situación. Puedes pensar que cada problema cuenta una historia donde los personajes serán objetos matemáticos. Esta segunda frase nos presenta un tipo específico de estos objetos: sucesiones de números. Aunque existe una definición formal de lo que es una sucesión, si eres principiante basta que consideres que una sucesión es simplemente una lista ordenada de números. A cada número a veces se le llama "término" de la sucesión.
En este caso se trata de sucesiones finitas (tienen fin). Por el subíndice de a_k, deducimos que son listas con k términos. Aunque no está explícitamente dicho en el problema, se entiende que k es un entero positivo también. El número k es la cantidad de términos de la sucesión.
Como lo comentaba, es importante que te des tiempo para asimilar el tipo de objetos matemáticos de los que el problema trata. Estos son como los personajes de la historia y requiere que te detengas un poco para pensar en ellos. Aprovechemos para definir dos elementos fundamentales del lenguaje matemático que te serán muy útiles en muchos otros problemas.

Definición (intuitiva) 1: Una *propiedad* es una afirmación matemática que trata sobre algún objeto matemático y que puede ser falsa o verdadera. Si es falsa, decimos que el elemento no cumple la propiedad. Si es verdadera, decimos que el elemento sí cumple la propiedad.

En libros de lógica o de demostraciones, verás que llaman afirmación (matemática) a lo que yo estoy definiendo aquí como "propiedad". Puedes pensar en afirmaciones, pero me parece más natural llamarlas propiedades porque es como generalmente suelen usarse en la práctica de la matemática.
Ejemplos:

- Cuando dices: "p es un número primo", el objeto matemático es p y la propiedad es "ser primo".

- Cuando dices: "El triángulo ABC es isósceles", el objeto matemático es el triángulo ABC y la propiedad es "ser isósceles".

- En nuestro problema, el objeto matemático es la sucesión $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ y la propiedad que debe cumplir es que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$.

Observa que en este caso, la propiedad depende de n, que era un número entero. Ya había comentado que esto significaba que en realidad no es un solo problema, sino infinitos problemas (uno para cada n). Para que te quede más claro lo que dice ahí, imagina que $n = 6$. ¿Qué sucesiones deberíamos considerar en ese caso? Pues las sucesiones (listas) de números que sumados me dan 6. Hay muchas de ellas: Una puede ser: $(1, 2, 3)$, otra $(1, 2, 2, 1)$, otra $(3, 3)$ etc. Aquí aprovecharé para darte otra definición intuitiva importante que nos ayuda a asimilar mejor las cosas en casi todos los problemas de matemáticas.

Definición (intuitiva) 2: Un *conjunto* es la abstracción que nos sirve para ponernos de acuerdo sobre los elementos matemáticos que se van a considerar en una discusión.

Los conjuntos sirven para que nos pongamos de acuerdo. Digamos que quiero que pienses en ciertos objetos matemáticos. Frecuentemente lo que haré será describir una cierta propiedad y luego pediré que imagines todos los objetos que la cumplen. Aunque ciertamente es posible definir conjuntos de forma arbitraria. De cualquier forma las propiedades/afirmaciones y los conjuntos siempre están relacionados.
Dada una propiedad, puedes imaginar el conjunto de elementos matemáticos que la cumplen y, dado un conjunto, puedes pensar en la propiedad de ser elementos del mismo. Digamos que conjuntos y afirmaciones son dos formas diferentes de representar e imaginar la misma información. Es recomendable experimentar con ambas, especialmente si estás trabajando con problemas complejos.
Ejemplos:

- Imagina dos puntos fijos A y B en el plano. Los objetos analizados son los puntos P del plano. Piensa en la propiedad de estar a la misma distancia de A que de B, ($AP = BP$). Hay puntos en el plano que cumplen y puntos que no cumplen esa propiedad. El conjunto de puntos que cumplen esa propiedad definen lo que se conoce como la *mediatriz* del segmento AB.

- Imagina un entero positivo n. Los objetos serán los números enteros positivos menores o iguales a n. Ahora piensa en la propiedad de ser divisor de n. Hay números que son divisores de n y números que no lo son. Los números que son divisores de n forman un conjunto.

- En nuestro problema también debemos basarnos en un entero n. Los objetos son sucesiones (listas de números). La propiedad es que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$. Hay listas que cumplen esta propiedad y listas que no cumplen la propiedad. El conjunto de listas que cumplen, es el que debemos tener en mente.

A los conjuntos se les suele poner como nombre letras mayúsculas (A, B, C, etc.). Esto es un acuerdo común en textos matemáticos. Mientras que a los objetos que forman parte de esos conjuntos se les nombra con letras minúsculas (x, y, z). Conocer sobre el lenguaje de conjuntos puede ayudarte a simplificar tu forma de escribir problemas de olimpiada y hacer que los revisores te entiendan mejor. Pero más importante aún, asimilar este lenguaje hará que tu cerebro esté más preparado para pensar como matemático. Algo que te resultará fundamental cuando trates de enfrentarte a problemas más complejos.
Si le ponemos como nombre C a un conjunto y a un objeto matemático le nombramos con la letra x, la forma compacta de decir que el objeto está considerado en el conjunto es escribir: $x \in C$. Se suele leer que "x es elemento de C" o simplemente que "x está en C". No daré aquí una lista completa de todos los símbolos y operadores de conjuntos, pero te recomiendo que los aprendas. La mayoría de los libros de matemáticas discretas o combinatoria incluyen estos temas.
Regresando a nuestra frase # 2, observemos que apenas hemos discutido sobre la primera mitad de lo que decía. La segunda mitad de la frase nos pide que consideremos las sumas $S_i = 1 + 2 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq k$.

Los a_i's eran los términos de la sucesión, así que lo que nos dice esta parte es que habrá una suma para cada término de la sucesión.

Sucesión	Cálculos	Sumas asociadas
$(1,2,3)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$	$1,3,6$
$(1,2,2,1)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 2+1 = 3$, $S_4 = 1$	$1,3,3,1$
$(3,3)$	$S_1 = 1+2+3 = 6$, $S_2 = 1+2+3 = 6$	$6,6$

Si estás durante un examen leyendo un problema como este, será fundamental que dediques varios minutos a hacer varias de estas listas. La tabla anterior solo considera el caso $n = 6$, pero tú deberías hacer varios experimentos para más casos. Aprovecho también para sugerirte que siempre que tengas algún tipo de asociación entre objetos matemáticos, escribas los ejemplos usando justamente tablas. Tal como lo puse arriba. Esta frase # 2 tiene una estructura matemática compleja a pesar de que solo trata con conceptos relativamente sencillos (listas de números enteros). El tiempo que dediques a cada frase debe depender de la complejidad de la misma. Finalmente, asegúrate de escribir mucho durante la lectura de un problema complejo. Esto reforzará aun más la asimilación de los elementos matemáticos del problema.

Sugerencia # 3:
Después de leer cada frase, asegúrate de haber escrito lo que hayas descubierto o experimentado mientras la analizabas. Usa gráficas, listas, tablas, ecuaciones, dibujos o lo que te parezca más adecuado. Pero, ¡escribe cosas!

Esta sugerencia puede parecer evidente, pero cada año decenas de participantes entregan hojas en blanco en sus exámenes. Escribir también estimula tu mente a tener ideas. No solo se trata de "escribir soluciones", escribes desde que estás leyendo el problema para ayudarte a entender mejor las cosas.
Veamos ahora la frase final del problema.

Frase # 1.3:
Determina, en términos de n, el máximo valor posible del producto $S_1S_2\cdots S_k$.

Dije que cada problema cuenta una historia, pero siempre hace más que eso. Al final te hace una pregunta o te propone un reto. Cuando lees una historia eres un simple espectador, pero en los problemas se te exige que juegues un rol más activo haciendo alguna deducción o encontrando algo. El tipo de reto define el tipo de problema y en muchos casos las estategias que podemos usar.
En este caso el reto consiste en "encontrar algo" y, en particular, encontrar el máximo valor de una expresión. A este tipo de problemas se les conoce como problemas de optimización (cuando se trata de encontrar el máximo o el mínimo de una función

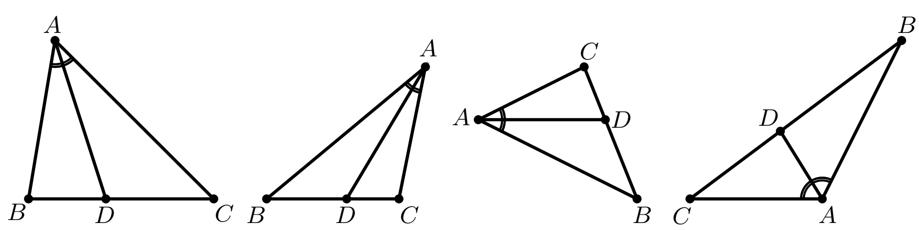
en un conjunto). La tabla que usamos arriba podemos completarla con una columna adicional.

Sucesión	Cálculos	Sumas asociadas	Producto
$(1,2,3)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 1+2+3 = 6$	$1,3,6$	$1\cdot 3\cdot 6 = 18$
$(1,2,2,1)$	$S_1 = 1$, $S_2 = 1+2 = 3$, $S_3 = 2+1 = 3$, $S_4 = 1$	$1,3,3,1$	$1\cdot 3\cdot 3\cdot 1 = 9$
$(3,3)$	$S_1 = 1+2+3 = 6$, $S_2 = 1+2+3 = 6$	$6,6$	$6\cdot 6 = 36$

Recuerda que debemos entender el problema primero para $n = 6$ antes de tratar de analizar casos más complejos. Lo que nos pide el problema es encontrar el máximo valor que puede obtenerse de ese producto cuando la lista cumple la propiedad de que su suma es igual a 6. Para este caso, no es dificil encontrar que la lista que hace máximo el producto es $(3, 3)$. Analizando de forma similar para otros casos y observando con cuidado, no tardarás en darte cuenta de las características de esa lista y estarás muy cerca de la solución del problema.
En este artículo no completaré la solución, ya que quiero enfocarme en la lectura y entendimiento de los problemas. Por si te interesa investigarlo más, el problema que acabo de usar como ejemplo, apareció en el examen nacional de la 32^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas y puedes hallarlo en la página oficial de la olimpiada (`www.ommenlinea.org`). Aunque fue problema 4 (en teoría "fácil"), los participantes de ese año obtuvieron menos puntos en él que en algunos problemas 6 de otros años.
Usemos otro problema como ejemplo para aprender más sugerencias sobre esto.
Siguiendo la sugerencia 1 que comenté, veamos lo que dice la primera frase del problema antes de continuar con la lectura.

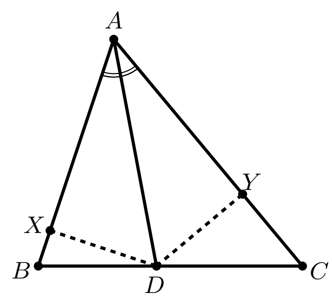
Frase # 2.1:
Sean ABC un triángulo y AD la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, con D sobre BC.

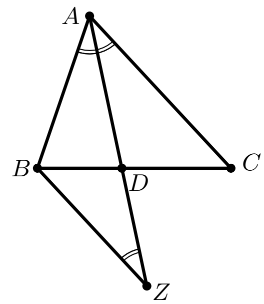
Una ventaja de los problemas de geometría, es que cada frase suele darnos indicaciones para la construcción de una figura. Así que siempre tendremos alguna imagen visual de la información del problema. Aprovecharé para sugerirte que en problemas de geometría conviene hacer varias figuras en posiciones diferentes, ya sea durante la lectura del problema o cuando ya lo estemos analizando.



Otra sugerencia específica que debes tener en mente, es detenerte a pensar algunas consecuencias, deducciones o ideas que puedas generar a partir de lo que dice la frase.

En el caso de este problema, la bisectriz nos dice que los ángulos son iguales y, por lo tanto, podemos imaginar ya algunas construcciones. Por ejemplo, que la distancia del punto D a los lados AB y AC son iguales o podríamos recordar el teorema de la bisectriz que dice que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$. Si recordamos un teorema, deberíamos también tratar de recordar su demostración. Para este teorema, por ejemplo, una demostración consiste en trazar una paralela a AC por el punto B e intersecarla con la recta AD.





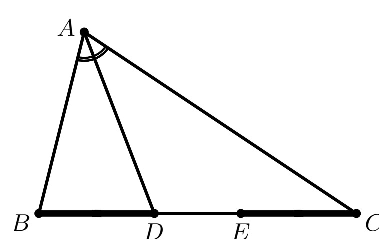
Como ya lo comenté, la idea de dedicar un poco de tiempo a analizar estas figuras (antes de continuar con la lectura del problema), es permitir a tu cerebro asimilar mejor las ideas y de paso generar algunas otras ideas que podrían ser útiles para resolver el problema. Para este problema en particular, la idea de trazar la paralela por B será útil.

Sugerencia # 4:
Especialmente en problemas de geometría. Cada vez que leas una frase, detente, haz varias figuras, trata de deducir todas las cosas que puedas.
Recuerda los teoremas involucrados y las ideas de sus demostraciones.
No olvides escribir todo lo que se te vaya ocurriendo.

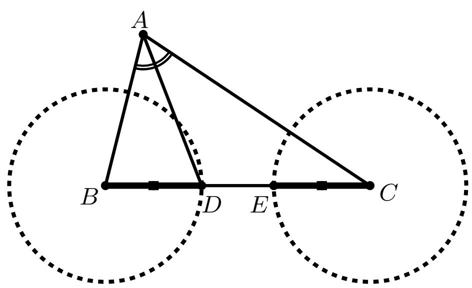
Sigamos con la lectura de este problema. La segunda frase dice lo siguiente.

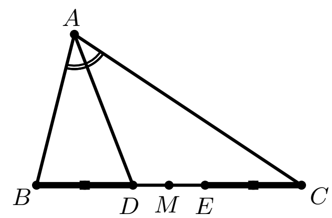
Frase # 2.2:
Sea E un punto sobre el segmento BC tal que $BD = EC$.

Algunas frases suele agregarnos nuevos elementos a nuestra figura. En este caso nos hablan de un nuevo punto E con la propiedad de que $BD = EC$. Siguiendo la sugerencia # 4, haremos una figura y trataremos de deducir cosas sobre ella.



En muchos casos, las frases nuevas nos hablan de nuevos elementos mediante sus propiedades. Hazte preguntas. ¿Qué observas? ¿Qué puedes deducir? Una sugerencia adicional que te puede ser muy útil, especialmente en problemas de geometría, es tratar de imaginar ¿cómo construir el elemento nuevo?
Para construir el punto E puedes pensar en abrir el compás con centro en B y radio AD, para luego moverlo a C como centro. Algo como lo que se muestra en la figura de abajo. Sin embargo, si lo piensas con más cuidado, existe una forma aún más simple de construir el punto E y es que resulta ser el simétrico de D respecto al punto medio del segmento BC.





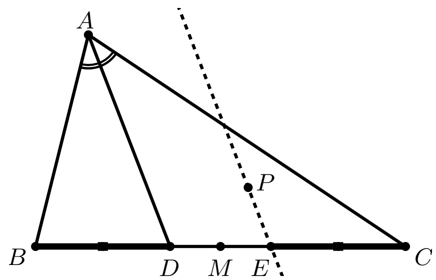
Observa que este punto M no es parte del problema, sin embargo apenas en la lectura de la segunda frase del problema ya podemos darnos cuenta que puede ser relevante para las ideas de la solución. Nuestra mente empieza a pensar en términos de simetrías y reflexiones. A priori, no sabemos cuáles ideas serán las que nos servirán para resolver el problema, pero entre más ideas generamos es mejor.
De hecho, tener el punto medio de un lado nos lleva directo a pensar en la idea de "duplicar la mediana" y completar un paralelogramo. Esta idea es sumamente útil en muchos problemas y es una que siempre debes investigar si tienes figuras como estas. Pero esto nos aleja del tema central, que es la lectura del problema.

Sugerencia # 5:
En problemas de geometría siempre pregúntate:
¿cómo puedo construir los elementos de la figura?
Busca formas que involucren al resto de los elementos del problema.

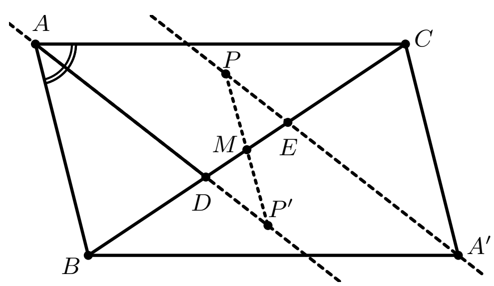
Esta sugerencia a veces puede aplicarse en otro tipo de problemas. Podrías, por ejemplo, preguntarte ¿cómo calcular cierto número o cómo construir cierto conjunto? Las ideas de esas construcciones suelen ser puntos de partida importantes para el análisis y la solución de los problemas. Pasemos a la siguiente frase.

Frase # 2.3:
Por el punto E se traza la recta ℓ paralela a AD
y considera un punto P sobre ℓ dentro del triángulo ABC.

Esta tercera frase nos corrobora que las ideas sobre paralelas y paralelogramos podrían servirnos mucho con el problema. Como he recomendado, debemos trazar los nuevos elementos y tratar de hacer algunas deducciones.



Cuando estamos a la mitad de la lectura, es posible que el problema empiece a complicarse por la cantidad de elementos involucrados. En este punto debemos dedicar aún más tiempo a tratar de establecer conexiones entre los distintos elementos que nos han presentado. Desde la frase anterior estábamos pensando sobre la simetría respecto al punto M. Así que ahora podríamos dedicar un poco de tiempo a ver cómo esa simetría puede aplicarse con la nueva recta ℓ y al resto de los elementos. Denotaremos por A' al simétrico de A y por P' al simétrico de P. Notemos que ya sabíamos que E es el simétrico de D y que C es el simétrico de B. Todo respecto a M.



Observamos que la recta ℓ se refleja sobre la recta que genera la bisectriz AD. Por lo que el triángulo $A'CB$ cumple lo mismo que cumplía el triángulo ABC hasta ahora. En particular, $A'E$ es bisectriz del ángulo $\angle CA'B$. De paso, podemos demostrar fácilmente que los triángulos MPE y $MP'D$ son congruentes, así como varios otros que se ven en la figura.

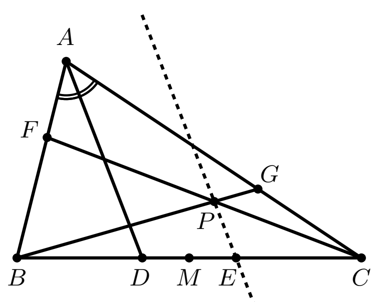
Claro que se pueden deducir muchas más cosas sobre la figura. Durante la lectura, conviene no detenerse mucho en las demostraciones detalladas y quedarse solo con el análisis de ideas generales que podrían ser útiles. Creo que vale la pena poner eso como sugerencia.

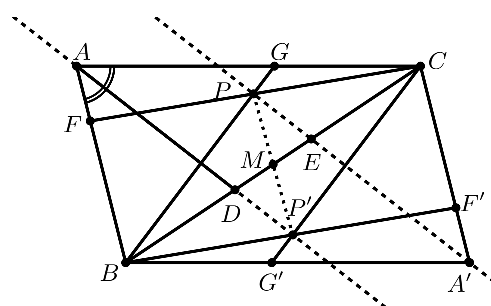
Sugerencia # 6:
Durante la lectura de las frases, dedícate a observar y generar
todas las ideas que puedas. Evita enfocarte en demostraciones o en detalles,
ya habrá tiempo para eso más adelante.

Pasemos a la siguiente frase del problema.

Frase # 2.4:
Sea G el punto donde la recta BP corta al lado AC y
sea F el punto donde la recta CP corta al lado AB.

Esta frase nos agrega nuevos elementos al problema. Especialmente en problemas complejos de geometría, nuestras figuras pueden incluir muchos elementos. Si observas una figura como la que se genera sin haber pasado por el proceso de asimilar lo que obtuvimos antes, es fácil sentirse abrumado. Pero una vez que ya hemos analizado los elementos anteriores, podemos tratar de hacer conexiones con las ideas que hemos tenido antes.
Si aplicamos la reflexión a los nuevos elementos del problema, no es difícil observar que las rectas FG' y GF' parecen ser paralelas a la recta ℓ y a la bisectriz AD.





Así, tendríamos varios grupos de rectas paralelas: $AC \parallel BA'$, $AB \parallel CA'$, $FC \parallel BF'$, $AD \parallel A'P$ (posiblemente también $GF' \parallel FG'$), etc. Conectando estas ideas con la información de que AD es bisectriz, es muy fácil deducir que los triángulos FBG' y GBF' son congruentes e isósceles. Lo cual es justamente lo que nos pide el problema y a lo que hemos llegado aún sin haber acabado de leerlo.

Frase # 2.5:
Demuestra que $BF = CG$.

De nuevo no daré los detalles de la demostración de este problema. Pero todas las ideas necesarias ya las discutimos desde la misma lectura. Este problema es el número 6 del concurso nacional correspondiente a la 19^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, por si te interesa ver los detalles de la demostración.

Como comentaba, los problemas te cuentan una historia, te presentan algunos personajes (elementos matemáticos) y sus propiedades. Finalmente, te plantean una pregunta o reto. Estos dos ejemplos que presenté, los usé solo para resaltar algunas sugerencias basándome en problemas que realmente se aplicaron en exámenes. Seguramente cuando te enfrentes a tus propios problemas, los leas y los analices, el proceso no será tan "limpio" como ocurrió aquí. Deberán generar muchas ideas y dedicar un buen tiempo a observar y reflexionar. Todo es cuestión de práctica. Solo espero que después de leer esto, leas con más cuidado y no te aprasures tanto para evitar que se te escape información importante o ideas que se te debieron haber ocurrido.

Para concluir, voy a darte una lista de problemas para que practiques la lectura analítica siguiendo las sugerencias que te he compartido. Aunque claro que pueden aplicarse para cualquier problema. Incluso problemas fuera de las olimpiadas de matemáticas. Suerte con tu entrenamiento y te deseo que no vuelvas a leer mal un problema.

Problemas

1) (OMM, Concurso Nacional, 1994) Un matemático caprichoso escribe un libro que tiene páginas de la 2 a la 400 y que debe ser leído en el siguiente orden: Primero deberán leerse todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con 400 (por suerte, estas páginas se leen en orden normal, de menor a mayor). Una vez que se han leído estas, hay que tomar el último número de las que no se han leído (en este caso el 399) y entonces leer todas las páginas cuyo número no sea primo relativo con él y que no se hayan leído antes. Este proceso (tomar el último número de las que no se han leído y leer las páginas cuyo número no sea primo relativo con este y que no se haya leído antes) continúa hasta terminar de leer el libro. ¿Cuál es el número de la última página que se debe leer?

2) (OMM, Concurso Nacional, 2001) Se tienen algunas pelotas de colores (son por lo menos tres colores) y por lo menos tres cajas. Las pelotas se ponen en la cajas, de manera que no quede vacía ninguna caja y que no haya tres pelotas de colores distintos que estén en tres cajas distintas. Prueba que hay una caja tal que todas las pelotas que están fuera de ella son del mismo color.

3) (OMM, Concurso Nacional, 2000) Dado un conjunto A de enteros positivos, construimos el conjunto A' poniendo todos los elementos de A y todos los enteros positivos que se pueden obtener de la siguiente manera: Se escogen algunos elementos de A, sin repetir, y a cada uno de esos números se le pone el signo $+$ o el signo $-$. Luego, se suman esos números con signo y el resultado se pone en A'. Por ejemplo, si $A = \{2, 8, 13, 20\}$, entonces algunos elementos de A' son 8 y 14 (pues 8 es elemento de A y $14 = 20 + 2 - 8$). A partir de A' construimos A'' de la misma manera que A' se construye a partir de A. Encuentra el mínimo número de elementos que necesita tener A, si queremos que A'' contenga todos los enteros del 1 al 40 (inclusive).

4) (OMM, Concurso Nacional, 2001) En un cuadrilátero $ABCD$ inscrito en una circunferencia, llamemos P al punto de intersección de las diagonales AC y BD, y

sea M el punto medio de CD. Una circunferencia que pasa por P y que es tangente a CD en M, corta a BD y a AC enlos puntos Q y R, respectivamente. Se toma un punto S en el segmento BD de tal manera que $BS = DQ$. Por S se traza una paralela a AB que corta a AC en un punto T. Muestra que $AT = RC$.

5) (OMCC, 1999) Con perlas de diversos colores se forman collares. Se dice que un collar es primo si no puede descomponerse en cadenas de perlas de la misma longitud, e iguales entre sí. Sean n y q enteros positivos. Demuestra que el número de collares primos con n perlas, cada una de las cuales tiene uno de q^n colores posibles, es igual a n veces el número de collares primos son n^2 perlas, cada una de las cuales tiene uno de q colores posibles.
   Nota: Dos collares se consideran iguales si tienen el mismo número de perlas y se puede obtener la misma coloración en ambos collares, rotando uno de ellos hasta hacerlo coincidir con el otro.

6) (Olimpiada Estatal de Nuevo León, 2021) Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias tales que Γ_2 pasa por el centro de Γ_1. Γ_2 interseca a Γ_1 en A y B. Sea P un punto cualquiera en Γ_2. Las rectas PA y PB intersecan a Γ_1 otra vez en E y F, respectivamente. Demuestra que $AB = EF$.

7) (OMM, Concurso Nacional, 2008) Un rey decide realizar un juego para premiar a uno de sus caballeros, para ello, acomoda a los n caballeros en una mesa redonda y hace que digan los números $1, 2, 3$ y repitan de nuevo $1, 2, 3$ y así, sucesivamente (lo dicen en el sentido de las manecillas del reloj y cada persona dice un número). Las personas que dicen 2 o 3 son retiradas inmediatamente y el juego continúa hasta que queda un solo caballero, el ganador. Se numeran las personas de 1 a n conforme al primer turno. Encuentra todos los valores de n de tal manera que el ganador sea el caballero 2008.

8) (Olimpiada Estatal de Nuevo León, 2021) Sea p un número primo tal que $\frac{p-1}{2}$ también es primo y sean a, b y c enteros que no son divisibles por p. Demuestra que existen a lo mucho $1 + \sqrt{2p}$ enteros positivos n tales que $n < p$ y p divide a $a^n + b^n + c^n$.

Bibliografía

1) Jo Boaler. *Mathematical Mindsets.* Jossey-Bass, 2016.

2) Keith Devlin. *Introduction to Mathematical Thinking.* Keith Devlin, 2012.

3) José A. Gómez Ortega, Carlos J. Rubio Barrios, Rogelio Valdez Delgado. *Concursos Nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas: 1987-2016.* Instituto de Matemáticas, UNAM, Colección Papirhos, 2019.

4) Barbara Oakley. *A Mind for Numbers: How to Excel at Math and Science.* Penguin Group, 2014.

5) George Polya. *¿Cómo plantear y resolver problemas?* Editorial Trillas, 1965.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2021. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. La suma de los ángulos obtusos de un polígono convexo es igual a 2021°. ¿Cuántos lados tiene?

Problema 2. Un recibo de la carnicería dice que 72 pavos costaron $\$ - 67.9-$. Como el recibo es viejito, no se ve el primer dígito, ni el último dígito. ¿Cuáles son los dígitos que no están claros y cuánto costó cada pavo?

Problema 3. Demuestra que para cada entero positivo n, la lista de números

$$n, n+1, n+2, \ldots, 2n,$$

contiene un cuadrado.

Problema 4. Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$ y $\angle BAC > 90^\circ$. La bisectriz del ángulo $\angle ACB$ corta al lado AB en D. Sean E en BC tal que $DE = BE$ y F en BE tal que DF es la bisectriz del ángulo $\angle BDE$. Si $\angle FDC = 116^\circ$, calcula la medida del ángulo $\angle ABC$.

Problema 5. Sea n un entero positivo. Considera las dos potencias de 2 consecutivas 2^n y 2^{n+1}. Después concatena sus cifras, esto es, coloca primero las cifras de la potencia menor y luego las de la mayor. Por ejemplo, si las potencias de 2 son 256 y 512, entonces el número que se forma al concatenar es 256512.

a) Demuestra que el número que resulta de la concatenación siempre es múltiplo de 3.

b) ¿Para qué valores de n el número que resulta de la concatenación es múltiplo de 9?

Problema 6. En un torneo de tenis hay $2n$ participantes. En la primera ronda cada participante juega una vez, así que hay n partidos, cada juego entre un par de participantes. ¿De cuántas maneras se pueden escoger los n partidos?

Problema 7. Determina todas las ternas (x, y, z) de números reales positivos que satisfacen $x + y + z = xy + yz + zx = 3$.

Problema 8. Sea ABC un triángulo con $\angle BAC = 60°$. Sean D y E puntos sobre AC y AB, respectivamente, tales que BD es bisectriz del ángulo $\angle ABC$ y CE es bisectriz del ángulo $\angle BCA$. Si BD y CE se cortan en I, demuestra que $ID = IE$.

Problema 9. Determina todas las parejas (m, n) de enteros positivos tales que

$$m^2 + 1232 = 3^n.$$

Problema 10. Sean a y b números reales tales que la ecuación

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

tiene al menos una solución real. Determina el menor valor posible de $a^2 + b^2$.

Problema 11. Sea $n < 2017$ un entero positivo fijo. Exactamente n de los vértices de un 2017-ágono regular se colorean de rojo y los demás vértices se colorean de azul. Demuestra que la cantidad de triángulos isósceles cuyos vértices son del polígono y tienen el mismo color, solamente depende de n, pero no de la configuración de los puntos rojos y azules.

Problema 12. Sean S_1 una esfera de radio r_1, T un tetraedro regular que circunscribe a S_1, S_2 una esfera de radio r_2 que circunscribe a T, C un cubo que circunscribe a S_2 y S_3 una esfera de radio r_3 que circunscribe a C. Determina los valores de $\frac{r_2}{r_1}$ y $\frac{r_3}{r_2}$.

Problema 13. Pablo tiene una fila finita de cajas, cada una con una cantidad finita de piedras. Tiene también a su disposición una bolsa con una cantidad infinita de piedras. Cada minuto, mientras que esto sea posible, Pablo toma una piedra de una caja y vierte una cantidad finita de piedras en las cajas anteriores, de la manera que él guste. Prueba que eventualmente, todas las cajas quedarán vacías.

Problema 14. Sean a, b y c enteros positivos tales que

$$\begin{aligned} ab + bc + ca + 2(a + b + c) &= 8045, \\ abc - a - b - c &= -2. \end{aligned}$$

Determina el valor de $a + b + c$.

Problema 15. Sea $ABCDEF$ un hexágono con todos sus lados de longitud 1 y con los ángulos $\angle ABC = \angle EFA = 90°$. ¿Cuánto debe medir el ángulo $\angle BCD$ de manera que el área del hexágono sea la mayor posible?

Problema 16. Determina el valor de la suma

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2^2-1}}}+\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{3^2-1}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99+\sqrt{99^2-1}}}.$$

Problema 17. a) Te encuentras en la última ronda de un programa televisado, con la oportunidad de ganar un millón de pesos. El anfitrión te explica que para ganar el premio mayor, debes de adivinar su polinomio P de coeficientes enteros no negativos. Te permite preguntar por el valor de $P(n)$ para tan solo dos valores enteros de n. Demuestra que puedes garantizar regresar a casa millonario.
b) En un concurso similar, debes adivinar un polinomio de coeficientes enteros y puedes utilizar cualquier cantidad finita de intentos. Demuestra que jamás podrás adivinar el polinomio con certeza.

Problema 18. Considera la secuencia (x_n) tal que $x_1 = 1$ y $x_{k+1} = x_k^2 + 1$ para todo $k \geq 1$. Demuestra que hay una infinidad de números primos que dividen a algún término de la secuencia.

Problema 19. Alicia y Bob juegan un juego en un grafo completo de 2014 vértices. Toman turnos empezando por Alicia. En cada turno, Alicia dirige una arista no dirigida de G. En cada turno Bob elige un entero positivo m con $1 \leq m \leq 1000$ y dirige m aristas no dirigidas de G. El juego acaba cuando todas las aristas están dirigidas. Si hay algún ciclo dirigido en G, Alicia gana. Determina si Alicia tiene una estrategia ganadora.

Problema 20. Sean $n \geq 3$ un número entero, $\alpha > 0$ un número real y S un conjunto finito de números reales. Demuestra que existe un polígono convexo con n vértices de coordenadas enteras, tal que cualquier segmento contenido dentro del polígono con pendiente en S, tiene longitud a lo más α.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es $360°$. Como cada ángulo agudo contribuye al menos $90°$ a esta suma, hay a lo más 3 de ellos. Esto implica que la suma total de los ángulos del polígono está entre $2021°$ y $2291°$. Sin embargo, la suma de los ángulos de un polígono convexo de n lados está dada por $(n-2)180°$. Como el único múltiplo de $180°$ entre estos dos valores es $2160°$, tenemos que $(n-2)180° = 2160°$, de donde $n = 14$.

Solución del problema 2. Sea a el primer dígito y b el último. Sea x el costo del pavo. Sabemos que el costo tiene a lo más dos decimales, lo cual implica que $100x$ es un entero. Entonces tenemos que

$$100a + 67 + \frac{9}{10} + \frac{b}{100} = 72x,$$

esto es, $10000a + 6790 + b = 72(100x)$. De aquí, $10000a + 6790 + b$ es múltiplo de 72. Como $10000a + 6790 + b$ es múltiplo de 8, entonces

$$0 \equiv 10000a + 6790 + b \equiv 6 + b \pmod{8},$$

lo cual implica que $b \equiv 2 \pmod{8}$. Como b es un dígito, la única posibilidad es $b = 2$. Además, como $10000a + 6790 + b$ también es múltiplo de 9, tenemos que

$$0 \equiv 10000a + 6790 + b \equiv a + 6 + 7 + 9 + 0 + b \equiv a + 6 \pmod{9},$$

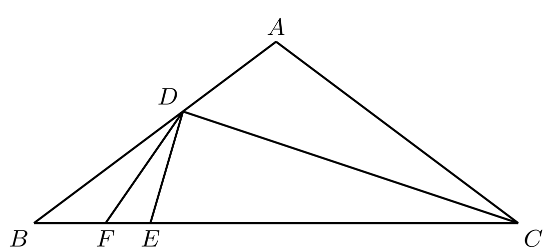
lo cual implica que $a \equiv 3 \pmod{9}$ y, como a es un dígito, la única posibilidad es $a = 3$.
Por lo tanto, los 72 pavos costaron \$367.92 y cada uno costó \$5.11.

Solución del problema 3. La prueba la haremos por inducción en n. Si $n = 1$, la lista es $1, 2$ y, evidentemente, 1 es un cuadrado. Supongamos que para algún entero positivo n, la lista $n, n+1, n+2, \ldots, 2n$ contiene un cuadrado.
Si n no es un cuadrado, entonces la lista $n+1, n+2, \ldots, 2(n+1)$ contiene al mismo cuadrado que contiene la lista $n, n+1, \ldots, 2n$. Luego, podemos asumir que $n = k^2$ para algún entero positivo k. Es claro que $k^2 + 1 < (k+1)^2$. Por otro lado, tenemos que $(k+1)^2 \leq 2k^2 + 2$ si y solo si $k^2 + 2k + 1 \leq 2k^2 + 2$ si y solo si $(k-1)^2 \geq 0$ lo que es verdadero. Por lo tanto, en la lista $k^2 + 1, k^2 + 2, \ldots, 2k^2 + 2$ está el número $(k+1)^2$. Esto concluye la inducción.

Solución del problema 4. Sea $\alpha = \angle ABC$. Por construcción, tenemos que $\angle EDB = \alpha = \angle BCA$, por lo que $\angle FDB = \frac{\alpha}{2} = \angle BCD$. Esto significa que

$$\angle ADC = \angle ABC + \angle BCD = \frac{3\alpha}{2}.$$

Luego, $116^\circ = \angle CDF = 180^\circ - \angle ADC - \angle FDB = 180^\circ - 2\alpha$, de donde obtenemos que $\alpha = 32^\circ$.



Solución del problema 5. Sean $s(m)$ la suma de los dígitos de m (en base 10) y $f(n)$ la concatenación de 2^n y 2^{n+1} en ese orden. Por el criterio de divisibilidad del 9 tenemos que $m \equiv s(m) \pmod{9}$. Luego,

$$f(n) \equiv s\left(2^n\right) + s\left(2^{n+1}\right) \equiv 2^n + 2^{n+1} \equiv (1+2)2^n \equiv 3 \cdot 2^n \pmod{9},$$

esto es, 9 divide a $f(n) - 3 \cdot 2^n$. Esto significa que 3 divide a $f(n) - 3 \cdot 2^n$, lo cual implica que $f(n)$ es múltiplo de 3, como se quería. Más aún, como 2^n no es divisible por 3, entonces $3 \cdot 2^n$ no es divisible por 9, de donde se llega a que $f(n)$ no puede ser divisible por 9 para ningún entero positivo n.

Solución del problema 6. Denotemos a los jugadores por $1, 2, \ldots, 2n$. Sea $A_1 = 1$. Queremos escoger al contrincante B_1 de A_1. Hay $2n-1$ maneras de escoger a B_1. Ahora sea A_2 el número más chico que no ha sido escogido. Entonces hay $2n-3$ maneras de escoger al contrincante B_2 de A_2. Sea A_3 el número más chico que no ha sido escogido. Hay $2n-5$ maneras de escoger al contrincante B_3 de A_3. Continuando de esta forma, donde A_i es el número del participante más chico en el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\} - \{A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}\} - \{B_1, B_2, \ldots, B_{i-1}\}$, tenemos que hay $2n-(2i-1)$ maneras de escoger a B_i. Por lo tanto, la respuesta es

$$(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1 = \frac{(2n)!}{(2n)(2n-2)\cdots(2)} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Solución del problema 7. Tenemos que $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$, donde la igualdad se cumple si y solo si $x=y=z$. La desigualdad anterior se puede reescribir como $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$.
Por otro lado, de las ecuaciones dadas, obtenemos que

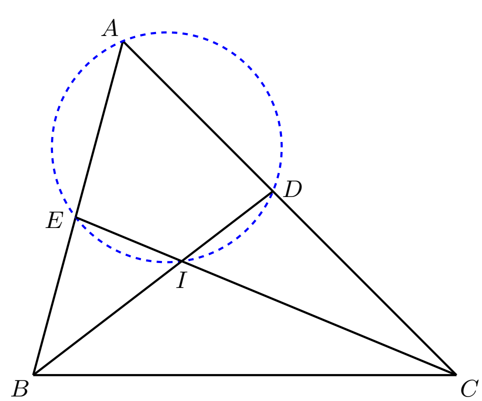
$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = 3^2 - 2\cdot 3 = 3 = xy+yz+zx.$$

Luego, necesariamente debemos tener que $x=y=z$. Como $x+y+z=3$, se sigue que la única terna que cumple las ecuaciones dadas es $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Solución del problema 8. Sean $\angle CBI = \alpha = \angle IBA$ y $\angle BCI = \beta = \angle ICA$. Por suma de ángulos internos en el triángulo ABC, tenemos que $2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$, por lo que $\alpha+\beta = 60^\circ$ y, por lo tanto,

$$\angle DIE = \angle BIC = 180^\circ - \alpha - \beta = 120^\circ = 180^\circ - \angle EAD.$$

Esto significa que el cuadrilátero $ADIE$ es cíclico y, más aún, I es el punto de intersección de la bisectriz interna del ángulo $\angle EAD$ con el circuncírculo del triángulo EAD. Esto implica que $ID = IE$, como se quería.



Solución del problema 9. Considerando la ecuación módulo 4, tenemos que $m^2 \equiv 3^n \pmod{4}$. Como $m^2 \equiv 0$ o $1 \pmod{4}$ y $3^n \equiv 1$ o $3 \pmod{4}$, resulta que $3^n \equiv 1 \equiv m^2 \pmod{4}$, esto es, n es par y m es impar. Luego, la ecuación dada se puede reescribir como

$$(3^{n_1} - m)\,(3^{n_1} + m) = 1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11,$$

donde $n_1 = \frac{n}{2}$.

Observemos que $3^{n_1} + m > 3^{n_1} - m$ y $3^{n_1} = \frac{1}{2}\left[(3^{n_1} + m) + (3^{n_1} - m)\right]$. Entonces, para cada pareja de divisores positivos d_1 y d_2 de 1232 tales que $d_1 d_2 = 1232$ y $d_1 < d_2$, tenemos que $3^{n_1} - m = d_1$ y $3^{n_1} + m = d_2$ donde $m = \frac{1}{2}(d_2 - d_1)$, llevará a una pareja (m, n) que satisface la ecuación original si y solo si $\frac{1}{2}(d_1 + d_2)$ es una potencia de 3 (pues esto debe ser igual a 3^{n_1}). Como $1232 = 2^4 \cdot 7 \cdot 11$ tiene $(4+1)(1+1)(1+1) = 20$ divisores positivos, hay 10 parejas de divisores positivos d_1 y d_2 con las condiciones anteriores. Estos casos se verifican en la siguiente tabla.

d_1	d_2	$\frac{1}{2}(d_1 + d_2)$	¿Es el número anterior una potencia de 3?
1	1232	616.5	No
2	616	309	No
4	308	156	No
7	176	91.5	No
8	154	81	Sí
11	112	61.5	No
14	88	51	No
16	77	46.5	No
22	56	39	No
28	44	36	No

La única pareja de divisores positivos de 1232 que satisface las condiciones impuestas anteriormente es 8 y 154, de donde obtenemos que $m = \frac{1}{2}(154 - 8) = 73$ y $3^{n_1} = \frac{1}{2}(154 + 8) = 81$, por lo que $n = 2n_1 = 8$. Así, la única pareja que satisface la ecuación inicial es $(m, n) = (73, 8)$.

Solución del problema 10. Primero observemos que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $a \geq 0$. Sea α una solución de la ecuación dada y sea $y = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, donde es claro que $\alpha \neq 0$. Nótese que α es real si y solo si $|y| \geq 2$. Sustituyendo $x = \alpha$ en la ecuación original y dividiendo entre α^2, la ecuación dada se puede reescribir como

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) + a\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) + b = 0,$$

esto es, $y^2 + ay + (b - 2) = 0$. Así, la ecuación original tendrá una solución real si y solo si la ecuación $y^2 + ay + (b - 2) = 0$ tiene una solución cuyo valor absoluto es mayor o igual que 2. Ahora, las soluciones de esta última ecuación son $\frac{1}{2}\left(-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}\right)$, donde estas son reales si y solo si $b \leq \frac{a^2}{4} + 2$. Como $a \geq 0$, la que tiene mayor valor absoluto de estas soluciones es $\frac{1}{2}\left(-a - \sqrt{a^2 - 4(b-2)}\right)$.

Así, para que la ecuación original tenga una solución real, es necesario y suficiente que $\left|\frac{1}{2}\left(-a-\sqrt{a^2-4(b-2)}\right)\right| \geq 2$, esto es,

$$a+\sqrt{a^2-4(b-2)} \geq 4. \tag{1}$$

Si $a \geq 4$, entonces la desigualdad anterior es claramente cierta para $b=0$, por lo que $a^2+b^2 \geq 16$ en este caso. Ahora, si $a<4$, entonces $a^2-4(b-2) \geq a^2-8a+16$, esto es, $b \leq 2a-2$. De aquí se consideran dos casos: $1 \leq a < 4$ y $0 \leq a < 1$.
Si $1 \leq a < 4$, se puede ver que la desigualdad (1) es cierta para $b=0$, por lo que $a^2+b^2 \geq 1+0=1$.
Si $0 \leq a < 1$, entonces $b \leq 2a-2 < 0$, es decir, $b^2 \geq (2a-2)^2$. Esto significa que

$$a^2+b^2 \geq a^2+(2a-2)^2 = 5a^2-8a+4 = 5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5} \geq \frac{4}{5},$$

donde la igualdad se da si y solo si $a=\frac{4}{5}$ y $b=2a-2=-\frac{2}{5}$. De hecho, la ecuación $x^4+\frac{4}{5}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{4}{5}x+1=0$ tiene como solución a $x=-1$.
Por lo tanto, el menor valor posible de a^2+b^2 es $\frac{4}{5}$.

Solución del problema 11. Afirmamos que el número de triángulos isósceles cuyos vértices son del polígono y no todos tienen el mismo color es $\frac{3}{2}n(2017-n)$. En efecto, consideremos un vértice rojo y un vértice azul y usamos estos dos vértices para construir triángulos isósceles en cualquier forma posible usando vértices del polígono. Como 2017 y 6 son primos relativos, hay exactamente 3 maneras de construir estos triángulos isósceles, pero cada uno de estos se puede obtener de 2 diferentes maneras usando este proceso pues, de los triángulos cuyos vértices no son todos del mismo color, hay uno de un color y los otros dos son del otro color. De aquí se sigue la afirmación inicial y se concluye la demostración.

Solución del problema 12. En el tetraedro, la altura es parte de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es un lado del tetraedro. Si el lado mide a, entonces el otro lado del triángulo rectángulo mide $\frac{a}{\sqrt{3}}$ (por ser dos terceras partes la altura de una cara). Como la longitud de la altura es r_1+r_2, tenemos que $r_1+r_2=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
El centro del tetraedro está en la altura y, el segmento de longitud r_2 que une al centro con el vértice opuesto, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados miden r_1 y $\frac{a}{\sqrt{3}}$. Por lo tanto, $r_2^2-r_1^2=\frac{a^2}{3}$. Entonces, tenemos que $r_2-r_1=\frac{a\sqrt{6}}{6}$ y $r_2+r_1=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, de donde se sigue que $r_1=\frac{a\sqrt{6}}{12}$ y $r_2=\frac{s\sqrt{6}}{4}$. Esto implica que $\frac{r_2}{r_1}=3$.
En el cubo, si b es la longitud de uno de sus lados, entonces $r_2=\frac{b}{2}$ y $r_3=b\frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde obtenemos que $\frac{r_3}{r_2}=\sqrt{3}$.

Solución del problema 13. Probamos esto por inducción en el número n de cajas. Si $n=1$, es claro que en tantos minutos como piedras haya en la caja, Pablo las vaciará todas. Supongamos que el resultado es cierto para un número k de cajas, y consideremos $k+1$ cajas. Pablo solo puede quitar una piedra de la última caja tantas veces como piedras hay en esa caja. Como esta cantidad es finita, a partir de algún momento, Pablo dejará esta caja intacta. A partir de este momento, por la hipótesis de inducción, Pablo eventualmente vaciará las demás k cajas. Tras hacer esto, no puede quedar una piedra en la última caja, o de otra forma Pablo estaría forzado a no dejarla intacta. Por lo tanto, Pablo eventualmente vacía las $k+1$ cajas. Esto completa la inducción.

Solución del problema 14. Sumando las dos ecuaciones, obtenemos la ecuación

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 8043,$$

que es equivalente a la ecuación

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1 = 8044.$$

Factorizando cada lado de esta última ecuación, obtenemos que

$$(a+1)(b+1)(c+1) = 2 \cdot 2 \cdot 2011,$$

donde 2 y 2011 son números primos. Como a, b y c son enteros positivos, cada uno de los números $a+1$, $b+1$ y $c+1$ es mayor que 1. Luego, por el teorema fundamental de la aritmética, los números $a+1, b+1$ y $c+1$ son los números $2, 2, 2011$, en algún orden. Por lo tanto, $(a+1)+(b+1)+(c+1) = 2+2+2011 = 2015$, de donde obtenemos que $a+b+c = 2015-3 = 2012$.

Solución del problema 15. Los triángulos ABC y AFE son rectángulos isósceles de lado 1. En particular, $AC = AE = \sqrt{2}$, por lo que los triángulos ACD y AED son congruentes por el criterio LLL. Por lo tanto, el área $[ABCDEF]$ del hexágono $ABCDEF$ está dada por

$$[ABCDEF] = [ABC] + [AFE] + 2[ACD] = 1 + AC \cdot CD \cdot \operatorname{sen}(\angle ACD),$$

la cual se maximiza cuando $\angle BCD - 45^\circ = \angle ACD = 90^\circ$, esto es, cuando $\angle BCD = 135^\circ$.

Solución del problema 16. Si n es un entero positivo, es fácil ver que

$$\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}} = \sqrt{n-\sqrt{n^2-1}} = \sqrt{n-\sqrt{(n-1)(n+1)}}.$$

La clave para calcular la suma es observar ahora que

$$n - \sqrt{(n-1)(n+1)} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})^2}{2}.$$

Entonces, la suma que hay que calcular es

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}}.$$

Separando esta suma en la suma de los términos con n impar y la suma de los términos con n par, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \text{ impar}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{2}-\sqrt{0}+\sqrt{4}-\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{100}-\sqrt{98}) \\
&= \frac{\sqrt{100}-\sqrt{0}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\sum_{n \text{ par}} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\sqrt{3}-\sqrt{1}+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{99}-\sqrt{97}) \\
&= \frac{\sqrt{99}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{99}-1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\sum_{n=1}^{99} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2}} = \frac{10+\sqrt{99}-1}{\sqrt{2}} = \frac{9+\sqrt{99}}{\sqrt{2}}.$$

Solución del problema 17. a) Comenzamos preguntando por $P(1) = m$. Todos los coeficientes de P son menores o iguales que m. Preguntamos subsecuentemente por $P(m+2)$. Podemos calcular la expansión en base $m+2 \geq 2$ de este número, la cual es la única secuencia de enteros no negativos $a_0, \ldots, a_k$, todos menores que $m+2$, tales que $a_k \neq 0$ y

$$P(m+2) = \sum_{i=0}^{k} a_i (m+2)^i.$$

Por lo tanto, el polinomio P está dado por $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$.
b) Supongamos que preguntamos por los valores de $P(n_1), \ldots, P(n_k)$. Con la información dada, es imposible distinguir entre P y el polinomio

$$Q(x) = P(x) + \prod_{i=1}^{k} (x - n_i),$$

pues tienen los mismos valores en los números evaluados. Por lo tanto, nunca podremos adivinar el polinomio con certeza.

Solución del problema 18. Para cada primo p que divida a algún término de la secuencia, definimos r_p como el mínimo entero tal que $p \mid x_{r_p}$. Por inducción, tenemos que

$x_{r_p+k} \equiv x_{r_p} \pmod{p}$ para todo $k \geq 1$, por lo que $p \mid x_k$ si y solo si $r_p \mid k$.
Sea P el conjunto de números primos que dividen a algún término de la secuencia (x_n) y, supongamos por contradicción, que P es finito. Definimos

$$r = 1 + \prod_{p \in P} r_p.$$

Por lo anterior, tenemos que $p \nmid x_r$ para todo $p \in P$. Sin embargo $x_r > 1$, por lo que tiene algún factor primo fuera de P, lo que es un absurdo.
Por lo tanto, el conjunto de primos P que dividen a algún término de la secuencia (x_n), es infinito.

Solución del problema 19. Alicia tiene una estrategia ganadora. Probaremos que en cada turno, si la longitud de la cadena dirigida más larga no es 2013, Alicia siempre puede extenderla. Usaremos este resultado para dar una estrategia ganadora explícita.
Sea $V = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ la cadena más larga y sea $S \neq \emptyset$ el conjunto de vértices que no están en la cadena. No es posible que un punto en S apunte a v_1, o V no sería la cadena más larga. Si algún punto en S no apunta a v_n, Alicia puede usarlo para extender la cadena. De otra forma, podemos tomar $1 \leq i < n$ el menor entero tal que no todos los puntos de S apuntan a v_i. Si $a \in S$ no apunta a v_i, Alicia puede conectar v_i con a, creando la nueva cadena más larga $(v_1, \ldots, v_i, a, v_{i+1}, \ldots, v_n)$. En cualquier caso, Alicia puede extender la cadena más larga.
Alicia entonces tiene la siguiente estrategia ganadora. Crea una cadena creciente utilizando el método anterior. Después de haber pasado 2013 turnos, Alicia habrá creado una cadena de longitud al menos 2013, es decir, una cadena que usa los 2014 vértices. Como $\binom{2014}{2} > 1001 \cdot 2013 = 1000 \cdot 2013 + 2013$, tras el turno de Bob, habrá dos vértices del grafo completo cuya arista que los conecta no ha sido dirigida aún. Alicia puede entonces formar un ciclo con ellos y con la cadena que involucra a todos los vértices del grafo.

Solución del problema 20. Dado un conjunto finito S de números reales y un número real $\alpha > 0$, decimos que un conjunto de puntos es (S, α)-*delgado*, si cualquier segmento en el conjunto de puntos con pendiente en S tiene longitud a lo más α. Es claro que cualquier subconjunto de un conjunto (S, α)-delgado también es (S, α)-delgado. Diremos también que una recta es *entera* si pasa por al menos dos puntos con coordenadas enteras.
Comenzamos probando que para todo conjunto S de números reales y $\alpha > 0$ número real, existe un conjunto de puntos (S, α)-delgado acotado por dos rectas enteras paralelas. Sea S' el conjunto de ángulos en $[0, \pi)$ que forman las rectas con pendientes en S y la horizontal. Sea $x \in (0, \pi) - S'$ arbitrario. Sea 2ε la mínima distancia entre x y un elemento de $S' \cup \{0, \pi\}$. Sea q un número primo tal que

$$q \geq \frac{2}{\tan^{-1}(x + \varepsilon) - \tan^{-1}(x - \varepsilon)}, \quad q \geq \frac{1}{\alpha \operatorname{sen}(\varepsilon)}.$$

Por construcción, existen al menos dos valores enteros consecutivos de p tales que

$$\frac{p}{q} \in [\tan^{-1}(x - \varepsilon), \tan^{-1}(x + \varepsilon)].$$

Tomamos cualquiera que no sea múltiplo de q. De esta forma, existe algún entero k tal que $pk \equiv 1 \pmod{q}$. Además, el ángulo θ que una recta con pendiente p/q forma con la horizontal, es tal que $\theta \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$.
Trazamos la recta desde $(0,0)$ hasta (p,q) y trazamos la recta desde $((pk-1)/q, k)$ hasta $((pk-1)/q+p, k+q)$. Como $(pk/q, k)$ pertenece a la primera recta, la distancia entre estas es a lo más $1/q$. En particular, cualquier segmento contenido entre estas dos rectas con ángulo $\beta \in S'$ tiene longitud máxima de

$$\frac{1}{q\operatorname{sen}(|\beta-\theta|)} \leq \frac{1}{q\operatorname{sen}(\varepsilon)} \leq \alpha.$$

Por lo tanto, la región acotada por estas rectas enteras paralelas es (S,α)-delgada.
Demostramos ahora el problema. Consideramos dos rectas enteras que acotan una región $(S, \alpha/(n-1))$-delgada. Podemos repetir esta construcción para obtener n rectas que entre sí, acotan una región (S,α)-delgada. Tomamos un punto con coordenadas enteras en la primera recta y lo unimos con rectas de pendientes crecientes a puntos de coordenadas enteras en las demás líneas. El polígono resultante será convexo y acotará una región (S,α)-delgada, por lo que cumple con las condiciones del problema.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2021 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este cuarto y último número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Determina si existe una sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ de números reales positivos que satisface las siguientes dos condiciones:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$ para todo entero positivo n.

2) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008$ para todo entero positivo n.

Problema 2. Encuentra todas las ternas de enteros no negativos (x, y, z) con $x \leq y$ tales que $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Problema 3. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, respectivamente. Se eligen puntos P y Q sobre la recta AO de tal forma que BP es perpendicular a AC y CQ es perpendicular a AB. Demuestra que el circuncentro del triángulo PQH está sobre una de las medianas del triángulo ABC.

Problema 4. Determina todos los enteros $s \geq 4$ para los cuales existen enteros positivos a, b, c y d, tales que $s = a + b + c + d$ y s divide a $abc + abd + acd + bcd$.

Problema 5. Cuarenta y un torres son puestas en un tablero de ajedrez de 10×10. Demuestra que hay cinco torres que no se atacan entre sí. (Dos torres se atacan si ambas están en la misma fila o en la misma columna).

Problema 6. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Problema 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ enteros que satisfacen

$$a_{n+5} + a_n > a_{n+2} + a_{n+3}$$

para cada entero $1 \leq n \leq 2016$.
Determina el menor valor posible de la diferencia entre el mayor y el menor número de la lista $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$.

Problema 8. Se construyen los rectángulos BCC_1B_2, CAA_1C_2 y ABB_1A_2 en el exterior del triángulo ABC. Si $\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°$, demuestra que las rectas B_1C_2, C_1A_2 y A_1B_2 son concurrentes.

Problema 9. Para cada entero positivo n, demuestra que existe un entero de n dígitos cuyo cuadrado termina en los mismos n dígitos.

Problema 10. Betal marca 2021 puntos en el plano entre los cuales no hay 3 colineales y dibuja todos los segmentos de recta entre cualesquiera dos de estos puntos. A continuación escoge 1011 de estos segmentos y marca sus puntos medios. Finalmente, escoge un segmento cuyo punto medio no ha sido marcado y reta a Vikram a construir su punto medio utilizando solo una regla. ¿Podrá Vikram completar este reto siempre? Nota: La regla es de longitud infinita, sin marcas y sirve únicamente para trazar la recta entre cualesquiera dos puntos.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2021 No. 1.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2021. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. En esta ocasión, agradecemos a Guillermo Courtade Morales, a José Hernández Santiago y a Leonardo Jiménez Cuellar, por habernos enviado sus soluciones. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2021, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Dados los números enteros del 1 al 12 escritos en cualquier orden en una mesa redonda se hace la siguiente operación: Cada número observa a sus dos vecinos, si los vecinos son más chicos entonces los números explotan. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar los números del 1 al 12 de tal manera que sobrevivan exactamente cuatro después de una operación? (Dos maneras se consideran iguales si una se obtiene a partir de la otra por una rotación).

Solución. Supongamos que denotamos las posiciones $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ donde a_1 es vecino de a_{12} y a_2; a_2 es vecino de a_1, a_3, etcétera. Por ser una mesa redonda, podemos rotar para que $a_1 = 12$. Notemos que cada sobreviviente tiene dos vecinos que desaparecieron, entonces a lo más desaparecen 8 vecinos. Pero podría pasar que un número desaparece por dos de sus vecinos. En tal caso, desaparecerían menos de 8 en total y sobrevivirían más de 4. Como $a_1 = 12$ sobrevive, entonces las posiciones que sobreviven una operación cuando sobreviven exactamente 4 números son a_1, a_4, a_7, a_{10}. Empecemos a contar. Tenemos $a_1 = 12$. Ahora a_2 tiene 11 posibilidades y a_{12} tiene 10 posibilidades. Después de escoger estos números, existe un número más grande que no ha sido escogido. Tenemos 3 posibles lugares para ese número $\{a_4, a_7, a_{10}\}$. Al escoger donde va el siguiente más grande, sus dos vecinos tienen 8 y 7 posibilidades, respectivamente. El siguiente número más grande tiene 2 posibilidades. Sus vecinos tienen 5 y 4 posibilidades, respectivamente. El número más grande restante debe ir en la posición que quede de $\{a_1, a_4, a_7, a_{10}\}$ y luego sus vecinos se pueden acomodar de 2 maneras. Por lo tanto, la respuesta es

$$11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1478400.$$

Problema 2. Considera una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f no es constante, demuestra que existen números reales x, y tales que $f(x + y) < f(xy)$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Supongamos, por contradicción, que $f(x+y) \geq f(xy)$ se satisface para cualesquiera números reales x, y. Si $y = 0$, obtenemos que $f(x) \geq f(0) = c$, una constante. Ahora, si $y = -x$, tenemos que $f(0) = c \geq f(-x^2)$, pero cualquier número negativo puede expresarse como el negativo de un cuadrado, lo que significa que $f(x) = f(0) = c$ para todo $x < 0$. Finalmente, reemplazando ambos x, y por $-x$, donde $x > 0$, obtenemos que $f(-2x) = c \geq f(x^2)$ y, como cualquier número positivo puede expresarse como un cuadrado, esto significa que $f(x) = f(0) = c$ para cada $x > 0$. En conclusión, $f(x)$ es constante, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existen números reales x, y que satisfacen $f(x + y) < f(xy)$.

Problema 3. ¿Cuáles de los números $2017, 2018, 2019$ pueden ser expresados en la forma $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ donde x, y, z son enteros positivos?

Solución de José Hernández Santiago. Denotemos con $p(x, y, z)$ al polinomio $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$. Diremos en lo sucesivo que el número entero N puede ser representado por el polinomio $p(x, y, z)$ si existen número enteros positivos x, y, z tales que $N = p(x, y, z)$. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$. En vista de que

$$\begin{aligned} p(n+1, n+1, n) &= (n+1)^3 + (n+1)^3 + n^3 - 3(n+1)(n+1)n \\ &= 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 - 3(n^3 + 2n^2 + n) \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned} p(n, n, n+1) &= n^3 + n^3 + (n+1)^3 - 3(n)(n)(n+1) \\ &= 2n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3(n^3 + n^2) \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

se sigue que 2018 y 2017 sí pueden ser representados por el polinomio $p(x, y, z)$: de hecho, $p(673, 673, 672) = 2018$ y $p(672, 672, 673) = 2017$.

A continuación demostraremos que 2019 no puede ser representado por el polinomio $p(x, y, z)$. Supongamos que los números enteros positivos x, y, z son tales que

$$2019 = p(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz. \tag{2}$$

Si $3 \mid x$ entonces de (2) se obtiene que $y^3 + z^3 \equiv 3 \pmod 9$, lo cual es absurdo, pues la suma de los cubos de dos números enteros es congruente, módulo 9, con 0, 1, 2, 7 u 8. Así pues, (2) conlleva a que $3 \nmid x$; de manera análoga se establece que $3 \nmid y$ y que $3 \nmid z$.
Ahora bien, de (2) y el pequeño teorema de Fermat se obtiene que

$$x + y + z \equiv 0 \pmod 3; \tag{3}$$

puesto que ya se ha establecido que ninguno de los enteros x, y, z es múltiplo de 3, de esa congruencia en (3) se deduce que

$$x \equiv y \equiv z \equiv 1 \pmod 3 \qquad \text{o} \qquad x \equiv y \equiv z \equiv -1 \pmod 3.$$

A su vez esta información permite garantizar que

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \equiv 0 \pmod 3,$$

lo que en conjunto con (3) y la factorización

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

implican que 9 divide a $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, lo cual es una contradicción con (2). En consecuencia, 2019 no puede ser representando por el polinomio $p(x, y, z)$. (Nótese que con este argumento se está estableciendo que ningún entero congruente con 3 o 6 módulo 9 puede ser representado por el polinomio $p(x, y, z)$).

Solución alternativa. Consideremos la siguiente factorización:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz) \\ &= (x+y+z)\left(\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Caso 1: Supongamos que 2017 se puede escribir en la forma indicada. Como 2017 es primo y $x+y+z \geq 3$, la única posibilidad es $x+y+z=2017$ y

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2.$$

Luego, dos de los sumandos son iguales a 1 y el tercero es igual a 0. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x-y)^2=(y-z)^2=1$ y $(z-x)^2=0$. Entonces, $x-y=\pm1$, $y-z=\pm1$ y $x=z$. Por lo tanto, $y=x-1$ o $y=x+1$. En el primer caso, tenemos que $x+y+z=3x-1=2017$, lo cual implica que $3x=2018$, lo cual no es posible ya que $3 \nmid 2018$. En el segundo caso, tenemos que $x+y+z=3x+1=2017$, lo cual implica que $3x=2016$ y, por lo tanto, $x=672$. En este caso, tenemos la solución $(x,y,z)=(672,673,672)$.

Caso 2: Supongamos que 2018 se puede escribir en la forma indicada. Tenemos que $2018=2\cdot1009$ y 1009 es primo. Como $x+y+z\geq 3$, hay dos posibilidades: $x+y+z=1009$ o $x+y+z=2018$.
Si $x+y+z=1009$, entonces $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=4$. Luego, dos de los sumandos son iguales a 0 y el tercero es igual a 4. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x-y)^2=(y-z)^2=0$ y $(z-x)^2=4$. Entonces, $x=y=z$ y $z-x=\pm2$, lo cual es imposible.
Si $x+y+z=2018$, entonces $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$. Luego, dos de los sumandos son iguales a 1 y el tercero es igual a 0. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $(x-y)^2=(y-z)^2=1$ y $(z-x)^2=0$. Entonces, $x-y=\pm1$, $y-z=\pm1$ y $x=z$. Por lo tanto, $y=x+1$ o $y=x-1$. En el primer caso, tenemos que $3x+1=2018$ de donde $3x=2017$, lo cual no es posible ya que $3\nmid 2017$. En el segundo caso, tenemos que $3x-1=2018$ de donde $x=673$. En este caso, tenemos la solución $(x,y,z)=(673,672,673)$.

Caso 3: Supongamos que 2019 se puede escribir en la forma indicada. Tenemos que $2019=3\cdot673$ y 673 es primo. Como $x+y+z\geq3$, hay tres posibilidades: $x+y+z=3$, $x+y+z=673$ o $x+y+z=2019$.
Si $x+y+z=3$, la única posibilidad es $x=y=z=1$ (pues x,y,z son enteros positivos). Luego, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$ lo que es una contradicción.
Si $x+y+z=673$, entonces $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=6$. La única opción es que dos de los cuadrados sean iguales a 1 y el otro sea igual a 4. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x-z=2$ y $(x-y)^2=(y-z)^2=1$. Si $y>x$, entonces $y-z=(y-x)+(x-z)>2$, lo cual no es posible porque $(y-z)^2=1$. Entonces, $y<x$ y $x-y=1$, por lo que $x=y+1$ y $z=x-2=y-1$. Así, $3y=673$, lo cual no es posible ya que 673 no es múltiplo de 3.
Si $x+y+z=2019$, entonces $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$, por lo que uno de

los sumandos es igual a 0 y los otros dos son iguales a 1. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x-y=0$ y que $(y-z)^2=(z-x)^2=1$. Entonces, $z=x\pm 1$. Si $z=x+1$, entonces $3x+1=2019$, esto es, $3x=2018$, lo cual no es posible. Si $z=x-1$, entonces $3x-1=2019$, esto es, $3x=2020$ que tampoco es posible. Por lo tanto, en este caso no hay soluciones.

Problema 4. Una escuela tiene n estudiantes y m clubes. Todos los estudiantes se unen a cierta cantidad de clubes de tal forma que lo siguiente es cierto: Para cada estudiante x, es posible escoger algunos clubes de tal forma que x es el único estudiante que pertenece a todos ellos.
Sea a_i el número de clubes a los que se unió el estudiante i, para cada $i=1,2,\ldots,n$. Demuestra que $a_1!(m-a_1)!+a_2!(m-a_2)!+\cdots+a_n!(m-a_n)!\leq m!$

Solución de Leonardo Jiménez Cuellar. Comencemos por considerar todas las maneras de permutar los m clubes en una lista, lo que nos da un total de $m!$ permutaciones. A continuación, formamos todos los pares (a_i,p) donde i es un estudiante cualquiera y p es una permutación cuyos primeros a_i clubes son precisamente todos los clubes a los que se unió el estudiante i. De esta manera, para cada estudiante i formamos $a_i!(m-a_i)!$ pares distintos, pues este es el número de permutaciones cuyos primeros a_i clubes son los mismos. Por lo tanto, en total hay

$$a_1!(m-a_1)!+a_2!(m-a_2)!+\cdots+a_n!(m-a_n)!$$

pares distintos. Ahora, supongamos que hay dos estudiantes x,y emparejados a una misma permutación y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_x\geq a_y$. Entonces, para cualquier club en el que está el estudiante y, el estudiante x está en él también, por lo que es imposible encontrar un conjunto de clubes tales que y es el único estudiante en todos ellos, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, cada permutación p conforma a lo más un par (i,p), lo que implica que el número de pares distintos no excede al número de permutaciones, que es lo que queríamos demostrar.

Problema 5. Sea $a_0,a_1,a_2,\ldots$ una sucesión de números tales que a_0 es primo y, para $n\geq 1$, $a_n=2a_{n-1}+1$. Demuestra que existe un entero $k>0$ tal que a_k no es primo.

Solución de José Hernández Santiago. Supongamos que $a_0=p$. Es fácil demostrar por inducción que $a_n=2^np+2^n-1$ para todo entero positivo n.
Si $p=2$, entonces $a_n=3\cdot 2^n-1$ para todo entero positivo n. Como $2^{4k+1}\equiv 2 \pmod 5$, se sigue que $a_{4k+1}\equiv 0 \pmod 5$ para todo entero positivo k y, puesto que $a_{4k+1}>a_1=5$ para todo entero $k\geq 1$, concluimos que a_{4k+1} no es primo para todo entero positivo k.
Si p es un primo impar, entonces por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $2^{(p-1)k}p+2^{(p-1)k}\equiv 1 \pmod p$ para todo entero positivo k y, por lo tanto, $a_{(p-1)k}\equiv 0 \pmod p$. Como $2^{(p-1)k}p+2^{(p-1)k}-1>p$ para todo entero $k\geq 1$, concluimos que $a_{(p-1)k}$ no es primo para todo entero positivo k.

Solución de Leonardo Jiménez Cuellar. Como en la primera solución, tenemos que $a_n=2^n(a_0+1)-1$ para todo entero $n\geq 1$. Observemos que todos los términos de la sucesión son enteros positivos. Supongamos, por contradicción, que todos los términos de la sucesión son números primos y consideremos el término a_{a_1}. Por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $2^{a_1} \equiv 2 \pmod{a_1}$, lo cual implica que

$$a_{a_1} = 2^{a_1}(a_0+1) - 1 \equiv 2(a_0+1) - 1 \pmod{a_1},$$

esto es,

$$a_{a_1} = a_1 N + 2(a_0+1) - 1 = a_1 N + a_1 = a_1(N+1)$$

para algún entero N. Por lo tanto, a_1 divide a a_{a_1}. Pero, como a_{a_1} es primo, o $a_1 = 1$ o $a_1 = a_{a_1}$. En el primer caso, tenemos que $2(a_0+1) - 1 = 1$, de donde $a_0 = 0$, lo que es una contradicción. En el segundo caso, tenemos que $2(a_0+1)-1 = 2^{a_1}(a_0+1)-1$, de donde $a_1 = 1$ que no puede ser. Luego, al menos un término de la sucesión debe ser un número primo.

Solución alternativa. Como en la primera solución, tenemos que $a_n = 2^n(a_0+1)-1$ para todo entero $n \geq 1$. Si a_m no es primo para algún entero $m > 0$, acabamos. Supongamos que a_m es primo, digamos $a_m = q$. Como a_0 es primo, entonces $a_0 \geq 2$, lo cual implica que $a_1 = 2a_0+1 \geq 5$. Por lo tanto, q es impar y por el teorema pequeño de Fermat, $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Entonces,

$$a_{m+q-1} = 2^{m+q-1}(a_0+1)-1 = 2^{q-1}2^m(a_0+1)-1 \equiv 2^m(a_0+1)-1 = q \equiv 0 \pmod{q}.$$

Luego, a_{m+q-1} es múltiplo de q y mayor que q, lo que significa que no es primo.

Problema 6. Llenamos un tablero de 21×25 al azar con números enteros del 1 al 4. Demuestra que existe un rectángulo tal que la suma de los números en sus cuatro esquinas es múltiplo de 4.

Solución. Demostraremos algo más fuerte: existe un rectángulo cuyas 4 esquinas contienen el mismo número. Para simplificar el argumento, pensaremos en los números como colores. Cada fila tiene 25 casillas, por el principio de las casillas, algún color aparece al menos 7 veces ($25 > 6 \cdot 4$). Decimos que una fila es de color x si el color x es el que aparece más veces en esa fila. Como hay 21 filas, entonces algún color es el ganador de al menos 6 filas. Consideremos esas 6 filas que tienen algún color que aparece al menos 7 veces. Supongamos que ese color es azul. La primera fila tiene al menos 7 casillas azules. Si queremos prevenir un rectángulo con 4 esquinas azules, la segunda fila no puede tener 2 casillas azules en las mismas columnas que en las 7 escogidas en la primera fila, entonces falta seleccionar 6 casillas en esa fila que tendrán el color azul. Análogamente, la tercera fila puede tener a lo más una casilla azul en las columnas "azules" de la primera fila y una en las de la segunda fila. Por lo tanto, quedan 5 casillas azules por posicionar. Continuando de esta forma y después de poner las primeras 5 filas, tenemos que hemos usado $7+6+5+4+3 = 25$ columnas. La sexta fila azul tiene 7 casillas azules, pero solo se puede poner 1 en las columnas azules de la fila 1, 1 en las columnas azules de la fila 2, etcétera. Como hay 25 casillas, si la sexta fila azul tiene más de 5 casillas azules se forza un rectángulo cuyas cuatro esquinas son azules.

Problema 7. Sea k un entero positivo. ¿De cuántas maneras se pueden emparejar los números enteros del 1 al $4k$, de tal manera que los números de cada pareja tengan la misma paridad? Por ejemplo, si $k = 1$, un emparejamiento que cumple con las condiciones del problema es $\{(1,3),(2,4)\}$, pero un emparejamiento que no cumple es $\{(1,2),(3,4)\}$. Escribe la respuesta en términos de factoriales.

Solución. Primero vamos a emparejar a los pares y luego a los impares. Hay $2k$ números pares de los cuales $2k-1$ pueden ser la pareja del número 2. Escojamos al siguiente número par más chico. Hay $2k-3$ números pares que pueden ser pareja de ese número. Escojamos al siguiente número par más chico. Hay $2k-5$ maneras de escoger la pareja de ese número y así sucesivamente. Por lo tanto, hay

$$(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1$$

maneras de emparejar a los pares. Es fácil ver que

$$(2k-1)(2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1 = \frac{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 2\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots(2)} = \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Haciendo un razonamiento similar, se demuestra que también hay $\frac{(2k)!}{2^k k!}$ maneras de emparejar a los impares.
Por lo tanto, la respuesta es $\left(\frac{(2k)!}{2^k k!}\right)^2$.

Problema 8. Sean p y q números primos tales que $p^3+q^3+1 = p^2q^2$. Determina el valor máximo de $p-q$.

Solución de Guillermo Courtade Morales. Si $p = q$, la ecuación es $2p^3+1 = p^4$, esto es, $p^3(p-2) = 1$, que claramente no tiene solución en números primos.
Sin pérdida de generalidad, supongamos que $q > p$. Como p y q son números enteros, tenemos que $q \geq p+1$. Además, observemos que $p^3+q^3+1 = (p+1)(p^2-p+1)+q^3$, lo cual implica que $(p+1)(p^2-p+1)+q^3 = p^2q^2$, esto es, $(p+1)(p^2-p+1) = q^2(p^2-q)$. Tenemos tres casos.

- q divide a $p+1$ y a p^2-p+1. En este caso, tenemos que $q \leq p+1$ y, como $q \geq p+1$, la única opción posible es $q = p+1$. Como q es primo, necesariamente $p = 2$ y $q = 3$. Es fácil ver que $p^3+q^3+1 = 36 = 2^2\cdot 3^2$.
- q^2 divide a $p+1$. En este caso, tenemos que $q^2 \leq p+1$, lo cual no es posible ya que $q^2 > q \geq p+1$.
- q^2 divide a p^2-p+1. En este caso, tenemos que $q^2 \leq p^2-p+1 < p^2 < q^2$, lo que es una contradicción.

Por lo tanto, los números primos que satisfacen la ecuación $p^3+q^3+1 = p^2q^2$ son $(p,q) = (2,3)$ y $(3,2)$, de donde se sigue que el valor máximo de $p-q$ es 1.

Solución alternativa. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $p > q$. La igualdad $p^3+q^3+1 = p^2q^2$ la podemos reescribir en la forma $(q+1)(q^2-q+1) = p^2(q^2-p)$.

Como $p > q$, tenemos que $q + 1 < p + 1$ lo cual implica que $q + 1 < p$ o $q + 1 = p$. Si $q + 1 < p$, entonces $q + 1$ no divide a p, pues p es primo y $q + 1 > 1$. Esto significa que $q + 1$ y p son primos relativos y, por consiguiente, $q + 1$ y p^2 también son primos relativos. Como p^2 divide al producto $(q + 1)(q^2 - q + 1)$, se sigue que p^2 divide a $q^2 - q + 1$ y, como $q^2 - q + 1 \neq 0$, resulta que $p^2 \leq q^2 - q + 1$. Por otra parte, como $q + 1 < p$, tenemos que $(q + 1)^2 < p^2$, esto es, $q^2 + 2q + 1 < p^2$, lo cual implica que $q^2 - q + 1 < p^2$ que es una contradicción. Por lo tanto, $q + 1 = p$. Como p y q son primos, la única posibilidad es $q = 2$ y, de aquí, $p = 3$. Es fácil ver que estos valores satisfacen la ecuación $p^3+q^3+1 = p^2q^2$. Concluimos como en la primera solución.

Este problema también fue resuelto por Leonardo Jiménez Cuellar y su solución es muy parecida a la que presentamos de Guillermo Courtade Morales.

Problema 9. Determina todos los números reales x, y, z que satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z} &= 16,\\
\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{z} &= 8,\\
\sqrt[6]{x} - \sqrt[6]{y} - \sqrt[6]{z} &= 4.
\end{aligned}$$

Solución. Sean $a = \sqrt[12]{x}$, $b = \sqrt[12]{y}$ y $c = \sqrt[12]{z}$. Entonces, el sistema es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}
a^4 - b^4 - c^4 &= 16,\\
a^3 - b^3 - c^3 &= 8,\\
a^2 - b^2 - c^2 &= 4.
\end{aligned}$$

De la tercera ecuación, obtenemos que $a^2 = 4 + b^2 + c^2$ de donde

$$a^4 = (4 + b^2 + c^2)^2 = (16 + b^4 + c^4) + 8b^2 + 8c^2 + 2b^2c^2.$$

De la primera ecuación tenemos que $a^4 = 16 + b^4 + c^4$. Luego, $a^4 = a^4 + 8b^2 + 8c^2 + 2b^2c^2$ y, por lo tanto, $8b^2 + 8c^2 + 2b^2c^2 = 0$, esto es, $4b^2 + 4c^2 + b^2c^2 = 0$. Como $4b^2 \geq 0$, $4c^2 \geq 0$ y $b^2c^2 \geq 0$, la única posibilidad es $4b^2 = 4c^2 = b^2c^2 = 0$, lo cual implica que $b = c = 0$. Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema, obtenemos que $a^3 = 8$, de donde $a = 2$. Por lo tanto, la única solución del sistema original es $x = 2^{12}$, $y = 0$, $z = 0$.

Problema 10. Sea $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 = \frac{m}{n}$, donde m y n son enteros positivos primos relativos y

$$S_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6},$$

$$S_2 = \frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{2\times 5}+\frac{1}{2\times 6}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{3\times 6}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\frac{1}{5\times 6},$$

$$S_3 = \frac{1}{2\times 3\times 4} + \frac{1}{2\times 3\times 5} + \frac{1}{2\times 3\times 6} + \frac{1}{2\times 4\times 5} + \frac{1}{2\times 4\times 6} + \frac{1}{2\times 5\times 6} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + \frac{1}{3\times 4\times 6} + \frac{1}{3\times 5\times 6} + \frac{1}{4\times 5\times 6},$$

$$S_4 = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5} + \frac{1}{2\times 3\times 4\times 6} + \frac{1}{2\times 3\times 5\times 6} + \frac{1}{2\times 4\times 5\times 6} + \frac{1}{3\times 4\times 5\times 6},$$

$$S_5 = \frac{1}{2\times 3\times 4\times 5\times 6}.$$

Determina el valor de $m+n$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{S_1}{S_5} &= 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5,\\
\frac{S_2}{S_5} &= 4\cdot 5\cdot 6 + 3\cdot 5\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot 5 + 2\cdot 5\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot 5\\
&\quad + 2\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 3\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot 4,\\
\frac{S_3}{S_5} &= 5\cdot 6 + 4\cdot 6 + 4\cdot 5 + 3\cdot 6 + 3\cdot 5 + 3\cdot 4 + 2\cdot 6 + 2\cdot 5 + 2\cdot 4 + 2\cdot 3,\\
\frac{S_4}{S_5} &= 6 + 5 + 4 + 3 + 2,\\
\frac{S_5}{S_5} &= 1.
\end{aligned}$$

Desarrollando ahora el producto $(6-1)(5-1)(4-1)(3-1)(2-1)$, obtenemos que

$$(6-1)(5-1)(4-1)(3-1)(2-1) = \frac{1}{S_5} - \frac{S_1}{S_5} + \frac{S_2}{S_5} - \frac{S_3}{S_5} + \frac{S_4}{S_5} - \frac{S_5}{S_5},$$

esto es,

$$5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \frac{1}{S_5} - \frac{S_1}{S_5} + \frac{S_2}{S_5} - \frac{S_3}{S_5} + \frac{S_4}{S_5} - \frac{S_5}{S_5}.$$

Multiplicando esta ecuación por S_5, obtenemos que

$$\frac{1}{6} = 1 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - S_5,$$

de donde $S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Por lo tanto, la respuesta es $5+6 = 11$.

5ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.
La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.
En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.
En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos, así como los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I de la 5^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Oro individual
Álvaro Valdez Llanes	Jalisco	Oro individual
Gonzalo Díaz Mercado	Morelos	Oro individual
Elisa María Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Andrea María Torres Martínez	San Luis Potosí	Oro individual
Isaac Azael Juárez Martínez	San Luis Potosí	Oro por equipos
Stefano Serrano Lefler	Ciudad de México	Plata
Fernando Gael Martin Barajas	Ciudad de México	Plata
Derek	Zacatecas	Plata
Jessica Valeria	Sinaloa	Plata
Gleb Kober Kober	Baja California	Plata
Ada Valeria Sandoval Díaz	Aguascalientes	Plata
Zury Victoria Muñoz May	Veracruz	Plata
Valentina Ortega García	Zacatecas	Plata
Uriel Alejandro Wong Vargas	Morelos	Plata
Gerardo Sánchez Jiménez	San Luis Potosí	Plata
Christopher Rafael Rodríguez Moguel	Yucatán	Plata
Carmen Sugey López Trujillo	Colima	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de San Luis Potosí obtuvo el primer lugar (con 132 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 125 puntos) y el Estado de Hidalgo obtuvo el tercer lugar (con 124 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 260 puntos).
Segundo lugar: San Luis Potosí (con 242 puntos).
Tercer lugar: Hidalgo (con 234 puntos).

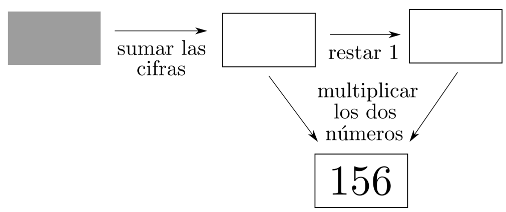
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel I de la 5^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel I

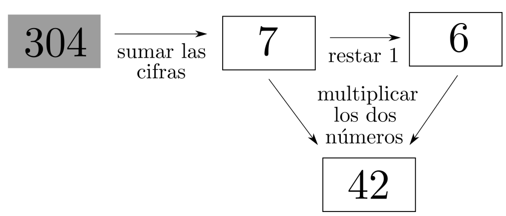
1) Un abuelo tiene dos nietos. La edad del abuelo es un número de dos cifras donde cada cifra es la edad de uno de sus nietos. Si la suma de las edades del abuelo y las de sus dos nietos es 69, ¿qué edad tiene el abuelo?

2) Sofía acaba de armar dos rompecabezas, uno de 500 piezas y uno de 1000 piezas. Quiere colgar los dos rompecabezas en su cuarto rectangular (4 paredes). Puede colgarlos en diferentes paredes o, si es en la misma pared, puede elegir cuál rompecabezas pone a la derecha y cuál a la izquierda. ¿De cuántas maneras puede hacer esto Sofía?

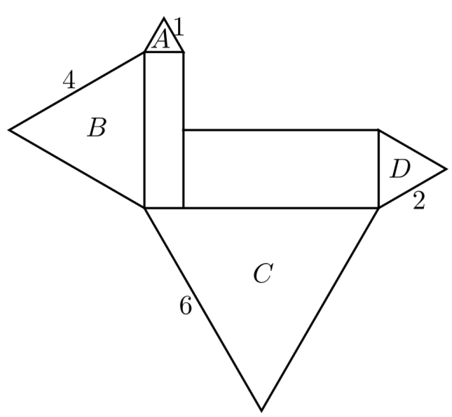
3) ¿Cuál es el número de 3 cifras más grande que puede escribirse en el cuadro sombreado del esquema, si al ejecutar las operaciones que se indican se obtiene 156?



Por ejemplo, si se pusiera el número 304 en el cuadro sombreado, el resultado sería 42, como se ve en el esquema de abajo.



4) La siguiente figura está compuesta por cuatro triángulos equiláteros y dos rectángulos. Los lados del triángulo A miden 1 cm, los del triángulo B miden 4 cm, los del triángulo C miden 6 cm y los del triángulo D miden 2 cm. ¿Cuántos centímetros mide el perímetro de toda la figura?



5) ¿Cuántos números enteros del 1 al 2021 (inclusive) cumplen que al multiplicar sus cifras se obtiene un divisor, mayor o igual que 1, del número 2021?

6) Isaac escribe en orden alfabético todas las palabras de 5 letras que se pueden formar con las letras O, M, M, E y B. Así, la palabra que está en la posición 1 es $BEMMO$, la que queda en la posición 2 es $BEMOM$, y así sucesivamente. ¿En qué número de posición se encuentra la palabra $OMMEB$?

7) Determina la suma de todos los números que tienen exactamente un múltiplo en cada una de las 5 columnas de la siguiente tabla.

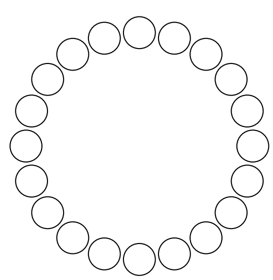
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	32	33	34	35

8) ¿Cuántos números de siete cifras cumplen que el producto de sus cifras es 45^3 y la suma de sus cifras no es un número primo?

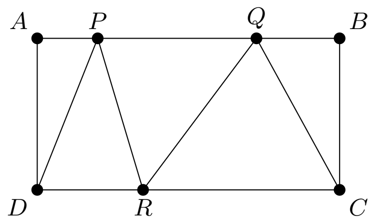
9) ¿Cuántos números de 3 cifras distintas son múltiplos de 5 y tienen sus cifras en orden decreciente (o sea, la cifra de las centenas es mayor que la de las decenas y la de las decenas es mayor que la de las unidades)?

10) Las edades de cinco hermanos, Saúl, César, Luis, Aldo y Rodrigo, son 12, 13, 14, 17 y 25 años. Si se suma la edad de Saúl con la de César se obtiene la edad de Luis. Si se suma la edad de Saúl con la de Aldo se obtiene el doble de la edad de César. ¿Cuántos años tiene Rodrigo?

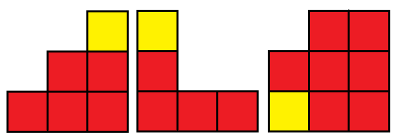
11) Diana escribe un número en cada círculo de manera que la suma de los números en los 20 círculos es 192. Alexandra llega y borra cada número y, en su lugar, escribe la suma de los dos números que estaban junto al que borró. ¿Cuánto vale la suma de los 20 números que escribe Alexandra?



12) En el rectángulo $ABCD$ se tienen los puntos P y Q en el lado AB y el punto R en el lado CD. Se sabe que el triángulo PDR tiene área igual a 7 y que el triángulo QRC tiene área 13. ¿Cuánto vale el área del rectángulo $ABCD$?

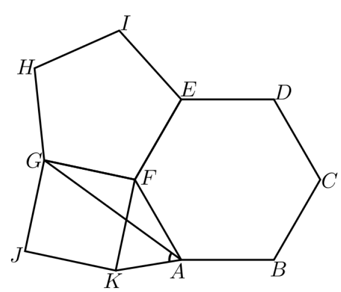


13) Usando cubos rojos y un cubo amarillo, Poncho formó una figura. Luego le tomó 3 fotos. La que aparece a la izquierda de la figura fue la foto de lado; la que aparece al centro fue la foto de frente y la que aparece a la derecha fue la foto por arriba. ¿Cuántos cubos rojos usó?



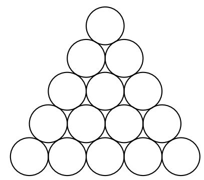
14) Gus tiene dos libros azules idénticos, dos libros verdes idénticos, dos libros rojos idénticos y dos libros blancos idénticos. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar en línea en un estante, de manera que los libros azules queden juntos?

15) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, un pentágono regular cuyos vértices son E, F, G, H, I y un cuadrado cuyos vértices son F, G, J, K. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle KAG$?

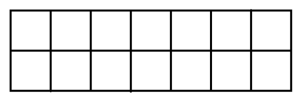


Prueba por Equipos, Nivel I

1) ¿Cuántas figuras "8" hay en el dibujo de abajo? (Una figura "8" consiste de dos círculos tangentes del mismo tamaño).

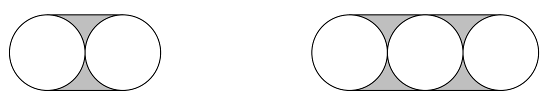


2) La siguiente figura muestra un tablero de 2×7. Por turnos, Andrés y Fernando juegan al siguiente juego: En su turno cada jugador coloca una ficha de 2×1 de manera que cubra dos cuadros de la cuadrícula, y que no se traslape con fichas previamente colocadas (es decir, no pueden colocar fichas arriba de otras). Pierde el primer jugador que, en su turno, no pueda colocar una ficha cumpliendo las condiciones. Si Andrés es el primero en colocar una ficha, determina qué jugador tiene estrategia ganadora y cuál es.

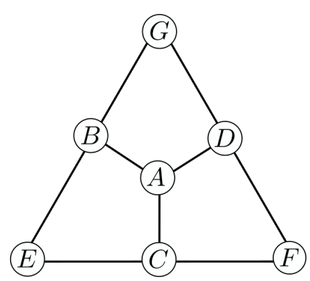


3) Pedro anotó el número de teléfono de su amiga en un pedazo de papel, pero al sacarlo de su bolsillo notó que se manchó de tinta, dejando solo visible el número $686\,520\,3XXX$. Él, para tratar de memorizarlo, se había dado cuenta que era un múltiplo de 3. También recordó que los 3 números escondidos son todos diferentes entre sí. ¿Cuántos números cumplen con las condiciones que Pedro recuerda?

4) Las siguientes dos figuras están en las posiciones 1 y 2 de un patrón. En estas tenemos círculos de radio 1 que son tangentes entre sí y, las líneas superior e inferior, son tangentes a todos los círculos. ¿Cuánto vale el área sombreada de la figura en la posición 2021?



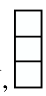
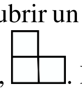
5) En la siguiente figura, dentro de cada uno de los círculos se quiere sustituir cada una de las letras A, B, C, D, E, F y G por uno de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sin repetir, de manera que la suma de los cuatro números que aparecen en cada uno de los tres cuadriláteros $ABEC$, $ABGD$ y $ACFD$ sea 15. ¿Cuánto vale la suma de todos los números por los que A puede sustituirse?

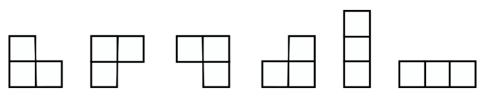


6) Decimos que un número de 5 dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número $\overline{ab}$ es múltiplo de 2.
- El número $\overline{abc}$ es múltiplo de 3.
- El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 4.
- El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de 5.

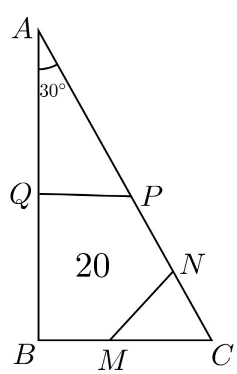
Por ejemplo, el número 50165 es fósil porque 50 es múltiplo de 2, 501 es múltiplo de 3, 5016 es múltiplo de 4 y 50165 es múltiplo de 5.
¿Cuántos números fósiles hay?

7) Se quiere cubrir un tablero de 4×3 usando triminós en forma de I,  y, triminós en forma de L, . Pueden acomodarse en cualquiera de las siguientes posiciones:



pero no pueden encimarse ni salirse de la cuadrícula de 4×3. ¿De cuántas formas es posible hacerlo?

8) En el triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en B y $\angle BAC = 30°$, se toma el punto M sobre el segmento BC, los puntos P y N sobre el segmento AC y, el punto Q, sobre el segmento AB, de tal manera que $BM = MC = CN = NP = PQ$, como se muestra en la figura. Si el área del pentágono $BMNPQ$ es 20, ¿cuál es el área del triángulo ABC?



Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 57. Como la suma de las tres edades es 69, el abuelo no puede tener 70 años o más. Si el abuelo tiene al menos 60 años y menos de 70, entonces uno de los nietos tiene 6 años. Luego, necesitamos que la suma de 6 con el doble de un dígito sea igual a 9, lo cual es imposible. Si el abuelo tiene al menos 50 años y menos de 60, entonces uno de los nietos tiene 5 años. Luego, necesitamos que la suma de 5 con el doble de un dígito sea igual a 19, lo cual se logra si ponemos la edad del abuelo como 57. Si el abuelo tiene menos de 50 años, entonces el doble de un número de una cifra debería sumar al menos $69 - 44 = 25$ con el dígito de las decenas de la edad del abuelo, lo cual es imposible.

   Solución alternativa. Si la edad del abuelo es $10a + b$, entonces la suma de las edades del abuelo y de sus dos nietos es $11a + 2b = 69$. Como $0 \leq b \leq 9$, tenemos que $51 \leq 69 - 2b \leq 69$, esto es, $51 \leq 11a \leq 69$. Luego, $a = 5$ o $a = 6$. Si $a = 6$, entonces $11(6) + 2b = 69$, de donde $b = 3/2$ lo cual no puede ser porque b es un dígito. Si $a = 5$, entonces $11(5) + 2b = 69$, de donde obtenemos que $b = 7$.

2) La respuesta es 20. Dividimos en dos casos.
   1) Si los rompecabezas se cuelgan en distintas paredes, entonces hay $4 \times 3 = 12$ opciones.
   2) Si los rompecabezas se cuelgan en la misma pared, entonces hay $4 \times 2 = 8$ opciones porque hay 4 paredes y en cada una hay 2 formas de escoger cuál rompecabezas va a la izquierda.
   Por lo tanto, el número total de opciones es $12 + 8 = 20$.

3) La respuesta es 940. Trabajemos del final hacia el principio. Primero buscamos dos números consecutivos cuyo producto sea 156, estos son 12 y 13. Ahora buscamos el mayor número de 3 cifras cuya suma de dígitos sea 13, esto es, 940.

4) La respuesta es 33. Observemos que hay exactamente dos lados de cada triángulo en el perímetro, por lo que esto contribuye al perímetro en $2(1 + 2 + 4 + 6) = 26$ cm, pero falta contar los segmentos de los rectángulos que están en la orilla. Uno de estos mide la diferencia entre los lados del triángulo C y del triángulo A, que es $6 - 1 = 5$ cm y, el otro, mide la diferencia entre los lados del triángulo B y del triángulo C, que es $4 - 2 = 2$ cm. Por lo tanto, el perímetro de toda la figura es $26 + 5 + 2 = 33$ cm.

5) La respuesta es 4. Los divisores positivos del número 2021 son 1, 43, 47 y 2021. Como 43 y 47 son números primos, el producto de cifras no puede ser 2021 ni tampoco puede ser 43 o 47. El número 1 se logra como producto de las cifras de los siguientes cuatro números enteros menores o iguales que 2021: 1, 11, 111 y 1111.

6) La respuesta es 60. La palabra OMMEB es precisamente la última en el orden alfabético, por lo que necesitamos contar el número de palabras diferentes que se pueden formar. Basta permutar las cinco letras que hay y dividir entre 2 por la repetición de la letra M. El resultado es $\frac{5!}{2} = \frac{5\times4\times3\times2}{2} = 60$.

7) La respuesta es 13. Basta revisar los números del 1 al 7, pues el quinto múltiplo de un número mayor que 7 es mayor que $5 \times 7 = 35$ y la tabla contiene los números del 1 al 35. Se pueden descartar fácilmente los números del 1 al 5 porque, por ejemplo, los múltiplos de 3 aparecen cada 3 números y hay 5 columnas. Comprobamos que 6 y 7 sí cumplen, así que la suma buscada es $6 + 7 = 13$.

8) La respuesta es 210. Tenemos que $45^3 = 3^6 \cdot 5^3$. Analicemos la suma de todas las posibilidades de cifras.
Si las cifras son $9, 9, 9, 5, 5, 5, 1$, entonces la suma es 43, que es número primo.
Si las cifras son $9, 9, 3, 3, 5, 5, 5$, la suma es $39 = 3 \times 13$. En este caso hay $\frac{7!}{2!(2!)(3!)} = 210$ números, puesto que hay $7!$ permutaciones de las cifras, pero hay que dividir entre $2!(2!)(3!)$ pues hay dos cifras iguales a 9, dos cifras iguales a 3 y tres cifras iguales a 5, y entonces sus permutaciones son indistinguibles.
Por lo tanto, en total hay 210 números que cumplen las condiciones.

9) La respuesta es 42. Tenemos dos posibilidades para el dígito de las unidades.
Si el dígito de las unidades es 0, los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del 1 y al 9 y luego ordenarse de mayor a menor, así que hay $\binom{9}{2} = 36$ posibilidades.
Si el dígito de las unidades es 5, entonces los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del 6 al 9, de manera que hay $\binom{4}{2} = 6$ posibilidades.
En total, son $36 + 6 = 42$ números.

10) La respuesta es 17. La menor suma de dos edades es $12 + 13 = 25$ por lo que 12 y 13 son las edades de Saúl y César y, la edad de Luis, es 25 años.
Si la edad de César fuera 12, entonces el doble, 24, sería la suma de las edades de Saúl y Aldo, pero ninguna pareja de edades suma 24. Esto significa que la edad de César es 13 años y la de Saúl es 12 años.
Como el doble de 13 es 26 y $26 = 12 + 14$, resulta que la edad de Aldo es 14 años y, por lo tanto, la edad de Rodrigo es 17 años.

11) La respuesta es 384. Cada número que escribe Diana va a formar parte de dos números que escribe Alexandra, ya que cada número se reemplaza por la suma de los dos números que tiene al lado. Entonces, la suma de los 20 números que escribe Alexandra es el doble de la suma de los 20 números que escribe Diana, esto es, es igual a $192 \times 2 = 384$.

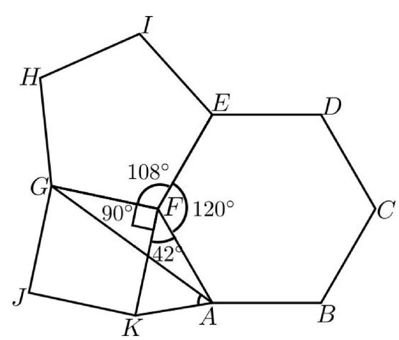
12) La respuesta es 40. Si juntamos las bases DR y RC de los triángulos PDR y QRC, obtenemos el lado DC del rectángulo $ABCD$ y, el otro lado BC, es la altura de los dos triángulos. Luego, la suma de las áreas de los triángulos PDR y QRC es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. Entonces, el área del rectángulo $ABCD$ es igual a $2(7 + 13) = 40$.

13) La respuesta es 10. Por la vista de lado y de frente podemos deducir que el nivel de arriba solo tiene el cubo amarillo. Por la vista de frente tenemos que en el nivel de en medio, solo hay cubos en una fila. Además, en dicha fila solo falta un cubo, lo cual observamos por la vista de arriba y de lado, así tenemos que el nivel de en medio tiene dos cubos rojos. Finalmente, por la vista de arriba, podemos deducir

que al nivel de abajo solo le falta un cubo.
Por lo tanto, el número de cubos rojos es $2 + 8 = 10$.

14) La respuesta es 630. Hay 8 libros en total. Como los libros azules deben quedar juntos, podemos pensar que todos ellos forman un solo libro y entonces hay 7 lugares posibles para acomodarlo. Quedan 6 espacios. Escogemos los 2 lugares para los 2 libros verdes y eso se puede hacer de $\binom{6}{2} = 15$ formas. Ya solo quedan 4 espacios y de ellos hay que escoger 2 lugares para acomodar a los libros rojos, es decir, las posibilidades son $\binom{4}{2} = 6$. Los dos lugares para los libros blancos son los que sobran. Por lo tanto, el número total de posibilidades es $7 \times 15 \times 6 = 630$.

15) La respuesta es $45°$. Los ángulos internos de un cuadrado miden $90°$, los ángulos internos de un pentágono regular miden $\frac{180° \times 3}{5} = 108°$ y los ángulos internos de un hexágono regular miden $\frac{180° \times 4}{6} = 120°$. Entonces, tenemos que $\angle KFA = 360° - 120° - 108° - 90° = 42°$. Como $FK = FA$, el triángulo FKA es isósceles y, por consiguiente, $\angle KAF = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$.



Por otro lado, como $GF = FA$, el triángulo GFA también es isósceles, lo cual implica que

$$\angle GAF = \frac{180° - \angle GFA}{2} = \frac{180° - GFK - \angle KFA}{2} = \frac{180° - 90° - 42°}{2} = 24°.$$

Por lo tanto, tenemos que $\angle KAG = \angle KAF - \angle GAF = 69° - 24° = 45°$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Paralelo a cada lado del triángulo hay figuras “8”. En el lado más grande hay 4, en el que sigue hay 3, luego 2 y luego 1, haciendo un total de 10 figuras “8”. Como esto es para cada lado, hay 30 figuras “8”.

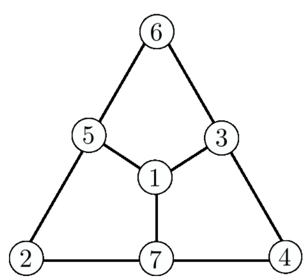
2) Demostraremos que Andrés tiene estrategia ganadora. Lo primero que debe hacer es colocar una ficha en los dos cuadros centrales. De esta forma el tablero queda dividido en dos subtableros de 2×3 y es el turno de Fernando. Ni Fernando ni Andrés pueden ahora colocar una ficha que forme parte de los dos subtableros de 2×3, por lo que cada jugada que hagan estará en alguno de los dos.

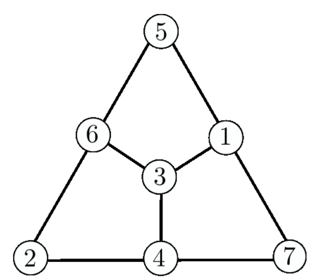
La estrategia que ahora debe seguir Andrés es colocar una ficha exactamente donde coloque Fernando, pero en el otro subtablero. Puede hacer esto ya que, después de su turno, los dos subtableros quedan iguales y Fernando solo puede poner su ficha en un subtablero. Haciendo lo anterior garantiza que siempre puede hacer un movimiento, ya que su movimiento es exactamente el mismo que el de Fernando, pero en el otro subtablero.
Como Andrés siempre puede hacer un movimiento, entonces no puede perder y, por lo tanto, Andrés gana con la estrategia mencionada.

3) Un número es múltiplo de 3 exactamente cuando la suma de sus dígitos lo es. Como $6+8+6+5+2+0+3 = 30$, los dígitos faltantes también deben sumar un múltiplo de 3. Notamos que, en la división entre 3, hay 4 dígitos con residuo 0 (que son $0, 3, 6$ y 9), 3 dígitos con residuo 1 (que son $1, 4$ y 7), y 3 dígitos con residuo 2 (que son $2, 5$ y 8). Veamos las posibilidades según los residuos, los cuales también deben sumar un múltiplo de 3.
Tres residuos 0: Hay $4 \times 3 \times 2 = 24$ números. Tres residuos 1: Hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ números. Tres residuos 2: Hay $3 \times 2 \times 1 = 6$ números. Un residuo 0, un residuo 1 y un residuo 2: Hay $3!(4 \times 3 \times 3) = 216$ números.
El total de números que cumplen la propiedad es $24 + 6 + 6 + 216 = 252$.

4) Veamos que en cada una de las figuras del patrón, el área gris que se agrega es igual al área gris de la primera figura, pues es el área entre dos circunferencias tangentes. Por lo tanto, el área gris de la figura en la posición 2021 es 2021 veces el área gris de la primera figura. Para calcular la primera área gris vemos que esta es equivalente al área de un cuadrado de lado 2, pues el lado mide 2 radios y se le resta dos mitades de círculo. Esto nos da que el área es de $2 \times 2 - \pi = 4 - \pi$. Entonces, el área gris de la figura en la posición 2021 es de $2021(4 - \pi) = 8084 - 2021\pi$.

5) Solo hay 4 maneras de escribir a 15 como suma de 4 números distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, las cuales son: $1 + 2 + 5 + 7$, $1 + 3 + 4 + 7$, $1 + 3 + 5 + 6$ y $2 + 3 + 4 + 6$. Como el número que se sustituya por A va a aparecer en los tres cuadriláteros, también debe aparecer en 3 de las sumas. Los únicos que aparecen en 3 sumas son 1 y 3 y cada uno de estos es posible, como se muestra a continuación.



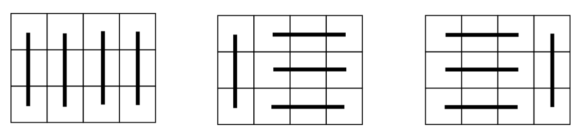


Luego, la respuesta es $1 + 3 = 4$.

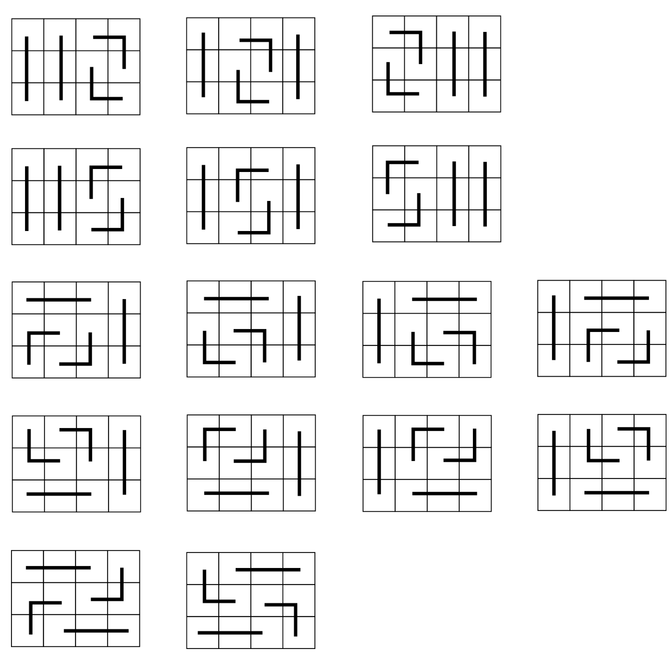
6) Por el criterio de divisibilidad del 4, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de 4. Como hay 25 múltiplos de 4 que se pueden formar con dos

dígitos, tenemos 25 maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de 2, b debe ser par. Por lo tanto, tenemos 5 maneras de elegir al dígito b.
Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, por el criterio de divisibilidad del 3 debemos tener que $a+b+c$ es múltiplo de 3. Si $b+c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o 18, entonces a debe ser $3, 6$ o 9. Si $b+c$ es $4, 7, 10, 13$ o 16, entonces a debe ser $2, 5$ u 8. Si $b+c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o 17, entonces a debe ser $1, 4$ o 7. En cualquier caso, a siempre tiene 3 opciones.
Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de 5, e debe ser 0 o 5, esto es, e tiene 2 opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

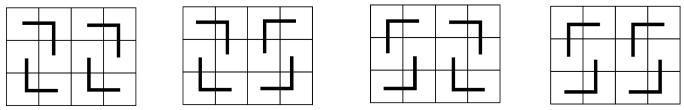
7) Contémoslos de acuerdo al número de triminós I que se pueden colocar.
Con 4 triminós I hay 3:



Con 3 triminós I no es posible cubrir el tablero.
Con 2 triminós I hay 16:

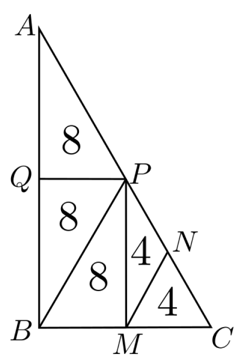


Con un solo triminó I no es posible cubrir el tablero.
Con 0 triminós I hay 4:



En total hay $3 + 16 + 4 = 23$ formas de cubrir el tablero.

8) Primero notemos que $BC = \frac{AC}{2}$ pues ABC es la mitad de un triángulo equilátero. Así, $BM = \frac{AC}{4}$ y entonces P es punto medio de AC. Como los triángulos APQ y ACB son semejantes, se sigue que Q es el punto medio de AB y, como PQ y BC son paralelas, el ángulo en B es recto y $PQ = BM$, lo que significa que $PQBM$ es un rectángulo. Por lo tanto, el área de este rectángulo es el doble del área del triángulo APQ. Por otro lado, como los triángulos PNM y PMC tienen igual altura desde M y $PN = \frac{PC}{2}$, resulta que el área del triángulo PNM es la mitad del área del triángulo CPM. Si denotamos con x al área del triángulo APQ y con y al área del triángulo PNM, tenemos que el área del pentágono $BMNPQ$ es igual a $2x + y$, esto es, $20 = 2x + y$.
Además, tenemos que el área del triángulo CPM es la mitad del área del rectángulo $PQBM$ (pues comparten la altura PM y $BM = MC$), esto es, $2y = \frac{2x}{2}$. Por lo tanto, tenemos que $20 = 2x + y$ y $2y = x$, esto es, $20 = 4y + y = 5y$, de donde $y = 4$ y $x = 2(4) = 8$. Concluimos que el área del triángulo ABC es igual a $3x + 2y = 24 + 8 = 32$.



Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2021 (IIMC 2021), se llevó a cabo de forma virtual del 27 de julio al 1 de agosto de 2021 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, 4 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorífica, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.

Por segunda ocasión, un estudiante mexicano de primaria logra una medalla de oro en esta competencia internacional. En el año 2019, cuando esta competencia se realizó en Sudáfrica, un estudiante de la Ciudad de México obtuvo por primera vez una medalla de oro y México fue catalogado por los organizadores como "potencia matemática emergente". En el año 2020 la IMC se suspendió debido a la emergencia sanitaria de Covid-19, para evitar contagios entre los cientos de niños y jóvenes de más de 30 países que ya estaban convocados para viajar a Indonesia. En este 2021, derivado del entusiasmo que se generó en 2019 por el triunfo de los competidores de ese año, México participó por primera vez con dos equipos de secundaria y dos equipos de primaria. En total, 16 competidores mexicanos realizaron a distancia los exámenes correspondientes, desde 10 Estados del país.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Pri-

maria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 4^a OMMEB realizada en octubre de 2020 de forma virtual.

Los resultados individuales de los equipos de Primaria en la IIMC 2021 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Plata	A
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Bronce	A
Artie Aarón Ramírez Villa	Jalisco	Bronce	A
Gauss Becerra Arroyo	Jalisco		A
Rodrigo Saldivar Mauricio	Zacatecas	Oro	B
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Plata	B
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Bronce	B
Olaf Daniel Magos Hernández	Nuevo León	Bronce	B

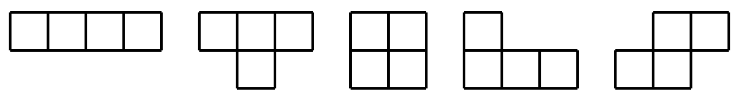
En la prueba por equipos, el Equipo A obtuvo medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: César Guadarrama Uribe (líder del Equipo A), María Guadalupe Russell Noriega (colíder del Equipo A), Carlos Jacob Rubio Barrios (líder del Equipo B) y Denisse Alejandra Escobar Parra (colíder del Equipo B).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2021.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. Los números $1, 2, 3, \ldots, 20$ son escritos de forma aleatoria sobre una línea. Se suman cada tres números consecutivos y se obtienen 18 resultados no necesariamente distintos. ¿Cuál es la mayor cantidad posible de sumas impares que se pueden obtener?

Problema 2. Mónica tiene 5 tipos diferentes de piezas, llamados tetrominós, las cuales son:



Cada pieza está formada por cuatro cuadrados idénticos de lado 1 cm. Usando el mismo número de piezas de cada tipo, Mónica quiere formar un rectángulo. ¿Cuál es el menor perímetro posible, en cm, del rectángulo?

Problema 3. Se le agregan dos dígitos al número 2021, uno a la izquierda y uno a la derecha, para formar un número de seis dígitos N. Por ejemplo, se forma el número 820219 si agregamos 8 a la izquierda y 9 a la derecha. Si sabemos que N es múltiplo de 28, ¿cuál es el menor valor posible de la suma de los dígitos de N?

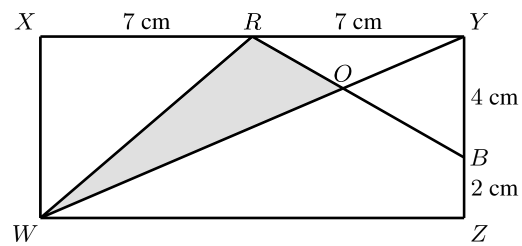
Problema 4. Se tiene una fracción en su forma reducida. Si se suma 22 al numerador, la fracción se convierte en $\frac{1}{47}$. Si se resta 5 al denominador, la fracción se convierte en $\frac{1}{96}$. ¿Cuál es el valor de la fracción original?

Problema 5. La ciudad A y la ciudad B están conectadas por un solo camino. Un autobús rojo sale de la ciudad A a las 6:20 a.m. y llega a la ciudad B a las 11:50 a.m. Un autobús azul sale de la ciudad B a las 3:35 a.m. y llega a la ciudad A a las 9:20 a.m. Si cada autobús lleva una velocidad constante sin parar, ¿a qué hora se encuentran ambos autobuses?

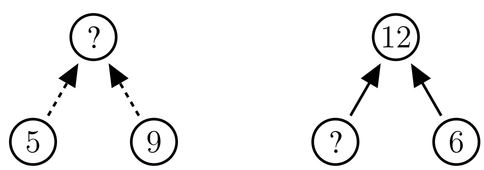
Problema 6. Una fotógrafa de la naturaleza camina por la jungla cuando de pronto ve un zorro extraño a 100 metros. Inmediatamente, el zorro comienza a huir en dirección opuesta a ella a una rapidez de 6 metros por segundo, mientras que la fotógrafa comienza a perseguirlo a una rapidez de 10 metros por segundo. La fotógrafa se puede detener y sacar su cámara en cualquier momento, pero le tomará 5 segundos después de detenerse para configurar su cámara y tomar una foto (durante este tiempo el zorro continúa huyendo). Si ella debe estar a 50 metros del zorro para tomar una buena foto, ¿cuál es la menor cantidad de tiempo en segundos, después del cual ella puede tomar una buena foto del zorro?

Problema 7. Un grupo de 48 turistas están por registrarse en un hotel. Cinco cuartos fueron reservados por un grupo distinto y el resto de los cuartos del hotel están vacantes. Al registrarse en estos cuartos, fue posible asignar a lo más 5 turistas en cada cuarto. De repente, el otro grupo cancela su reservación y los cinco cuartos ahora están disponibles para el grupo. Sin embargo, aún fue necesario asignar al menos 4 turistas en algún (algunos) cuarto(s). ¿Cuántos cuartos tiene el hotel en total?

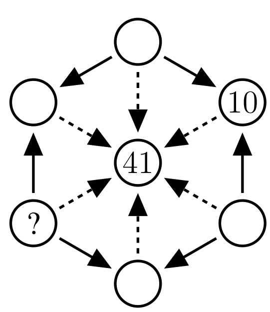
Problema 8. En la siguiente figura, $WXYZ$ es un rectángulo, R es un punto sobre XY tal que $XR = RY = 7$ cm y B es un punto sobre YZ tal que $YB = 4$ cm y $BZ = 2$ cm. Si O es el punto de intersección de RB y YW, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ROW?



Problema 9. El siguiente rompecabezas está formado de círculos y flechas. Una flecha discontinua indica suma, mientras que una flecha continua indica multiplicación. Por ejemplo, la solución al diagrama de la izquierda es un número cuya suma es $5 + 9$, es decir, 14. La solución del diagrama de la derecha es un número que, al ser multiplicado por 6, da como resultado 12, lo que nos da como solución 2. Notemos que puede haber más de 2 flechas apuntando a un círculo, en cuyo caso hay una operación (suma o multiplicación) con más de dos números involucrados.



En el siguiente rompecabezas, si todos los círculos deben tener enteros positivos, ¿cuál número es el que debe ser escrito en el círculo que tiene el signo de interrogación?

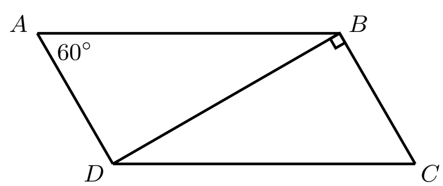


Problema 10. El número “11” tiene la **curiousa** propiedad de que puede ser expresado como la suma de una potencia entera positiva de 2 y una potencia entera positiva de 3 de al menos dos formas distintas: $11 = 2^3 + 3^1 = 8 + 3$ y $11 = 2^1 + 3^2 = 2 + 9$. ¿Cuál es el menor entero de tres dígitos que tiene esta curiousa propiedad? (Nota: las potencias enteras positivas de 2 son $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8, \ldots$ y las potencias enteras positivas de 3 son $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27, \ldots$).

Problema 11. Un rectángulo de 24×60 se divide en cuadrados unitarios (de 1×1) dibujando las líneas para formar la cuadrícula. Si una de sus diagonales también se dibuja en la figura, ¿en cuántas regiones queda dividida la figura?

Problema 12. Hay 55 estudiantes que participan en una competencia de matemáticas que tiene reglas que establecen que cada participante obtiene un “※” para cada respuesta correcta, una “★” para cada respuesta incorrecta y un “◯” para cada problema no resuelto. Suponiendo que no hay dos estudiantes que tengan el mismo número de “※”s y el mismo número de “★”s, ¿cuál es el menor número de problemas que puede tener esta competencia?

Problema 13. En la siguiente figura, $ABCD$ es un paralelogramo cuyo perímetro es 54 cm, $\angle DAB = 60^\circ$ y $\angle DBC = 90^\circ$. ¿Cuál es la longitud, en cm, de AB?

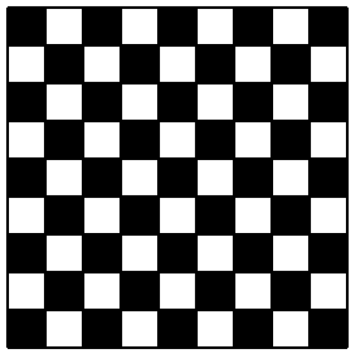


Problema 14. Un n-ágono regular $A_1A_2 \ldots A_n$ está inscrito dentro de una circunferencia con centro O. Si $\angle A_1OA_{16} = 135^\circ$, ¿cuál es la suma de todos los valores posibles de n?

Problema 15. Comenzando con un entero positivo I, primero reordenamos sus dígitos y después le restamos 1 para obtener M. Ahora, otra vez reordenamos los dígitos de M y sumamos 1 para obtener C. Por ejemplo, si $I = 2358$, podemos obtener $C = 2259, 2358$ y 4284 entre otros valores. ¿Cuántos enteros distintos C se pueden obtener si $I = 2267$?

Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En el siguiente diagrama, se muestra un tablero de ajedrez de 9×9 en donde los cuadrados unitarios son coloreados en blanco o negro y cada una de sus cuatro esquinas se colorea de negro. Ahora, un alfil comienza en cualquier cuadrado negro. Si en cada movimiento puede ir a cualquier cuadrado negro adyacente en diagonal sin pasar por cuadrados blancos, ¿cuál es el mínimo número de movimientos requeridos para poder visitar todos los cuadrados negros, no necesariamente regresando al cuadrado inicial? Dibuja el camino.



Problema 2. Una tabla de 1×2021 se va a cortar en 2021 cuadrados unitarios en varios pasos. En cada paso, puedes cortar una sola tabla dividiéndola en dos (no necesariamente iguales), o bien cortar un conjunto de tablas de igual longitud, dividiendo cada una de ellas, en la misma forma, en dos piezas. Tu objetivo es lograr esto en el menor número de pasos. ¿Cuántos pasos necesitas? Describe tu proceso completo a detalle.

Problema 3. ¿Cuántos enteros positivos del 1 al 2021, inclusive, son divisibles por 2 o 5 pero no por otros números primos?

Problema 4. Los primeros enteros positivos, comenzando desde "1" se escriben en un pizarrón. Si uno de los números es borrado, entonces el promedio de los números restantes se convierte en $\frac{45}{4}$. ¿Cuál número fue borrado?

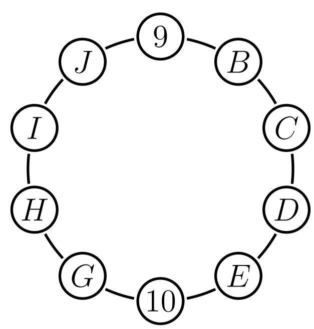
Problema 5. Un triángulo de plástico delgado está sobre una superficie y se puede voltear sobre cualquiera de sus lados repetidamente, en cada paso se voltea sobre un lado distinto al paso anterior. Siempre que su nueva posición comparta un punto interior con su posición inicial después de varios volteos, los dos triángulos deben coincidir perfectamente.
Si los triángulos con ángulos iguales son vistos como el mismo triángulo, encuentra los ángulos de todos los posibles triángulos con esta propiedad.
(Nota: El número de respuestas correctas menos el número de respuestas incorrectas es la respuesta correcta neta y son 3 puntos por cada respuesta correcta neta. Encontrar todas las respuestas correctas sin respuestas incorrectas da 40 puntos).

Problema 6. Un cubo, con lados de longitud 6 cm, va a ser cortado en 49 cubitos más pequeños. Si el tamaño de los cubitos no es necesariamente el mismo pero las longitudes de los lados, en cm, de los cubitos son números enteros, ¿cuántos tipos de cubos de diferentes tamaños tenemos? ¿Cuántos cubitos de cada tamaño tenemos?

Problema 7. Satya tiene cierto número de manzanas y naranjas. Se sabe que el total de estas frutas que tiene inicialmente está entre 100 a 300 y la razón entre el número de manzanas y el número de naranjas es $7 : 4$. Entonces, cada día, él se come, aleatoriamente, dos de ellas, pero no necesariamente del mismo tipo. En el décimo día, después de comer dos de ellas, la razón se convirtió en $8 : 5$. ¿Cuántas manzanas y naranjas tiene inicialmente en total Satya?

Problema 8. ¿Cuántos números enteros positivos de 10 dígitos múltiplos de 11111 no tienen dígitos iguales?

Problema 9. En el diagrama siguiente, diez perlas etiquetadas como A, B, C, D, E, F, G, H, I y J son acomodadas en orden de las manecillas del reloj sobre un círculo, donde la perla A es etiquetada como 9 y la perla F es etiquetada como 10.



Las restantes ocho perlas serán etiquetadas con los números $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y 8, usando cada número exactamente una vez. Si el número de G debe ser más grande que el número de E y la suma de los números de cualesquiera dos perlas adyacentes debe ser un número primo, enlista todas las posibles diferentes formas de etiquetar.
(Nota: El número de respuestas correctas menos el número de respuestas incorrectas es la respuesta correcta neta y son 2 puntos por cada respuesta correcta neta. Encontrar todas las respuestas correctas sin respuestas incorrectas da 40 puntos).

Problema 10. El camino entre la ciudad M y la ciudad S es de 15 km de largo. Ana y Boris ambos dejan la ciudad M a mediodía, Ana camina y Boris va en bicicleta. Mientras tanto, su amiga Olga camina de la ciudad S a la ciudad M y los tres van viajando sobre el mismo camino. Cuando Boris encuentra a Olga, él le da a Olga la bici y camina el resto del trayecto, mientras que Olga se va en bici hasta que encuentra a Ana y le da a Ana la bici. Ana entonces se va el resto del trayecto en bici, llegando a la ciudad S al mismo tiempo que Boris. Si la velocidad en que camina cada persona es 6 km/h y la velocidad cuando van en bici es 15 km/h, ¿cuántas horas antes de mediodía se fue Olga de la Ciudad S?

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es 17. Es imposible que todas las 18 sumas sean impares, pues si así fuera podríamos ordenar a los números de alguna de las siguientes formas, donde i significa impar y p significa par:

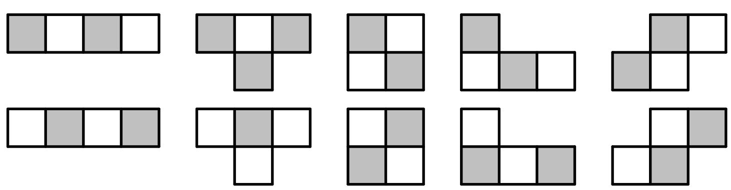
$$iiiiii\ldots,\quad ippipp\ldots,\quad pippip\ldots \text{ o } ppippi\ldots$$

Como hay 10 números impares y 10 números pares, es imposible obtener cualquiera de las cuatro secuencias anteriores.
Sin embargo, podemos obtener 17 sumas impares; por ejemplo, cuando el orden de los números sobre la línea sigue la secuencia:

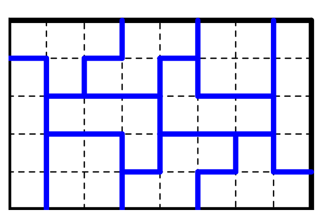
$$ippippippippippiiiii \text{ o } ppippippippippiiiiii.$$

En estos casos, la única suma par es la 15^a o la 14^a, mientras que todas las otras son impares.

Solución del Problema 2. La respuesta es 26 cm. Si n denota el número de piezas que usa Mónica, entonces el número de cuadrados en un rectángulo es $20n$. Como este número es par, si pintamos el rectángulo como tablero de ajedrez tendremos la misma cantidad de cuadrados negros que de cuadrados blancos. Cada una de las piezas cubre 2 cuadrados negros y 2 cuadrados blancos, salvo la pieza con forma de T que cubre 1 o 3 cuadrados negros. Necesitamos un número par de ellas, así que n debe ser par. Luego, n es al menos 2.



Si $n = 2$, el área del rectángulo es 40 cm^2 y los posibles perímetros son: $2\times(1+40) =$ 82 cm, $2 \times (2 + 20) = 44$ cm, $2 \times (4 + 10) = 28$ cm y $2 \times (5 + 8) = 26$ cm.
Un rectángulo de perímetro 26 cm hecho con los tetrominós se muestra en la siguiente figura.



Si $n \geq 4$, el área del rectángulo es mayor que 80 cm^2 $> 8 \times 8$ cm^2 y el perímetro es mayor que $2 \times (8 + 8) = 32$ cm.
Por lo tanto, el perímetro mínimo es 26 cm.

Solución del Problema 3. La respuesta es 12. Sea $N = \overline{a2021b}$ el cual es múltiplo de $28 = 4 \times 7$. Como N es múltiplo de 4, entonces por el criterio de divisibilidad del 4, el número $\overline{1b}$ es múltiplo de 4, lo cual implica que $b = 2$ o $b = 6$.
Si $b = 2$ y $a = 1$, entonces $N = 120212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 2$, entonces $N = 220212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 3$, entonces $N = 320212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 4$, entonces $N = 420212$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 2$ y $a = 5$, entonces $N = 520212 = 7 \times 74316$ es múltiplo de 7.
Esto significa que con $b = 2$, el número $N = 520212$ tiene la menor suma de dígitos y es múltiplo de 7.
Si $b = 6$ y $a = 1$, entonces $N = 120216$ que no es múltiplo de 7.
Si $b = 6$ y $a \geq 2$, entonces la suma de los dígitos de N es mayor que 12.
Por lo tanto, el menor valor posible de la suma de los dígitos de N es $5 + 2 + 0 + 2 + 1 + 2 = 12$.

Solución del Problema 4. La respuesta es $\frac{21}{2021}$. Supongamos que la fracción original es $\frac{x}{y}$ donde x, y son primos relativos. Sumando 22 al numerador, obtenemos que $\frac{x+22}{y} = \frac{1}{47}$, esto es, $y = 47x + 1034$. Restando 5 al denominador de la fracción original, obtenemos que $\frac{x}{y-5} = \frac{1}{96}$, esto es, $y = 96x + 5$. Por lo tanto, tenemos que $47x + 1034 = 96x + 5$, de donde, $49x = 1029$, esto es, $x = 21$. Luego, $y = 2021$. Como $21 = 3 \times 7$ y $2021 = 41 \times 47$, estos números son primos relativos y, por consiguiente, la fracción original es $\frac{21}{2021}$.

Solución alternativa. Cuando se suma 22 al numerador de la fracción original, la fracción que resulta es $\frac{1}{47}$. Sea a un entero positivo tal que $\frac{1}{47} = \frac{a}{47a}$. Entonces, la fracción original es $\frac{a-22}{47a}$. Restando 5 al denominador de esta fracción, obtenemos que $\frac{a-22}{47a-5} = \frac{1}{96}$, esto es, $96a - 2112 = 47a - 5$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $a = 43$. Entonces, $a - 22 = 21$ y $47a = 47 \times 43 = 2021$. Ahora concluimos como en la primera solución.

Solución del Problema 5. La respuesta es $7:48$ a.m. El autobús rojo viaja durante 5 horas 30 minutos que es igual a 330 minutos y el autobús azul viaja durante 5 horas 45 minutos que es igual a 345 minutos. Si la distancia entre las ciudades A y B es d, entonces la velocidad del autobús rojo es $\frac{d}{330}$ por minuto y la velocidad del autobús azul es $\frac{d}{345}$ por minuto. Antes de la salida del autobús rojo, el autobús azul ha viajado $\frac{165d}{345}$, lo que significa que ambos autobuses se encontrarán $(1 - \frac{165}{345}) \div (\frac{1}{330} + \frac{1}{345}) = 88$ minutos después de la salida del autobús rojo, esto es, a las $6:20 + 1:28 = 7:48$ a.m.

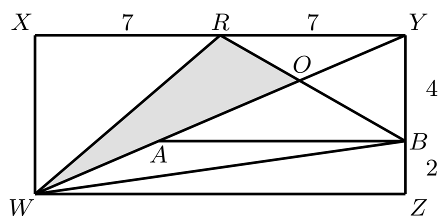
Solución del Problema 6. La respuesta es 25 segundos. Durante el tiempo que la fotógrafa necesita para configurar su cámara, el zorro se alejará $5 \times 6 = 30$ metros. Así que la fotógrafa necesita configurar su cámara cuando ella esté a $50 - 30 = 20$ metros. El zorro comienza a correr 100 metros, así que la fotógrafa necesita estar $100 - 20 = 80$ metros más cerca, con un tiempo de persecución de $80 \div (10 - 6) = 20$ segundos.

Por lo tanto, la respuesta es 20 segundos para perseguir al zorro más 5 segundos para configurar la cámara, esto es, 25 segundos.

Solución del Problema 7. La respuesta es 15. Si hay x cuartos en el primer escenario, entonces hay $x+5$ cuartos en el segundo escenario. Luego, $48 < 5x$ y $3(x+5) < 48$. De la primera desigualdad, obtenemos que $9\frac{3}{5} < x$ y, de la segunda desigualdad, obtenemos que $x < 11$. Por lo tanto, $9.6 < x < 11$. Como x es un entero positivo, necesariamente $x = 10$. Esto significa que el hotel tiene $10 + 5 = 15$ cuartos en total.

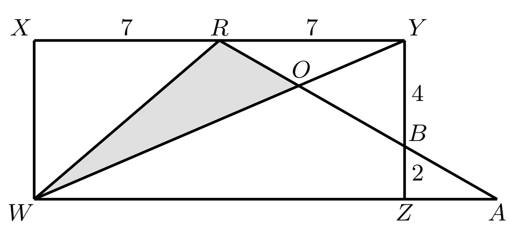
Solución alternativa. En el primer escenario, como 5 turistas son suficientes por cada cuarto y son 48 turistas, el número de cuartos disponibles es al menos 10. En el segundo escenario, como 3 turistas no son suficientes para un cuarto, el número de cuartos disponibles es a lo más 15. Como la diferencia entre los dos escenarios es 5 cuartos, concluimos que el hotel tiene 15 cuartos en total.

Solución del Problema 8. La respuesta es 15 cm^2. Tracemos una paralela a WZ por el punto B y supongamos que interseca a WY en el punto A.



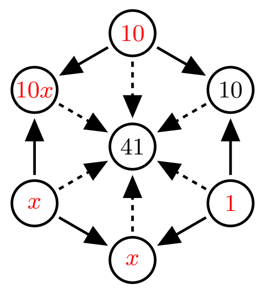
En el triángulo YWZ, tenemos que $\frac{AB}{WZ} = \frac{YB}{YZ}$ de donde, $AB = \frac{YB}{YZ} \times WZ = \frac{4}{6} \times 14 = \frac{28}{3}$ cm. Como los triángulos YOR y AOB son semejantes, tenemos que $\frac{BO}{RO} = \frac{AB}{RY} = \frac{28/3}{7} = \frac{4}{3}$. Ahora, el área del triángulo RBW la podemos calcular restando al área del rectángulo $XYZW$ las áreas de los triángulos RYB, BZW y RXW, esto es, $14 \times 6 - \frac{4\times 7}{2} - \frac{2\times 14}{2} - \frac{6\times 7}{2} = 35$ cm^2 es el área del triángulo RBW. Por lo tanto, el área del triángulo ROW es $\frac{3}{7}$ del área del triángulo RBW, esto es, es igual a $\frac{3}{7} \times 35 = 15$ cm^2.

Solución alternativa. Extendamos RB y WZ de manera que se intersequen en el punto A.

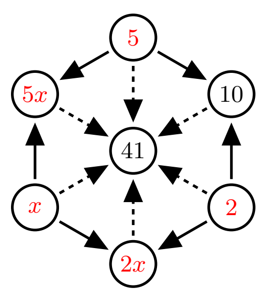


Observemos que los triángulos RYB y AZB son semejantes, así que $\frac{RY}{ZA} = \frac{YB}{BZ}$, de donde $ZA = \frac{RY \times BZ}{YB} = \frac{7\times 2}{4} = \frac{7}{2}$ cm. Como los triángulos RYO y AWO también son semejantes, tenemos que $\frac{OY}{OW} = \frac{RY}{AW} = \frac{7}{14+\frac{7}{2}} = \frac{2}{5}$. Como R es el punto medio de XY, tenemos que $(RYW) = \frac{1}{2}(XYW) = \frac{1}{4}(WXYZ) = \frac{1}{4} \times 6 \times 14 = 21$ cm^2, donde los paréntesis denotan área. Por lo tanto, el área del triángulo ROW es igual a $\frac{5}{7}$ del área del triángulo RYW, esto es, es igual a $\frac{5}{7} \times 21 = 15$ cm^2.

Solución del Problema 9. La respuesta es 3. Sea x el número que va en el círculo que tiene el signo de interrogación. Como $10 = 1 \times 10 = 2 \times 5$, tenemos dos casos.
Caso 1: $10 = 1 \times 10$. Tenemos el siguiente rompecabezas.



Entonces, $10+10+1+x+x+10x = 41$, esto es, $12x = 20$ y, por lo tanto, $x = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ que no es un número entero.
Caso 2: $10 = 2 \times 5$. Tenemos el siguiente rompecabezas.



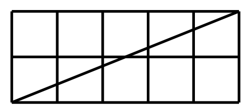
Entonces, $5 + 10 + 2 + 5x + 2x + x = 41$, esto es, $8x = 24$ y, por lo tanto, $x = 3$.

Solución del Problema 10. La respuesta es 259. Mientras que es posible verificar cada entero positivo por separado, una manera mucho más eficiente para encontrar la respuesta es hacer una tabla que contenga todas las sumas de potencias de 2 y potencias de 3 y luego ver cuáles sumas aparecen doble, como a continuación se muestra.

$+$	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
3^1	5	9	**11**	19	**35**	67	131	**259**
3^2	**11**	13	17	25	41	73	137	264
3^3	29	31	**35**	43	59	91	155	283
3^4	83	85	89	97	113	145	209	337
3^5	245	247	251	**259**	275	307	371	499

Los enteros de dos dígitos que tienen la curiousa propiedad son el 11 (mencionado en el enunciado del problema) y el $35 = 32 + 3 = 8 + 27$. El entero más pequeño de tres dígitos con la curiousa propiedad es el $259 = 256+3 = 2^8+3^1 = 2^4+3^5 = 16+243$.

Solución del Problema 11. La respuesta es 1512. Sin la diagonal, tenemos $24 \times 60 = 1440$ partes. Como el máximo común divisor de $24 = 12 \times 2$ y $60 = 12 \times 5$ es 12, podemos dividir el rectángulo en bloques de 2×5. Como 2 y 5 son primos relativos, la diagonal pasa solo por los puntos de la cuadrícula de las esquinas de los bloques.



Dentro de cada bloque, la diagonal cruzará $2 - 1 = 1$ línea horizontal de la cuadrícula y $5 - 1 = 4$ líneas verticales de la cuadrícula una a la vez. Corta el cuadrado inicial (de 1×1) en dos partes. Cada vez que cruza una línea de la cuadrícula, ingresa a un nuevo cuadrado (de 1×1) y lo corta en dos partes. Luego, se generan $1 + 1 + 4 = 6$ nuevas partes. Como la diagonal pasa por 12 bloques, el número total de partes es $1440 + 6 \times 12 = 1512$.

Solución del Problema 12. La respuesta es 9. Si hay n problemas, entonces las posibles situaciones son:

Número de ※	Número de ★	Número de ◯
n	0	0
$n-1$	1	0
	0	1
$n-2$	2	0
	1	1
	0	2
$n-3$	3	0
	2	1
	1	2
	0	3

Podemos ver que para el número de ※ de n a 0 tendremos

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

posibles situaciones. Luego, $\frac{(n+1)(n+2)}{2} \geq 55$, esto es, $(n+1)(n+2) \geq 110 = 10 \times 11$. Por lo tanto, $n \geq 9$.

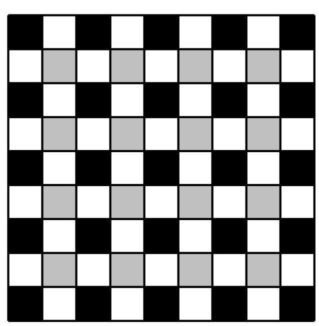
Solución del Problema 13. La respuesta es 18 cm. Como $ABCD$ es un paralelogramo, tenemos que $\angle DCB = \angle DAB = 60°$. Luego, el triángulo BCD es la mitad de un triángulo equilátero con altura BD. Entonces, $CD = 2BC$ y el perímetro del paralelogramo $ABCD$ es igual a $2(CD + BC) = 2(2BC + BC) = 6BC$, esto es, $6BC = 54$ cm de donde obtenemos que $BC = 9$ cm y, por consiguiente, $AB = CD = 2BC = 18$ cm.

Solución del Problema 14. La respuesta es 64. Los vértices $A_2, A_3, A_4, \ldots A_{15}$, están o bien en el interior del ángulo que mide $135°$, o bien, en el interior del ángulo que mide $360° - 135° = 225°$. En el primer caso, como el polígono es regular, el ángulo central que abre un arco de la forma $\widehat{A_iA_{i+1}}$ es igual a $\frac{135°}{15} = 9°$ y $n = \frac{360°}{9°} = 40$. En el segundo caso, el ángulo central que abre un arco de la forma $\widehat{A_iA_{i+1}}$ es igual a $\frac{225°}{15} = 15°$ y $n = \frac{360°}{15°} = 24$. Por lo tanto, la respuesta es $40 + 24 = 64$.

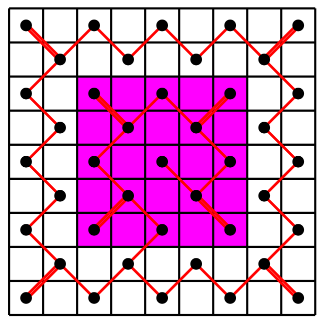
Solución del Problema 15. La respuesta es 42. Los dígitos de I son $(2, 2, 6, 7)$. Tenemos dos casos.
Caso 1. Los dígitos de C también son $(2, 2, 6, 7)$. En este caso, tenemos $4! \div 2 = 12$ valores de C.
Caso 2. Los dígitos de C no son $(2, 2, 6, 7)$. En este caso, los dígitos de M pueden ser $(1, 2, 6, 7)$, $(2, 2, 5, 7)$ o $(2, 2, 6, 6)$.
Si los dígitos de M son $(1, 2, 6, 7)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(1, 3, 6, 7)$, $(1, 2, 7, 7)$ o $(1, 2, 6, 8)$.
Si los dígitos de M son $(2, 2, 5, 7)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(2, 3, 5, 7)$ o $(2, 2, 5, 8)$.
Si los dígitos de M son $(2, 2, 6, 6)$, entonces los dígitos de C pueden ser $(2, 3, 6, 6)$.
Notemos que el último dígito de C debe ser aquel que ha incrementado. Luego, cada una de las opciones $(1, 3, 6, 7)$, $(1, 2, 7, 7)$, $(1, 2, 6, 8)$ y $(2, 3, 5, 7)$ nos da $(4 - 1)! = 6$ valores de C, mientras que cada una de las opciones $(2, 2, 5, 8)$ y $(2, 3, 6, 6)$ nos da $(4 - 1)! \div 2 = 3$ valores de C. Así, en este caso hay $4 \times 6 + 2 \times 3 = 30$ valores de C.
Por lo tanto, en total hay $12 + 30 = 42$ valores de C.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. Consideremos el siguiente tablero donde se han marcado 25 cuadrados negros a los cuales llamaremos cuadrados "super negros".



Como el alfil debe visitar todos los cuadrados negros, en particular debe visitar a los 25 cuadrados super negros. Para ir de un cuadrado super negro a otro cuadrado super negro, al menos 2 movimientos son necesarios. Si el alfil comienza en un cuadrado super negro y termina (pasando por todos los cuadrados negros) en otro cuadrado super negro, entonces al menos se necesitan $2 \times 24 = 48$ movimientos. El siguiente diagrama muestra que son posibles 48 movimientos.



Solución del Problema 2. Una forma es como se muestra a continuación.

No. de corte	**Tabla(s) cortada(s)**	**Forma de dividir**	**Tablas después del corte**
1	1 de longitud 2021	$2021 = 2016 + 5$	1 de longitud 2016 y 1 de longitud 5
2	1 de longitud 2016	$2016 = 1792+224$	1 de longitud 1792, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
3	1 de longitud 1792	$1792 = 896 + 896$	2 de longitud 896, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
4	2 de longitud 896	$896 = 448 + 448$	4 de longitud 448, 1 de longitud 224 y 1 de longitud 5
5	4 de longitud 448	$448 = 224 + 224$	9 de longitud 224 y 1 de longitud 5
6	9 de longitud 224	$224 = 112 + 112$	18 de longitud 112 y 1 de longitud 5
7	18 de longitud 112	$112 = 56 + 56$	36 de longitud 56 y 1 de longitud 5
8	36 de longitud 56	$56 = 28 + 28$	72 de longitud 28 y 1 de longitud 5
9	72 de longitud 28	$28 = 14 + 14$	144 de longitud 14 y 1 de longitud 5
10	144 de longitud 14	$14 = 7 + 7$	288 de longitud 7 y 1 de longitud 5

11	288 de longitud 7	$7 = 5 + 2$	289 de longitud 5 y 2 de longitud 2
12	289 de longitud 5	$5 = 4 + 1$	289 de longitud 4, 288 de longitud 2 y 289 de longitud 1
13	289 de longitud 4	$4 = 2 + 2$	866 de longitud 2 y 289 de longitud 1
14	866 de longitud 2	$2 = 1 + 1$	2021 de longitud 1

A continuación mostramos otra forma.

No. de corte	**Tabla(s) cortada(s)**	**Forma de dividir**	**Tablas después del corte**
1	1 de longitud 2021	$2021 = 2016 + 5$	1 de longitud 2016 y 1 de longitud 5
2	1 de longitud 2016	$2016 = 1008 + 1008$	2 de longitud 1008 y 1 de longitud 5
3	2 de longitud 1008	$1008 = 504 + 504$	4 de longitud 504 y 1 de longitud 5
4	4 de longitud 504	$504 = 252 + 252$	8 de longitud 252 y 1 de longitud 5
5	8 de longitud 252	$252 = 126 + 126$	16 de longitud 126 y 1 de longitud 5
6	16 de longitud 126	$126 = 63 + 63$	32 de longitud 63 y 1 de longitud 5
7	32 de longitud 63	$63 = 56 + 7$	32 de longitud 56, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
8	32 de longitud 56	$56 = 28 + 28$	64 de longitud 28, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
9	64 de longitud 28	$28 = 14 + 14$	128 de longitud 14, 32 de longitud 7 y 1 de longitud 5
10	128 de longitud 14	$14 = 7 + 7$	288 de longitud 7 y 1 de longitud 5
11	288 de longitud 7	$7 = 5 + 2$	289 de longitud 5 y 2 de longitud 2
12	289 de longitud 5	$5 = 4 + 1$	289 de longitud 4, 288 de longitud 2 y 289 de longitud 1
13	289 de longitud 4	$4 = 2 + 2$	866 de longitud 2 y 289 de longitud 1
14	866 de longitud 2	$2 = 1 + 1$	2021 de longitud 1

Solución alternativa. Es claro que cada tabla obtenida en un paso intermedio, debe tener longitud entera. Un posible algoritmo es el siguiente:

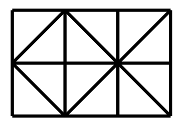
$$\begin{aligned}2021 &= 2016+5 = 1792+224+5 = 2\times 896+224+5 = 4\times 448+224+5\\ &= 9\times 224+5 = 18\times 112+5 = 36\times 56+5 = 72\times 28+5\\ &= 144\times 14+5 = 288\times 7+5 = 289\times 5+288\times 2\\ &= 289\times 4+289\times 1+288\times 2\\ &= 866\times 2+289\times 1 = 2021\times 1.\end{aligned}$$

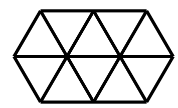
Solución del Problema 3. Observemos que $2021 < 5^5 = 3125$. Entonces, los números que queremos contar los podemos dividir en cinco grupos.
a) Aquellos que no son divisibles por 5. De estos hay 10 números: $2, 2^2, \ldots, 2^{10}$.
b) Aquellos que son divisibles por 5 pero no son divisibles por 5^2. De estos hay 9 números: $5, 5\times 2, 5\times 2^2, \ldots, 5\times 2^8 = 1280$.
c) Aquellos que son divisibles por 5^2 pero no son divisibles por 5^3. De estos hay 7 números: $5^2, 5^2\times 2, 5^2\times 2^2, \ldots, 5^2\times 2^6 = 1600$.
d) Aquellos que son divisibles por 5^3 pero no son divisibles por 5^4. De estos hay 5 números: $5^3, 5^3\times 2, 5^3\times 2^2, 5^3\times 2^3, 5^3\times 2^4 = 2000$.
e) Aquellos que son divisibles por 5^4 pero no son divisibles por 5^5. De estos hay 2 números: 5^4 y $5^4\times 2 = 1250$.
Por lo tanto, en total son $10+9+7+5+2 = 33$ números.

Solución del Problema 4. La respuesta es 6. Supongamos que los números que han sido escritos son $1, \ldots, n$ y que el número que se borró es k. Por la condición del problema, tenemos que $\frac{(1+2+\cdots+n)-k}{n-1} = \frac{n(n+1)-2k}{2(n-1)} = \frac{45}{4}$.
Si $k = 1$, entonces $\frac{n(n+1)-2}{n-1} = \frac{n^2+n-2}{n-1} = \frac{(n-1)(n+2)}{n-1} = n+2 \geq \frac{45}{2}$, de donde $n \geq \frac{45}{2} - 2 = 20.5$.
Si $k = n$, entonces $\frac{n(n+1)-2n}{n-1} = \frac{n^2-n}{n-1} = \frac{n(n-1)}{n-1} = n \leq \frac{45}{2}$, de donde $n \leq 22.5$.
Como n es un número entero, tenemos que $21 \leq n \leq 22$, esto es, $n = 21$ o 22.
Si $n = 21$, entonces $\frac{21\times 22-2k}{40} = \frac{45}{4}$, de donde $k = 6$.
Si $n = 22$, entonces $\frac{22\times 23-2k}{42} = \frac{45}{4}$, de donde $k = \frac{67}{4}$, que no es un entero.

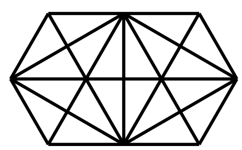
Solución alternativa. El promedio de los números es $\frac{45}{4} > \frac{22}{2} = \frac{21+1}{2}$. Esto implica que el número más grande es al menos 21. Si este número más grande es 21, entonces la suma de los veinte números que quedan es $\frac{45}{4}\times 20 = 225$. Luego, el número borrado es $(1+2+\cdots+21) - 225 = 6$. Ahora, para que la suma de los restantes números sea un entero, el siguiente valor posible para el número más grande es 25 y la suma de los veinticuatro números restantes es $\frac{45}{4}\times 24 = 270$ y el número borrado tendría que ser $(1+2+\cdots+25) - 270 = 55$, lo cual es un absurdo ya que el número más grande es 25. Por lo tanto, los números son $1, 2, \ldots, 21$ y el número borrado es 6.

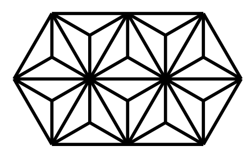
Solución del Problema 5. Un triángulo con las propiedades deseadas debe enlosar el plano por medio de reflexiones. Entonces tal teselación debe tener simetría rotacional de 4 o 6 dobleces, por lo que su base debe ser ya sea un teselado con cuadrados o un teselado con triángulos equiláteros. En el primer caso, un triángulo debe tener ángulos $45° - 45° - 90°$, como se muestra en el diagrama izquierdo de la figura de abajo. En el segundo caso, el triángulo debe tener todos sus ángulos iguales a $60°$, como se muestra en el diagrama de abajo a la derecha.





Sin embargo, un triángulo equilátero puede ser partido en dos o tres triángulos congruentes, con al menos uno de los lados coincidiendo con un lado del triángulo equilátero. Estos triángulos tienen ángulos $30° - 60° - 90°$ o ángulos $30° - 30° - 120°$. Los teselados resultantes se muestran a continuación.

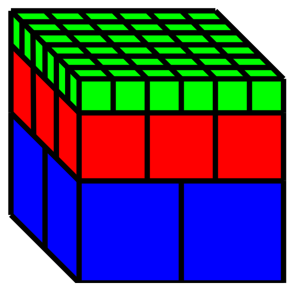




Por lo tanto, hay cuatro posibles triángulos que cumplen, y los ángulos interiores de estos triángulos son $(45°, 45°, 90°)$, $(60°, 60°, 60°)$, $(30°, 60°, 90°)$, $(30°, 30°, 120°)$ y sus permutaciones.

Solución del Problema 6. Un cubo de lado 1 cm es el más pequeño.
a) Si se corta un cubo de lado 5 cm, los restantes cubos son de lado 1 cm de los cuales habrá $6^3 - 5^3 = 91$, lo cual es mayor que 48. Luego, no hay cubos de lado 5 cm.
b) Si se corta un cubo de lado 4 cm, los restantes cubos son de lado 2 cm o de lado 1 cm. Si usamos cubos de lado 1 cm, tenemos $6^3 - 4^3 = 152$ de estos, lo cual no puede ser. Si usamos x cubos de lado 2 cm, entonces usamos $152 - 8x$ cubos de lado 1 cm. Luego, $x + 152 - 8x = 152 - 7x = 48$, de donde $x = \frac{104}{7}$ que no es un entero. Por lo tanto, no hay cubos de lado 4 cm.
c) Supongamos que usamos a cubos de lado 1 cm, b cubos de lado 2 cm y c cubos de lado 3 cm. Entonces, tenemos que $a + b + c = 49$ y $a + 8b + 27c = 216$. Restando estas ecuaciones, obtenemos que $7b + 26c = 167$, de donde se sigue que $c \leq 6$.
Si $c = 0$, entonces $7b = 167$ y b no es entero.
Si $c = 1$, entonces $7b = 141$ y b no es entero.
Si $c = 2$, entonces $7b = 115$ y b no es entero.
Si $c = 3$, entonces $7b = 89$ y b no es entero.
Si $c = 4$, entonces $7b = 63$ y $b = 9$.
Si $c = 5$, entonces $7b = 37$ y b no es entero.
Si $c = 6$, entonces $7b = 11$ y b no es entero.
Por lo tanto, $c = 4$, $b = 9$ y $a = 49 - 4 - 9 = 36$.

Falta ver que estos números funcionan. Para esto, pongamos los cuatro cubos de lado 3 cm en las primeras tres capas, los nueve cubos de lado 2 cm en la cuarta y quinta capa y los 36 cubos de lado 1 cm en la capa superior.



Solución del Problema 7. El número total de frutas es un múltiplo de $4 + 7 = 11$. Después de que Satya se ha comido 20 de ellas, el número total de frutas es un múltiplo de $5 + 8 = 13$. Los múltiplos de 11 entre 100 y 300 son 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 220, 231, 242, 253, 264, 275, 286 y 297. Restando 20, obtenemos 90, 101, 112, 123, 134, 145 y $156 = 13 \times 12$. Si continuamos esta secuencia, el siguiente múltiplo de 13 es $156 + 11 \times 13 = 299$, pero $299 + 20 = 319$ es mayor que 300. Por lo tanto, Satya tiene $156 + 20 = 176$ frutas inicialmente.

Solución alternativa. Supongamos que el número total de frutas es $11a$ y que el número total de manzanas comidas en 10 días es m. Entonces, tenemos que

$$\frac{7a - m}{4a - (20 - m)} = \frac{8}{5}.$$

Despejando el valor de a, obtenemos que $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3}$. Como $0 \leq m \leq 20$, resulta que $0 \leq \frac{m-1}{3} \leq \frac{20-1}{3} < 7$. Luego,

$$a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} < 4m - 53 + 7 = 4m - 46.$$

Como $11a > 100$, necesariamente $a > 9$ y, por ende, $13 < m \leq 20$. Como $\frac{m-1}{3}$ es un entero, es fácil ver que las únicas posibilidades son $m = 16$ o 19.
Si $m = 16$, entonces $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} = 4 \times 16 - 53 + 5 = 16$ y $11a = 176$.
Si $m = 19$, entonces $a = 4m - 53 + \frac{m-1}{3} = 4 \times 19 - 53 + 6 = 29$ y $11a = 319$, lo cual no puede ser (ya que $319 > 300$).
Por lo tanto, Satya tiene 176 frutas inicialmente.

Solución del Problema 8. Sea $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5b_1b_2b_3b_4b_5}$ uno de tales números. Tenemos que $a_1 \neq 0$. Más aún, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ es una permutación de $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$. Luego, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 = 45$. Como 45 es múltiplo de 9, A también lo es. Ahora, como 9 y 11111 son primos relativos y A es múltiplo de 9 y 11111, resulta que A es múltiplo de $9 \times 11111 = 99999$. Si $a = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ y $b = \overline{b_1b_2b_3b_4b_5}$, entonces

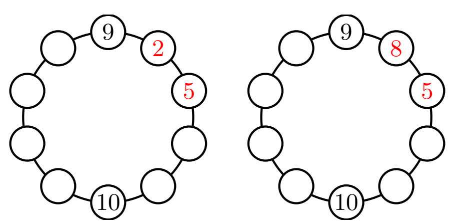
$$A = a \times 10^5 + b = 99999a + (a + b).$$

Como A es múltiplo de 99999, $a+b$ también lo es y, como $0 < a+b < 99999 + 99999 = 2(99999)$, la única posibilidad es $a+b = 99999$. Por lo tanto, $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = a_4 + b_4 = a_5 + b_5 = 9$.
A partir de los diez dígitos $0, 1, 2, \ldots, 9$ hay 5 parejas de dígitos que satisfacen que $a_k + b_k = 9$, las cuales son $(0, 9)$, $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$ y $(4, 5)$. Hay $5!$ maneras de permutar estas parejas para cada $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y hay 2 maneras de permutar los dígitos en (a_k, b_k), dando un total de $5! \times 2^5$ enteros distintos. Por otro lado, como el papel de cada dígito $0, 1, 2, \ldots, 9$ es idéntico, el número de estos enteros cuyo primer dígito es 0 es igual a $\frac{5! \times 2^5}{10} = 4! \times 2^4$.
Por lo tanto, el número de tales enteros A es igual a $5! \times 2^5 - 4! \times 2^4 = 3456$.

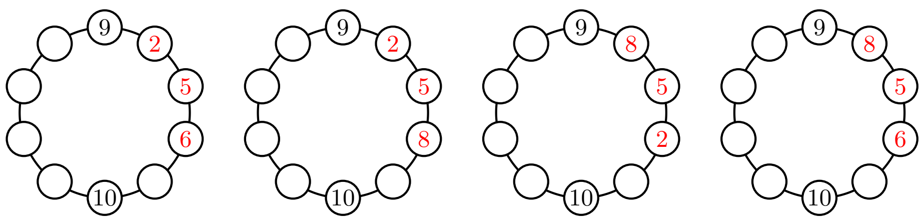
Solución del Problema 9. Se tienen que alternar números pares e impares; si no es así, habrá una suma de números adyacentes que será igual a un número par mayor a 2 (que no será primo). En la siguiente tabla, se muestran las posibles sumas de pares e impares. Las que están marcadas con un "$\circ$" son iguales a un número primo, mientras que las que están marcadas con un "$\times$" no son un número primo.

$1 + 2 = 3\ (\circ)$	$3 + 4 = 7\ (\circ)$	$5 + 6 = 11\ (\circ)$	$7 + 8 = 15\ (\times)$
$3 + 2 = 5\ (\circ)$	$5 + 4 = 9\ (\times)$	$7 + 6 = 13\ (\circ)$	$9 + 8 = 17\ (\circ)$
$5 + 2 = 7\ (\circ)$	$7 + 4 = 11\ (\circ)$	$9 + 6 = 15\ (\times)$	$1 + 10 = 11\ (\circ)$
$7 + 2 = 9\ (\times)$	$9 + 4 = 13\ (\circ)$	$1 + 8 = 9\ (\times)$	$3 + 10 = 13\ (\circ)$
$9 + 2 = 11\ (\circ)$	$1 + 6 = 7\ (\circ)$	$3 + 8 = 11\ (\circ)$	$5 + 10 = 15\ (\times)$
$1 + 4 = 5\ (\circ)$	$3 + 6 = 9\ (\times)$	$5 + 8 = 13\ (\circ)$	$7 + 10 = 17\ (\circ)$
			$9 + 10 = 19\ (\circ)$

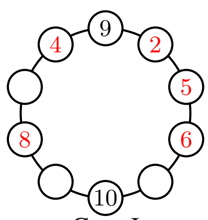
Como $5 + 10 = 15$ no es un número primo, entonces no se puede poner 5 adyacente a 10. Esto significa que, salvo reflexiones, se puede tomar $C = 5$. Observamos que los únicos números que se pueden poner entre 5 y 9 son 2 y 8. Estas dos posibilidades se muestran a continuación.



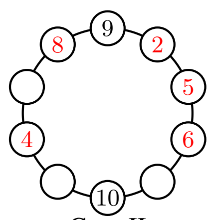
Luego, 5 puede ser adyacente a 2, 6 u 8. Luego, estos dos casos anteriores se pueden extender a las siguientes cuatro posibilidades.



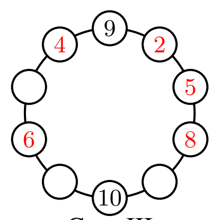
Tomando en cuenta que $9 + 6 = 15$ no es un número primo, se tiene que 6 no puede ser adyacente a 9. Luego, las cuatro posibilidades anteriores se extienden a las siguientes seis posibilidades.



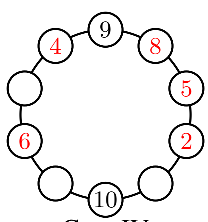
Caso I



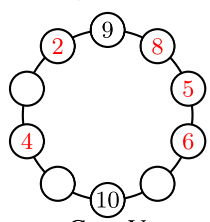
Caso II



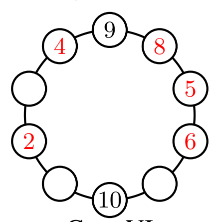
Caso III



Caso IV



Caso V

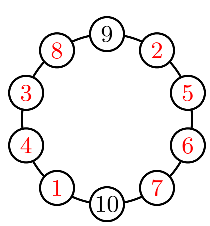


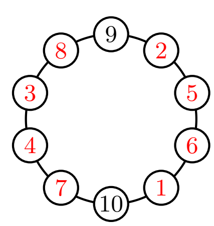
Caso VI

Los dígitos restantes son 1, 3 y 7. De aquí se analiza cada caso.

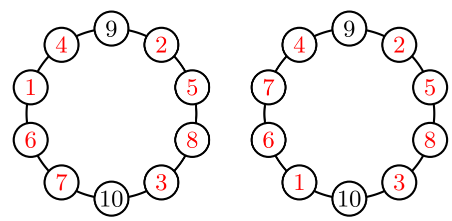
I) Como $1 + 8 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar 1 adyacente al 8. Como $7 + 8 = 15$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 adyacente al 8. Esto significa que 1 y 7 deben ser colocados en el mismo círculo, lo cual es imposible.

II) Se sabe que ni 1 ni 7 pueden estar adyacentes a 8. Luego, el círculo que está entre 4 y 8 debe contener al 3. Para las demás posiciones, se pueden intercambiar 1 y 7. Con esto se cumplen las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.

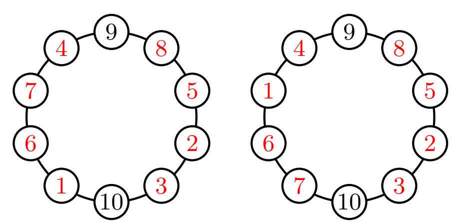




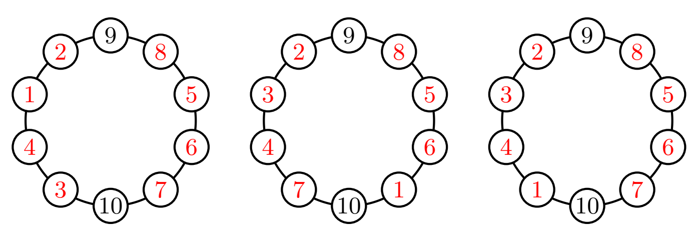
III) Se sabe que tanto 1 como 7 no pueden ser adyacentes a 8. Luego, el círculo entre 8 y 10 debe contener al 3. Para las demás posiciones, se pueden intercambiar el 1 y el 7. Con esto se cumplen las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.



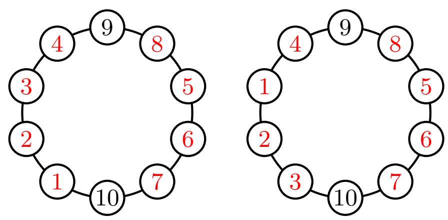
IV) Como $3 + 6 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar 3 enseguida del 6. Luego, el círculo entre 2 y 10 contiene al 3. Para las demás posiciones, se puede intercambiar entre 1 y 7. En ambas opciones se cumplen las condiciones del problema. A continuación se muestran los posibles diagramas.



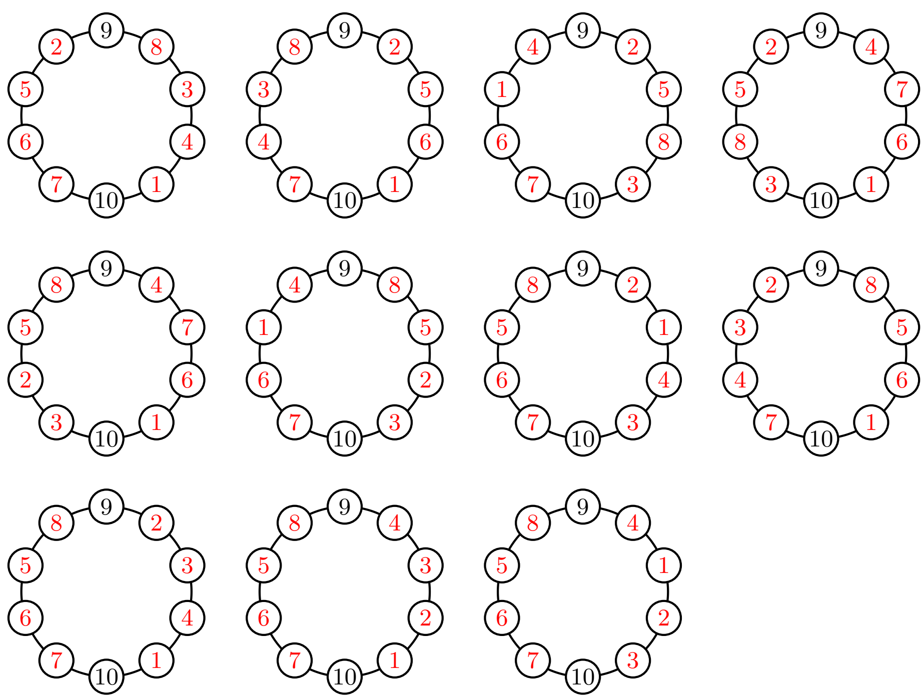
V) Como $3 + 6 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar 3 enseguida del 6. Análogamente, como $7 + 2 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 adyacente al 2. Así, de las seis formas de colocar los números restantes, hay tres de ellas que alcanzan las condiciones del problema. Estas se muestran a continuación.



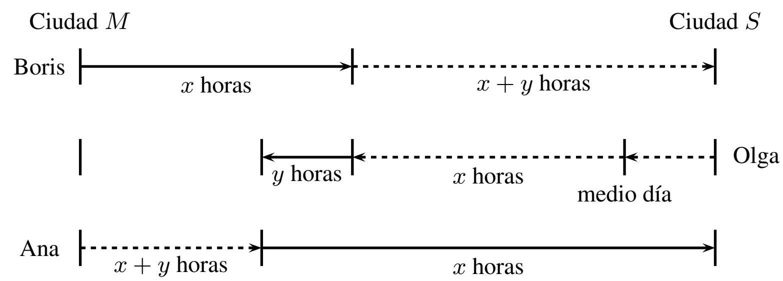
VI) Como $7+2 = 9$ no es un número primo, no se puede colocar el 7 enseguida del 2. Luego 7 debe colocarse en el círculo que se encuentra entre el 6 y el 10. Para las demás posiciones, se pueden colocar 1 y 3 en cualquier orden y se cumplirán las condiciones del problema. Los posibles diagramas se muestran a continuación.



Por lo tanto, hay 11 posibles diagramas teniendo $C = 5$, dando en total 22 diagramas por la simetría de la figura. Sin embargo, de cada pareja de diagramas tales que uno es el reflejo del otro, exactamente uno de ellos cumple que el número en G es mayor al número en E, dando así 11 diagramas en total. Estos se muestran en la siguiente figura.

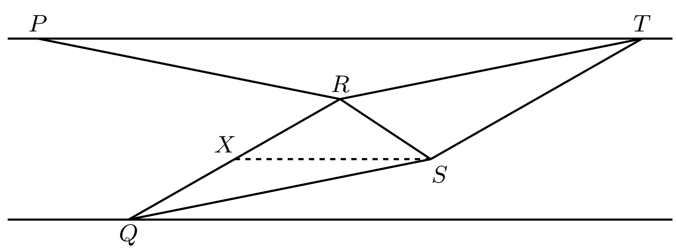


Solución del Problema 10. Supongamos que Boris pasa en bici x horas después de Olga y que Olga pasa a Ana después de otras y horas. Para que Ana y Boris lleguen al mismo tiempo a la ciudad S, Ana debe andar en bici por otras x horas. En el dibujo, la línea punteada representa la ruta a pie y la línea continua representa la ruta en bici.



Cada uno de Ana y Boris camina por $x+y$ horas. Luego, tenemos que $15x+6(x+y) = 15$, esto es, $7x + 2y = 5$.
Además, los 15 km son cubiertos por Ana y Boris caminando mientras que Olga va en bici. Luego, $6(x + y) + 15y + 6(x + y) = 15$, esto es, $4x + 9y = 5$.
Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtenemos que $x = 7/11$ y $y = 3/11$. Como Boris y Olga caminaron en la misma ruta, Olga debió salir de la ciudad S, $y = 3/11$ de hora antes de medio día.
Otra forma de concluir: Boris estuvo andando en bici $\frac{7}{11} \times 15 = \frac{105}{11}$ km y Olga caminó $15 - \frac{105}{11} = \frac{60}{11}$ km. Se necesitan $\frac{60}{11} \times \frac{1}{6} = \frac{10}{11}$ de hora para Olga. Esto significa que debió comenzar a caminar a las $12\frac{7}{11} - \frac{10}{11} = 11\frac{8}{11}$ horas, esto es, $\frac{3}{11}$ de hora antes de medio día.

Solución alternativa. En el siguiente dibujo, el eje horizontal representa el tiempo con Q en el medio día, mientras que el eje vertical representa la distancia desde la ciudad S (arriba) hasta la ciudad M (abajo). La ruta de Ana es $QS + ST$, la ruta de Boris es $QR+RT$ y la ruta de Olga es $PR+RS$. Tenemos que $PR = QS = RT$ son cubiertos a pie mientras que $QR = ST$ y RS son cubiertos en bici. Sea X el punto en QR tal que $RX = RS$.



Denotemos por $t(I, J)$ a la diferencia de tiempo en I y en J. Suponiendo que $t(Q, X) = 4$ unidades, entonces $\frac{t(Q,S)}{t(Q,X)} = \frac{5}{2}$ es la razón de las velocidades. Luego, $t(Q, S) = 10$ unidades.
Como $t(X, R) = t(R, S)$, cada uno es igual a $\frac{10-4}{2} = 3$ unidades. Se sigue que $t(Q, R) = 7$ unidades y $t(P, R) = t(Q, S) = 10$ unidades. Por lo tanto, $t(P, Q) = 3$ unidades. Ahora, Ana camina a 6 km/hr durante 10 unidades y anda en bici a 15 km/hr

durante 7 unidades y, $6 \times 10 + 15 \times 7 = 165$. Como la distancia entre la ciudad M y la ciudad S es de 15 km, cada unidad de tiempo es igual a $\frac{15}{165} = \frac{1}{11}$ de hora. Por lo tanto, Olga dejó la ciudad S $\frac{3}{11}$ de hora antes de medio día.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

62^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas (Virtual)

Del 14 al 24 de julio de 2021, se llevó a cabo la 62^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), de forma virtual, organizada desde San Petersburgo, Rusia.

El equipo mexicano estuvo integrado por

- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León),
- Tomás Francisco Cantú Rodríguez (Ciudad de México),
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa),
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas),
- José Alejandro Reyes González (Morelos),

el cual fue concentrado en la ciudad de Guanajuato, para presentar los exámenes.
Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Marco Antonio Figueroa Ibarra (jefe de la delegación) y Maximiliano Sánchez Garza (tutor). Como observadores estuvieron Rogelio Valdez Delgado y Leonardo Ariel García Morán.

Omar y Pablo obtuvieron medallas de plata; Tomás, Emilio, Daniel y Alejandro obtuvieron medallas de bronce. Como país, México ocupó el lugar número 34 de 107 países participantes y, segundo lugar, entre los países de iberoamérica.

A continuación presentamos los problemas de la 62^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea $n \geq 100$ un entero. Iván escribe cada uno de los números n, $n+1$, $\ldots, 2n$ en un naipe diferente. Después de barajar estos $n+1$ naipes, los divide en dos pilas distintas. Probar que al menos una de esas pilas contiene dos naipes tales que la suma de sus números es un cuadrado perfecto.

(Problema sugerido por Australia).

Problema 2. Probar que la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

se satisface para cualquier elección de números reales $x_1, \ldots, x_n$.

(Problema sugerido por Canadá).

Problema 3. Sea D un punto interior de un triángulo acutángulo ABC, con $AB > AC$, de forma que $\angle DAB = \angle CAD$. El punto E en el segmento AC satisface que $\angle ADE = \angle BCD$, el punto F en el segmento AB satisface $\angle FDA = \angle DBC$, y el punto X en la recta AC satisface $CX = BX$. Sean O_1 y O_2 los circuncentros de los triángulos ADC y EXD, respectivamente. Probar que las rectas BC, EF y O_1O_2 son concurrentes.

(Problema sugerido por Ucrania).

Problema 4. Sean Γ una circunferencia con centro I y $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que cada uno de los segmentos AB, BC, CD y DA es tangente a Γ. Sea Ω la circunferencia circunscrita del triángulo AIC. La prolongación de BA más allá de A corta a Ω en X, y la prolongación de BC más allá de C corta a Ω en Z. Las prolongaciones de AD y CD más allá de D cortan a Ω en Y y T respectivamente.
Probar que $AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC$.

(Problema sugerido por Polonia).

Problema 5. Dos ardillas, Ardi y Dilla, han recolectado 2021 nueces para el invierno. Ardi numera las nueces desde 1 hasta 2021, y excava 2021 pequeños hoyos en el suelo en una disposición circular alrededor de su árbol favorito. A la mañana siguiente, Ardi observa que Dilla ha colocado una nuez en cada hoyo, pero sin tener en cuenta la numeración. No contenta con esto, Ardi decide reordenar las nueces realizando una secuencia de 2021 movimientos. En el k-ésimo movimiento Ardi intercambia las posiciones de las dos nueces adyacentes a la nuez con el número k. Probar que existe un valor de k tal que, en el k-ésimo movimiento, las nueces intercambiadas tienen números a y b tales que $a < k < b$.

(Problema sugerido por España).

Problema 6. Sean $m \geq 2$ un entero, A un conjunto finito de enteros (no necesariamente positivos), y $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ subconjuntos de A. Suponemos que para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, la suma de los elementos de B_k es m^k. Probar que A contiene al menos $\frac{m}{2}$ elementos.

(Problema sugerido por Austria).

XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (Virtual)

Del 9 al 15 de agosto de 2021 se llevó a cabo la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe (OMCC) organizada desde Colombia de forma virtual, en la que participaron 12 países y un total de 48 estudiantes. Una vez más y por trece años consecutivos, México se ha posicionado como el líder indiscutible de esta competencia, obteniendo el primer lugar por países. En esta ocasión, México obtuvo 120 puntos quedando por encima de Nicaragua (101 puntos) y Puerto Rico (79 puntos), quienes ocuparon el segundo y tercer lugar por países, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes),
- Mateo Iván Latapí Acosta (Ciudad de México),
- Isaac Montaño Manríquez (Baja California Sur),
- Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León).

Rogelio obtuvo medalla de oro, mientras que Mateo, Isaac y Sebastián obtuvieron medallas de plata. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron David Torres Flores (líder) y Myriam Hernández Ketchul (tutora). Como observadores participaron Kenya Espinoza Hurtado y José Omar Guzmán Vega.

El equipo mexicano de profesores se reunió en la ciudad de Cuernavaca para hacer la revisión de los exámenes del 10 al 14 de agosto. Los participantes del equipo mexicano presentaron los exámenes en casa.

A continuación, presentamos los problemas de la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Una tripla ordenada de números primos (p, q, r) es *parcera* si cumple que p divide a $q^2 - 4$, q divide a $r^2 - 4$ y r divide a $p^2 - 4$. Encontrar todas las triplas parceras.

Problema 2. Sean ABC un triángulo y Γ su circuncírculo. Sea D un punto sobre AB tal que CD es paralela a la recta tangente a Γ en A. Sean E la intersección de CD con Γ distinta de C, y F la intersección de BC con el circuncírculo del triángulo ADC distinta de C. Finalmente, sea G la intersección de la recta AB y la bisectriz interna del ángulo $\angle DCF$. Demostrar que E, G, F y C están sobre una misma circunferencia.
Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Problema 3. En un tablero de 2021×2021 casillas, coloreamos algunas casillas de negro de tal forma que si ponemos un ratón en el centro de cualquier casilla del tablero, este puede moverse en línea recta en alguna dirección (arriba, abajo, izquierda o derecha a lo largo de las columnas o filas) y salir del tablero sin pisar ninguna casilla negra (diferente de la inicial si esta es negra). ¿Cuál es la máxima cantidad de casillas que pueden ser coloreadas de negro?

Problema 4. En una reunión hay 2021 personas. Se sabe que hay una persona que no tiene ningún amigo y otra persona que tiene un solo amigo. Además, se cumple que, dadas 4 personas cualesquiera, al menos un par de ellas son amigas. Demostrar que en la reunión hay 2018 personas tales que todos son amigos entre sí.
Nota: Si A es amigo de B, entonces B es amigo de A.

Problema 5. Sea $n \geq 3$ un número entero y sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos, tales que m es el menor y M es el mayor de ellos. Se sabe que para cualesquiera tres enteros distintos $1 \leq i, j, k \leq n$, si $a_i \leq a_j \leq a_k$, entonces $a_i a_k \leq a_j^2$. Demostrar que

$$a_1 a_2 \cdots a_n \geq m^2 M^{n-2}$$

y determinar cuándo se cumple la igualdad.

Problema 6. Sean ABC un triángulo con $AB < AC$ y M el punto medio de AC. Se escoge un punto P sobre el segmento BC (distinto de B) de tal forma que $AB = AP$. Sean D la intersección de AC con el circuncírculo del triángulo ABP diferente de A, y E la intersección de PM con el circuncírculo del triángulo ABP diferente de P. Sea K el corte entre las rectas AP y DE. Si F es un punto sobre BC (distinto de P) tal que $KP = KF$, demostrar que C, D, E y F están en una misma circunferencia.
Nota: El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

62ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 62^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Tomás Cantú Rodríguez). Consideremos x un entero positivo fijo y el sistema de ecuaciones $a+b=(2x-1)^2$, $b+c=4x^2$, $c+a=(2x+1)^2$. Entonces, $2(a+b+c)=(2x-1)^2+4x^2+(2x+1)^2=2(6x^2+1)$, esto es, $a+b+c=6x^2+1$. Por lo tanto, $a=2x^2+1$, $b=2x^2-4x$ y $c=2x^2+4x$. Luego, a, b y c son enteros. Si $n \leq 2x^2-4x < 2x^2+1 < 2x^2+4x \leq 2n$ entonces terminamos, ya que por casillas, dos de los naipes a, b, c irán en el mismo montón y sumarán un cuadrado. Entonces, tenemos que $n \leq 2x^2-4x < 2x^2+4x \leq 2n$ si y solo si $\frac{n}{2} \leq x^2-2x < x^2+2x \leq n$ si y solo si $\frac{n}{2}+1 \leq (x-1)^2 < (x+1)^2 \leq n+1$ si y solo si $\sqrt{\frac{n}{2}+1} \leq x-1 < x+1 \leq \sqrt{n+1}$.
Si $f(n)=\sqrt{n+1}-\sqrt{\frac{n}{2}+1}$, entonces la derivada es $f'(n)=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+1}}$. Luego, $f'(n) \geq 0$ si y solo si $\frac{2}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}+1}}$ si y solo si $4\left(\frac{n}{2}+1\right) \geq n+1$ si y solo si $n \geq -3$. Entonces, para $n>0$, $f(n)$ es creciente. Como $f(120)=\sqrt{121}-\sqrt{61} > \sqrt{121}-\sqrt{64}=3$, tenemos que para $n \geq 120$ hay tres enteros positivos k que satisfacen $\sqrt{\frac{n}{2}+1} \leq k \leq \sqrt{n+1}$. Entonces, para $n \geq 120$ hay un entero positivo x tal que $\frac{n}{2} \leq x^2-2x < x^2+2x \leq n$. Para los enteros $100 \leq n < 120$, el número $x=9$ cumple. En efecto, si $n<120$, entonces $\sqrt{\frac{n}{2}+1} < \sqrt{61} < 8 = 9-1$. Con $n \geq 100$, tenemos que $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{101} \geq 10 = 9+1$. Por lo tanto, para $n \geq 100$ hemos demostrado el problema.

Nota: La solución oficial es parecida excepto que evita usar cálculo. Una manera de evitarlo es demostrando que $f(n) \geq 3$ para $n \geq 120$ como sigue.

Tenemos que $f(n) \geq 3$ si y solo si $\sqrt{n+1} \geq 3 + \sqrt{\frac{n}{2}+1}$ si y solo si $n+1 \geq 9 + 6\sqrt{\frac{n}{2}+1} + \frac{n}{2} + 1$ si y solo si $n - 18 \geq 12\sqrt{\frac{n}{2}+1}$ si y solo si $n^2 - 36n + 324 \geq 72n + 144$ si y solo si $n^2 - 108n + 180 \geq 0$. Completando el cuadrado, es fácil ver que $n^2 - 108n + 180$ es creciente cuando $n \geq 54$. Para $n \geq 120$, tenemos que $n^2 - 108n + 180 > 0$ y terminamos.

Solución del problema 2. Si $n = 1$, la desigualdad es $\sqrt{|2x_1|} \geq 0$ la cual es evidentemente cierta. Si $n = 2$ y, suponiendo sin pérdida de generalidad, que $|x_2| \geq |x_1|$, la desigualdad es

$$\sqrt{|2x_1|} + \sqrt{|2x_2|} + 2\sqrt{|x_1 + x_2|} \geq 2\sqrt{|x_1 - x_2|},$$

la cual es verdadera ya que

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|2x_1|} + \sqrt{|2x_2|} + 2\sqrt{|x_1 + x_2|} \\
&\geq 2\sqrt{|2x_1|} + 2\sqrt{|x_1 + x_2|} \quad (\text{ya que } \ |x_2| \geq |x_1|) \\
&\geq 2\sqrt{|2x_1| + |x_1 + x_2|} \quad (\text{ya que } \ \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \sqrt{x+y}) \\
&\geq 2\sqrt{|x_1 - x_2|} \quad (\text{por la desigualdad del triángulo}).
\end{aligned}$$

Una idea natural es intentar aplicar inducción en n. Si intentamos hacerlo del paso $n = 1$ al paso $n = 2$, tendríamos que ver si

$$\sqrt{|2x_2|} + 2\sqrt{|x_1 + x_2|} \geq 2\sqrt{|x_1 - x_2|}.$$

Sin embargo, esta desigualdad no es verdadera cuando $x_2 = -x_1$, pues el lado izquierdo es igual a $\sqrt{|2x_1|}$ pero el lado derecho es igual a $2\sqrt{|2x_1|}$.
Veamos qué sucede en el caso general cuando $x_1 + x_2 = 0$. Si $x_2 = -x_1 = a$, el lado derecho de la desigualdad a demostrar es

$$2\sqrt{|2a|} + 2\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_i - a|} + \sqrt{|x_i + a|}) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

y el lado izquierdo es

$$2\sqrt{|2a|} + 2\sum_{i=3}^{n}(\sqrt{|x_i - a|} + \sqrt{|x_i + a|}) + \sum_{i=3}^{n}\sum_{j=3}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|}.$$

Esto significa que si encontramos dos números reales que sumen 0, entonces reducimos la desigualdad a una desigualdad con $n - 2$ variables a la cual podemos aplicar la hipótesis de inducción. Por ejemplo, si $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$ y cambiamos x_i por $x_i - \alpha$, los primeros dos números suman cero después del cambio.
Demostraremos que existe un número β tal que cambiando x_i por $y_i = x_i - \beta$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i + y_j|}.$$

Esto, a su vez, implicará la desigualdad a demostrar, ya que tendremos

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i-y_j|} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|}.$$

En el caso cuando $x_i + x_j > 0$ para todo i, j, si $a = \min\{x_i + x_j\}$ y $y_i = x_i - \frac{a}{2}$, entonces $\min\{y_i + y_j\} = 0$ y, por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{x_i+x_j} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{x_i+x_j-a} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{y_i+y_j},$$

que es lo que queremos demostrar.
Para considerar el caso general, introducimos las siguientes notaciones.

$$\begin{aligned}
P &= \{(i,j) \mid x_i + x_j > 0\},\\
N &= \{(i,j) \mid x_i + x_j < 0\},\\
a &= \min_{(i,j)\in P}\{x_i + x_j\},\\
b &= \max_{(i,j)\in N}\{x_i + x_j\}.
\end{aligned}$$

Observemos que $a > 0$ y $b < 0$. Ahora, consideremos los siguientes cambios:

$$y_i = x_i - \frac{a}{2}, \quad z_i = x_i - \frac{b}{2}.$$

Si $(i, j) \in P$, entonces $x_i + x_j \geq a$, lo cual implica que

$$|y_i + y_j| = x_i + x_j - a = |x_i + x_j| - a.$$

Si $(i, j) \in N$, entonces $x_i + x_j < 0$, lo cual implica que

$$|y_i + y_j| = a - x_i - x_j = |x_i + x_j| + a.$$

Luego, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|} = \sum_{(i,j)\in P}\sqrt{|x_i+x_j|-|a|} + \sum_{(i,j)\in N}\sqrt{|x_i+x_j|+|a|}.$$

De manera análoga, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|z_i+z_j|} = \sum_{(i,j)\in P}\sqrt{|x_i+x_j|+|b|} + \sum_{(i,j)\in N}\sqrt{|x_i+x_j|-|b|}.$$

Por otra parte, como la función $\sqrt{x}$ es cóncava, aplicando la desigualdad de Jensen, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{|b|}{|a|+|b|}\sqrt{x-|a|} + \frac{|a|}{|a|+|b|}\sqrt{x+|b|} &\leq \sqrt{x},\\
\frac{|b|}{|a|+|b|}\sqrt{x+|a|} + \frac{|a|}{|a|+|b|}\sqrt{x-|b|} &\leq \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{|b|}{|a|+|b|}\sum_{(i,j)\in P}\sqrt{|x_i+x_j|-|a|}+\frac{|a|}{|a|+|b|}\sum_{(i,j)\in P}\sqrt{|x_i+x_j|+|b|}\leq\sum_{(i,j)\in P}\sqrt{|x_i+x_j|},$$
$$\frac{|b|}{|a|+|b|}\sum_{(i,j)\in N}\sqrt{|x_i+x_j|+|a|}+\frac{|a|}{|a|+|b|}\sum_{(i,j)\in N}\sqrt{|x_i+x_j|-|b|}\leq\sum_{(i,j)\in N}\sqrt{|x_i+x_j|},$$

de donde se sigue que

$$\frac{|b|}{|a|+|b|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|}+\frac{|a|}{|a|+|b|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|z_i+z_j|}\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}.$$

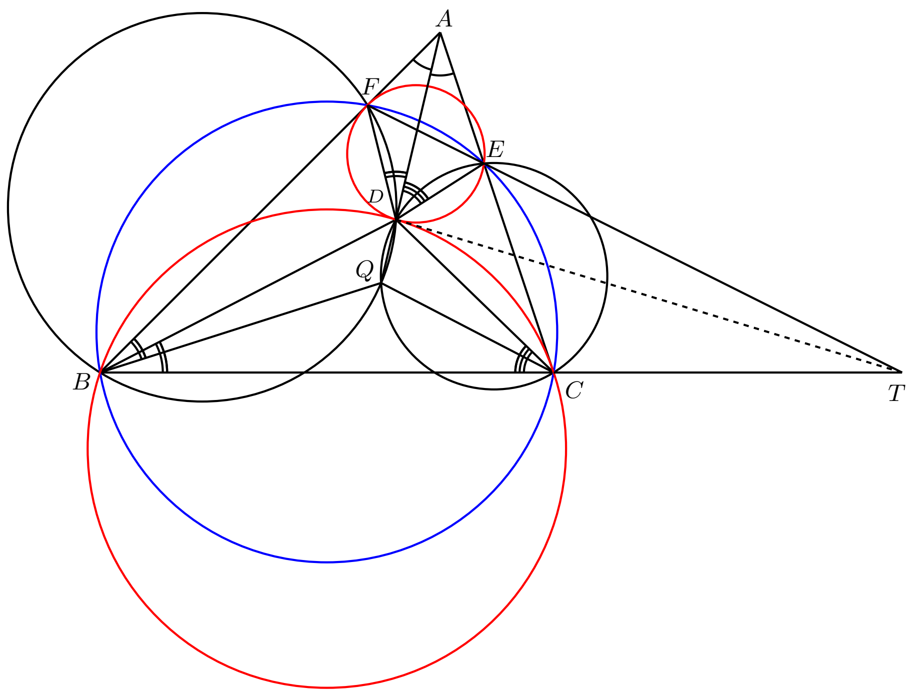
Observemos que una de las sumas $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|}$ o $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|z_i+z_j|}$ es menor o igual que la otra. Sin pérdida de generalidad, supongamos que la primera es menor o igual que la segunda. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}&\geq\frac{|b|}{|a|+|b|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|}+\frac{|a|}{|a|+|b|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|z_i+z_j|}\\&\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|y_i+y_j|},\end{aligned}$$

justo como se quería.

Solución del problema 3. Sea Q el conjugado isogonal de D con respecto al triángulo ABC. Como $\angle BAD=\angle DAC$, el punto Q está en AD. Entonces, $\angle QBA=\angle DBC=\angle FDA$, así que los puntos Q,D,F y B son concíclicos. Análogamente, los puntos Q,D,E y C son concíclicos. Por lo tanto, $AF\cdot AB=AD\cdot AQ=AE\cdot AC$. Entonces, los puntos B,F,E y C también son concíclicos.
Sea T la intersección de BC con FE. Tenemos que

$$\begin{aligned}\angle BDF&=\angle AFD-\angle ABD\\&=(180^\circ-\angle FAD-\angle FDA)-(\angle ABC-\angle DBC)\\&=180^\circ-\angle FAD-\angle ABC\\&=180^\circ-\angle DAE-\angle FEA\\&=\angle FED+\angle ADE\\&=\angle FED+\angle DCB.\end{aligned}$$



Por lo tanto, los círculos (DEF) y (BDC) son tangentes uno al otro. Como B, C, E y F son concíclicos, la potencia del punto T con respecto a los círculos (BDC) y (EDF) es la misma. Luego, su eje radical, el cual coincide con la tangente común que pasa por D, pasa también por T y

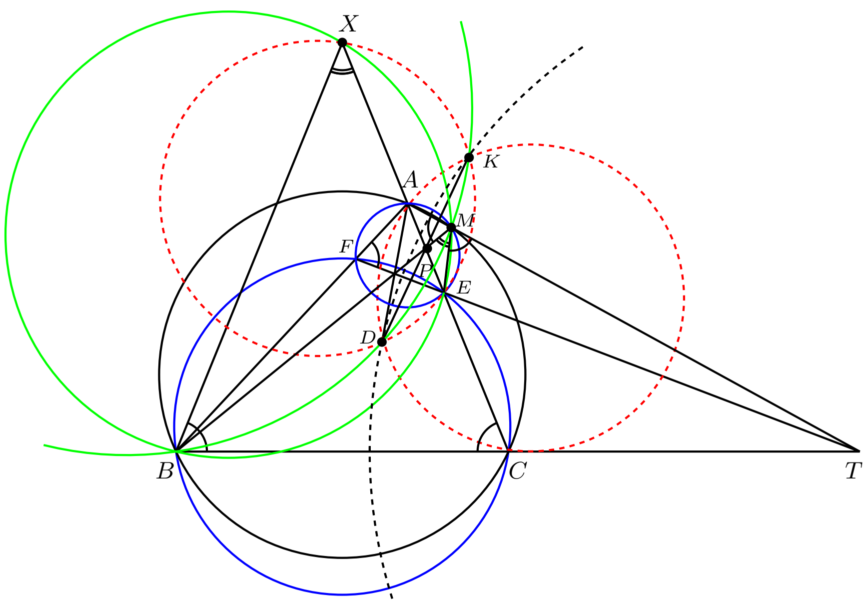
$$TD^2 = TB \cdot TC = TF \cdot TE. \tag{4}$$

Sea M la otra intersección de TA con el círculo (ABC). Dados los círculos $(BCEF)$ y $(AMCB)$, de la relación (4) tenemos que $TM \cdot TA = TF \cdot TE = TB \cdot TC = TD^2$. En particular, los puntos A, M, E y F son concíclicos.
Usando inversión con centro T y radio TD, el punto M va al punto A, y B va a C, lo cual implica que el círculo (MBD) va al círculo (ADC). El punto en común D está en el círculo de inversión, así que la segunda intersección K también está en el círculo, lo cual implica que $TK = TD$. De aquí tenemos que el punto T y los centros de los círculos (KDE) y (ADC) están en la mediatriz de KD.
Como el centro de (ADC) es O_1, es suficiente demostrar ahora que los puntos D, K, E y X son concíclicos (siendo O_2 el centro del círculo correspondiente).
Las rectas BM, DK y AC son los ejes radicales (en pareja) de los círculos $(ABCM)$, $(ACDK)$ y $(BMDK)$, así que concurren en un punto P. También tenemos que M

está en el círculo (AEF). Entonces, usando ángulos dirigidos, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle(EX, XB) &= \angle(CX, XB) = \angle(XC, BC) + \angle(BC, BX) = 2\angle(AC, CB)\\ &= \angle(AC, CB) + \angle(EF, FA) = \angle(AM, BM) + \angle(EM, MA)\\ &= \angle(EM, BM),\end{aligned}$$

lo cual implica que los puntos M, E, X y B son concíclicos. Luego, $PE \cdot PX = PM \cdot PB = PK \cdot PD$ y, por lo tanto, E, K, D y X son concíclicos, que es lo que queríamos demostrar.



Solución del problema 4. (Solución de Alejandro Reyes González). Sean M, N, K y L los puntos de tangencia de Γ con AB, BC, CD y DA, respectivamente. Sea P la intersección de BC con AD. Como I es el incentro del triángulo BAP, I está sobre la bisectriz interna del ángulo $\angle BAP$ y, usando ángulos dirigidos módulo π y ángulos inscritos en Ω, tenemos que

$$\angle IXY = \angle IAY = \angle IAP = \angle BAI = \angle XAI = \angle XYI.$$

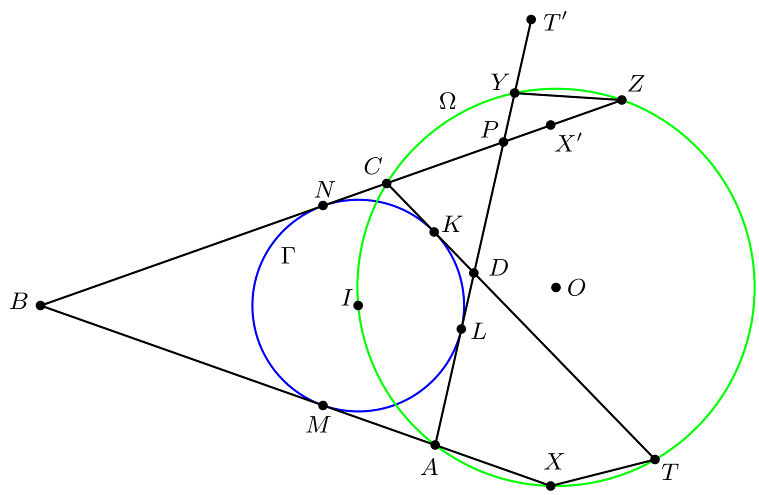
De aquí que el triángulo XIY es isósceles con $IX = IY$. Análogamente, obtenemos que el triángulo TIZ es isósceles con $IT = IZ$.
Sea O el centro de Ω. Como $OX = OY = OT = OZ$, OI es la mediatriz de XY y TZ (ya que $IX = IY$ y $IT = IZ$). Entonces, $XY \perp OI \perp TZ$, lo que implica que XY y TZ son paralelas. Luego, $\angle XZT = \angle YXZ$, por lo que los arcos $\widehat{XT}$ y $\widehat{YZ}$ tienen la misma longitud. Por lo tanto,

$$XT = YZ. \tag{5}$$

Sea X' el reflejado de X sobre BI. Como BI biseca al ángulo $\angle ABP$ por ser incentro, BX' será el reflejo de BX sobre BI. Entonces, $BX' = BC$ y tenemos que X' está en la recta BC. Por lo mismo, N es el reflejado de M con respecto a BI y L es el reflejado de N con respecto a PI. Bajo esas dos mismas reflexiones, BA se va a BC y luego a AD, así que X se va a X' y luego a un punto sobre AD, mientras que I se queda fijo. Sea Y' el reflejado de X' respecto a PI. Por lo anterior, se sigue que $IY' = IX' = IX$. Sin embargo, también se sabe que $IY = IX$, por lo que $IY = IY'$. Además, tanto Y como Y' están sobre el rayo AD más allá de D. Por consiguiente, $Y = Y'$, es decir, Y es el reflejado de X' respecto a PI. Ahora, sea T' el reflejado de T sobre DI. Como DI biseca al ángulo $\angle ADC$, por lo mismo tenemos que T' está en la recta AD. Como $IT = IT' = IZ$, por lo mismo Z es el reflejado de T' por PI. Como $X'Z$ es el reflejo de YT', tenemos que

$$NZ - NX' = ZX' = T'Y = DT' - DY = DT - DY$$

por la reflexión, al igual que $NX' = LY$ y, por las tangencias, $NZ = NC + CZ = KC + CZ$.



Entonces, $(NC+CZ) - LY = DT - DY$ y $(NC+CZ)+DY = DT+LY$. Por las reflexiones, tenemos $LY = NX' = MX$ y $MX = MA + AX$. Además, $MA = LA$ por la tangencia, por lo que $NC+CZ+DY = DT+(LA+AX)$. Luego, $DL = DK$ por la tangecia, al igual que $NC = KC$. Por lo tanto,

$$DK + KC + CZ + DY = DT + LA + AX + DL,$$

esto es, $DC + CZ + DY = DT + DA + AX$. Sumando esta igualdad con la relación (5), concluimos.

Solución del problema 5. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Demostraremos que si intercambiamos el 2021 por cualquier número entero positivo impar $n \geq 3$, entonces lo que se pide demostrar sigue siendo cierto. El caso base es $n = 3$.

En este caso, cuando Ardi esté en el segundo movimiento, tendría que intercambiar las nueces con los números 1 y 3, pues no hay otro número entre 1 y 3. Como $3 > 2 > 1$, acabamos.
Ahora, supongamos que ya sabemos que para todos los impares i con $3 \leq i \leq 2n+1$ se cumple que hay una k tal que en el k-ésimo movimiento se intercambian a y b con $a < k < b$. Ahora queremos demostrar lo mismo para $2n+3$.
Empezamos moviendo los dos números adyacentes al 1. Luego, si el 2 queda adyacente al 1, entonces si el otro número adyacente al 2 es m, como m claramente es mayor que 2, tendríamos que $m > 2 > 1$ y entonces ya encontramos la k buscada. Entonces, podemos asumir que el 1 y el 2 no son adyacentes. Entonces, el círculo se puede dividir en dos regiones, los números entre 1 y 2 de un lado del círculo y del otro.
Consideremos el siguiente proceso simultáneo a lo que está haciendo Ardi. Inicialmente, todos los números van a tener la letra A, luego, en el turno k, la letra A que tenía al número k se va a convertir en B, para toda k.
Regresemos a nuestra inducción. Notemos que si en el paso k los números adyacentes tienen asociados letras diferentes, entonces tenemos que el que tiene B es menor a k y el que tiene A es mayor a k, con lo cual podemos terminar el problema. Entonces, podemos asumir que en todos los pasos, los dos números adyacentes tienen la misma letra.
Ahora, si nos fijamos en las letras de los números en el círculo, lo único que va a pasar en cada turno es que vamos a transformar exactamente una A a B. Entonces, en nuestra inducción tenemos una B donde está el número 1, otra donde está el número 2 y los demás lugares tienen A's. Además sabemos que las B's no son consecutivas.
Tenemos $2n+1$ letras A. Una de las dos regiones tendrá un número par de A's (de lo contrario, el número total de A's sería par). Supongamos que dicha región tiene $2m$ A's. Como cada región tiene al menos un elemento, entonces $2m+1 \leq 2n+1$. Notemos que como solo se pueden cambiar A's a B's, las dos regiones son independientes, pues nunca se va a afectar el uno al otro (visto desde la perspectiva de las letras). Pero entonces, podemos ignorar las A's que están en el arco con cantidad impar y tomarnos las que están en el arco con cantidad par. También podemos "unir" las dos B's de modo que sean una. Ahora tenemos $2m+1$ letras, $2m$ A's y una B, pero como $2m+1 \leq 2n+1$, entonces podemos considerar la B como el número 1 y las demás son $2, 3, \ldots, 2m+1$ de modo que se respete el orden de los números originales. Pero entonces aplicamos la hipótesis de inducción para concluir.

Solución del problema 6. Sea $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Supongamos que $k = |A| < \frac{m}{2}$. Sea s_i la suma de los elementos de B_i, es decir

$$s_i = \sum_{j : a_j \in B_i} A_j.$$

Tenemos que $s_i = m^i$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.
Ahora consideremos las m^m expresiones de la forma

$$f(c_1, \ldots, c_m) = c_1 s_1 + c_2 s_2 + \cdots + c_m s_m,$$

con $c_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$. Notemos que cada número

$f(c_1, \ldots, c_m)$ es de la forma

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k,$$

con $\alpha_i \in \{0, 1, \ldots, m(m-1)\}$.
Entonces, hay a lo más $(m(m-1)+1)^k < m^{2k} < m^m$ (pues $k < \frac{m}{2}$) distintos valores de estas expresiones y, por lo tanto, al menos dos coinciden.
Como $s_i = m^i$, esto contradice que los enteros positivos tienen una representación única en base m.

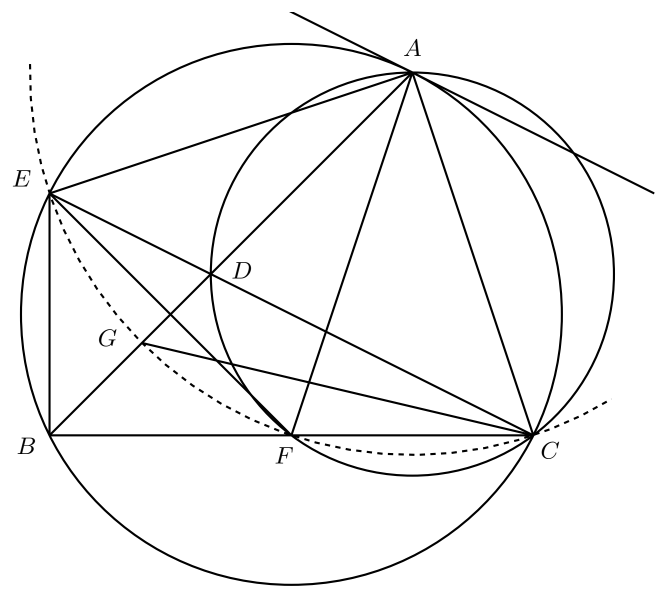
XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe.

Solución del problema 1. (Solución de Sebastián Montemayor Trujillo). Sin pérdida de generalidad, supongamos que q es el mayor de los tres primos. Como p divide a $q^2 - 4 = (q-2)(q+2)$ y p es primo, entonces p divide a $q-2$ o p divide a $q+2$. En cualquier caso, $q+2 \geq p$. Análogamente, podemos ver que $p+2 \geq r$ y que $r+2 \geq q$, por lo que $p+6 \geq r+4 \geq q+2 \geq p$.
Asumamos que los tres primos son impares. Primero, supongamos que $q \geq r \geq p$. Entonces, $p+4 \geq q \geq p$ y $p+2 \geq r \geq p$. Al ser p impar, $p+1$ es par y no es primo, por lo que $r = p$ o $r = p+2$. Si $r = p$, entonces p divide a $p^2 - 4$, de donde $p \mid 4$, lo cual no puede suceder porque p es impar. Luego, $r = p+2$. Como $r+2 \geq q \geq r$, entonces $q = r$ o $q = r+2$. Si $q = r$, entonces r divide a $r^2 - 4$ (pues q divide a $r^2 - 4$), lo cual es imposible. Se sigue que $q = r+2$, por lo que $q = p+4$. Así, los números p, $p+2$ y $p+4$ son todos primos, pero estos números son congruentes a p, $p+2$ y $p+1$ módulo 3, respectivamente. Esto significa que alguno de los tres debe ser igual a 3. Es claro que el único que puede ser 3 es p, por lo que obtenemos la tripla $(p, q, r) = (3, 7, 5)$, la cual es fácil ver que cumple con las condiciones iniciales.
Ahora, veamos el caso $q \geq p \geq r$. Tenemos que $r+2 \geq q \geq p \geq r$. Esto significa, por el principio de las casillas, que al menos dos de los números p, q y r son iguales (pues solo pueden ser r o $r+2$), pero un primo impar t no divide a $t^2 - 4$, por lo que en este caso no hay soluciones.
Finalmente, supongamos que al menos uno de los primos es igual a 2. Entonces, de las condiciones iniciales tenemos que p divide a $q^2 - 4$, q divide a 0 y 2 divide a $p^2 - 4$, lo cual implica que p es par y que q es par y, por lo tanto, $p = q = r = 2$.
Luego, las triplas (p, q, r) que cumplen son $(2, 2, 2)$, $(3, 7, 5)$, $(7, 5, 3)$ y $(5, 3, 7)$ (se obtienen al considerar los casos donde p o r son los mayores).

Solución del problema 2. (Solución de Isaac Montaño Manríquez). Sean $\angle ECG = \angle GCF = \alpha$, $\angle CBA = 2\beta$ y $\angle FAC = 2\gamma$. Como el cuadrilátero $ADFC$ es cíclico, tenemos que $\angle DAF = \angle DCF = 2\alpha$. También, como $AEBC$ es cíclico, tenemos

que $\angle EAB = \angle ECB = 2\alpha$. Además, $\angle CDA = \angle DCB + \angle CBD = 2\alpha + 2\beta$. Luego, por ángulos alternos internos, el ángulo $\angle CDA$ es igual al ángulo que se forma entre la tangente a Γ por A y AB y, por ángulos seminscritos, igual a la mitad del arco $\widehat{AB}$ en Γ que no contiene a C. Por lo tanto, $\widehat{AB} = 2(2\alpha + 2\beta) = 4\alpha + 4\beta$. Además, el ángulo $\angle ECB$ inscribe al arco $\widehat{BE}$ en Γ que no contiene a C, por lo que $\widehat{BE} = 4\alpha$. Esto significa que $\widehat{EA} = \widehat{BA} - \widehat{BE} = 4\beta$, es decir, $\angle ABE = \frac{1}{2}\widehat{EA} = 2\beta$.
De esto último, se sigue que $\angle ABE = 2\beta = \angle FBA$. Además, $\angle BAF = 2\alpha = \angle EAB$. Luego, por el criterio de congruencia ALA, los triángulos ABF y ABE son congruentes, lo cual implica que el triángulo BEF es isósceles con $BE = BF$. Más aún, como BA es bisectriz del ángulo $\angle FBE$ y $BE = BF$, resulta que BA es la mediatriz de EF.



Como G se encuentra en AB, entonces $GE = GF$. Al ser BG bisectriz del ángulo $\angle CBE$ y CG bisectriz del ángulo $\angle ECB$, tenemos que G es el incentro del triángulo BCE y, por lo tanto, EG es bisectriz del ángulo $\angle BEC$.
Ahora, $\angle BEC = \angle BAC = 2\alpha + 2\gamma$, por lo que $\angle BEG = \alpha + \gamma$. También, por ángulos internos en el triángulo ADC, obtenemos que $4\alpha + 4\beta + 2\gamma = 180°$, por lo que $2\alpha + 2\beta + \gamma = 90°$. Por otro lado, como AB es perpendicular a EF, se puede ver que $\angle BEF = 90° - \angle ABE = (2\alpha + 2\beta + \gamma) - (2\beta) = 2\alpha + \gamma$. Por lo tanto, $\angle GEF = \angle BEF - \angle BEG = (2\alpha + \gamma) - (\alpha + \gamma) = \alpha = \angle GCF$, lo cual implica que el cuadrilátero $GECF$ es cíclico, como se quería.

Solución del problema 3. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). Resolveremos el caso general de un tablero de $n \times n$ casillas (para $n \geq 2$). Primero veamos que podemos colorear $4n - 4$ casillas de negro y que cumpla la condición. Para esto, pintamos la primera y la última columna y luego las primeras dos filas (como se ve en la Figura 1).

Este funciona porque, si el ratón se coloca en los bordes, se puede salir moviéndose en la dirección del borde, mientras que si se coloca el ratón en cualquier otra casilla, este puede moverse hacia abajo.

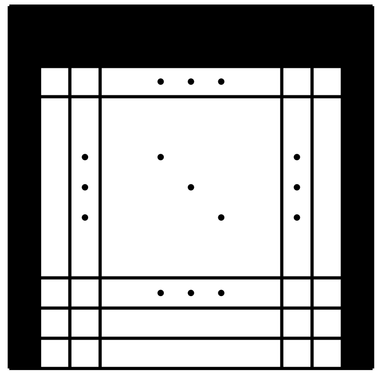


Figura 1: *Coloración con* $4n-4$ *casillas negras.*

Ahora, veamos la cuadrícula del centro del tablero de tamaño $(n-2)\times(n-2)$ (cuando $n \geq 2$). Demostraremos que a cada cuadrito de esta cuadrícula la podemos asociar a un cuadrito blanco único del tablero original. Para esto, a cada casilla blanca de la cuadrícula central le asociamos a sí misma. Si la casilla es negra, como por hipótesis se tiene que al colocar el ratón este puede moverse en alguna dirección para salir del tablero pasando únicamente por casillas blancas, le asociamos la casilla blanca por la que pasa este ratón que está pegada al borde del tablero completo (como se muestra en la Figura 2).

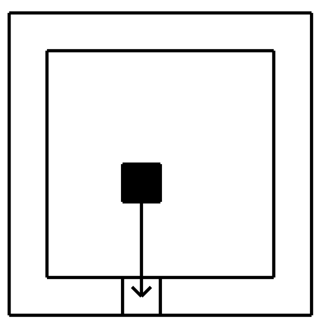


Figura 2: *A la casilla negra se le asocia la casilla blanca por la que pasa el ratón y que está pegada al borde del tablero.*

Con cada par de casillas blancas es obvio que no se les asocia la misma casilla, así como si se toma una casilla blanca y una negra es claro que no se les asocia la misma. Para dos casillas negras, si se les asocia la misma casilla blanca, significa que al colocar el ratón en estas dos casillas, este se moverá en la misma dirección en ambos casos y, como la última casilla del tablero por la que pasa es la misma, entonces las dos casillas negras deben estar alineadas con la casilla blanca con la que se les asocia. Sin embargo, una de ellas debe cumplir que, al colocar el ratón en esa casilla y moverse para salir del tablero, pasará por la otra casilla negra (pues una de las dos debe estar más cerca de la casilla blanca que la otra). Esto es una contradicción y, por tanto, la correspondencia entre las casillas del tablero central de $(n-2)\times(n-2)$ y las casillas blancas es inyectiva.

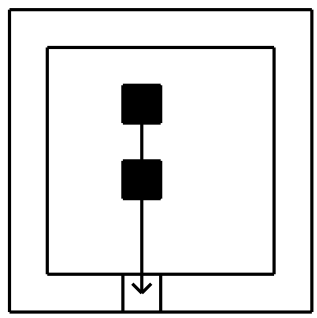


Figura 3: *No es posible que a dos casillas negras se les asocie la misma casilla blanca.*

Esto significa que, en el tablero completo, hay al menos $(n-2)^2$ casillas blancas, lo que indica que hay a lo mucho $n^2-(n-2)^2=4n-4$ casillas negras, probando así que $4n-4$ es la cantidad buscada. En el caso particular de $n=2021$, se concluye que la máxima cantidad de casillas negras es $4(2021)-4=8080$.

Solución del problema 4. (Solución de Mateo Iván Latapí Acosta). Sean A la persona sin amigos, B la que solo tiene un amigo y C el amigo de B. Tenemos que A, B y C son tres personas diferentes, por lo que hay 2018 personas restantes. Estas 2018 personas no son amigos ni de A ni de B. Sea (D,E) una pareja entre cualquiera de las 2018 personas y consideremos a las 4 personas A, B, D y E. Tenemos que A y B no son amigos y tampoco las parejas (A,D), (A,E), (B,D) y (B,E), por lo que, para que se cumpla la condición del problema, D y E tienen que ser amigos. Esto aplica para cualquier pareja de las 2018 personas, por lo que entre las 2018 personas, todos son amigos entre sí.

Solución del problema 5. (Solución de Isaac Montaño Manríquez). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $m=a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{n-1}\leq a_n=M$. Como $a_ia_k\leq a_j^2$ para $a_i\leq a_j\leq a_k$, tenemos que $\frac{a_k}{a_j}\leq\frac{a_j}{a_i}$, lo cual implica que

$$\frac{a_n}{a_\ell}\leq\frac{a_\ell}{a_{\ell-1}} \tag{6}$$

para $2\leq\ell\leq n-1$.

Ahora, como $a_1 = m$ y $a_n = M$, entonces se busca probar $a_1 a_2 \cdots a_n \geq a_1^2 a_n^{n-2}$, lo cual es equivalente a

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{a_n}{a_3} \cdot \frac{a_n}{a_4} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{7}$$

Al usar (6) en el lado derecho de (7), se llega a que

$$\frac{a_n}{a_3} \cdot \frac{a_n}{a_4} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{a_2}.$$

Sin embargo, como $a_2 \leq a_{n-1} \leq a_n$, entonces $a_1 a_{n-1} \leq a_2^2$, por lo que $\frac{a_{n-1}}{a_2} \leq \frac{a_2}{a_1}$. Por lo tanto,

$$\frac{a_n}{a_3} \cdot \frac{a_n}{a_4} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{a_{n-1}}{a_2} \leq \frac{a_2}{a_1},$$

que es precisamente la desigualdad (7). Para ver cuándo se da la igualdad, de las condiciones usadas se debe cumplir que $a_n a_{\ell-1} = a_\ell^2$ para $2 \leq \ell \leq n-1$ y $a_1 a_{n-1} = a_2^2$. De la primera igualdad con $\ell = 2$, tenemos que $a_n a_1 = a_2^2$, lo que combinado con la segunda ecuación implica que $a_n = a_{n-1}$. Tomando $\ell = n-1$, obtenemos que $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2$, por lo que $a_{n-1} = a_{n-2}$. De forma inductiva se puede probar que $a_\ell = a_{\ell-1}$ para $2 \leq \ell \leq n-1$, lo cual implica que la igualdad en la desigualdad pedida se cumple si y solo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

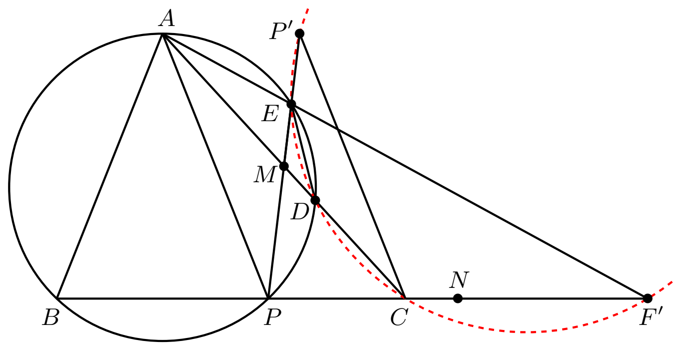
Solución del problema 6. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). Sea F' el punto de intersección de las rectas AE y BC. Como $ABPE$ es cíclico, tenemos que $\angle ABP = \angle F'EP$ y, como $AB = AP$, obtenemos que $\angle ABP = \angle APB$. Por ángulo externo, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle F'EP + \angle PF'E = \angle BPE = \angle EPA + \angle APB = \angle EPA + \angle ABP \\ = \angle EPA + \angle F'EP,\end{aligned}$$

por lo que $\angle PF'E = \angle EPA$. Sin embargo, $\angle EPA = \angle EDA$ ya que $AEDP$ es cíclico. Entonces, $\angle CF'E = \angle PF'E = \angle EDA$, lo cual implica que $CDEF'$ es cíclico. Ahora procedemos a probar que $F = F'$, lo cual concluirá el problema.

Como $\angle EPA = \angle PF'E$, tenemos que AP es tangente al circuncírculo del triángulo EPF'. Además, usando potencia desde A, podemos ver que $AP^2 = AE \cdot AF' = AD \cdot AC$, por lo que AP es tangente al circuncírculo del triángulo PDC. Así, por ángulos seminscritos llegamos a que $\angle APD = \angle PCD = \angle BCA$. Sean $\angle BCA = \gamma$ y $\angle ABC = \beta$. Entonces, $\angle PED = \angle ABP - \angle ABD = \angle ABP - \angle APD = \angle ABC - \angle BCA = \beta - \gamma$.

Sean N el punto medio de PF' y P' la reflexión de P respecto a M. Como $MA = MC$, $MP = MP'$ y $\angle AMP = \angle CMP'$, los triángulos AMP y CMP' son congruentes, por lo que $\angle APM = \angle MP'C$, pero $\angle CF'E = \angle APE = \angle APM = \angle MP'C = \angle EP'C$. De aquí se sigue que $CF'P'E$ es cíclico.



Como $CF'P'E$ es cíclico, por potencia desde P obtenemos que $PC \cdot PF' = PE \cdot PP'$, por lo que $PC \cdot \frac{PF'}{2} = PE \cdot \frac{PP'}{2}$, esto es, $PC \cdot PN = PE \cdot PM$. Por lo tanto, $EMCN$ es cíclico. Luego, $\angle MEN = \angle PCM = \angle BCA = \gamma$ y, como $\angle PEF' = \beta$, resulta que $\angle NEF' = \angle PEF' - \angle PEN = \angle PEF' - \angle MEN = \beta - \gamma = \angle NEF'$. Por consiguiente, las rectas ED y EN son isogonales respecto al ángulo $\angle PEF'$ y, como EN es mediana, tenemos que ED es simediana del triángulo EPF'.

Ahora, es un hecho conocido que la simediana de un triángulo por un punto y las tangentes al circuncírculo de este triángulo que pasan por los otros dos vértices, concurren. Entonces, ED y las tangentes desde P y F' al circuncírculo del triángulo $PF'E$, concurren. Sin embargo, sabemos que AP es tangente al circuncírculo del triángulo $PF'E$. Así, tenemos que la tangente desde F' a este circuncírculo pasa por la intersección de AP y ED, que es K. Luego, KP y KF' son tangentes al circuncírculo del triángulo $PF'E$, lo que implica que $KP = KF'$ y, por construcción, esto significa que $F = F'$, como queríamos.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3. *Si p es un número primo de la forma $4k + 3$ y p divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces p divide a cada uno de a y b.*

Teorema 4 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 5 (Principio de las Casillas). *Si $kn+1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k+1$ objetos.*

Teorema 6 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 7 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 8 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 9 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 10 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 11 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 12 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 13 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 14 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 15 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 17 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 18 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 19 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez