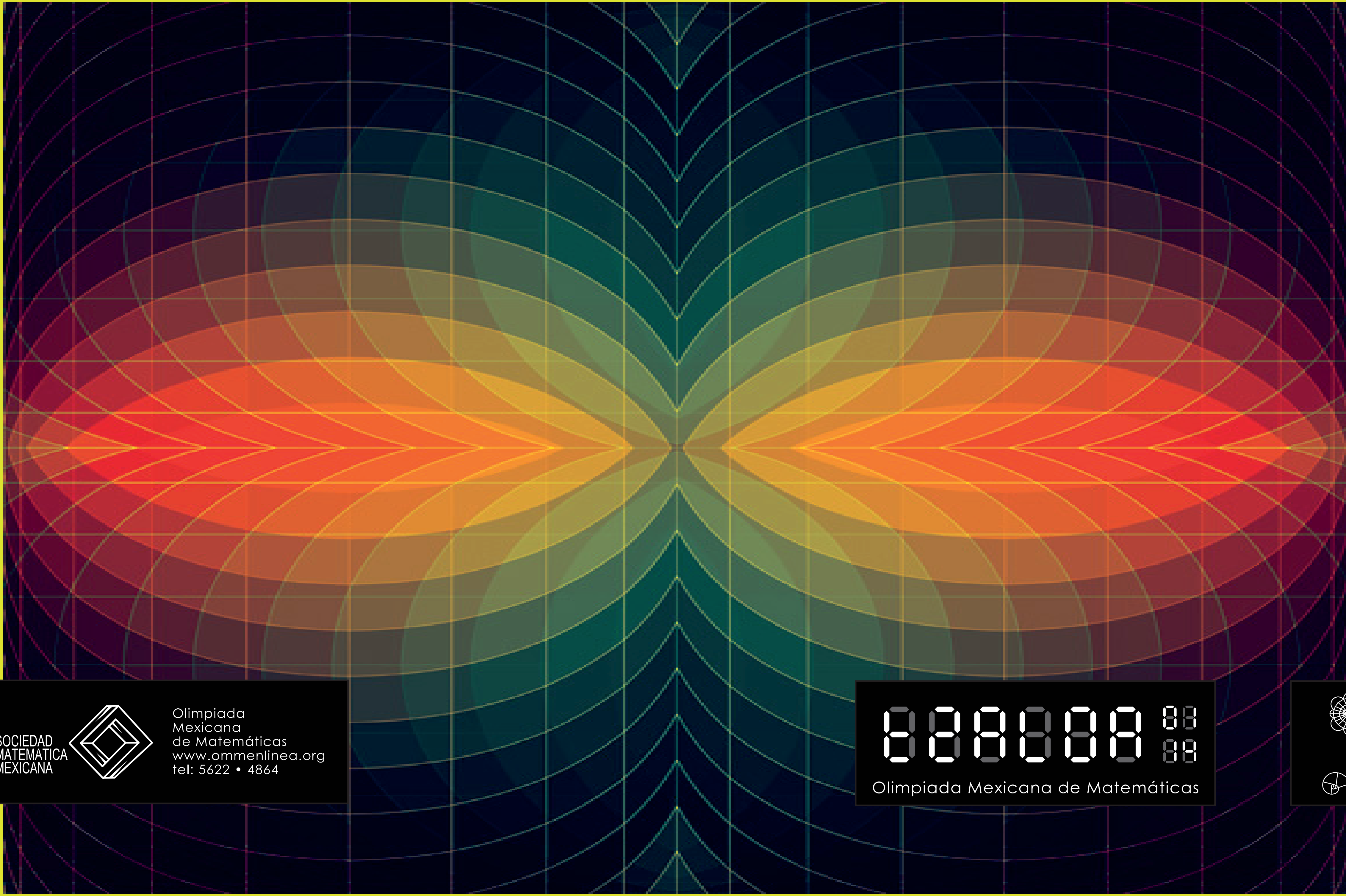


SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

# TZALOA

# Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

## Año 2022, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Febrero de 2022

# Contenido

# Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

## Tzaloa, Año 2022, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su decimocuarto año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto.
Pasando al contenido, destaca el artículo *Sucesiones*, de Eugenio Jair Escobar Sánchez. En él, Jair aborda el tema de sucesiónes de números reales a través de diversos ejemplos que han aparecido en concursos de olimpiadas de matemáticas. Estamos seguros que este tema será de gran interés para todos los lectores.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

De especial interés para todos, en este primer número del año 2022, incluimos los problemas con soluciones del examen final estatal de la $35^a$ OMM. También incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel II del Concurso Nacional de la $5^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2021 de forma virtual.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de las pruebas individual y por equipos del Nivel Secundaria de la Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (IIMC 2021) que se realizó de forma virtual, siendo Indonesia el país organizador. También incluimos los problemas con soluciones de la $1^a$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas y de la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, realizadas de forma virtual en el mes de octubre de 2021. También incluimos los exámenes sin soluciones, de la $13^a$ Romanian Master of Mathematics y de la $8^a$ Olimpiada Iraní de Geometría, realizadas en los meses de octubre y noviembre de 2021, respectivamente, la primera de forma virtual y la segunda por correspondencia.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector. De tal forma, que estando todo listo, solo nos queda desear que todos nuestros lectores tengan un feliz y próspero año 2022.

## México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

## 36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la $36^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del $1^\circ$ de agosto de 2003. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2022-2023 y, para el $1^\circ$ de julio de 2023, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la $36^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2022. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2022 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la $64^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2023) y a la XXXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2023).

De entre los concursantes nacidos en 2006 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2023).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2023.

## 6ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2022, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Sexta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

**Nivel I.** Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2022.

**Nivel II.** Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2022.

**Nivel III.** Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2022.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la $6^a$ OMMEB se realizará del 10 al 13 de junio de 2022 de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2023.

## 1ª Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas

En el año 2022, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Primera Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas. Cada Estado podrá participar con una delegación integrada por un líder, a lo más 4 tutoras o tutores, a lo más 3 concursantes de Nivel 1 y a lo más 3 concursantes de Nivel 2.

**Nivel 1.** Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en primer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 18 años al 1 de agosto de 2021.

**Nivel 2.** Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en tercer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 20 años al 1 de agosto de 2021. Adicionalmente, no deben haber participado 2 veces anteriores en el Nivel 2 del Concurso Nacional Femenil, ni haber sido 2 veces parte del equipo mexicano en la

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual en cada nivel consta de dos exámenes con 3 problemas cada uno, para resolver en dos sesiones de 4.5 horas cada una. El examen por equipos consta también de 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas. Los exámenes se llevarán a cabo en las Sedes Estatales de la OMM.

El Concurso Nacional de la $1^a$ Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas, se llevará a cabo del 31 de enero al 6 de febrero de 2022, de forma semi-virtual.

En caso de que haya fondos suficientes, a las concursantes con los 8 mejores puntajes de la prueba individual del Nivel 1, se les integrará a los entrenamientos nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas a partir de marzo de 2022. Se integrarán al grupo de trabajo de la preselección para la OMCC (más no a su proceso selectivo). Presentarán el examen de la XXXII APMO. De entre estas alumnas se elegirá a quienes conformarán la delegación mexicana para la $2^a$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas.
En caso de que se organice alguna olimpiada femenil en la que participe México, diferente a la EGMO, de entre las ganadoras de este Concurso Nacional se elegirá a las que conformarán la delegación, con base en su desempeño académico. El Comité Organizador de la OMM apoyará en la búsqueda de recursos para asistir a dicha(s) olimpiada(s).

Este concurso surge como un esfuerzo temporal que ayude al balance de género dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y que deje de realizarse una vez que se logre este objetivo. El desarrollo de un concurso nacional de matemáticas para chicas, puede enriquecer las olimpiadas de matemáticas de la siguiente manera:

- Fomentar la participación de chicas en concursos de matemáticas en cada Estado con el fin de tener más participación de chicas en los concursos nacionales de la OMM.

- Buscar que cada Estado haga énfasis en la participación de las chicas en sus concursos y les brinde un espacio de colaboración y confianza en el que puedan desarrollar sus habilidades matemáticas en un entorno de resolución de problemas.

- Establecer redes entre las concursantes de diferentes Estados, con el fin de que se conozcan, se apoyen e inspiren unas a otras.

- Promover que, tanto las chicas que están terminando el bachillerato como las entrenadoras, sean modelos a seguir para las más jóvenes.

- Tener una competencia nacional con un fuerte factor colaborativo.

Como parte de los puntos anteriores, se incluye un componente colaborativo para este concurso, en complementariedad al componente individual habitual en el Concurso

Nacional de la OMM. Se ha observado cómo los formatos de trabajo en equipo en concursos nacionales e internacionales, propician distintas dinámicas sociales y distintos aprendizajes. Por ejemplo, proponen un balance entre el aprendizaje de las matemáticas con el fin de poder beneficiar a un colectivo y, el dominio de las matemáticas, con el fin del beneficio propio. Adoptar ambos formatos no solo visibiliza la importancia de tener los dos enfoques, sino que también brinda a las participantes herramientas sociales muy valiosas para una vida profesional futura.

# Sucesiones

**Por Eugenio Jair Escobar Sánchez**

**Nivel Avanzado**

Se define una **sucesión** de números reales como una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, que a cada número natural le asigna un número real, el cual escribimos como $f_n$ en lugar de $f(n)$, y a la sucesión en notación de conjunto se le denota como $\{f_n\}$. El uso de sucesiones permite abordar problemas que no parecieran involucrarlas explícitamente, como veremos más adelante, por lo que proporciona una herramienta extra en la resolución de problemas de olimpiada.

## Tipos de sucesiones

### Aritméticas

Las sucesiones aritméticas, o progresiones aritméticas, son aquellas en las que la diferencia entre dos elementos consecutivos es constante. Por lo que quedan completamente caracterizadas por un elemento inicial $a_0$ y una diferencia $d \in \mathbb{R}$.
Observemos que $a_1 = a_0 + d$, por lo que $a_2 = a_1 + d = a_0 + 2d$, y así sucesivamente, el $n$-ésimo término está dado por $a_n = a_0 + dn$.

### Geométricas

Las sucesiones geométricas, o progresiones geométricas, son aquellas en las que el término inmediato siguiente se define como un múltiplo constante del anterior. Al igual que en las sucesiones aritméticas, estas sucesiones quedan determinadas por un elemento inicial $a_0$ y una razón $r \in \mathbb{R}$.
En este caso, $a_1 = ra_0$, por lo que $a_2 = ra_1 = r^2a_0$, y así, en general, $a_n = r^na_0$.

### Periódicas

Una sucesión $\{a_n\}$ se dice periódica con periodo $k$, donde $k$ es un entero positivo, si para todo número natural $i$ se cumple que $a_{i+k} = a_i$.

### Monótonas

Se les llama monótonas crecientes (monótonas decrecientes) a aquellas que cumplen que $a_n \geq a_m$ ($a_n \leq a_m$) para $n \geq m$.
Se les llama estrictamente crecientes (estrictamente decrecientes) cuando $a_n > a_m$ ($a_n < a_m$) para $n > m$.

### Recursivas

En general, las sucesiones recursivas se definen en función de los elementos previos de la sucesión, por lo que establecer la relación entre el índice y el elemento de la sucesión se considera un problema por sí mismo cuando se define recursivamente.
Una sucesión se puede definir recursivamente como hemos visto en los casos de progresiones, y después de hacer manipulaciones somos capaces de encontrar una fórmula explícita para el $n$-ésimo término.

## Ejemplos

**Ejemplo 1.** Demostrar que no existe una infinidad de números primos distintos en progresión aritmética.

**Solución.** Supongamos que $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética de números primos, esto es, $a_n = a_0 + nd$ con $a_n$ número primo para cada $n \geq 0$ y $d > 0$. En particular, si $n = a_0$, entonces $a_{a_0} = a_0 + a_0 d = a_0(1 + d)$, lo que significa que $a_0 \mid a_{a_0}$. Como $a_0 \neq a_{a_0}$ (pues $a_0 = a_{a_0}$ implica que $d = 0$) y $a_0$ es primo, se sigue que $a_{a_0}$ no es primo, lo cual es una contradicción.

**Ejemplo 2.** ¿Cuál es el valor máximo de $\dfrac{10^n}{n!}$?

**Solución.** Definimos $a_0 = \frac{10^0}{0!} = 1$ y recursivamente consideramos

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{10}{1} a_0, \\
a_2 &= \frac{10}{2} a_1, \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{10}{n} a_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Si $n \geq 10$, tenemos que $\frac{10}{n} \leq 1$. Entonces, $a_n \leq a_{n-1}$ para todo $n \geq 10$, esto es, $a_n \leq a_9 = \frac{10^9}{9!}$ para todo $n \geq 10$.
Por otro lado, es fácil ver que $a_n = \frac{10^n}{n!} \leq \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} = a_{n+1}$ si y solo si $n \leq 9$ y, también, $a_9 = a_{10}$. Por lo tanto, tenemos que $a_n \leq a_9$ para todo $n \geq 0$, lo que significa que el valor máximo de $a_n$ es $a_9 = \frac{10^9}{9!}$.

**Ejemplo 3.** Un polinomio $p(x)$ cumple que $p(0), p(1), p(2), \ldots$ están en progresión aritmética. Muestra que el grado de $p(x)$ es a lo más $1$.

**Solución.** Supongamos que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y que $p(0), p(1), p(2), \ldots$ están en progresión aritmética. Esto quiere decir que la diferencia común de la sucesión es $d = p(1) - p(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. En general, para cada entero positivo $k$

$$\begin{aligned} p(k) &= a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_1 k + a_0 \\ &= a_n(k^n - k) + a_{n-1}(k^{n-1} - k) + \cdots + a_2(k^2 - k) + a_0 + dk \\ &= a_0 + dk. \end{aligned}$$

Se sigue que el polinomio

$$q(x) = a_n(x^n - x) + a_{n-1}(x^{n-1} - x) + \cdots + a_2(x^2 - x)$$

se anula para cada entero $x \geq 2$. El teorema fundamental del álgebra asegura que todo polinomio de grado positivo $n$ tiene exactamente $n$ raíces, por lo que concluímos que $q$ tiene grado $0$, es decir, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 0$. Por lo tanto, $p$ tiene grado a lo más $1$.

**Ejemplo 4. (XIII OMCC).** Aplicar un desliz a un entero $n \geq 5$ es transformarlo en

$$\frac{n + p^2}{p}$$

con $p$ primo que divide a $n$. Muestra que tras aplicar deslices a un entero, eventualmente se llega a $5$.

**Solución.** Hagamos unas observaciones sobre el desliz de algunos números.

- si $n$ es primo, un desliz resulta en $n + 1$.

- si $n$ es compuesto, un desliz depende de la elección del $p$ primo que lo divide, sin embargo, observemos que sin importar el valor de $p$, $\frac{n+p^2}{p} < n \Leftrightarrow n + p^2 < np$ $\Leftrightarrow p^2 < n(p-1)$. Sin embargo, esta última desigualdad es cierta. En efecto, como n no es primo, se tiene que $n \neq p$, de donde se sigue que $\frac{n}{p} \geq 2$. Luego,

$$n(p-1) = \frac{n}{p}p(p-1) \geq 2p(p-1) = 2p^2 - 2p \geq 2p^2 - p^2 = p^2. \quad (1)$$

Además, como $n \geq 5$, al menos uno de los términos $\frac{n}{p}$ y $p$ debe ser mayor que 2, lo cual implica que alguna de las desigualdades en (1) debe ser estricta.

Ahora, para $n = 5$ se cumple que un desliz lo lleva a 6, y un segundo desliz lo lleva a 5.
Supongamos entonces que $n > 5$. Por las observaciones anteriores, somos capaces de generar una sucesión estrictamente decreciente usando deslices, sólo basta mostrar que el resultado de un desliz es siempre mayor o igual a 5.
Para ello, consideremos $n \geq 6$, compuesto, si $p$ es un divisor primo de $n$, menor a 5, o sea, $p = 2$ o $p = 3$, se verifica que $\frac{n}{3} + 3$ y $\frac{n}{2} + 2$ son ambos mayores o iguales a 5, mientras que en el caso en que $p$ es un divisor primo mayor o igual a 5, el desliz es evidentemente mayor a 5, con lo que terminamos la prueba.

**Ejemplo 5. (Concurso Nacional, OMM 1999).** Demuestre que no existen 1999 primos en progresión aritmética todos ellos menores que 12345.

**Solución.** Supongamos que existen $a_0, a_1, \ldots, a_{1998}$ primos en progresión aritmética con diferencia $d = a_1 - a_0 > 0$.
Se cumple que para cada $0 \leq k \leq 1998$, $a_k = a_0 + dk$. Observemos que $a_0$ no puede ser menor o igual que 1998, pues si lo fuera, podríamos tomar $k = a_0$ y obtener que $a_{a_0}$ no es primo. Por lo tanto, $a_0 > 1999$.
Ahora observemos que por ser primos, la diferencia $d$ es divisible al menos por 2.
Veamos qué ocurre en el caso $d = 2$. Recordemos que todo primo mayor que 3 es de la forma $6k \pm 1$, por lo que

$$a_1 = 6k \pm 1 + 2.$$
$$a_2 = 6k \pm 1 + 4.$$

Sin importar el signo, alguno de ellos será divisible por 3 y, por lo tanto, no será primo.
El caso $d = 4$ nos lleva a un análisis análogo.
Hemos mostrado que $d \geq 6$, por lo que $a_{1998} = a_0 + d(1998) \geq 1999 + 6(1998) > 12345$. Que es lo que queríamos probar.

**Ejemplo 6.** Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_1 = 1$ y, para $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$. Demuestra que $a_{100} > 14$.

**Solución.** Elevando al cuadrado la relación, obtenemos que:

$$\begin{aligned} a_{100}^2 &= a_{99}^2 + 2 + \frac{1}{a_{99}^2} \\ &= a_{98}^2 + 2(2) + \frac{1}{a_{99}^2} + \frac{1}{a_{98}^2} \\ &\vdots \\ &= a_1^2 + 2(99) + \frac{1}{a_1^2} + \sum_{n=2}^{99} \frac{1}{a_n^2} \\ &> 1 + 2(99) + 1. \end{aligned}$$

Sacando raíz cuadrada obtenemos $a_{100} > 10\sqrt{2} > 14$.

**Ejemplo 7.** Sea $x = 0.a_1a_2a_3a_4\ldots$, donde $a_n = 0$ si $n$ es primo y $a_n = 1$ si $n$ es compuesto. Muestra que $x$ es un número irracional.

**Solución.** Supongamos por contradicción que $x$ es racional.
**Lema:** Un número es racional si y solo si tiene expansión decimal eventualmente periódica o finita.
**Demostracion del lema:** $(\Longrightarrow)$ : Sea $x = \frac{p}{q}$, recordemos que por el algoritmo de la división, es posible escribir

$$\frac{p}{q} = k + \frac{r}{q} \text{ con } r < q.$$

Definimos las funciones parte entera de $x$, denotada por $\lfloor x \rfloor$, como el mayor entero menor o igual a $x$ y, parte fraccionaria de $x$, como $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Con estas funciones vamos a construir una sucesión $\{r_n\}$ como

$$r_0 = r, \quad r_n = q\left\{\frac{10r_{n-1}}{q}\right\}.$$

Que es equivalente a obtener el residuo de $10^{n+1}x$ al dividirlo por $q$.
Para construir la expansión decimal de $x$ hace falta notar que el $n$-ésimo dígito es

$$x_n = \left\lfloor 10\frac{r_n}{q} \right\rfloor.$$

Es decir,

$$x = k.x_0x_1x_2x_3\cdots$$

El algoritmo de la división nos asegura que cada $r_n < q$, por lo que utilizando el principio de las casillas, aseguramos que siempre se repite un residuo.
Sean $r_i, r_j$ la primera vez que se repite un residuo.
La unicidad del algoritmo implica que $x_i = x_j$. Más aún, $x_k = x_{k+j-i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Lo cual muestra su periodicidad o su expansión decimal finita en el caso en que $x_i = x_j =$

0.
$(\Longleftarrow)$ : Comencemos con un caso sencillo. Supongamos que $x = 0.\overline{x_0x_1\cdots x_i}$. Observemos que

$$10^{i+1}x = x_0x_1\cdots x_i + x.$$

Por lo tanto, $x = \frac{x_0x_1\cdots x_i}{10^{i+1}-1}$, es decir, $x$ es racional.
Si $x$ tuviera la forma $x = k.x_0x_1\cdots x_i\overline{x_{i+1}x_{i+2}\cdots x_j}$ utilizando el caso anterior se muestra que es racional. $\square$
La sucesión evidentemente no es finita, pues hay una infinidad de números primos. Además, no puede ser periódica, pues si lo fuera, habría una infinidad de números primos en sucesión aritmética, lo cual es falso según lo demostrado en el Ejemplo 1. En tal caso, se sigue inmediatamente del lema, que $x$ es irracional.

**Ejemplo 8.** Consideremos la secuencia de los números naturales y agrupemos los términos de la siguiente manera:

$$(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), (11, 12, 13, 14, 15), \ldots$$

¿Cuánto vale la suma de los números del $n$-ésimo grupo?

**Solución.** Observemos que el $n$-ésimo grupo se compone de $n$ enteros consecutivos, por lo que encontraremos el valor inicial de cada grupo.
Definimos $a_1 = 1$ y notemos que el valor inicial del $(n + 1)$-ésimo grupo se puede calcular como el valor inicial del $n$-ésimo grupo más la cantidad de elementos de ese grupo, es decir, $a_{n+1} = a_n + n$. Se puede demostrar por inducción que

$$a_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Por lo tanto, el valor correspondiente a la suma de los elementos del $n$-ésimo grupo, es igual a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=a_n}^{a_{n+1}-1} k &= \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\
&= \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + 1\right) + \cdots + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} + n - 1\right) \\
&= n\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} k = n\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}\right) + \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n\left(n^2+1\right)}{2}.
\end{aligned}$$

**Ejemplo 9. (Lista corta, IMO 1981).** Una sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente como $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Hallar una fórmula explícita para $a_n$.

**Solución.** Definamos una sucesión auxiliar de números reales positivos, $b_n$, tales que $b_n^2 = 1 + 24a_n$ para cada $n \geq 1$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}b_{n+1}^2 &= \frac{2}{3}\left(1 + 24a_{n+1}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{24}{16}\left(1 + 4a_n + \sqrt{b_n^2}\right)\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{3}{2} + 6a_n + \frac{3}{2}b_n\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{b_n^2}{6} + b_n \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{b_n}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que $b_1 = 5$ y $b_{n+1} = \frac{3+b_n}{2}$ para $n \geq 1$. Consideremos otra sucesión auxiliar definida por $c_n = 2^{n-1}b_n$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= 2^n b_{n+1} \\
&= 2^{n-1}(3 + b_n) \\
&= c_n + 3 \cdot 2^{n-1} \\
&= c_{n-1} + 3(2^{n-1} + 2^{n-2}) \\
&\vdots \\
&= c_1 + 3(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^0) \\
&= 5 + 3(2^n - 1) \\
&= 2 + 3 \cdot 2^n.
\end{aligned}$$

Luego, $b_n = 2^{1-n}c_n = 2^{1-n}(2 + 3 \cdot 2^{n-1}) = 3 + 2^{2-n}$.
Por lo tanto,

$$a_n = \frac{b_n^2 - 1}{24} = \frac{1}{24}(8 + 6 \cdot 2^{2-n} + 2^{4-2n}).$$

**Ejemplo 10. (China, 2005).** Una sucesión de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ satisface que $a_0 = 1$ y

$$a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}$$

para cada entero positivo $n$.

a) Demuestra que $a_n$ es un entero positivo para cada entero positivo $n$.

b) Demuestra que $a_n a_{n+1} - 1$ es el cuadrado de un entero para cada entero positivo $n$.

**Solución.** a) Tenemos que $a_1 = \frac{7a_0+\sqrt{45a_0^2-36}}{2} = \frac{7+\sqrt{45-36}}{2} = \frac{7+\sqrt{9}}{2} = 5$ y $\{a_n\}$ es una sucesión escrictamente creciente tal que

$$2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados, obtenemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0, \\ a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0. \end{aligned}$$

Restando estas dos relaciones, obtenemos que $(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n) = 0$. Como la sucesión $a_n$ es estrictamente creciente, necesariamente $a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n = 0$, esto es, $a_{n+1} = 7a_n - a_{n-1}$. Usando que $a_0 = 1$ y $a_1 = 5$, un argumento inductivo muestra que $a_n$ es un entero positivo para cada entero positivo $n$.
b) La relación $a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0$ obtenida en a), la podemos reescribir en la forma $(a_{n+1} + a_n)^2 = 9(a_n a_{n+1} - 1)$, esto es,

$$a_{n+1}a_n - 1 = \left(\frac{a_{n+1} + a_n}{3}\right)^2.$$

Como $a_n$ y $a_{n+1}$ son enteros positivos según lo demostrado en a), el número $a_{n+1}+a_n$ también es un entero positivo, cuyo cuadrado, igual a $9(a_n a_{n+1} - 1)$ también es un número entero. Luego, $a_{n+1}+a_n$ es un entero múltiplo de 3 y, por lo tanto, $a_{n+1}a_n-1$ es el cuadrado del entero $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$.

**Ejemplo 11. (Lista corta, IMO 1985).** Mostrar que la sucesión $\{a_n\}$ definida como $a_n = \lfloor n\sqrt{2}\rfloor$, para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, contiene una infinidad de potencias distintas de 2.

**Solución.** De manera similar a como demostramos que la expansión decimal de un número irracional no es periódica, podemos demostrar que en base 2, la expansión tampoco es periódica. Así que consideremos $\sqrt{2}$ en base 2.

$$\sqrt{2} = 1.b_0b_1b_2b_3\ldots \quad \text{con} \quad b_k \in \{0, 1\}.$$

En tal caso, como $\sqrt{2}$ es irracional, sabemos que la sucesión asociada tiene una infinidad de 1's. Para cada $b_k = 1$ en la representación, consideremos

$$2^{k-1}\sqrt{2} - 1 < a_{2^{k-1}} = m < 2^{k-1}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

En efecto, la desigualdad de la izquierda es clara utilizando una propiedad de la función piso: $\lfloor m\rfloor > m-1$. La desigualdad de la derecha se obtiene de ver a $2^{k-1}\sqrt{2}$ en binario y restarle $0.1$ en base 2 (lo cual no cambia el valor de su piso por la suposición $b_k = 1$). Multiplicando por $\sqrt{2}$ y sumando $\sqrt{2}$ obtenemos que

$$2^k < (m + 1)\sqrt{2} < 2^k + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Es decir, $a_{m+1} = \lfloor (m+1)\sqrt{2} \rfloor$ es una potencia de 2. Cada una de estas potencias es distinta porque la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y, por lo tanto, cada término es mayor que el anterior.

**Ejemplo 12. (IMO, 2014).** Sea $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Probar que existe un único entero $n \geq 1$ tal que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

**Solución.** Definimos una nueva sucesión $\{d_n\}$ para cada $n \geq 0$, como sigue:

$$d_n = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_n.$$

Observemos que la primera desigualdad es equivalente a que $d_n > 0$, mientras que la segunda desigualdad es equivalente a

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - na_{n+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Así, el problema se traduce a encontrar un único $n \geq 1$ tal que $d_{n+1} \leq 0 < d_n$.
Ahora, observemos que $d_0 = d_1 > 0$ y que

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n =& (a_0 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (n+1)a_{n+1} - ((a_0 + \cdots + a_n) - na_n) \\ =& n(a_n - a_{n+1}) < 0. \end{aligned}$$

Es decir, $\{d_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de enteros estrictamente decreciente que inicia en un número positivo, por lo que el valor de $n$ buscado, será el primero en que $d_{n+1}$ sea negativo o cero.

## Ejercicios

1) Encuentra todas las posibles sucesiones que son a la vez aritméticas y geométricas.

2) ¿Es posible encontrar una sucesión aritmética infinita en la cual todos los números son cuadrados perfectos distintos?

3) Muestra que si $\{a_n\}$ es periódica de periodo $p$ y $\{b_n\}$ es periódica de periodo $q$, entonces la sucesión $\{a_n + b_n\}$ es periódica. ¿De qué periodo?

4) Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números reales positivos tal que $a_1 = 1$ y $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n$ para todo $n \geq 1$. Muestra que $a_n \geq \frac{1}{n}$.

5) Una sucesión $x_n$ está definida como $x_0 = 2$ y

$$x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{1 - 2x_n}, \quad \text{para} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Muestra que $x_n \neq \frac{1}{2}$ para todo $n \geq 1$.

6) (IMO, 2005). Sea $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de enteros con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos. Supón que para cada entero positivo $n$, los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tienen $n$ diferentes residuos módulo $n$. Muestra que cada entero aparece exactamente una vez en la sucesión.

7) (Lista corta, IMO 2006). Una sucesión de números reales $a_0, a_1, a_2, \ldots$ es definida recursivamente como $a_0 = -1$ y

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0 \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Muestra que $a_n > 0$ para cada $n > 0$.

8) (Lista corta, IMO 2001). Sea $a_0, a_1, a_2, \ldots$ una sucesión de números positivos. Demuestra que la desigualdad $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ es válida para una infinidad de valores de $n$.

9) (Vietnám, 1975). Encuentra todos los términos de la sucesión aritmética $-1$, $18$, $37, \ldots$ que tienen $5$ en todos sus dígitos.

10) (Lista corta, IMO 2006). Una sucesión de números reales $a_0, a_1, \ldots$ es tal que $a_0$ es un número real arbitrario y $a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \{a_i\}$ para $i \geq 0$, donde $\lfloor x \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual a $x$, mientras que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ es la parte fraccionaria de $x$. Demuestra que $a_i = a_{i+2}$ para $i$ suficientemente grande.

## Bibliografía


1) Olimpiada Matemática Mexicana, Baja California. Material de entrenamiento. Series, Sucesiones y recursiones. 2016.

2) Compilado por Kin Y. Li. Math Problem Book I. Hong Kong Mathematical Society. 2001.

3) López, J . Solved Problems on Sequences in the Training of High School Students fot International Mathematical Olympiads. Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos. São Paulo. 2019.

4) D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, Nikola Petrovic. The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959 – 2004. Springer, 2006

5) Le Hai Chau, Le Hai Khoi. Selected Problems of the Vietnamese Mathematical Olympiad (1962–2009). World Scientific Publishing, 2010.

6) Lista corta de problemas IMO 1985. `https://prase.cz/kalva/short/sh85.html`
Acceso 03/06/21.

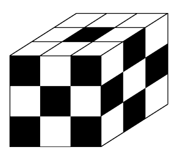
7) Lista corta de problemas IMO 2005. `https://www.imomath.com/imocomp/sl05_0707.pdf`
Acceso 03/06/21.

8) Lista corta de problemas IMO 2006.
`http://www.imo-official.org/problems/IMO2006SL.pdf`
Acceso 03/06/21.

# Problemas de práctica

A continuación presentamos 25 problemas que fueron parte del examen de invitación a la OMM 2021. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

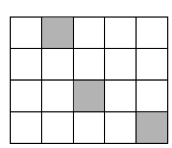
**Problema 1.** En la figura se muestra un cubo formado por 27 cubos más pequeños e idénticos. Para cada cara del cubo grande, la cara opuesta está pintada de la misma manera.



¿Cuántos cubos pequeños tienen al menos una cara pintada?

(a) 10 (b) 12 (c) 15 (d) 18 (e) 20

**Problema 2.** En la figura, se muestra un rectángulo con 3 cuadritos unitarios sombreados.



¿Cuál es el mínimo número de cuadritos adicionales que hay que sombrear para que la figura resultante tenga dos ejes de simetría?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 18 (e) 9

**Problema 3.** Tengo $15$ manzanas, de las cuales corté $7$ a la mitad y el resto las corté en cuartos. ¿Cuántos pedazos de manzana obtuve en total?

(a) $42$ (b) $43$ (c) $44$ (d) $45$ (e) $46$

**Problema 4.** Se desea llenar los cuadritos de la figura de forma que la suma de cada tres cuadritos consecutivos sea $21$.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | | | | | | | | 6 | | |

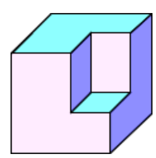
¿Qué número debe ir en la segunda casilla?

(a) $5$ (b) $6$ (c) $7$ (d) $8$ (e) $9$

**Problema 5.** Una lámpara usa $2$ pilas cada $6$ horas. Las pilas se venden en paquetes de $4$. ¿Cuántos paquetes de pilas se necesitan para poder usar la lámpara por $48$ horas?

(a) $2$ (b) $3$ (c) $4$ (d) $5$ (e) $6$

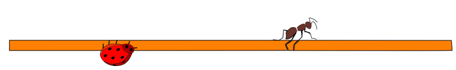
**Problema 6.** Haciendo tres cortes, cada uno paralelo a una cara de un cubo de madera, se obtiene una pieza como la que se muestra.



Si el volumen original del cubo era $8\ \mathrm{m}^3$, ¿cuál es el área de la superficie de la pieza que se obtuvo?

(a) $18\ \mathrm{m}^2$ (b) $24\ \mathrm{m}^2$ (c) $26\ \mathrm{m}^2$ (d) $28\ \mathrm{m}^2$ (e) imposible de determinar

**Problema 7.** Una hormiga empezó en el extremo izquierdo de un tubo y caminó $\frac{2}{3}$ de la longitud del tubo. Una catarina empezó en el extremo derecho del mismo tubo y caminó $\frac{3}{4}$ de su longitud.



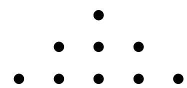
¿Qué fracción de la longitud del tubo separa a la hormiga de la catarina?

(a) $\frac{3}{8}$ (b) $\frac{5}{7}$ (c) $\frac{5}{12}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{12}$

**Problema 8.** Las edades de mis tres hermanos, junto con la mía, suman $40$ años. ¿Cuánto sumaban hace $3$ años?

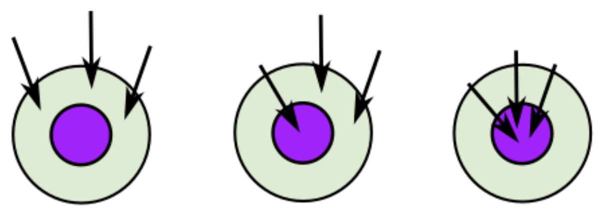
(a) $25$ años (b) $28$ años (c) $31$ años (d) $34$ años (e) $37$ años

**Problema 9.** ¿Cuántas formas distintas hay de escoger tres puntos de la figura, de manera que los tres puntos elegidos estén alineados?



(a) $9$ (b) $10$ (c) $11$ (d) $14$ (e) $15$

**Problema 10.** Diana estuvo lanzando dardos. En la figura se muestran las tres oportunidades de lanzamientos que hizo.




La primera vez obtuvo $6$ puntos y la segunda obtuvo $8$ puntos. ¿Cuántos puntos obtuvo la tercera vez?

(a) $9$ (b) $12$ (c) $14$ (d) $15$ (e) $18$

**Problema 11.** ¿Cuál número se debe quitar de la lista $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ de manera que el promedio de los números restantes sea $6$?

(a) $4$ (b) $6$ (c) $7$ (d) $8$ (e) $10$

**Problema 12.** Ana suma las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo y obtiene un total de 2021 grados. Luego se da cuenta de que olvidó sumar la medida de uno de los ángulos, ¿cuánto mide este ángulo?

(a) $61°$ (b) $81°$ (c) $90°$ (d) $99°$ (e) $139°$

**Problema 13.** Los enteros $a$ y $b$ cumplen que $a > b > 0$ y $a + b + ab = 80$. ¿Cuál es el valor de $a$?

(a) $40$ (b) $36$ (c) $27$ (d) $26$ (e) $8$

**Problema 14.** Cuando a un barril le falta el $30\,\%$ para llenarse contiene $30$ litros más que cuando está lleno hasta el $30\,\%$. ¿Cuántos litros le caben al barril?

(a) $60$ (b) $75$ (c) $90$ (d) $100$ (e) $120$

**Problema 15.** En un torneo de fútbol se jugaron $45$ partidos. En cada juego el equipo ganador obtuvo $3$ puntos y el perdedor obtuvo $0$ puntos. En caso de empate cada uno de los equipos obtuvo $1$ punto. Si el total de puntos obtenidos por todos los equipos fue $130$, ¿cuántos partidos del torneo fueron empates?

(a) $0$ (b) $1$ (c) $2$ (d) $4$ (e) $5$

**Problema 16.** Cinco amigos $P, Q, R, S$ y $T$ se dan la mano. Tanto $P$ como $Q$ estrecharon la mano de uno de sus amigos solamente, mientras que $R, S$ y $T$ estrecharon cada uno la mano de dos. Sabemos que $P$ estrechó la mano de $T$. ¿Quiénes podemos asegurar que no se dieron la mano?

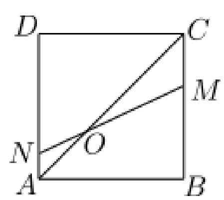
(a) $T$ y $S$ (b) $T$ y $R$ (c) $Q$ y $R$ (d) $Q$ y $T$ (e) $Q$ y $S$

**Problema 17.** Mónica multiplicó correctamente dos números de dos dígitos en una hoja de papel. Luego puso unas calcomanías encima de tres de los dígitos como se muestra en la figura.


¿Cuál es la suma de los tres dígitos que quedaron tapados?

(a) $6$ (b) $8$ (c) $9$ (d) $12$ (e) $14$

**Problema 18.** La figura representa un cuadrado con vértices $A$, $B$, $C$ y $D$.




Si el ángulo $\angle OND$ mide $60°$, ¿cuánto mide el ángulo $\angle COM$?

(a) $10°$ (b) $15°$ (c) $20°$ (d) $30°$ (e) $35°$

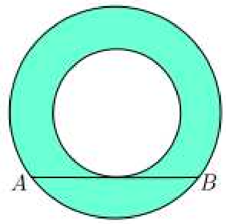
**Problema 19.** Sean $a$ y $b$ números reales diferentes tales que $2a^2 + 2b^2 = 5ab$. Encuentra la suma de todos los posibles valores de $\frac{a+b}{a-b}$.

(a) $0$ (b) $1$ (c) $2$ (d) $3$ (e) $4$

**Problema 20.** ¿Cuántos números de cuatro dígitos terminan en $36$ y son múltiplos de $36$?

(a) $9$ (b) $10$ (c) $11$ (d) $12$ (e) $13$

**Problema 21.** En la figura, los dos círculos tienen el mismo centro y la cuerda $AB$ del círculo mayor es tangente al menor.



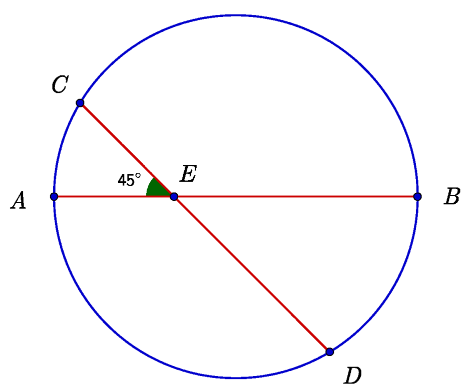

Si $AB$ mide 16, ¿cuál es el área de la región sombreada?

(a) $32\pi$ (b) $63\pi$ (c) $64\pi$ (d) $32\pi^2$ (e) falta información

**Problema 22.** Varios piratas se repartieron un cofre con monedas de oro iguales, de manera que a cada uno le tocó la misma cantidad. Si hubiera habido $4$ piratas menos, a cada uno le habrían tocado $10$ monedas más. Si hubiera habido $50$ monedas menos, a cada pirata le habrían tocado $5$ monedas menos que en el reparto original. ¿Cuántas monedas se repartieron en total?

(a) $80$ (b) $100$ (c) $120$ (d) $150$ (e) $4250$

**Problema 23.** Sea $AB$ un diámetro de una circunferencia de radio $5\sqrt{2}$. Sea $CD$ una cuerda en el círculo que corta a $AB$ en un punto $E$ de tal forma que $\angle AEC = 45°$. ¿Cuál es el valor de $CE^2 + DE^2$?




(a) $2$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $5$ (d) $\sqrt{10}$ (e) $10$

**Problema 24.** Beto traza $n$ circunferencias en una hoja de papel de modo que se cumplan las dos propiedades siguientes: cualesquiera dos de las circunferencias se intersecan en exactamente dos puntos y no hay 3 circunferencias que pasen por el mismo punto. Luego Beto recorta la hoja de papel a lo largo de todas las circunferencias trazadas, con lo que obtiene $f(n)$ fragmentos de papel. Por ejemplo, $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$. Determina el valor de $f(6)$.

(a) 22 (b) 24 (c) 28 (d) 30 (e) 32

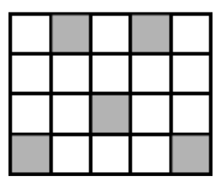
**Problema 25.** Cada tercer día Luis dice la verdad y los demás días miente. Hoy Luis ha dicho exactamente 4 de los siguientes enunciados. ¿Cuál es el enunciado que no dijo hoy?

(a) Tengo la misma cantidad de amigas que de amigos.
(b) Soy amigo de una cantidad prima de personas.
(c) Mi nombre es Luis.
(d) Siempre digo la verdad.
(e) Soy amigo de tres personas más altas que yo.

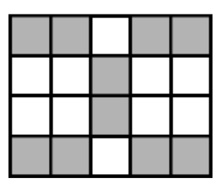
# Soluciones a los problemas de práctica

**Solución del problema 1.** La respuesta es (e). Por como están pintadas las caras del cubo grande, cada cubo pequeño tiene a lo mucho una cara pintada. Esto significa que el número de cubos con al menos una cara pintada es igual al número de cuadritos unitarios pintados. Esta última cantidad es igual a $2 \times (1 + 4 + 5) = 20$, por lo que hay $20$ cubos pequeños con al menos una cara pintada.

**Solución del problema 2.** La respuesta es (c). Un rectángulo solo puede tener dos ejes de simetría: uno vertical y uno horizontal. Al reflejar la figura sobre la recta vertical que pasa por el centro del rectángulo y empalmar el resultado con la original, obtenemos la siguiente figura:



Después, a esta última figura la reflejamos sobre la recta horizontal que pasa por el centro del rectángulo y la empalmamos con la anterior, obteniendo la siguiente figura:



Eso significa que se necesitan sombrear al menos $10 - 3 = 7$ cuadritos más.

**Solución del problema 3.** La respuesta es (e). De cada una de las $7$ manzanas que corté a la mitad, se obtienen $2$ pedazos y de cada una de las $15 - 7 = 8$ manzanas restantes que corté en cuartos, se obtienen $4$ pedazos. Por lo tanto, en total obtuve $7 \times 2 + 8 \times 4 = 14 + 32 = 46$ pedazos.

**Solución del problema 4.** La respuesta es (d). Haciendo pruebas es fácil convencerse de que los números escritos en las primeras tres casillas se repetirán en el mismo orden a lo largo de la tira. Como el $6$ está en la posición $9$ también deberá estar en la posición 3, así que en la segunda casilla debemos escribir $21 - 7 - 6 = 8$.

**Solución del problema 5.** La respuesta es (c). Cada $6$ horas se deben de reemplazar las 2 pilas. Luego debemos de hacer $\frac{48}{6} = 8$ reemplazos de pilas. Por lo que necesitamos $8 \times 2 = 16$ pilas para las $48$ horas. Como las pilas vienen en paquetes de $4$, se necesitan $\frac{16}{4} = 4$ paquetes.

**Solución del problema 6.** La respuesta es (b). Sabemos que cada tres caras del cubo quedaron intactas. En cada corte, la parte paralela a la cara afectada tiene la misma superficie del pedazo que se recortó de esa cara, así que la superficie de la nueva figura es igual a la del cubo original. Si llamamos $a$ a la longitud de una arista del cubo, tenemos que $a^3 = 8 = 2^3$, así que $a = 2$ m y el área de la superficie de la figura es $6 \times 2^2 = 24$ m$^2$.

**Solución del problema 7.** La respuesta es (c). La catarina está a $\frac{1}{4}$ de la longitud del tubo, partiendo del extremo izquierdo. La hormiga está a $\frac{2}{3}$ de la longitud del tubo, también partiendo del extremo izquierdo. Así, la hormiga y la catarina están separados por $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ de la longitud del tubo.

**Solución del problema 8.** La respuesta es (b). Tanto mi edad, como las edades de mis tres hermanos, es 3 años más que hace tres años. Entonces, a la cantidad total $40$ hay que restar 3 por cada uno de nosotros, que somos cuatro. Por lo tanto, hace 3 años nuestras edades sumaban $40 - 3 - 3 - 3 - 3 = 40 - 12 = 28$ años.

**Solución del problema 9.** La respuesta es (d). Vamos a separar las formas de escoger los puntos en la figura, en los siguientes casos:

- Un punto en cada nivel.
- Los tres puntos en el nivel intermedio.
- Los tres puntos en el nivel inferior.

En el primer caso, solo hay 3 formas. En el segundo caso solo hay una forma. El caso más interesante es el caso en el que los tres puntos están en el nivel inferior, en el cual hay 10 formas. Por lo tanto, el total es $1 + 3 + 10 = 14$.

**Solución del problema 10.** La respuesta es (b). Como la primera vez obtuvo $6$ puntos, deducimos que cada dardo en el área clara vale 2 puntos. Entonces, por el segundo lanzamiento tenemos que el área central vale $4$ puntos y así el tercer lanzamiento vale 12 puntos.

**Solución del problema 11.** La respuesta es (b). Sea $x$ el número que se quita de la lista. Como quedarán $10$ números en la lista, entonces el promedio de los números restantes es $\frac{(1+2+3+\cdots+11)-x}{10} = \frac{66-x}{10}$. Como este promedio debe ser 6, se sigue que $\frac{66-x}{10} = 6$, por lo que $66 - x = 60$ y, por lo tanto, $x = 6$.

**Solución del problema 12.** La respuesta es (e). La suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono convexo es un múltiplo de $180°$, como $2021 = (11)(180)+61$, faltan $139°$ para tener el siguiente múltiplo de $180°$.

**Solución del problema 13.** La respuesta es (d). La ecuación, $a + b + ab = 80$ es equivalente a la ecuación $(a+1)(b+1) = 81$, de donde $a+1$ y $b+1$ son divisores positivos de $81$. Los divisores positivos de $81$ son $1, 3, 9, 27$ y $81$. Analizando las posibilidades para $a + 1$, obtenemos las soluciones $(a, b) = (0, 80), (2, 26), (8, 8), (26, 2)$ y $(80, 0)$. Solamente la pareja $(26, 2)$ cumple la condición $a > b > 0$, luego $a = 26$.

**Solución del problema 14.** La respuesta es (b). Tenemos que 30 litros representan el $70\,\% - 30\,\% = 40\,\%$ del barril, así que en total le caben $\frac{30 \cdot 100}{40} = 75$ litros.

**Solución del problema 15.** La respuesta es (e). Si todos los partidos hubieran sido empates se habrían repartido 90 puntos entre los equipos. La diferencia $130 - 90 = 40$ corresponde a los partidos que no fueron empates. Por lo anterior, hubo $5$ empates en el torneo.
**Otra manera**. Si en todos los partidos hay un ganador, se reparten $45 \times 3 = 135$ puntos. La diferencia $135 - 130 = 5$ corresponde a los partidos donde hubo empate.

**Solución del problema 16.** La respuesta es (d). Si $Q$ le hubiera dado la mano a $T$, entonces ni $P$ ni $Q$ ni $T$ le hubieran dado la mano a nadie más, lo cual no es posible, pues $R$ le dió la mano a dos amigos.

**Solución del problema 17.** La respuesta es (a). Escribamos $A$, $B$ y $C$ en lugar de los números tachados, de forma que la operación quede $A3 \times 2B = 3C2$, donde debemos sustituir $A, B$ y $C$ por dígitos. Observemos que la única posibilidad para que el resultado de la multiplicación termine en 2 es sustituir $B$ por 4. Como el único múltiplo de 24 entre 300 y 399 es 312, tenemos que $C$ debe sustituirse por 1. Finalmente, $A$ debe sustituirse por 1 para que la operación esté correcta. La suma de los números tachados es $4 + 1 + 1 = 6$.

**Solución del problema 18.** La respuesta es (b). Tenemos que $\angle OND + \angle ONA = 180^o$ y como $\angle OND = 60°$, entonces $\angle OND = 120°$. Por otro lado, $AC$ es diagonal del cuadrado, así que $\angle CAN = 45°$. Luego, tenemos que $\angle COM = \angle NOA = 180° - \angle NAO - \angle ONA = 180° - 120° - 45° = 15°$.

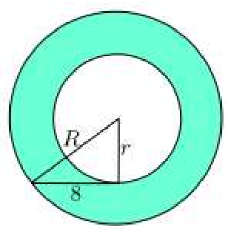
**Solución del problema 19.** La respuesta es (a). Sumando $4ab$ de ambos lados de la ecuación original, obtenemos que $2(a + b)^2 = 9ab$. Por otro lado, si se resta $4ab$ en la ecuación original, obtenemos que $2(a - b)^2 = ab$. Además, si alguno entre $a$ o $b$ es igual a $0$, la ecuación original implica que el otro debe ser también $0$, lo cual no puede suceder pues $a \neq b$. Así, $ab \neq 0$ y, por lo tanto,

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{2(a+b)^2}{2(a-b)^2} = \frac{9ab}{ab} = 9,$$

por lo que $\frac{a+b}{a-b} \in \{-3, 3\}$. Para ver que ambos valores son posibles, notemos que la ecuación original se verifica si $(a, b) = (1, 2)$, ya que $(a, b) = (1, 2)$ implica $\frac{a+b}{a-b} = -3$ y también con $(a, b) = (2, 1)$ ya que en este caso $\frac{a+b}{a-b} = 3$. Así los únicos valores posibles para la expresión buscada son $-3$ y $3$ y, por lo tanto, su suma es igual a $0$.

**Solución del problema 20.** La respuesta es (b). Sea $\overline{ab36}$ un número de cuatro dígitos que es múltiplo de $36$. Nótese que, como termina en $36$ y este es múltiplo de $4$, entonces solo basta revisar que $\overline{ab36}$ sea múltiplo de $9$. Se ocupa que $a \neq 0$ y $a + b + 9$ sea múltiplo de $9$, esto es, $a + b$ debe ser un múltiplo de $9$. Las posibilidades para $(a, b)$ son $(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$, $(5, 4)$, $(6, 3)$, $(7, 2)$, $(8, 1)$, $(9, 0)$ y $(9, 9)$, por lo que en total hay $10$ números.

**Solución del problema 21.** La respuesta es (c). Llamemos $R$ al radio del círculo mayor y $r$ al radio del círculo menor.

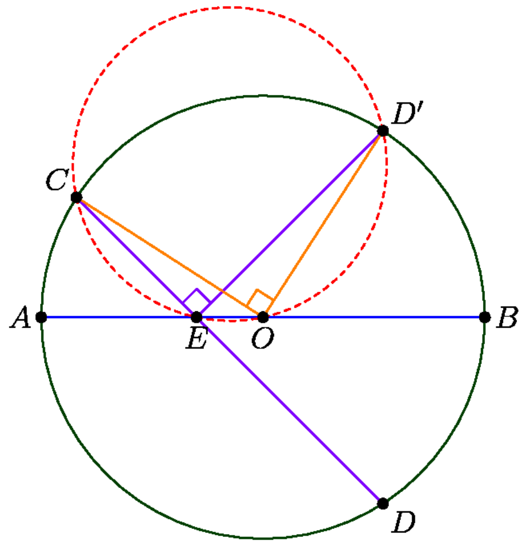



Como la recta tangente a un círculo en un punto es perpendicular al radio por ese punto, podemos aplicar el teorema de Pitágoras, esto es, $R^2 = 64 + r^2$, de donde $R^2 - r^2 = 64$. Por lo tanto, el área sombreada mide $\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = 64\pi$.

**Solución del problema 22.** La respuesta es (d). Como quitar $50$ monedas del total es lo mismo que quitarle $5$ monedas a cada pirata, tenemos que hay $\frac{50}{5} = 10$ piratas. Sabemos que $4$ piratas recibieron $6 \times 10 = 60$ monedas (es lo que se habría repartido en el grupo si esos $4$ piratas no estuvieran), así que cada pirata recibió $\frac{60}{4} = 15$ monedas. Luego, en total hay $10 \times 15 = 150$ monedas.

**Solución del problema 23.** La respuesta es (e). Sea $D'$ la reflexión de $D$ respecto a $AB$ y sea $O$ el punto medio de $AB$. Entonces, $\angle BED' = \angle CEA = 45°$, por lo que $\angle D'EC = 90°$. Además, tenemos que $\angle DED' = 90°$ y $ED = ED'$, de donde se sigue que $\angle D'DC = \angle D'DE = 45°$, lo que implica que $\angle D'OC = 2\angle D'DC = 90° = \angle D'EC$. Por consiguiente, el cuadrilátero $CEOD'$ es cíclico y, más aún, su diámetro es $CD'$. Por lo tanto, por el teorema de Pitágoras,

$$CE^2 + DE^2 = CE^2 + D'E^2 = D'C^2 = CO^2 + D'O^2 = 2CO^2 = 2\left(5\sqrt{2}\right)^2 = 100.$$




**Solución alternativa.** Con la notación anterior, tenemos que el triángulo $D'ED$ es un triángulo rectángulo isósceles, por lo que $\angle CDD' = 45°$. Por la ley de los senos en el triángulo $CDD'$, tenemos que $\frac{\operatorname{sen}(\angle CDD')}{CD'} = \frac{1}{2(5\sqrt{2})}$, por lo que $CD' = \frac{2(5\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 10$.

**Solución del problema 24.** La respuesta es (e). Ya sabemos que $f(1) = 2$ y $f(2) = 4$. Cada circunferencia que se trace corta en dos puntos a cada una de las ya trazadas y cada dos puntos de corte seguidos dividirá en dos a una de las regiones que ya se tenían con las circunferencias anteriores. Luego, en cada paso, aumenta el número de regiones la cantidad de nuevos puntos de corte. Así $f(3) = f(2) + 2 \cdot 2 = 4 + 4 = 8$, $f(4) = 8 + 2 \cdot 3 = 14$, $f(5) = 14 + 2 \cdot 4 = 22$ y $f(6) = 22 + 2 \cdot 5 = 32$.

**Solución del problema 25.** La respuesta es (c). El enunciado (c) es verdadero y el (d) es falso, así que los otros tres son todos falsos o todos verdaderos. Si (a), (b) y (c) fueran verdaderos, Luis tendría una cantidad de amigos que es un número primo, es par y es mayor que 3, lo cual no puede ser. De lo anterior, concluimos que Luis miente el día de hoy.

# Problemas de Entrenamiento

## Problemas de Entrenamiento.
## Año 2022 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este primer número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

**Problema 1.** Sean $O$ e $I$ el circuncentro y el incentro del triángulo $ABC$, respectivamente. Si $AB \neq AC$, los puntos $D$ y $E$ son los puntos medios de $AB$ y $AC$ respectivamente y $2BC = AB + AC$. Demuestra que la recta $OI$ y la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ son perpendiculares.

**Problema 2.** Sea $n$ un entero positivo fijo. Definimos a un *camaleón* como cualquier palabra de $3n$ letras, tales que cada una de las letras $a$, $b$ y $c$ aparece exactamente $n$ veces. Un *cambio* es un intercambio de posición de cualesquiera dos letras adyacentes en un camaleón. Prueba que para cualquier camaleón $X$, existe un camaleón $Y$ que no puede ser alcanzado desde $X$ usando menos de $\frac{3n^2}{2}$ cambios.

**Problema 3.** Sea $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polígono regular de $n$ lados inscrito en un círculo de radio 1. Demuestra que $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot A_0A_3 \cdots A_0A_{n-1} = n$.

**Problema 4.** Los lados de un triángulo están en progresión aritmética con diferencia $d \geq 0$. El área del triángulo es $A$. Determina los lados del triángulo en términos de $A$ y $d$. En particular, encuentra los lados del triángulo cuando $d = 1$ y $A = 6$.

**Problema 5.** Sea $X$ un conjunto con $n$ elementos. Prueba que el número de parejas $(A, B)$ tales que $A$ y $B$ son subconjuntos de $X$, $A$ es subconjunto de $B$ y $A \neq B$, es igual a $3^n - 2^n$.

**Problema 6.** Sean $p_1, p_2, \ldots, p_m$, todos los números primos menores que $2^{2016}$. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} < 15.$$

**Problema 7.** Sean $a$, $b$, $c$ y $d$, números enteros donde $d$ no es múltiplo de $5$. Supongamos que existe un entero $m$ tal que $am^3 + bm^2 + cm + d$ es múltiplo de $5$. Demuestra que existe un entero $n$ tal que $dn^3 + cn^2 + bn + a$ es múltiplo de $5$.

**Problema 8.** Considera el polinomio cuadrático $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$.

a) Demuestra que existen números $k$, $\ell$, $m$ en términos de $A$, $B$, $C$, tales que

$$Q(x) = k\frac{x(x-1)}{2} + \ell x + m.$$

b) Demuestra que $Q(x)$ es un entero para todo entero $x$, si y solo si $k$, $\ell$ y $m$ son números enteros.

**Problema 9.** Decimos que un conjunto es *egoísta* si contiene a su cardinalidad. Decimos que un conjunto egoísta es *mínimo* si no contiene a ningún conjunto egoísta como subconjunto propio. Determina el número de subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

**Problema 10.** Demuestra que para cada entero $k \geq 2$, existe una infinidad de enteros positivos que no pueden ser escritos como la suma de $k$ potencias $k$-ésimas de números enteros positivos.

## Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2021 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2021. En esta ocasión, agradecemos a Rogelio Esaú Aguirre González, por habernos enviado sus soluciones a los problemas 1, 2, 4, 7 y 10. También agradecemos a José Hernández Santiago por habernos enviado su solución al problema 7. Aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2021, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

**Problema 1.** Demuestra que $(n+1)^2 > 3\sqrt[n]{(n!)^2}$ para todo entero positivo $n$.

**Solución de Rogelio Esaú Aguirre González.** La desigualdad es trivial para $n = 1$. Supongamos que $n \geq 2$. De la desigualdad MA-MG con los números $1^2, 2^2, 3^2, \ldots,$ $n^2$, obtenemos que

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n} > \sqrt[n]{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots n^2},$$

ya que tales números son distintos entre sí.
Como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, la desigualdad anterior es equivalente a la desigualdad $\frac{(n+1)(2n+1)}{6} > \sqrt[n]{(n!)^2}$. Notemos que $\frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2} < n+1$, por lo que $\frac{(n+1)(2n+1)}{2} < (n+1)^2$. Por lo tanto, $(n+1)^2 > \frac{(n+1)(2n+1)}{2} > 3\sqrt[n]{(n!)^2}$, como se quería.

**Problema 2.** Determina todos los enteros positivos $n$ para los cuales existe un entero positivo $d$ con la propiedad de que $n$ es divisible por $d$ y $n^2 + d^2$ es divisible por $d^2 n + 1$.

**Solución de Rogelio Esaú Aguirre González.** Sean $n$ y $d$ enteros positivos tales que $n$ es divisible por $d$ y $n^2 + d^2$ es divisible por $d^2 n + 1$. Si $d = 1$, entonces $n+1$ divide a $n^2 + 1$. Dado que $n + 1$ divide a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$, se tiene que $n+1$ divide a $\left(n^2 + 2n + 1\right) - (n^2 + 1) = 2n$, por lo que también divide a $2(n+1) - 2n = 2$. De aquí se sigue que $n+1$ puede ser 1 o 2 pero, como $n$ es un entero positivo, forzosamente $n = 1$. Nótese que, en este caso, $n = 1^4 = d^4$.
Ahora, supongamos que $d > 1$ y sea $k$ un entero positivo tal que $n = dk$. Si $d^2 n + 1$ divide a $n^2 + d^2$, entonces $d^3 k + 1$ divide a $(dk)^2 + d^2 = d^2\left(k^2 + 1\right)$. Sea $p$ un divisor primo de $d$. Luego, $p$ divide a $d^2\left(k^2+1\right)$. Además, $p$ divide a $d^3 k$, por lo que no divide a $d^3 k + 1$, lo que quiere decir que $d$ y $d^3 k + 1$ son primos relativos. Nótese que ambos dividen a $d^2\left(k^2+1\right)$, por lo que su producto también es un divisor de este número. Así, $d\left(d^3 k + 1\right)$ divide a $d^2\left(k^2+1\right)$, es decir, $d^3 k + 1$ divide a $d\left(k^2+1\right)$. Como $d^3 k + 1$ y $d$ son primos relativos, concluimos que $d^3 k + 1$ divide a $k^2 + 1$. Se sigue que $d^3 k + 1 \leq k^2 + 1$. Si $d^3 k + 1 = k^2 + 1$, entonces $d^3 k = k^2$, esto es, $k = d^3$ y $n = d^4$. Supongamos que $d^3 k + 1 < k^2 + 1$ y, por ende, que $d^3 < k$. Entonces, $d^3 k + 1$ divide a $\left(d^3 k + 1\right)^2 = d^6 k^2 + 2d^3 k + 1$. Como $d^3 k + 1$ divide a $k^2 + 1$, también divide a $d^6 k^2 + 2d^3 k + 1 - \left(k^2 + 1\right) = k\left(d^6 k + 2d^3 - k\right)$. Sabemos que $d^3 k + 1$ y $k$ son primos relativos, por lo que $d^3 k + 1$ divide a $d^6 k + 2d^3 - k = d^3\left(d^3 k + 1\right) + d^3 - k$. Se sigue que $d^3 k + 1$ divide a $k - d^3$, lo que es una contradicción ya que $d^3 k + 1 > k - d^3 > 0$ (observe que $d^3 k + d^3 - k + 1 > d^3 k + d^3 - k - 1 = \left(d^3 - 1\right)(k+1) > 0$ por ser $d > 1$). Por lo tanto, $d^3 k + 1 = k^2 + 1$ y, por consiguiente, $n = d^4$.

**Problema 3.** Sean $a$ y $b$ números reales que satisfacen

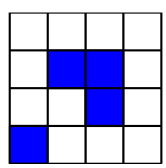
$$a^3 - 3a^2 + 5a = 1,$$
$$b^3 - 3b^2 + 5b = 5.$$

Determina el valor de $a + b$.

**Solución.** Sean $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x = (x-1)^3 + 2(x-1) + 3$ y $g(x) = x^3 + 2x$. Entonces, $f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $g(a-1) = (a-1)^3 + 2(a-1) = f(a) - 3 = 1 - 3 = -2$ y $g(b-1) = (b-1)^3 + 2(b-1) = f(b) - 3 = 5 - 3 = 2$. Tenemos entonces que $g(a-1) = -g(b-1)$. Además, es fácil ver que $-g(b-1) = g(1-b)$. Por lo tanto, $g(a-1) = g(1-b)$.
Por otra parte, si $g(x) = g(y)$, entonces $x^3 + 2x = y^3 + 2y$, esto es, $x^3 - y^3 + 2x - 2y = 0$. Factorizando, obtenemos que $(x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$. Como $x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$, se sigue que $x = y$.
Luego, de la relación $g(a-1) = g(1-b)$, concluimos que $a - 1 = 1 - b$, esto es, $a + b = 2$.

**Problema 4.** Nueve celdas de un tablero de $10 \times 10$ están infectadas. Dos celdas son vecinas si tienen un lado en común. En cada minuto, las celdas que tengan al menos dos vecinos infectados se vuelven infectadas. ¿Puede llegar a suceder que todas las celdas del tablero estén infectadas?

**Solución de Rogelio Esaú Aguirre González.** En cada minuto, consideremos el perímetro de la figura que forman las celdas infectadas. Por ejemplo, en la siguiente figura, las celdas sombreadas representan las celdas infectadas. En este caso, el perímetro mencionado es igual a 12.



Al momento de que pasa un minuto, pueden suceder dos cosas: ninguna celda se infecta o algunas celdas se infectan. En el primer caso, significa que el perímetro de la figura infectada ya no cambiará. En el segundo caso, si una celda se infectó en ese minuto, entonces debía tener al menos dos vecinos infectados. Si esta celda tiene exactamente dos vecinos infectados, al infectarse el perímetro de la figura deja de contar dos segmentos de longitud 1 (los lados que comparten la celda que se infectó en el minuto que acaba de pasar), pero se consideran a lo mucho dos nuevos segmentos de longitud 1 para el perímetro (los otros dos lados de la celda infectada nueva que no comparte con otra celda infectada), pues los segmentos nuevos pueden repetirse en celdas que se infecten en el mismo minuto. Luego, el perímetro de la figura permanece igual o disminuye. Análogamente, si una celda que tiene exactamente 3 vecinos infectados se infecta, el perímetro de la figura dejará de contar $3$ segmentos de longitud $1$ y contará a lo mucho un segmento de longitud $1$, por lo que el perímetro disminuirá. Finalmente, si una celda que tiene sus $4$ vecinos infectados se infecta, el perímetro de la figura disminuirá por $4$ unidades. En cualquier caso, el perímetro de la figura infectada no aumenta. Como se inicia con nueve celdas infectadas, el máximo perímetro posible es igual a $4 \times 9 = 36$ (en el caso de que no haya celdas infectadas vecinas). Si fuese posible que todo el cuadrado llegue a estar infectado después de cierto tiempo, significaría que el perímetro del cuadrado completo sería a lo mucho $36$, lo cual es imposible, pues su perímetro es igual a $40$. De aquí se concluye que no es posible que todo el tablero se infecte.

**Problema 5.** Sean $0 < x < y < z < p$ números enteros con $p$ número primo. Si $x^3$, $y^3$ y $z^3$ dejan el mismo residuo al dividirse entre $p$, demuestra que $x + y + z$ divide a $x^2 + y^2 + z^2$.

**Solución.** Es fácil ver que $p \geq 5$, pues debe haber al menos tres enteros positivos diferentes menores que $p$, a decir $x$, $y$ y $z$. Tenemos que $p$ divide a $y^3 - x^3 = (y - x)\left(y^2 + xy + x^2\right)$. Como $0 < x < y < p$, entonces $0 < y - x < p$, por lo que $\operatorname{mcd}(p, y - x) = 1$. Esto significa que $p$ divide a $x^2 + xy + y^2$. Análogamente, tenemos que $p$ divide a $y^2 + yz + z^2$ y a $z^2 + zx + x^2$. Luego, $p$ divide a

$$\left(x^2 + xy + y^2\right) - \left(y^2 + yz + z^2\right) = \left(x^2 - z^2\right) + y(x + z) = (x - z)(x + y + z).$$

Es claro que $\operatorname{mcd}(x - z, p) = 1$ (por un argumento similar al de $\operatorname{mcd}(y - x, p) = 1$). Se sigue que $p$ divide a $x + y + z$. Por otro lado, tenemos que $p$ divide a

$$2\left(x^2 + xy + y^2\right) + 2\left(y^2 + yz + z^2\right) + 2\left(z^2 + zx + x^2\right) - (x + y + z)^2,$$

esto es, $p$ divide a $3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Como $p$ es un número primo mayor que $3$, necesariamente $p$ divide a $x^2 + y^2 + z^2$. Además, $x + y + z < 3p$. Como $p$ divide a $x + y + z$, esto significa que $x + y + z = p$ o $x + y + z = 2p$. Si $x + y + z = p$, no hay nada más qué hacer. Si $x + y + z = 2p$, entonces $x^2 + y^2 + z^2$ tiene la misma paridad que $x + y + z$, lo que indica que $2p$ divide a $x^2 + y^2 + z^2$ y acabamos.

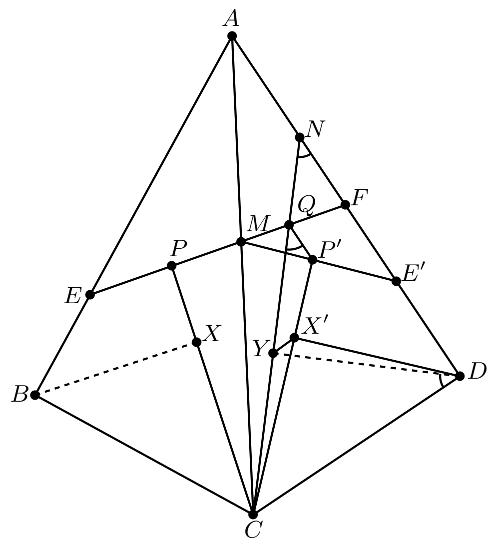
**Problema 6.** En el cuadrilátero convexo $ABCD$, tenemos que $AB = AD$, $CB = CD$ y $\angle ABC = 90^\circ$. Los puntos $E$ y $F$ están en $AB$ y $AD$, respectivamente y, los puntos $P$ y $Q$, están en $EF$ ($P$ se encuentra entre $E$ y $Q$), los cuales satisfacen la relación $\frac{AE}{EP} = \frac{AF}{FQ}$. Los puntos $X$ y $Y$ están en $CP$ y $CQ$, respectivamente, de tal forma que $BX$ es perpendicular a $CP$ y $DY$ es perpendicular a $CQ$. Demuestra que $X, P, Q, Y$ son concíclicos.

**Solución.** Observemos que $B$ y $D$ son simétricos con respecto a $AC$, por lo que $AC$ es bisectriz del ángulo $\angle EAF$. Sean $P', E', X'$ las reflexiones de $P, E, X$ con respecto a $AC$, respectivamente. Sea $M$ la intersección de $AC$ y $EF$. Por la condición de igualdad de razones y el teorema de la bisectriz, tenemos que $\frac{E'P'}{FQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{EM}{MF}$, de donde $QP'$ es paralela a $AD$.
Ahora, observemos que el cuadrilátero $CYX'D$ es cíclico puesto que $\angle CYD =$

$90^\circ = \angle BXC = \angle CX'D$. Usando esto y las paralelas, tenemos que

$$\angle YX'C = \angle YDC = \angle 90^\circ - \angle DCY = \angle CND = \angle CQP',$$

donde $N$ es la intersección de $CQ$ con $AD$.




Esto implica que el cuadrilátero $QP'X'Y$ es cíclico, por lo que $CY \cdot CQ = CX' \cdot CP' = CX \cdot CP$, de donde también es cíclico $XPQY$, como queríamos.

**Problema 7.** Definimos la sucesión $q_1, q_2, \ldots$ de la siguiente manera: $q_1 = 2$ y, para $n > 1$, $q_n$ es el factor primo más grande de $1 + q_1 q_2 \cdots q_{n-1}$. Demuestra que el número 5 no está en la sucesión.

**Solución de Rogelio Esaú Aguirre González[2].** Supongamos que $q_n = 5$ para algún entero $n \geq 1$. Esto implica que 5 es el primo más grande que divide a $1 + q_1 q_2 \cdots q_{n-1}$. Pero como $q_1 = 2$ y $q_2 = 3$, resulta que $1 + q_1 q_2 \cdots q_{n-1}$ no es múltiplo de 2 ni de 3 y su factor primo más grande es 5. Por lo tanto, $1 + q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = 5^k$. Ahora, tenemos que $5^k \equiv 1 \pmod 4$ y $q_1 = 2$, pero $q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}$ son primos distintos de 2, por lo tanto son impares. Entonces, $1 + q_1 q_2 \cdots q_{n-1} \equiv 1 + 2 \equiv 3 \pmod 4$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, el número 5 no está en la sucesión.

**Problema 8.** Sea $n$ un entero positivo. Hay $n$ carros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y un estacionamiento con $n$ lugares numerados del 1 al $n$ en orden. Cada carro $C_i$ quiere estacionarse en su lugar preferido $a_i$. Los carros llegan al estacionamiento en orden. Si el lugar preferido de un carro está ocupado, entonces se estaciona en el primer lugar vacío adelante. Si no hay ningún lugar vacío, entonces no se estaciona. ¿Para cuántas $n$-tuplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se pueden estacionar todos los carros?

[2]Este problema también fue resuelto por José Hernández Santiago. Su solución es muy parecida a la de Rogelio Esaú.

Ejemplo: Con la tupla $(2, 3, 3, 1)$ se estacionan $4$ carros: $C_1 \to 2, C_2 \to 3, C_3 \to 4, C_4 \to 1$; mientras que con la tupla $(4, 3, 3, 1)$ no se estacionan los cuatro carros, pues $C_1 \to 4, C_2 \to 3$ y $C_3$ no se estaciona.

**Solución.** Agreguemos un estacionamiento $n+1$ que llamaremos estacionamiento $0$ y consideremos el estacionamiento en un círculo. Entonces ahora los $n$ carros se estacionan. Notemos que en el proceso original los $n$ carros se estacionan si y solo si los $n$ carros se estacionan en los lugares del $1$ al $n$ en el estacionamiento circular. Ahora notemos que si la tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ deja desocupado el lugar $m$ en un estacionamiento circular, entonces la tupla $(a_1 + k, a_2 + k, \ldots, a_n + k)$ (módulo $n+1$) deja desocupado el lugar $m + k \pmod{n+1}$. Las tuplas $(a_1, \ldots, a_n)$, donde algún $a_i = 0$, son tuplas que no terminan estacionadas en el planteamiento original. Entonces al considerar $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $0 \leq a_i \leq n$ en el estacionamiento circular, por el proceso cíclico, tenemos que cada estacionamiento queda libre el mismo número de veces. Entonces, el estacionamiento $0$ queda libre para $\frac{(n+1)^n}{n+1} = (n+1)^{n-1}$ tuplas. Por el si y solo si mencionado antes, esto implica que existen $(n+1)^n$ tuplas tales que los carros con preferencias $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ terminan todos estacionados bajo el proceso inicial.

**Problema 9.** Para un entero positivo $n$, sea $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ el $n$-ésimo número triangular. Demuestra que hay una infinidad de ternas de números triangulares consecutivos que suman otro número triangular. Por ejemplo, $T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10 = T_4$, esto es, la suma de los primeros tres números triangulares es igual al cuarto número triangular.

**Solución.** Demostraremos que hay una infinidad de enteros positivos $m$ y $n$ tales que $T_n + T_{n+1} + T_{n+2} = T_m$, esto es,

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n+2)(n+3)}{2} = \frac{m(m+1)}{2},$$

que es equivalente a la ecuación $3n^2 + 9n + 8 = m^2 + m$. Completando el cuadrado, obtenemos que

$$3\left(n + \frac{3}{2}\right)^2 + 8 - \frac{27}{4} = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Después de multiplicar por $4$ y reagrupar tenemos que $(2m+1)^2 - (2n+3)^2 = 6$. Sean $x = 2m + 1$ y $y = 2n + 3$. Entonces tenemos la ecuación $x^2 - 3y^2 = 6$. Claramente tenemos una solución, dado que $n = 1, m = 4$ es una pareja que cumple y, por lo tanto, $x = 9, y = 5$ satisfacen la ecuación $x^2 - 3y^2 = 6$. Por ser una ecuación de tipo Pell, podemos generar infinitas soluciones a partir de allí. La solución fundamental de $x^2 - 3y^2 = 1$ es $x_0 = 2, y_0 = 1$. Supongamos que $x_k$ y $y_k$ los definimos tales que

$$x_k + y_k\sqrt{3} = (x_0 + y_0\sqrt{3})^{k-1}(9 + 5\sqrt{3}).$$

Demostraremos que la pareja $(x_k, y_k)$ es una solución de $x^2 - 3y^2 = 6$. Como $x^2 - 3y^2$ es par, entonces $x$ y $y$ tienen la misma paridad. Si ambos fueran pares, entonces $4$ divide a $x^2 - 3y^2$ y no divide a $6$, por lo que $x, y$ son ambos impares. Luego, $x_k, y_k$ son

impares y, en consecuencia, $m_k = \frac{x_k-1}{2}$ y $n_k = \frac{y_k-3}{2}$ son soluciones.
Para concluir que son infinitas, necesitamos demostrar que todas estas parejas son diferentes. Pero podemos encontrar una recurrencia fácilmente.

$$\begin{aligned}
x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3} &= (x_0 + y_0\sqrt{3})^k(9 + 5\sqrt{3}) \\
&= (x_0 + y_0\sqrt{3})(x_0 + y_0\sqrt{3})^{k-1}(9 + 5\sqrt{3}) \\
&= (2 + \sqrt{3})(x_k + y_k\sqrt{3}) \\
&= (2x_k + 3y_k) + \sqrt{3}(x_k + 2y_k).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_{k+1} = 2x_k + 3y_k$ y $y_{k+1} = x_k + 2y_k$. Notemos que esto implica que $x_{k+1} > 2x_k$ y $y_{k+1} > 2y_k$. Entonces sí son parejas distintas. Para verificar que son soluciones, supongamos que $(x_k, y_k)$ es solución de $x_k^2 - 3y_k^2 = 6$. Sean $x_{k+1} = 2x_k + 3y_k$ y $y_{k+1} = x_k + 2y_k$. Entonces

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^2 - 3y_{k+1}^2 &= (2x_k + 3y_k)^2 - 3(x_k + 2y_k)^2 \\
&= 4x_k^2 + 12x_ky_k + 9y_k^2 - 3(x_k^2 + 4x_ky_k + 4y_k^2) \\
&= x_k^2 - 3y_k^2 = 6.
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos la recurrencia en términos de $x$ y $y$, podemos obtenerla también en términos de $m$ y $n$. Sea $(n_k, m_k)$ la $k$-ésima pareja de enteros tal que $T_{n_k} + T_{n_k+1} + T_{n_k+2} = T_{m_k}$. Entonces tenemos

$$n_{k+1} = \frac{y_{k+1} - 3}{2} = \frac{x_k + 2y_k - 3}{2} = \frac{(x_k - 1) + 2(y_k - 3)}{2} + 2 = m_k + 2n_k + 2,$$

y

$$m_{k+1} = \frac{x_{k+1} - 1}{2} = \frac{2x_k + 3y_k - 1}{2} = \frac{2(x_k - 1) + 3(y_k - 3)}{2} + 5 = 2m_k + 3n_k + 5.$$

**Problema 10.** Determina todos los enteros positivos $\ell, m$ y $n$ tales que

$$5^\ell \cdot 43^m + 1 = n^3.$$

**Solución de Rogelio Esaú Aguirre González.** La ecuación la podemos reescribir en la forma $(n-1)(n^2+n+1) = 5^\ell \cdot 43^m$. Como $n^2 + n + 1 = (n-1)(n+2) + 3$, tenemos que $\text{mcd}(n-1, n^2+n+1) = \text{mcd}(n-1, 3) = 1$ o 3. Como 3 no divide a $5^\ell \cdot 43^m$, necesariamente $n-1$ y $n^2+n+1$ deben ser primos relativos. Luego, tenemos los siguientes casos.

a) $n - 1 = 1$ y $n^2 + n + 1 = 5^\ell \cdot 43^m$. De la primera ecuación obtenemos que $n = 2$. Sustituyendo en la segunda ecuación, obtenemos que $7 = 5^\ell \cdot 43^m$, lo cual no es posible. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

b) $n - 1 = 5^\ell \cdot 43^m$ y $n^2 + n + 1 = 1$. De la segunda ecuación obtenemos que $n(n+1) = 0$, de donde $n = 0$ o $n = -1$, lo cual no puede ser porque $n$ debe ser entero positivo. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

c) $n-1 = 43^m$ y $n^2+n+1 = 5^\ell$. Ya que $\ell$ es un entero positivo, la segunda ecuación implica que $n^2+n+1 \equiv 0 \pmod{5}$, esto es, $n(n+1) \equiv 4 \pmod{5}$, lo cual es imposible ya que si $n \equiv 0, 1, 2, 3$ o $4 \pmod{5}$, entonces $n(n+1) \equiv 0, 2, 1, 2$ o $0 \pmod{5}$, respectivamente. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso.

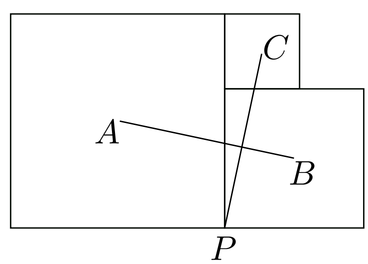
d) $n-1 = 5^\ell$ y $n^2+n+1 = 43^m$. Si $\ell = 1$, entonces $n = 6$ y $6^2+6+1 = 43 = 43^1$, así que $n = 6$ y $\ell = m = 1$ son soluciones. Supongamos que $\ell \geq 2$. Entonces, de la primera ecuación tenemos que $n \equiv 1 \pmod{25}$ y, por lo tanto, $n^2+n+1 \equiv 3 \pmod{25}$. Por otra parte, observemos que $43^m \equiv 18, -1, -18$ o $1 \pmod{25}$ para todo entero positivo $m$. Por lo tanto, no hay soluciones en este caso si $\ell \geq 2$.

En conclusión, la única solución es $\ell = m = 1$ y $n = 6$.

# Examen Final Estatal de la $35^{\text{a}}$ OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen Final Estatal de la $35^a$ OMM propuesto por el Comité Organizador. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

**Problema 1.** En la figura, los cuadrados tienen centros $A$, $B$ y $C$. El punto $P$ es vértice común de los cuadrados con centros $A$ y $B$. Probar que $PC$ y $AB$ son segmentos perpendiculares de la misma longitud.



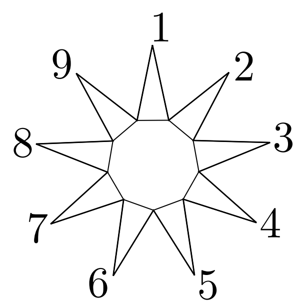

**Problema 2.** Encontrar todas las parejas de enteros positivos $x$ y $y$ tales que

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{2}.$$

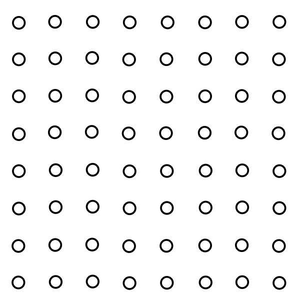
**Problema 3.** Probar que para todo entero $n \geq 2$, es posible partir el conjunto de los enteros del 1 al $3n$ en 3 conjuntos cuyos elementos sumen lo mismo.

**Problema 4.** En un triángulo acutángulo $ABC$, $D$ es el pie de la altura desde $A$. Los puntos $P$ y $Q$ son la intersección del círculo con diámetro $AD$ y los lados $AB$ y $AC$, respectivamente. Probar que el área del triángulo $ABC$ es igual a $PQ \cdot r$, donde $r$ es el radio del círculo circunscrito al triángulo $ABC$.

**Problema 5.** Los 9 picos de la estrella que se muestra, están numerados del 1 al 9 y deben pintarse cada uno con alguno de los colores negro, blanco y rojo, de manera que haya 3 picos de cada color y que cualesquiera dos picos consecutivos tengan distinto color. ¿De cuántas maneras distintas pueden colorearse?



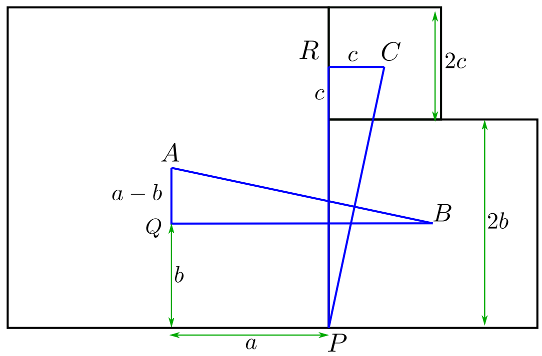

**Problema 6.** En una retícula rectangular con $8 \times 8$ vértices, como la que se muestra, se quieren pintar algunos de los vértices de rojo de tal manera que ningún triángulo rectángulo con catetos horizontales o verticales tenga sus vértices rojos. ¿Cuál es el máximo número de puntos que pueden pintarse de rojo?



## Soluciones del Examen Final Estatal de la 35ª OMM

**Problema 1.** Tracemos paralelas a los lados de los cuadrados para formar los triángulos rectángulos $AQB$ y $CRP$, como se muestra en la figura. Bastará probar que estos triángulos son congruentes, pues son triángulos rectángulos con catetos paralelos y cuyo orden de vértices tienen la misma orientación (es decir, tanto el orden "$A-Q-B$" como el orden "$C-R-P$" están orientados en contra de las manecillas del reloj).
Supongamos que el cuadrado con centro en $A$ tiene lado $2a$, el cuadrado con centro

en $B$ tiene lado $2b$ y el cuadrado con centro en $C$ tiene lado $2c$. Tenemos así que $2a = 2b + 2c$, esto es, $a = b + c$ y, por lo tanto, $AQ = a - b = c = CR$ y $RP = c + 2b = (a - b) + 2b = a + b = QB$. Finalmente, por el criterio de congruencia LAL, se sigue que los triángulos $AQB$ y $CRP$ son congruentes, como queríamos probar.




**Problema 2.** Multiplicamos la ecuación por $2xy$ para obtener: $2y + 6x = xy$. Ahora reescribimos la ecuación como $xy - 6x - 2y = 0$. Sumando 12 a ambos lados de la ecuación podemos escribir

$$(x - 2)(y - 6) = 12.$$

Por otro lado, como $\frac{3}{y} > 0$, entonces $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$, de donde $x > 2$ y así $x - 2 > 0$. Análogamente, $\frac{3}{y} < \frac{1}{2}$ y así $y - 6 > 0$. Tenemos entonces 6 posibilidades para las parejas $(x, y)$, dadas por las siguientes posibilidades de factorizar 12:

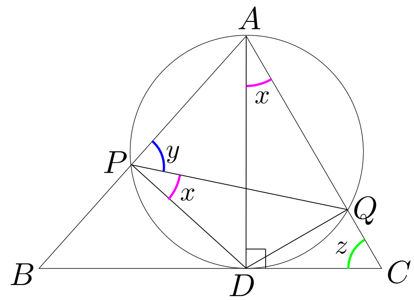
| $x - 2$ | $y - 6$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 1 | 12 | $(3, 18)$ |
| 2 | 6 | $(4, 12)$ |
| 3 | 4 | $(5, 10)$ |
| 4 | 3 | $(6, 9)$ |
| 6 | 2 | $(8, 8)$ |
| 12 | 1 | $(14, 7)$ |

**Problema 3.** La demostración la haremos por inducción en $n$ (avanzando de dos en dos). Si $n = 2$, el conjunto es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, que podemos partir en los subconjuntos $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$ y $\{3, 4\}$, cada uno con suma de elementos igual a 7. Si $n = 3$, el conjunto es $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ que tiene suma de elementos igual a 45, así que buscamos partirlo en conjuntos que tengan suma de elementos igual a 15. Una posibilidad es $\{6, 9\}$, $\{7, 8\}$ y $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Supongamos que para cierto entero positivo $n \geq 2$, podemos partir al conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$ en tres conjuntos $A$, $B$ y $C$ con la misma suma de elementos. Entonces, al conjunto $\{1, 2, \ldots, 3(n + 2) = 3n + 6\}$, lo podemos partir como sigue:

$$A \cup \{3n + 1, 3n + 6\},\ B \cup \{3n + 2, 3n + 5\},\ C \cup \{3n + 3, 3n + 4\}.$$

Es fácil ver que cada uno de los tres conjuntos $A\cup\{3n+1, 3n+6\}$, $B\cup\{3n+2, 3n+5\}$ y $C\cup\{3n+3, 3n+4\}$ tiene la misma suma de elementos. Esto termina la inducción.

**Problema 4.** Sean $x$, $y$ y $z$ los ángulos marcados en la figura.




Tenemos que los ángulos marcados con $x$ son iguales por abarcar el mismo arco del círculo. Sean $y = \angle APQ$ y $z = \angle ACD$. Por ser $AD$ un diámetro, se tiene que $x + y = 90°$; pero también $x + z = 90°$ porque en el triángulo $ADC$ el ángulo en $D$ es recto. Así, $y = z$. Por el criterio de semejanza AA, se concluye que los triángulos $APQ$ y $ACB$ son semejantes porque los ángulos en $A$ son comunes. Esto implica que la razón entre los diámetros de los círculos circunscritos están en la misma razón que los lados de estos triángulos, esto es,

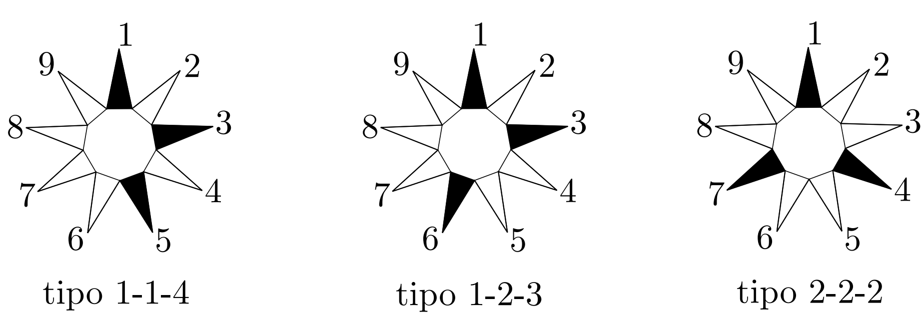
$$\frac{AD}{2r} = \frac{PQ}{CB}.$$

Como $AD$ es altura del triángulo $ABC$, se sigue que

$$(ABC) = \frac{AD \cdot CB}{2} = PQ \cdot r,$$

donde $(ABC)$ denota el área del triángulo $ABC$.

**Problema 5.** Consideremos los distintas posibles separaciones entre sí de los picos negros.




Para el tipo 1, hay las siguientes 9 posibilidades de elección de los picos negros:

$$(1, 3, 5),\ (2, 4, 6),\ (3, 5, 7),\ \ldots,\ (9, 2, 4).$$

Analicemos, la situación en que $(1, 3, 5)$ son negros. Tenemos que $6$ y $8$ deben tener el mismo color (lo que nos da $2$ posibilidades de elección de su color); además uno de $2$ o $4$ debe llevar ese mismo color. Así, del tipo 1 hay $9 \times 2 \times 2 = 36$ coloraciones posibles. Para el tipo 2 hay $18$ posibilidades para los picos negros. Son las siguientes:

$$(1, 3, 6),\ (2, 4, 7),\ (3, 5, 8),\ \ldots,\ (9, 2, 5)$$
$$(1, 8, 5),\ (9, 7, 4),\ (8, 6, 3),\ \ldots,\ (2, 9, 6).$$

Analicemos la situación de $(1, 3, 6)$. Los picos con los números $7$ y $9$ deben tener el mismo color (hay $2$ posibilidades de elección del color), y uno de los picos $4$ o $5$ debe llevar ese color. Así, en este caso las posibilidades son $18 \times 2 \times 2 = 72$.
Para el tipo 3, la elección de los picos negros puede hacerse de $3$ formas:

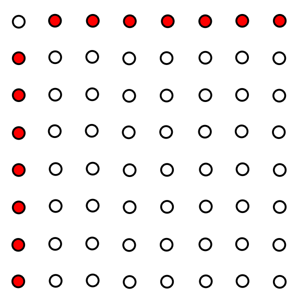
$$(1, 4, 7),\ (2, 5, 8),\ (3, 6, 9).$$

Analicemos el caso $(1, 4, 7)$. La elección del color para el pico con el número $2$ puede hacerse de $2$ formas. Ahora, hay $4$ parejas de picos que pueden llevar ese color, las cuales son:

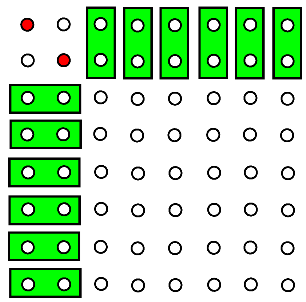
$$(5, 8),\ (5, 9),\ (6, 8),\ (6, 9).$$

Así, de este tipo hay $3 \times 2 \times 4 = 24$ coloraciones posibles.
Por lo tanto, hay $36 + 72 + 24 = 132$ coloraciones posibles.

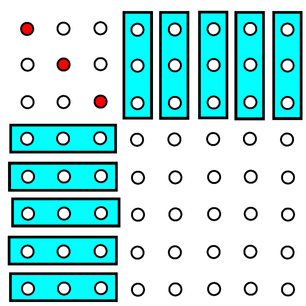
**Problema 6.** La respuesta es $14$. Una forma en que se logran $14$ vértices rojos se muestra en la figura siguiente.



Demostraremos que no es posible tener $15$ vértices rojos. Supongamos que sí y tomemos una configuración con $15$ puntos rojos que cumpla las condiciones.
Afirmamos que debe haber dos puntos que no comparten ni columna ni renglón. Para ver esto, usando el principio de las casillas tomemos un renglón que tenga (al menos) dos puntos rojos; digamos, sin pérdida de generalidad, que es el primer renglón, y que esos puntos rojos están en la primera y última columna. Entonces ya no hay más puntos en esas columnas y, como no todos los puntos rojos están en el primer renglón, debe haber otro en algún otro renglón. Sin pérdida de generalidad, supongamos que está en el segundo renglón, segunda columna.
Ahora notamos que en cada uno de los rectángulos verdes señalados en la figura puede haber a lo más un punto rojo pues si hubiera dos en alguno, entonces, junto con los dos puntos rojos de la figura serían vértices de un triángulo rectángulo con vértices rojos.



Hay $12$ rectángulos verdes y se han considerado ya $2$ puntos rojos. Como estamos suponiendo que hay $15$ puntos rojos, debe haber algún punto rojo fuera de los rectángulos (a partir del tercer renglón y tercera columna); sin pérdida de generalidad, está en el tercer renglón, tercera columna. Repetimos ahora el argumento de arriba con los rectángulos azules de la figura. Ahora son $10$ rectángulos azules y se han considerado ya $3$ puntos rojos, así que debe haber un punto rojo más a partir del cuarto renglón y cuarta columna.



Así sucesivamente, cada punto rojo nuevo que ponemos hace que reduzca en $2$ el número de rectángulos y se obtiene la configuración en la que todos los puntos de la diagonal son rojos. Entonces, no podría haber ningún otro punto rojo más, de manera que solo se tendrían $8$ puntos rojos, lo que es una contradicción.

# 5ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la $5^a$ Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas

(IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II de la $5^a$ OMMEB son los siguientes.

| **Nombre** | **Estado** | **Medalla** |
|---|---|---|
| Luis Veudi Vivas Pérez | Quintana Roo | Oro individual |
| Emiliano Hernández Barranco | Morelos | Oro individual |
| Sebastián Montemayor Trujillo | Nuevo León | Oro individual |
| Andrea Sarahí Cascante Duarte | Morelos | Oro individual |
| Javier Caram Quirós | Ciudad de México | Oro individual |
| Antonio Gutiérrez Meléndez | Coahuila | Oro individual |
| Rodrigo Saldívar Mauricio | Zacatecas | Oro individual |
| Leonardo Melga Rubí | Morelos | Oro por equipos |

En la prueba por equipos en el Nivel II, el Estado de Morelos obtuvo el primer lugar (con 240 puntos), el Estado de Zacatecas obtuvo el segundo lugar (con 197 puntos) y el Estado de Nuevo León obtuvo el tercer lugar (con 194 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Morelos (con 542 puntos).
Segundo lugar: Zacatecas (con 418 puntos).
Tercer lugar: Nuevo León (con 377 puntos).

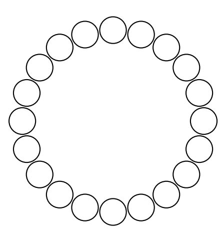
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel II de la $5^a$ OMMEB.

# Prueba Individual, Nivel II

## Parte A

1) En una olimpiada participan cinco hermanos: Saúl, César, Luis, Aldo y Rodrigo. Sus edades son $12, 13, 14, 17$ y $25$ años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Si se suma la edad de Saúl con la de César se obtiene la edad de Luis. Si se suma la edad de Saúl con la de Aldo se obtiene el doble de la edad de César. ¿Cuántos años tiene Rodrigo?

2) Diana escribe un número en cada círculo de manera que la suma de los números en los $12$ círculos es $162$.

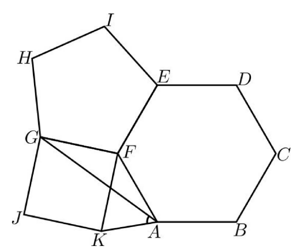


Alexandra llega y borra cada número, y en su lugar escribe la suma de los dos números que estaban junto al que borró. ¿Cuánto vale la suma de los 12 números que escribe Alexandra?

3) ¿Cuántos números de siete cifras cumplen que el producto de sus cifras es $3645$ y la suma de sus cifras no es un número primo?

4) Isaac escribe en orden alfabético todas las palabras de $5$ letras que se pueden formar con las letras $O, M, M, E$ y $B$. Así, la palabra que está en la posición $1$ es $BEMMO$, la que queda en la posición $2$ es $BEMOM$ y así sucesivamente. ¿En qué número de posición se encuentra la palabra $OMMEB$?

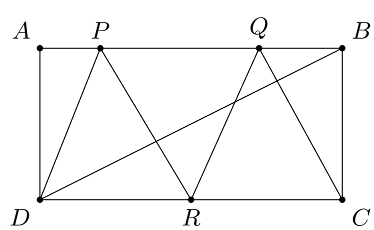
5) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, un pentágono regular cuyos vértices son $E, F, G, H, I$, y un cuadrado cuyos vértices son $F$, $G$, $J$, $K$. ¿Cuántos grados mide el ángulo $\angle KAG$?




6) Obtén la suma de todos los números que tienen exactamente un múltiplo en cada una de las $5$ columnas de la tabla siguiente.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |

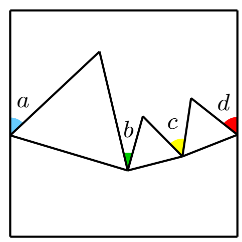
7) En el rectángulo $ABCD$ se tienen los puntos $P$ y $Q$ en el lado $AB$, y el punto $R$ en el lado $CD$. Se sabe que los triángulos $DPR$ y $RQC$ tiene área igual a 10 cm$^2$, y que $2BC = DC$. Calcula, en cm, la longitud del segmento $DB$.



8) Un triángulo rectángulo tiene sus vértices sobre una circunferencia de radio $5$. El área dentro del círculo que está afuera del triángulo es $25\pi - 24$. Encuentra la suma de las medidas de los catetos del triángulo.

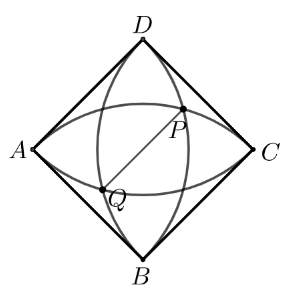
9) ¿Cuántos números de $3$ cifras distintas son múltiplos de $5$ y tienen sus cifras en orden decreciente (es decir, la cifra de las centenas es mayor que la de las decenas y la de las decenas es mayor que la de las unidades)?

10) En el interior de un cuadrado hay tres triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Si la suma de los ángulos $a$ y $b$ es $50°$, ¿cuál es el valor de la suma, en grados, de los ángulos $c$ y $d$?




11) El entero positivo $m$ cumple que divide a tres millones y a cuatro millones. También cumple que es múltiplo de $40$ y $125$. ¿Cuántos valores posibles hay para el entero $m$?

12) En la figura, $ABCD$ es un cuadrado de lado $1$ cm y los cuartos de círculo tienen centros en $A$, $B$, $C$ y $D$. ¿Cuál es la longitud, en cm, de $PQ$?



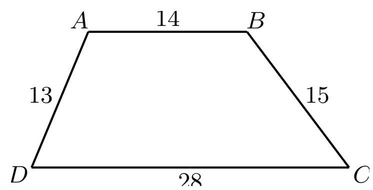

## Parte B

13) ¿Cuántos números enteros positivos de $5$ cifras (es decir, la primera cifra de izquierda a derecha es distinta de cero) hay tales que al sumar sus cifras se obtiene un divisor del número 2021?

14) Se tiene un cubo con sus caras pintadas de $6$ colores distintos, una de cada color. Cada cara se separa en $4$ cuadrados iguales trazando líneas perpendiculares a sus

lados que pasen por sus centros. En los $24$ cuadrados que resultan de la división, se acomodan los números del $1$ al $24$ de manera que después de colocarlos todos, la suma de cada $3$ números cuyos cuadrados tienen un vértice en común y este sea un vértice del cubo sea múltiplo de $3$ y, además, cada dos números cuyos cuadrados estén en la misma cara del cubo y estos compartan un lado sumen también un múltiplo de $3$. ¿De cuántas formas es posible realizar este acomodo?

15) Sea $ABCD$ un trapecio con $AB$ paralela a $CD$, $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 28$ cm y $DA = 13$ cm. Encuentra el área, en cm$^2$, de $ABCD$.




## Prueba por Equipos, Nivel II

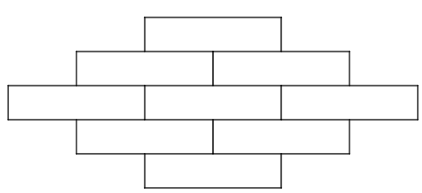
1) Un número de $5$ dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

   - El número $\overline{ab}$ es múltiplo de $2$.
   - El número $\overline{abc}$ es múltiplo de $3$.
   - El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de $4$.
   - El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de $5$.

   Por ejemplo, el número $50165$ es fósil porque $50$ es múltiplo de $2$, $501$ es múltiplo de $3$, $5016$ es múltiplo de $4$ y $50165$ es múltiplo de $5$. ¿Cuántos números fósiles hay?

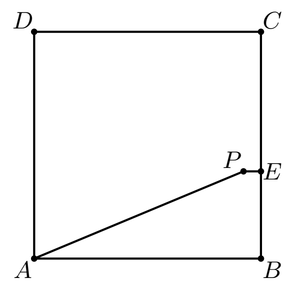
2) En el triángulo $ABC$, se tiene que $\angle ACB = 90°$, $AC = 12$ cm y $BC = 9$ cm. Sea $D$ un punto sobre la hipotenusa $AB$ tal que $AD = 5$ cm. Encuentra el valor de $CD^2$.

3) La siguiente figura consiste de $9$ rectángulos. ¿De cuántas formas se pueden pintar los rectángulos si se dispone de $4$ colores distintos y se quiere que no queden pintados del mismo color dos rectángulos vecinos?



4) Considera todos los números enteros positivos de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

5) El lado de un cuadrado $ABCD$ mide 13 cm. El punto $P$ está dentro del cuadrado y $E$ es un punto sobre el lado $BC$ tal que $PE$ es perpendicular a $CB$ y los segmentos $PE$ y $PA$ miden 1 cm y 13 cm, respectivamente. ¿Cuál es el área, en cm$^2$, del triángulo $PCD$?




6) Encuentra el mayor entero positivo $n$ tal que $7^n$ divide a

$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

(NOTA: Si $n$ es un entero positivo, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

7) Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1+2-3+4-5+6+7+8 = 18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.
***NOTA:*** *si más de una expresión de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

8) Sea $ABC$ un triángulo rectángulo con ángulo recto en $A$ y sea $\Gamma$ su circuncírculo, es decir, la circunferencia que pasa por los vértices $A$, $B$ y $C$. La altura desde $A$ corta a $\Gamma$ en $E$ y sea $M$ el punto medio del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a $A$, es decir, $M$ está sobre la circunferencia, entre $B$ y $C$, tal que las longitudes de los arcos $\widehat{BM}$ y $\widehat{MC}$ son iguales, y $A$ no está en los arcos $\widehat{BM}$ y $\widehat{MC}$. $EM$ corta a $BC$ en $J$. Demuestra que

$$\frac{JE}{JM} = \frac{AE}{BC}.$$

## Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

1) La respuesta es 17. La menor suma de dos edades es $12 + 13 = 25$, por lo que 12 y 13 son las edades de Saúl y César y, la edad de Luis, es 25. Si la edad de César

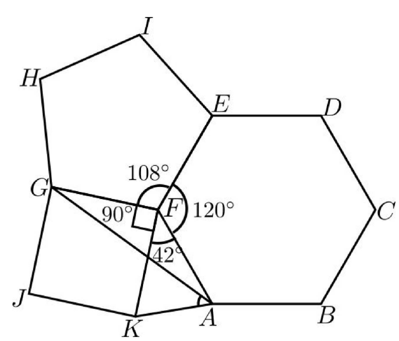
fuera $12$, entonces el doble, $24$, sería la suma de las edades de Saúl y Aldo. Como ninguna pareja de edades suma $24$, concluimos que la edad de César es $13$ y la edad de Saúl es $12$. El doble de $13$ es $26$ y $26 = 12 + 14$. De aquí que la edad de Aldo es $14$ y, por consiguiente, Rodrigo tiene $17$ años.

2) La respuesta es $384$. Cada número que escribe Diana va a formar parte de dos números que escribe Alexandra, ya que cada número se reemplaza por la suma de los dos números que tiene al lado. Entonces, la suma de los $20$ números que escribe Alexandra es el doble de la suma de los $20$ números que escribe Diana, esto es, es igual a $192 \times 2 = 384$.

3) La respuesta es $350$. Tenemos que $3645 = 3^6 \cdot 5$. Analicemos la suma de todas las posibilidades de cifras.
Si las cifras son $3, 3, 3, 3, 3, 3, 5$, entonces la suma es $23$, que es número primo.
Si las cifras son $9, 3, 3, 3, 3, 5, 1$, la suma es $27$. En este caso, hay $\frac{7!}{4!} = 210$ números, puesto que hay $7!$ permutaciones de las cifras pero hay que dividir entre $4!$ pues hay $4$ cifras iguales a $3$ y sus permutaciones son indistinguibles.
Si las cifras son $9, 9, 3, 3, 5, 1, 1$, la suma es $31$, que es un número primo.
Si las cifras son $9, 9, 9, 5, 1, 1, 1$, la suma es $35$. En este caso hay $\frac{7!}{3!3!} = 140$ números.
Por lo tanto, en total son $210 + 140 = 350$ números.

4) La respuesta es $60$. La palabra OMMEB es precisamente la última en el orden alfabético, por lo que necesitamos contar el número de palabras diferentes que se pueden formar. Basta permutar las cinco letras que hay y dividir entre $2$ por la repetición de la letra $M$. El resultado es $\frac{5!}{2} = \frac{5\times4\times3\times2}{2} = 60$.

5) La respuesta es $45^\circ$. Los ángulos internos de un cuadrado miden $90^\circ$, los ángulos internos de un pentágono regular miden $\frac{180^\circ\times3}{5} = 108^\circ$ y los ángulos internos de un hexágono regular miden $\frac{180^\circ\times4}{6} = 120^\circ$.




Entonces, tenemos que $\angle KFA = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ - 90^\circ = 42^\circ$. Como $FK = FA$, el triángulo $FKA$ es isósceles y, por consiguiente, $\angle KAF = \frac{180^\circ - 42^\circ}{2} = 69^\circ$.

Por otro lado, como $GF = FA$, el triángulo $GFA$ también es isósceles, lo cual implica que

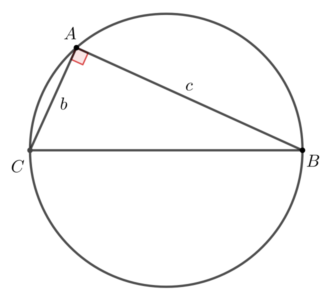
$$\angle GAF = \frac{180^\circ - \angle GFA}{2} = \frac{180^\circ - GFK - \angle KFA}{2} = \frac{180^\circ - 90^\circ - 42^\circ}{2} = 24^\circ.$$

Por lo tanto, tenemos que $\angle KAG = \angle KAF - \angle GAF = 69^\circ - 24^\circ = 45^\circ$.

6) La respuesta es $13$. Basta revisar los números del $1$ al $7$, pues el quinto múltiplo de un número mayor que $7$ es mayor que $5 \times 7 = 35$ y la tabla contiene los números del $1$ al $35$. Se pueden descartar fácilmente los números del $1$ al $5$ porque, por ejemplo, los múltiplos de $3$ aparecen cada $3$ números y hay $5$ columnas. Comprobamos que $6$ y $7$ sí cumplen, así que la suma buscada es $6 + 7 = 13$.

7) La respuesta es $40$. Si juntamos las bases $DR$ y $RC$ de los triángulos $PDR$ y $QRC$, obtenemos el lado $DC$ del rectángulo $ABCD$ y, el otro lado $BC$, es la altura de los dos triángulos. Luego, la suma de las áreas de los triángulos $PDR$ y $QRC$ es la mitad del área del rectángulo $ABCD$. Entonces, el área del rectángulo $ABCD$ es igual a $2(7 + 13) = 40$.

8) La respuesta es $14$. Considerando la siguiente figura, debemos determinar el valor de $b + c$.




Como el triángulo $ABC$ es rectángulo, $BC$ es un diámetro del círculo y, por consiguiente, $BC = 10$. El área que está fuera del triángulo, la podemos calcular restándole al área del círculo, el área del triángulo. Entonces, tenemos que

$$25\pi - 24 = 25\pi - \frac{bc}{2}.$$

De aquí, obtenemos que $bc = 48$. Por otra parte, por el teorema de Pitágoras en el triángulo $ABC$, tenemos que $b^2 + c^2 = BC^2 = 100$ y, por lo tanto,

$$(b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2 = 100 + 2 \cdot 48 = 196 = 14^2,$$

de donde se sigue que $b + c = 14$.

9) La respuesta es $42$. Tenemos dos posibilidades para el dígito de las unidades: $0$ o $5$. Si es $0$, los otros dos dígitos deben elegirse entre el $1$ y el $9$ y luego ordenarse de mayor a menor, así que hay $\binom{9}{2} = 36$ posibilidades.
Si es $5$, entonces los otros dos dígitos deben elegirse entre los números del $6$ al $9$, de manera que hay $\binom{4}{2} = 6$ posibilidades.
En total, son $36 + 6 = 42$ números.

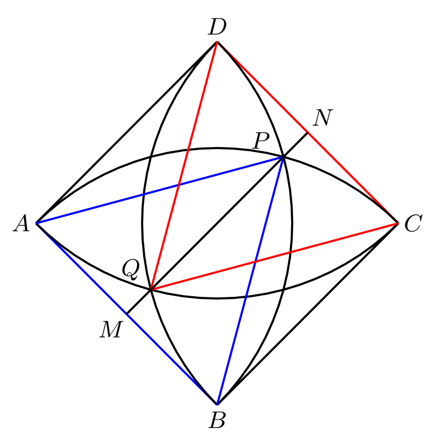
10) La respuesta es $130°$. Consideremos el hexágono formado por los dos vértices superiores del cuadrado y los cuatro vértices en los que están los ángulos marcados. La suma de los ángulos internos de este hexágono es igual a $4(180°)$. Sin embargo, esta misma suma se puede expresar como la suma de los $2$ ángulos rectos en los vértices del cuadrado, de los $6$ ángulos de $60°$ en los triángulos equiláteros y de los ángulos marcados. Es decir, si $S$ es la suma de ángulos buscada, entonces

$$2\,(90°) + 3\,(120°) + S + 50° = 4\,(180°)\,,$$

de donde obtenemos que $S = 130°$.

11) La respuesta es $16$. Notemos que el máximo común divisor de tres millones y cuatro millones es $10^6$ y el mínimo común múltiplo de $40$ y $125$ es $10^3$. Por las condiciones del problema, existe un entero $k$ tal que $m = 1000k$. Como $m$ debe dividir a $10^6$, entonces $k$ debe dividir a $10^3$. Para cada divisor positivo de $10^3 = 2^3 \cdot 5^3$ obtenemos un entero $m$ que cumple. Por lo tanto, hay $(3+1)(3+1) = 16$ valores para $m$.

12) La respuesta es $\sqrt{3} - 1 \approx 0.73$ cm. Sean $M$ el punto medio de $AB$ y $N$ el punto medio de $CD$.



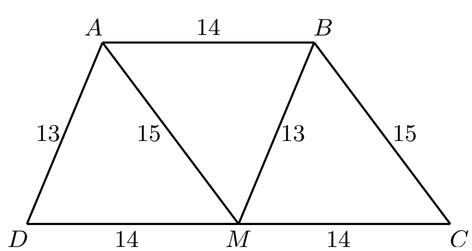

Tenemos que $ABP$ es un triángulo equilátero de lado 1 cm, así que $PM = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm, por ser una altura. Luego, $NP = 1 - PM = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. De manera similar, tenemos que $QN = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Por lo tanto, $PQ = 1 - QM - NP = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1 \approx 0.73$ cm.

## Parte B

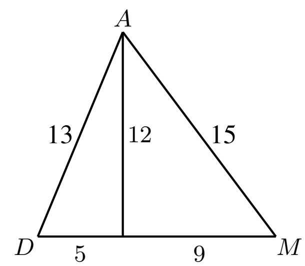
13) Los divisores positivos del número 2021 son 1, 43, 47 y 2021. La mayor suma de dígitos que se puede obtener con un número entero de 5 cifras es 45, por lo que se descartan las posibilidades de obtener una suma igual a 47 o una suma igual a 2021. Para obtener una suma de 43, se requieren tres números 9 y dos números 8, o bien, cuatro números 9 y un número 7. El número de permutaciones posibles con $\{9, 9, 9, 8, 8\}$ es igual a 10, mientras que el número de permutaciones posibles con $\{9, 9, 9, 9, 7\}$ es 5. Esto significa que hay $10 + 5 = 15$ números enteros positivos de 5 cifras que al sumar sus cifras se obtiene 43. Para obtener una suma de 1 solamente hay un caso y es el número 10000. Por lo tanto, hay 16 números enteros positivos de 5 cifras que al sumar sus cifras se obtiene un divisor del número 2021.

14) Analizando una esquina, podemos observar que tres cuadros que comparten una esquina deben tener números que tengan todos sus residuos módulo 3 iguales o todos distintos. De analizar las caras del cubo, notamos que al saber el residuo módulo 3 de un número en algún cuadro, las congruencias de sus vecinos quedan determinadas (al haber un único residuo que sume 0 con el del cuadro), determinando así las congruencias de toda su cara.
Si tomamos una cara con una casilla que tiene un número divisible por 3, todos los números en esa cara serán divisibles por 3 y ninguna de las caras vecinas a esta pueden tener un múltiplo de 3, puesto que las esquinas que comparten indicarían que las otras dos caras adyacentes a ambas tienen todas sus caras con múltiplos de 3, a pesar de solo haber 8 múltiplos de 3 entre 1 y 24. Así, los múltiplos de 3 estarán en dos caras opuestas y cada una de las demás caras tendrá en un patrón de ajedrez números congruentes a 1 o 2 módulo 3.
Hay 3 formas de elegir las dos caras opuestas que tendrán a los múltiplos de 3, luego 2 formas de escoger el patrón de ajedrez de números congruentes a $i$ módulo 3 para cada $i \in \{0, 1, 2\}$. Esto resulta en un total de $6 \times (8!)^3$ acomodos posibles.

15) Sea $M$ el punto medio de $CD$. Tenemos que $DM = MC = 14 = AB$, lo cual implica que $ABMD$ es un paralelogramo con $AM = BC = 15$ y $BM = AD = 13$. Por lo que el área de $ABCD$ es el triple del área de un triángulo de lados 13, 14 y 15.

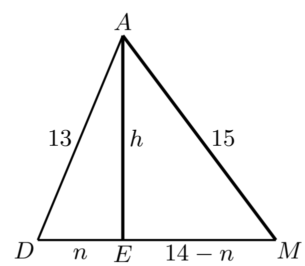



Como ese triángulo se puede construir con dos triángulos de lados 13, 12, 5 y 15, 12, 9, tiene altura 12 y área 84.




Por lo tanto, el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

**Solución alternativa.** Consideremos el triángulo $ADM$ y tracemos su altura $AE$ desde el vértice $A$ y sean $h = AE$, $n = DE$ y $EM = 14 - n$ como se muestra en la figura.



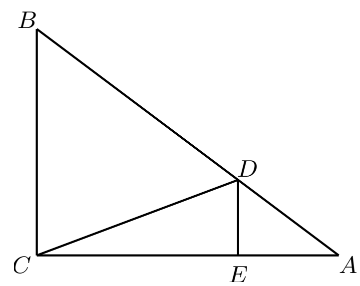

Entonces, por el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos $AED$ y $AEM$, tenemos que $13^2 - n^2 = h^2 = 15^2 - (14-n)^2$, de donde $(14-n)^2 - n^2 = 15^2 - 13^2$, esto es, $14^2 - 28n = (15+13)(15-13) = 28(2)$. De aquí, obtenemos que $28n = 14^2 - 2(28) = 2(7)(14) - 2(28) = 7(28) - 2(28) = (7-2)(28) = 5(28)$, de donde se sigue que $n = 5$. Por lo tanto, $DE = n = 5$, $EM = 14 - n = 9$, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ y el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

# Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) Por el criterio de divisibilidad del $4$, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de $4$, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de $4$. Como hay $25$ múltiplos de $4$ que se pueden formar con dos dígitos, tenemos $25$ maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de $2$, $b$ debe ser par. Por lo tanto, tenemos $5$ maneras de elegir al dígito $b$.
Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de $3$, por el criterio de divisibilidad del $3$ debemos tener que $a + b + c$ es múltiplo de $3$. Si $b + c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o $18$, entonces $a$ debe ser $3, 6$ o $9$. Si $b + c$ es $4, 7, 10, 13$ o $16$, entonces $a$ debe ser $2, 5$ u $8$. Si $b + c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o $17$, entonces $a$ debe ser $1, 4$ o $7$. En cualquier caso, $a$ siempre tiene $3$ opciones.
Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de $5$, $e$ debe ser $0$ o $5$, esto es, $e$ tiene $2$

opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

2) En el triángulo $ACD$, tracemos la altura desde el vértice $D$ y sea $E$ el pie de dicha altura.




Por el teorema de Pitágoras en el triángulo $ABC$, tenemos que

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225.$$

Así que $AB = 15$. Como $\angle DAE = \angle BAC$ y $\angle AED = \angle ACB = 90°$, por el criterio de semejanza AA tenemos que los triángulos $ADE$ y $ABC$ son semejantes. De aquí que $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, esto es, $\frac{5}{15} = \frac{AE}{12} = \frac{DE}{9}$. Esto implica que $AE = 4$, $DE = 3$ y, por lo tanto, $CE = 8$. Aplicando ahora el teorema de Pitágoras en el triángulo $CDE$, concluimos que $CD^2 = CE^2 + DE^2 = 73$.

3) Sean $A$, $B$, $C$ y $D$ los colores. Empezamos viendo las opciones para colorear el renglón central. Si la primera zona se pinta del color $A$, la segunda irá de un color diferente, digamos $B$ y la tercera tendrá dos opciones: ser $A$ de nuevo o ser un tercer color, $C$.
Caso 1: $A$, $B$, $A$. Hay 4 maneras de elegir el color $A$ y 3 maneras de elegir el color $B$. Una vez elegidos, en el segundo y cuarto renglones solo pueden aparecer los colores $C$ y $D$. De hecho, aparecerán ambos. Hay 2 opciones: primero $C$ y luego $D$ o primero $D$ y luego $C$. Finalmente, en el primer y último renglón tendremos solo $A$ y $B$ como opciones. En total hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$ maneras.
Caso 2: $A$, $B$, $C$. Hay 4 maneras de elegir el color $A$, 3 maneras de elegir el color $B$ y 2 maneras de elegir el color $C$. Una vez elegidos, tanto el segundo renglón como el tercero tendrán solo tres opciones. Primero $C$, luego $A$; primero $C$, luego $D$ o primero $D$ y luego $A$. Finalmente, en el primer y último renglón tendremos solo dos opciones. En total hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 864$ maneras.
Por lo tanto, la respuesta es $192 + 864 = 1056$.

4) Sea $n = abcdefg$ uno de los números buscados. Por el criterio de divisibilidad del 11, $x = a + c + e + g - (b + d + f)$ debe ser múltiplo de 11. Nótese que el valor mínimo de $x$ es $(1 + 1 + 1 + 1) - (3 + 3 + 2) = -4$, mientras que el valor máximo de $x$ es $(3 + 3 + 2 + 2) - (1 + 1 + 1) = 7$, por lo que $x = 0$ es el único valor posible. Sea $y = a + c + e + g = b + d + f$. Entonces, la suma de los dígitos de $n$ es $2y$.

Obsérvese que el valor mínimo de $2y$ es $3+3+1+1+1+1+1 = 11$, mientras que el valor máximo de $2y$ es $3+3+2+2+2+2+2 = 16$, de donde se sigue que $y$ puede ser 6, 7 u 8.

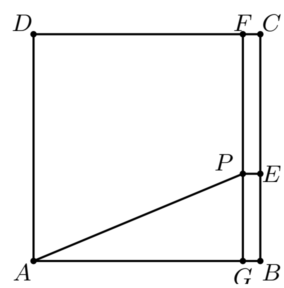
a) Si $y = 6$, entonces no puede suceder que dos de los dígitos $b$, $d$ y $f$ sean 3, al igual que con $a$, $c$, $e$ y $g$. Luego, dos de los dígitos $b$, $d$ y $f$ suman 3, lo que implica que $\{b, d, f\} = \{3, 2, 1\}$, los cuales se pueden ordenar de $3! = 6$ formas. Como tres de los dígitos $a$, $c$, $e$ y $g$ suman 3, entonces esos tres tienen que ser iguales a 1 y el otro igual a 3, dando un total de $4 \cdot 6 = 24$ números en este caso.

b) Si $y = 7$, como $b + d + f = 7$, entonces $b$, $d$, $f$ deben ser 1, 3, 3 (en algún orden) o 2, 2, 3 (en algún orden). En el primer caso, como $a + c + e + g = 7$ y ninguno es 3, se tiene que tres de los dígitos deben ser 2 y el otro debe ser 1, dando $3 \cdot 4 = 12$ números. En el segundo caso, uno de los números $a$, $c$, $e$, $g$ es 3 y los demás suman 4, por lo que los dígitos $a$, $c$, $e$, $g$ son 1, 1, 2, 3 en algún orden, dando $3 \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1} = 36$ números. Así, en este caso hay un total de $12 + 36 = 48$ números que cumplen.

c) Si $y = 8$, como $b + d + f = 8$, la única opción es que $b$, $d$, $f$ sean 2, 3, 3 en algún orden. Además, como $a + c + e + g = 8$ y ninguno es 3, entonces $a = c = e = g = 2$. Se sigue que solo hay 3 números en este caso.

Por lo tanto, en total hay $24 + 48 + 3 = 75$ números que cumplen.

5) Tracemos la perpendicular por $P$ a los lados $AB$ y $CD$. Esta recta interseca a $AB$ y a $CD$ en $G$ y $F$, respectivamente.




Nótese que $PEBG$ es un rectángulo, por lo que $GB = PE = 1$ cm. Entonces, $AG = AB - GB = 12$ cm y, por el teorema de Pitágoras, $GP = \sqrt{PA^2 - AG^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. Esto implica que $PF = GF - GP = 13 - 5 = 8$ cm. Por lo tanto, el área del triángulo $CPD$ es igual a $\frac{PF \cdot CD}{2} = \frac{13 \cdot 8}{2} = 52$ cm$^2$.

6) Si $k$ es un entero positivo, entonces $k \cdot k! = k!\,[(k+1) - 1] = (k+1)! - k!$ Usando esta relación y llamando $S$ a la suma $49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!$, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= 49\,(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49!) \\ &= 49[(2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + (50! - 49!)] = 49\,(50! - 1!)\,. \end{aligned}$$

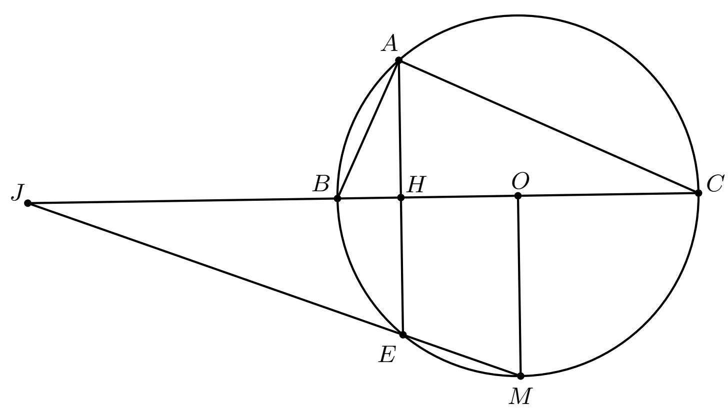
Como $49 \mid 50!$, tenemos que $\text{mcd}(49, 50! - 1) = 1$, por lo que 7 no divide a $50! - 1$. Así, los únicos factores 7 de $49(50! - 1)$ son los factores 7 de 49, de los cuales hay 2.

7) El número total de números escritos por Ángel es $2^8 = 256$, por la diferente elección de signo de los 8 números. Notemos que la cantidad de números positivos es igual a la cantidad de números negativos, pues si una expresión da como resultado un número positivo, invirtiendo los signos de los 8 números que pertenecen a la operación se obtiene un número negativo (que corresponde al número positivo mencionado anteriormente), por lo que basta enfocarse en aquellas expresiones cuyo resultado es 0. Para eso, los números del 1 al 8 se dividen en dos conjuntos $A$ y $B$ dependiendo de cuáles serán positivos (conjunto $A$) y cuáles serán negativos (conjunto $B$). Como el 8 pertenece a alguno de los dos conjuntos, sin pérdida de generalidad se puede asumir que está en $A$ y multiplicar por 2 la cantidad de formas que se obtengan.
La suma de ambos conjuntos debe ser la misma. Como la suma de los 8 números es $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$, en cada conjunto se debe sumar 18, por lo que una vez puesto el 8 en $A$, el resto de los números de $A$ deben sumar $18 - 8 = 10$. Así, obtenemos las siguientes posibilidades:

$$8, 1, 2, 3, 4; \quad 8, 7, 2, 1; \quad 8, 6, 3, 1; \quad 8, 5, 3, 2; \quad 8, 5, 4, 1; \quad 8, 7, 3; \quad 8, 6, 4.$$

Son 7 posibilidades si 8 está en $A$, por lo que Ángel escribe $7 \cdot 2 = 14$ veces el número 0 en el pizarrón. Por lo tanto, la cantidad de resultados positivos es $\frac{256-14}{2} = 121$.

8) Sea $H$ el punto de intersección de $AE$ con $BC$ y consideremos al centro de la circunferencia $\Gamma$. Este punto es el punto medio de $BC$, ya que el triángulo $ABC$ es rectángulo.




Al ser $M$ punto medio del arco $\widehat{BC}$, tenemos que $OM$ y $BC$ son perpendiculares y también tenemos que $AE$ y $BC$ son perpendiculares. Entonces, al ser $OM$ y $AE$

perpendiculares a $BC$, obtenemos que $OM$ y $AE$ son paralelas. Por el teorema de Tales, tenemos que los triángulos $JHE$ y $JOM$ son semejantes, lo cual implica que $\frac{JE}{JM} = \frac{HE}{OM}$. Sin embargo, por simetría tenemos que $HE = AH$, así que $HE = \frac{1}{2}AE$. Además, $OM$ es el radio del círculo y como $BC$ es un diámetro, tenemos que $OM = \frac{1}{2}BC$. Por lo tanto,

$$\frac{JE}{JM} = \frac{HE}{OM} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{1}{2}BC} = \frac{AE}{BC}.$$

# Competencia Internacional de Matemáticas 2021 (Nivel Secundaria)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2021 (IIMC 2021), se llevó a cabo de forma virtual del 27 de julio al 1 de agosto de 2021 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de oro, 4 medallas de plata, 9 medallas de bronce y una mención honorífica, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y dos medallas de bronce.

Por segunda ocasión, un estudiante mexicano de primaria logra una medalla de oro en esta competencia internacional. En el año 2019, cuando esta competencia se realizó en Sudáfrica, un estudiante de la Ciudad de México obtuvo por primera vez una medalla de oro y México fue catalogado por los organizadores como "potencia matemática emergente". En el año 2020 la IMC se suspendió debido a la emergencia sanitaria de Covid-19, para evitar contagios entre los cientos de niños y jóvenes de más de 30 países que ya estaban convocados para viajar a Indonesia. En este 2021, derivado del entusiasmo que se generó en 2019 por el triunfo de los competidores de ese año, México participó por primera vez con dos equipos de secundaria y dos equipos de primaria. En total, 16 competidores mexicanos realizaron a distancia los exámenes correspondientes, desde 10 Estados del país.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. Como verás, la mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.
La prueba individual en el nivel Secundaria, consiste de 15 preguntas también, dividi-

das en dos secciones A y B, para resolver en un tiempo de 120 minutos. En la sección A son 12 preguntas con las mismas reglas que en el nivel elemental; en la sección B son 3 preguntas, cada una vale 20 puntos (es decir, lo equivalente a 4 preguntas de la sección anterior), hay puntos parciales y se tiene una página completa -y nada más- para redactar las soluciones. Esta segunda parte es similar a un examen común y corriente de Olimpiada con la restricción de espacio y tiempo.
Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la $4^a$ OMMEB realizada en octubre de 2020 de forma virtual.

Los resultados individuales de los equipos de Secundaria en la IIMC 2021 fueron los siguientes.

| **Nombre** | **Estado** | **Medalla** | **Equipo** |
|---|---|---|---|
| Franco Giosef Álvarez González | Chiapas | Bronce | A |
| Fernando Álvarez Ruiz | Nuevo León | Bronce | A |
| Emiliano Hernández Barranco | Morelos | Bronce | A |
| Sebastián Montemayor Trujillo | Nuevo León | Bronce | A |
| Rosa Victoria Cantú Rodríguez | Ciudad de México | Bronce | B |
| Mateo Iván Latapí Acosta | Ciudad de México | Plata | B |
| Isaac Montaño Manríquez | Baja California Sur | Plata | B |
| Daniel Ramírez Kühn | San Luis Potosí | Mención | B |

En la prueba por equipos, los resultados fueron los siguientes: El equipo A obtuvo medalla de plata y el equipo B obtuvo medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: Kevin William Beuchot Castellanos (líder del Equipo A), Gerardo Hernández Valdez (colíder

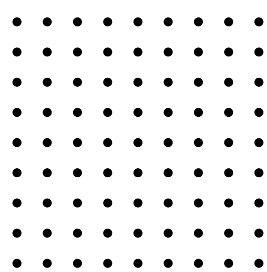
del Equipo A), Adán Medrano Martín del Campo (líder del Equipo B) y Olga Medrano Martín del Campo (colíder del Equipo B).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el Nivel Secundaria de la IMC del año 2021.

# Examen Individual, Nivel Secundaria

## Sección A

1) Se tienen $81$ puntos acomodados en un tablero de $9 \times 9$ como se muestra en la figura. Si la distancia entre cualesquiera dos puntos adyacentes en la misma fila o columna es de $1$ cm, determina el número de rectángulos que se pueden formar teniendo un área de $12$ cm$^2$, donde los cuatro vértices del rectángulo deben ser parte de los $81$ puntos marcados.



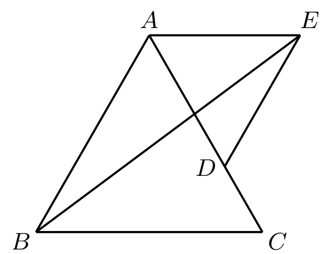
2) Hay $99$ números colocados alrededor de un círculo, cada uno de ellos es $1$ o $-1$. Se calcula el producto de cada bloque de $10$ números adyacentes alrededor del círculo. Sea $S$ la suma de estos $99$ productos. Si hay al menos un $1$ alrededor del círculo y al menos un $-1$ alrededor del círculo, ¿cuál es la diferencia entre el mayor valor posible y el menor valor posible de $S$?

3) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios cuadráticos con coeficientes enteros tales que el coeficiente líder (principal) de ambos es 1. Se sabe que $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$ y $P(0) + Q(0) = 2$. Encuentra el valor de $P(3) + Q(3)$.

4) Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$, una permutación aleatoria de los números 1, 2, 3, …, 9. ¿Cuál es el mayor valor posible de

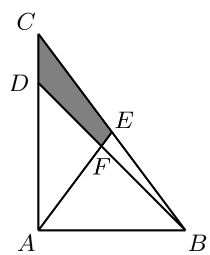
$$|a_1 - \sqrt{3}a_2| + |a_2 - \sqrt{3}a_3| + |a_3 - \sqrt{3}a_4| + \cdots + |a_8 - \sqrt{3}a_9| + |a_9 - \sqrt{3}a_1|?$$

5) En la figura de abajo, $ABC$ y $ADE$ son ambos triángulos equiláteros cuyos lados miden 6 cm y 4 cm, respectivamente. Encuentra la longitud, en cm, de $BE$.



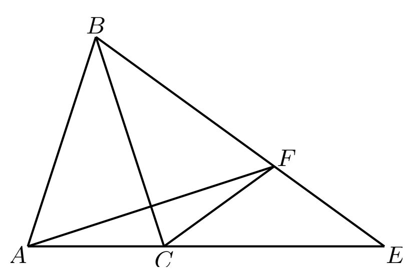

6) Sean $x$ y $y$ números reales tales que $(2x+\sqrt{1+4x^2})(3y+\sqrt{1+9y^2}) = 1$. Encuentra el valor numérico de $(2x+3y)^2$.

7) En la figura, el ángulo en $A$ es recto, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm y $CD = 1$ cm. Si $BE = EC$, ¿cuál es el área, en cm$^2$, de la región sombreada?




8) Si un número primo se puede escribir de la forma $k^k+1$, donde $k$ es un entero positivo, entonces tal número primo se conoce como un *número primo IMC*. Encuentra el mayor número primo IMC menor o igual a 20212021.

9) En un triángulo isósceles $ABC$, donde $AB = BC$, el punto $E$ está sobre la extensión del lado $AC$, donde $C$ está entre $A$ y $E$ y, el punto $F$, está sobre el segmento $BE$ de tal forma que $AC = CF = FE$ y $\angle BAF = 3\angle FAE$, como se muestra en la figura. Encuentra la medida, en grados, de $\angle FAE$.




10) Encuentra el mayor entero positivo $n$ tal que $n+3$ divide a $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

11) La nación de *IMC-landia* consiste de 8 islas, de las cuales no hay dos que estén conectadas entre sí. Como cada ciudadano quiere visitar cada una de las otras islas,

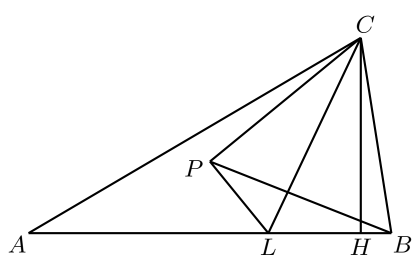
el gobierno planea construir puentes entre las islas. Sin embargo, cada isla tiene un volcán que podría hacer erupción en cualquier momento, destruyendo esa isla y cualquier puente que esté conectado a ella. El gobierno quiere garantizar que después de cualquier erupción, un ciudadano de cualquiera de las 7 islas restantes pueda hacer un viaje, visitando cada una de las islas restantes exactamente una vez y regresando a su isla de origen (solo al final del viaje). ¿Cuál es el mínimo número de puentes que se deben construir?

12) Dado que $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{1}{2021}$, encuentra el valor de

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

## Sección B

1) Sea $P$ un punto interior del triángulo acutángulo $ABC$ tal que $CP = BP$ y $\angle BPC = 2\angle BAC$. La bisectriz del ángulo $\angle ACB$ y $AB$, se intersecan en $L$. Sea $H$ un punto sobre $AB$ tal que $CH \perp AB$, donde $L$ se encuentra entre los puntos $A$ y $H$, como se muestra en la figura. Si $CP = CH = 28$ cm y el área del triángulo $CPL$ es 196 cm$^2$, encuentra la medida, en cm, de $LH$.

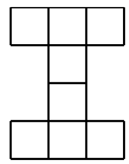



2) En una clase de 14 niños y 17 niñas se van a distribuir algunos dulces. Cualesquiera dos niños reciben la misma cantidad de dulces, mientras que cualesquiera dos niñas reciben la misma cantidad de dulces. Cada persona recibe al menos un dulce, pero el número de dulces que recibe cada niño puede ser diferente al que recibe cada niña. Si el número total de dulces no se puede redistribuir de ninguna otra manera de tal forma que se cumplan las condiciones, determina el mayor número de dulces que se pueden tener.

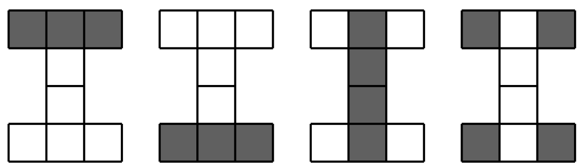
3) Sean $M$ y $N$ enteros no negativos tales que $C_{1010}^{2021}$ es divisible por $2^M \times 3^N$. Encuentra la suma de todos los valores posibles de $M + N$. (Nota: $C_{1010}^{2021}$ se refiere a la combinación de 2021 objetos de donde se toman 1010 al mismo tiempo sin repetición).

# Examen por Equipos, Nivel Secundaria

1) Considera el diagrama en forma de "I" que se muestra a continuación.



En cada cuadrado se coloca exactamente un número de los siguientes ocho números: $-1, -1, -1, 0, 0, 1, 1$ y $1$, de tal forma que las sumas de los números en los cuadrados de las figuras sombreadas (como se ve en las figuras de abajo) sean todas iguales. ¿De cuántas maneras se pueden colocar los números en el diagrama?

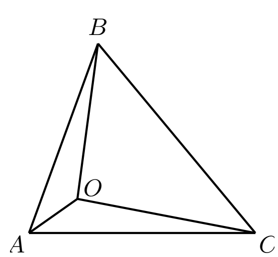


2) Sean $x$ y $y$ números reales tales que

$$\begin{aligned} x^2 + 5xy + y^2 &= 7, \\ x^2y + xy^2 &= 2, \\ x + y &\neq 2. \end{aligned}$$

Encuentra todos los valores posibles de $x^2 + y^2$.

3) Sean $ABC$ un triángulo y $O$ un punto en su interior tal que $\angle ABO = \angle CAO$, $\angle BAO = \angle BCO$ y $\angle BOC = 90°$, como se muestra en la figura. Si $AC = 2$ cm, encuentra la medida, en cm, de $OC$.

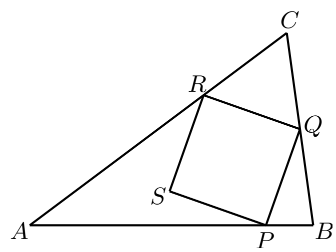



4) Encuentra todos los enteros $m$ de cuatro dígitos que son menores que $2021$ para los cuales existe un entero positivo $n$ tal que $m - n$ es un número primo positivo y $m \times n$ es un cuadrado perfecto.

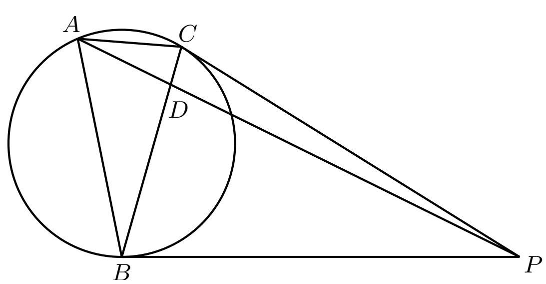
5) Los puntos $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ están sobre una línea, en este orden, de forma que $A_1A_2 = \frac{1}{1\times 2}$ cm, $A_2A_3 = \frac{1}{2\times 3}$ cm, $A_3A_4 = \frac{1}{3\times 4}$ cm,$\ldots$, $A_{99}A_{100} = \frac{1}{99\times 100}$ cm. Si el segmento $A_mA_n$, donde $1 \leq m < n \leq 100$, tiene una longitud de $\frac{1}{15}$ cm, ¿cuál es el mayor valor posible de $m + n$ que satisface las condiciones dadas?

6) Usando cuatro colores diferentes, cada uno al menos una vez, ¿de cuántas maneras se pueden pintar los enteros $1, 2, 3, \ldots, 10$, de tal forma que cualesquiera dos enteros cuya diferencia es un número primo deben estar pintados de colores diferentes?

7) En la figura, $ABC$ es un triángulo donde $AB = 60$ cm y $AC = 68$ cm. $PQRS$ es un cuadrado tal que $AP = 50$ cm, $AR = 46$ cm y $Q$ es el punto medio de $BC$. ¿Cuál es la razón del área del cuadrado $PQRS$ al área del triángulo $ABC$?




8) Sea $ABC$ un triángulo acutángulo inscrito en el círculo $O$. Sea $P$ un punto fuera de $O$ tal que $PB$ y $PC$ son ambos tangentes a $O$. Si $AP$ y $BC$ se intersecan en $D$ y $\frac{BD}{CD} = 5$, ¿cuál es el valor de $\frac{AB}{AC}$?




9) Un entero positivo $n$ se dice que es *interesante* si satisface la siguiente propiedad: Si $p$ es un número primo divisor de $n$, entonces $2p+1$ es un divisor de $n$. Encuentra la cantidad total de divisores positivos del menor número interesante.

10) ¿De cuántas maneras diferentes se puede expresar 2021 como una suma usando los números $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512$ y $1024$, donde solo se permite que cada uno de los once números aparezca a lo mucho dos veces en la suma? El orden de los términos en la suma no importa. Por ejemplo, $2+1+1$ y $1+2+1$ se consideran como la misma manera de expresar a $4$.

# Soluciones del Examen Individual

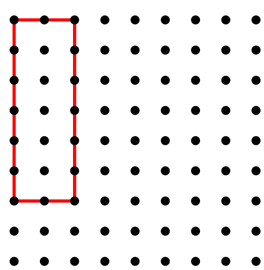
## Parte A

1) La respuesta es $142$. Si consideramos el lado más corto del rectángulo en cuestión, este debe ser a lo mcuho $\sqrt{12}$, pero también debe ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo con catetos enteros. Un lado que sea paralelo a las líneas de la cuadrícula de lado $2$ o $3$ funciona, y un lado que sea perpendicular a las diagonales de cada cuadrito de la cuadrícula de lado $\sqrt{2}$ y $2\sqrt{2}$ también funciona, pero se puede revisar que $\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$ y $\sqrt{3^2+1}=\sqrt{10}$ no producirán un lado de un rectángulo que sea válido. Así, hay dos casos posibles.

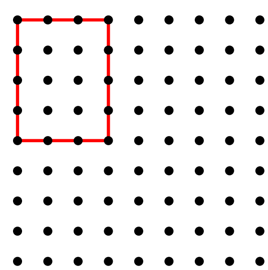
Caso 1) La base está hecha de lados de la cuadrícula (cada uno de $1$ cm de lado). En este caso, para factorizar a $12$ en factores enteros positivos menores que $9$, tenemos las siguientes posibilidades:

(A) $12 = 2 \times 6 = 6 \times 2$. Si el lado de longitud $2$ es horizontal, existen $7$ maneras de posicionar este rectángulo horizontalmente y $3$ maneras de posicionarlo verticalmente, y si el lado de longitud $2$ es vertical hay la misma cantidad de maneras, por lo que el número de rectángulos que se pueden formar es $7 \times 3 \times 2 = 42$.

(B) $12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$. Similarmente, el número de rectángulos que se pueden formar es $6 \times 5 \times 2 = 60$.



**(a)** *Caso 1 (A)*



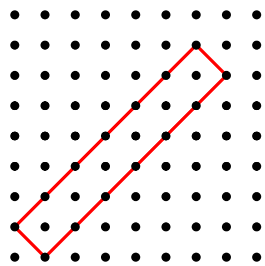
**(b)** *Caso 1 (B)*

Caso 2) La base está hecha de diagonales de la cuadrícula (cada una de $\sqrt{2}$ cm de longitud). Así, tenemos que $\left(x\sqrt{2}\right)\left(y\sqrt{2}\right)=12$, por lo que $xy=6$. Hay dos maneras de factorizar a $6$ en enteros positivos:

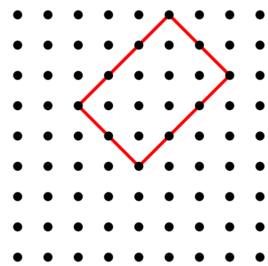
(A) $6 = 1 \times 6 = 6 \times 1$. Análogamente, el número de rectángulos que se pueden formar es igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$.

(B) $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$. Análogamente, el número de rectángulos que se pueden formar es igual a $4 \times 4 \times 2 = 32$.

Combinando todos los casos, el número total de rectángulos que se pueden formar es $42 + 60 + 8 + 32 = 142$.



**(a)** *Caso 2 (A)*



**(b)** *Caso 2 (B)*

2) La respuesta es $192$. Como cada producto es igual a $1$ o $-1$, el valor de $S$ siempre es impar. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ los números en orden cíclico, con $a_n = a_{n-99}$ siempre que $n > 99$.

    (a) El valor mínimo de $S$ es $-97$. Este puede ser alcanzado con $10$ copias de $-1$, donde cada par adyacente de $-1$ es separado por $9$ copias de $1$, excepto por una pareja que es separada por solamente $8$ copias de $1$. Cada bloque de $10$ números adyacentes contendrán exactamente un $-1$, con la única excepción del bloque con un $-1$ en cada extremo y el resto siendo $1$. Si $-97$ no es el mínimo, entonces debe ser $-99$, lo que significa que los $99$ productos deben ser iguales a $-1$. Como $a_1a_2\cdots a_{10} = -1 = a_2a_3\cdots a_{11}$, debe suceder que $a_1 = a_{11}$. Similarmente, $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{91}$. Como $10$ y $99$ son primos relativos, entonces con este proceso se puede probar que todos los $a_i$'s son iguales, lo cual es imposible.

    (b) El valor máximo de $S$ es $95$. Esto se puede alcanzar teniendo dos copias adyacentes de $-1$ y el resto de los números iguales a $1$. Hay exactamente dos bloques de $10$ números adyacentes que contendrán exactamente un $-1$ cuyo producto será igual a $-1$. Todos los demás bloques tendrán bloque igual a $1$. Si $95$ no es el máximo valor, debe ser $97$ o $99$. No puede ser $99$ pues entonces todos los números serían iguales a $1$ (por el razonamiento hecho en el inciso anterior), lo cual no es posible. Supongamos que es $97$, lo cual significa que exactamente uno de los bloques de $10$ números adyacentes es igual a $-1$. Sea $a_1a_2\cdots a_{10} = -1$. Entonces $a_1 = -a_{11}$ pero $a_{11} = a_{21} = \cdots = a_{91}$. Como $10$ y $99$ son primos relativos, entonces con este razonamiento se prueba que todos los números son iguales excepto uno, donde sucederá que habrá exactamente diez bloques de $10$ números adyacentes con producto igual a $-1$, teniendo así $S = 79 \neq 97$.

    Por lo tanto, la diferencia entre el máximo valor y el mínimo valor es igual a $95 - (-97) = 192$.

    **Solución alternativa.** Como el producto total de los $99$ productos es igual a

    $$(a_1a_2\cdots a_{10})(a_2a_3\cdots a_{11})\cdots(a_{99}a_1\cdots a_9) = (a_1a_2\cdots a_{99})^{10} = (\pm 1)^{10} = 1,$$

    debe suceder que hay una cantidad par de $-1$'s entre los $99$ productos. Así, $S = (99-2k) - 2k = 99 - 4k$ para algún entero $k$, lo cual descarta las posibilidades

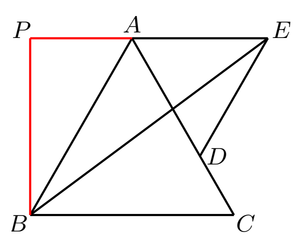
$S = 97$ y $S = -99$. Los ejemplos para $S = 95$ y $S = -97$ son los mismos que en la primera solución, dando así que la diferencia buscada es $95 - (-97) = 192$.

3) La respuesta es $14$. Sean $P(x) = x^2 + ax + b$ y $Q(x) = x^2 + cx + d$. De las condiciones $P(Q(0)) = Q(P(0)) = 1$, tenemos que $d(d + a) + b = 1$ y $b(b + c) + d = 1$. De la condición $P(0) + Q(0) = 2$, tenemos que $b + d = 2$. Todo esto implica que $d(d + a) = d - 1$ y $b(b + c) = b - 1$. Por lo tanto, $d$ divide a $d - 1$ y $b$ divide a $b - 1$. Luego, tenemos que $b = \pm 1$ y $d = \pm 1$. Como $b + d = 2$, la única posibilidad es $b = d = 1$ y, por consiguiente, $a = c = -1$. Entonces, $P(x) = Q(x) = x^2 - x + 1$ y $P(3) + Q(3) = 7 + 7 = 14$.

4) La respuesta es $3 + 33\sqrt{3}$. Cada valor absoluto en la suma es de la forma $|x - y|$, cuyos valores posibles son $x - y$ o $y - x$. Tenemos $18$ valores posibles: $1, 2, \ldots, 9$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}, \ldots, 9\sqrt{3}$, de los cuales $9$ de ellos serán sumados y $9$ de ellos serán restados. Entonces, para maximizar la suma debemos restar los nueve números más pequeños entre los posibles $18$ valores. Como $3\sqrt{3} < 6$, pero $4\sqrt{3} > 6$, los nueve números más pequeños que debemos restar son: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$.
Por otro lado, también debemos verificar que hay una permutación que satisface lo anterior. Necesitamos asegurar que cada uno de de los números $1, 2, 3$ aparece después de los números $7, 8, 9$. Por ejemplo, con la permutación $7, 1, 8, 2, 9, 3, 4, 5, 6$ se alcanza la suma máxima:

$$\begin{aligned}
&|7-\sqrt{3}| + |1-8\sqrt{3}| + |8-2\sqrt{3}| + |2-9\sqrt{3}| + |9-3\sqrt{3}| + |3-4\sqrt{3}| + \\
&+ |4-5\sqrt{3}| + |5-6\sqrt{3}| + |6-7\sqrt{3}| \\
=\ & (4\sqrt{3}+5\sqrt{3}+6\sqrt{3}+7\sqrt{3}+8\sqrt{3}+9\sqrt{3}+7+8+9) \\
&- (1+2+3+4+5+6+\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{3}) \\
=\ & 33\sqrt{3}+3.
\end{aligned}$$

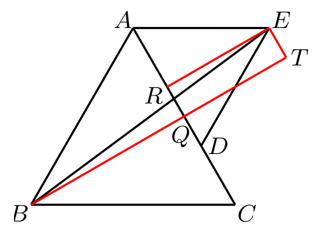
5) La respuesta es $2\sqrt{19}$ cm. Sea $P$ el pie de la perpendicular desde $B$ a $AE$.




Observemos que los ángulos del triángulo $BAP$ son $30°$, $60°$ y $90°$, por lo que $AB = 6$ cm. Se sigue que $AP = 3$ cm y $BP = 3\sqrt{3}$ cm. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $EPB$, concluimos que

$$BE = \sqrt{BP^2 + EP^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 7^2} = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ cm}.$$

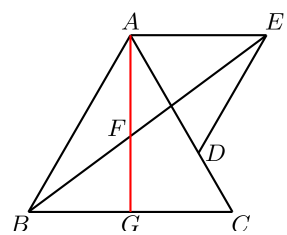
**Segunda solución.** Sean $Q$ el pie de la perpendicular a $AC$ desde $B$, $T$ el pie de la perpendicular desde $E$ a $BQ$ y $R$ el pie de la perpendicular desde $E$ a $AC$.




Se puede ver que $QA = 3$ cm y $AR = 2$ cm, por lo que $ET = RQ = 1$ cm. Así, $BQ = 3\sqrt{3}$ cm y $TQ = ER = 2\sqrt{3}$ cm, pues son alturas de triángulos equiláteros. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $ETB$, obtenemos que

$$BE = \sqrt{BT^2 + ET^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{75+1} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \text{ cm.}$$

**Tercera solución.** Sea $G$ el punto medio de $BC$. El segmento $AG$ interseca a $BE$ en $F$.




Nótese que los triángulos $AFE$ y $GFB$ son semejantes, por lo que $\frac{AF}{GF} = \frac{EF}{BF} = \frac{AE}{BG} = \frac{4}{3}$, esto es, $BE = \frac{7}{3}BF$ y $GF = \frac{3}{7}AG = \frac{9}{7}\sqrt{3}$ cm. Obsérvese que $FG$ y $BC$ son perpendiculares y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo $BGF$, obtenemos que $BF = \sqrt{GF^2 + BG^2} = \sqrt{\frac{243}{49} + 9} = \frac{684}{49} = \frac{6}{7}\sqrt{19}$ cm. Por lo tanto, $BE = \frac{7}{3}BF = 2\sqrt{19} = \sqrt{76}$ cm.

**Cuarta solución.** Como los triángulos $ABC$ y $ADE$ son equiláteros, se sigue que $\angle BAE = 120°$. Usando la ley de cosenos en el triángulo $ABE$, obtenemos que

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2(AB)(AE)(\cos\angle BAE) = 36 + 16 - 2(6)(4)\left(-\frac{1}{2}\right) = 76.$$

Por lo tanto, $BE = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$ cm.

6) La respuesta es 0. Sea $u = 2x + \sqrt{1+4x^2}$. Tenemos que $u(3y + \sqrt{1+9y^2}) = 1$, esto es, $3y + \sqrt{1+9y^2} = \frac{1}{u}$, lo cual implica que

$$1 + 9y^2 = \left(\frac{1}{u} - 3y\right)^2 = \frac{1}{u^2} - \frac{6y}{u} + 9y^2.$$

Simplificando, obtenemos que $y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{u} - u\right)$. Observemos que

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2x + \sqrt{1+4x^2}} = \frac{2x - \sqrt{1+4x^2}}{4x^2 - (1+4x^2)} = \sqrt{1+4x^2} - 2x.$$

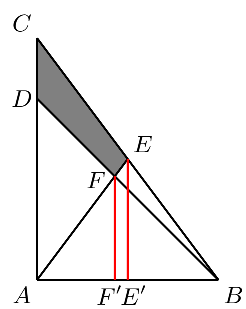
Entonces,

$$y = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{u} - u\right) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{1+4x^2} - 2x - \left(2x + \sqrt{1+4x^2}\right)\right) = -\frac{2}{3}x$$

y, por lo tanto, $(2x+3y)^2 = \left(2x + 3\left(-\frac{2}{3}x\right)\right)^2 = 0$.

**Solución alternativa.** Si $u = 2x + \sqrt{1+4x^2}$, entonces $1 + 4x^2 = (u-2x)^2$, de donde $2x = \frac{u^2-1}{2u}$. Análogamente, como $3y + \sqrt{1+9y^2} = \frac{1}{u}$, tenemos que $1+9y^2 = \left(\frac{1}{u} - 3y\right)^2$, de donde se sigue que $3y = \frac{1-u^2}{2u}$. Por lo tanto, $(2x+3y)^2 = \left(\frac{u^2-1}{2u} + \frac{1-u^2}{2u}\right)^2 = 0$.

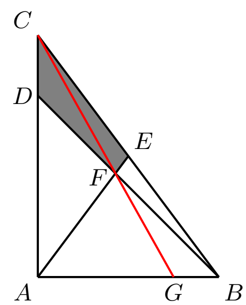
7) La respuesta es $\frac{15}{14}$ cm$^2$. Denotemos por $(X)$ al área de la figura $X$. Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $AC = 4$ cm, por lo que $AD = 3$ cm. De aquí, obtenemos que $(ABC) = 6$ cm$^2$, lo que implica que $(ABD) = \frac{3}{4} \times 6 = \frac{9}{2}$ cm$^2$ y $(ABE) = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ cm$^2$. Sean $E'$ y $F'$ las proyecciones de $E$ y $F$ sobre $AB$, respectivamente, y sea $FF' = x$ cm.




Entonces, $(ABF) = \frac{3}{2}x$ cm$^2$. Luego, $\frac{BF'}{AB} = \frac{BF}{BD} = \frac{(ABF)}{(ABD)} = \frac{x}{3}$. Similarmente, obtenemos que $\frac{AF'}{AB} = \frac{AF'}{2AE'} = \frac{AF}{2AE} = \frac{(ABF)}{2(ABE)} = \frac{x}{4}$. Por lo tanto, $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1$, de donde $x = \frac{12}{7}$. Así, el área de la figura sombreada, es igual a

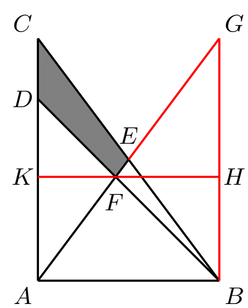
$$(CDEF) = (ABC) + (ABF) - (ABD) - (ABE) = 6 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} - 3 = \frac{15}{14}\text{cm}^2.$$

**Segunda solución.** Tracemos la recta $CF$ de tal forma que interseque a $AB$ en $G$. Usando el teorema de Ceva, tenemos que $\frac{AE}{BE} \times \frac{AD}{CD} \times \frac{BG}{AG} = 1$, de donde obtenemos que $AG = 3BG$. Luego, $BG = \frac{1}{4}AB = \frac{3}{4}$ cm y $AG = \frac{3}{4}AB = \frac{9}{4}$ cm. Sea $(CFE) = x$ cm$^2$. Entonces, $(CFB) = 2(CFE) = 2x$ cm$^2$ pues $BC = 2CE$; $(CFA) = 3(CFB) = 6x$ cm$^2$ pues $AG = 3BG$; $(AFB) = 3(CFB) = 6x$ cm$^2$ pues $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4$ cm y $AD = 3$ cm $= 3CD$.




Ahora, $(ABC) = \frac{AC\times BC}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$ cm$^2$, por lo que $2x + 6x + 6x = 6$, es decir, $x = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. A su vez, $(CDF) = \frac{1}{4}(CFA) = \frac{1}{4} \times 6 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{14}$ cm$^2$ pues $AC = AD + CD = 4CD$. Por lo tanto, el área de la región sombreada, es igual a $\frac{3}{7} + \frac{9}{14} = \frac{15}{14}$ cm$^2$.

**Tercera solución.** Por el Teorema de Pitágoras, tenemos que $AC = 4$ cm, por lo que $AD = 3$ cm. Sea $G$ el punto sobre la recta $AE$ tal que $GB$ es perpendicular a $AB$. Entonces, el triángulo $ABG$ es congruente al triángulo $BAC$ y el triángulo $EBG$ es congruente al triángulo $EAC$. Así, $(EBG) = (EAC) = \frac{1}{2}(ABC) = 3$ cm$^2$.




Como $AD$ y $BG$ son paralelas, los triángulos $FDA$ y $FBG$ semejantes, lo cual implica que $\frac{FK}{FH} = \frac{AD}{BG} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{4}$ y, por lo tanto, $FK = 3 \times \frac{3}{7} = \frac{9}{7}$ y $FH = 3 \times \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$, por lo que $(FBG) = \frac{BG\times FH}{2} = \frac{24}{7}$ cm$^2$ y $(BFE) = (FBG) - (EBG) = \frac{24}{7} - 3 = \frac{3}{7}$ cm$^2$. De aquí, concluimos que el área de la región sombreada es igual a $(CDEF) = (ABC) - (ABD) - (BFE) = 6 - \frac{9}{2} - \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$ cm$^2$.

8) La respuesta es 257. Observemos primero que $k$ no tiene factores primos impares. En efecto, si $k = qd$ donde $q \geq 3$ es primo, entonces $k^k + 1 = (k^d)^q + 1$ es múltiplo de $k^d + 1$ y, por lo tanto, $k^k + 1$ no es primo. Esto significa que $k$ es una potencia de 2. Tenemos que $1^1 + 1 = 2$, $2^2 + 1 = 5$ y $4^4 + 1 = 257$ son números primos, pero $8^8 + 1 = (2^8)^3 + 1$ al ser múltiplo de $2^8 + 1$ no es primo. Si $k \geq 16$, entonces $k^k + 1 \geq 16^{16} + 1 > 10^8 > 20212021$. Concluimos que los valores posibles de $k$ son $1, 2$ y $4$. Luego, el mayor número primo IMC que no excede a 20212021 es 257.

**Solución alternativa.** Como $10^{10}+1>20212021$, tenemos que $k<10$.
Si $k=1$, entonces $k^k+1=1^1+1=2$ es un número primo.
Si $k$ es impar mayor que 1, entonces $k^k$ es impar y, por ende, $k^k+1$ es par mayor que 2, esto es, $k^k+1$ no es primo.
Si $k=2$, entonces $k^k+1=2^2+1=5$ es un número primo.
Si $k=4$, entonces $k^k+1=4^4+1=257$ es un número primo.
Si $k=6$, entonces $k^k+1=6^6+1=(6^2)^3+1$ es múltiplo de $6^2+1$ y, por ende, no es primo.
Si $k=8$, entonces $k^k+1=8^8+1=(2^8)^3+1$ es múltiplo de $2^8+1$ y, por ende, no es primo.
Se sigue que el mayor número primo IMC que no excede a 20212021 es 257.

9) La respuesta es $18°$. Sean $\angle BAF=3\alpha$ y $\angle FAE=\angle$. Como $AC=CF=FE$, tenemos que $\angle AFC=\alpha$, $\angle FCE=\angle FEC=2\alpha$ y $\angle AFB=3\alpha$, lo cual implica que $BA=BF$. Además, como $AC=CF$, los triángulos $BAC$ y $BFC$ son congruentes por el criterio LLL. Entonces, tenemos que $\angle BCF=\angle BCA=\angle BAC=4\alpha$ (pues $AB=BC$). Como $\angle ACB+\angle BCF+\angle FCE=180°$, tenemos que $4\alpha+4\alpha+2\alpha=180°$, de donde se sigue que $\alpha=18°$.

10) La respuesta es 15. Sea $n$ un entero positivo tal que $n+3$ divide a $S_n=1^3+2^3+\cdots+n^3$. Si $n$ es par, podemos agrupar por parejas los sumandos de $S_n$ como sigue:

$$S_n=(1^3+2^3)+(3^3+n^3)+(4^3+(n-1)^3)+\cdots+\left(\left(\frac{n+2}{2}\right)^3+\left(\frac{n+4}{2}\right)^3\right).$$

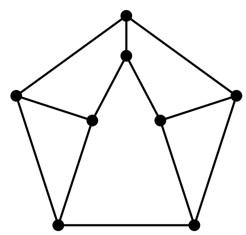
Como $n+3$ divide a cada una de las sumas $3^3+n^3, 4^3+(n-1)^3,\ldots,\left(\frac{n+2}{2}\right)^3+\left(\frac{n+4}{2}\right)^3$, necesariamente $n+3$ debe dividir a $1^3+2^3=9$. Si $n+3=1$, entonces $n=-2<0$; si $n+3=3$, entonces $n=0$ y, si $n+3=9$, entonces $n=6$. Por lo tanto, la única solución en este caso es $n=6$.
Si $n$ es impar, podemos agrupar los sumandos de $S_n$ como sigue:

$$S_n=1^3+2^3+\left(\frac{n+3}{2}\right)^3+(3^3+n^3)+(4^3+(n-1)^3)+\cdots+\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^3+\left(\frac{n+5}{2}\right)^3\right).$$

Como $n+3$ divide a cada una de las sumas de cubos de cada paréntesis, necesariamente $n+3$ debe dividir a $1^3+2^3+(\frac{n+3}{2})^3$. Como $n$ es impar, tenemos que $n+3$ es par, esto es, $n+3=2k$ para algún entero positivo $k$. Entonces, $2k$ divide a $1^3+2^3+(\frac{2k}{2})^3=9+k^3$ y, por consiguiente, $k$ divide también a $9+k^3$. Por lo tanto, $k\mid 9$. Si $k=1$, entonces $n=2k-3<0$, que no puede ser. Si $k=3$, entonces $n=3$ es una solución. Si $k=9$, entonces $n=15$ es una solución. Luego, hay dos soluciones en este caso.
Concluimos que el mayor entero positivo $n$ tal que $n+3$ divide a $S_n$ es 15.

11) La respuesta es 12. La afirmación crucial es que cada isla debe tener al menos 3 puentes. Para ver esto, nótese que para cada isla, cualquier viaje que pase por ella requiere al menos dos puentes distintos que salgan de dicha isla. Asumamos, con el fin de llegar a una contradicción, que alguna isla $S$ tiene a lo mucho 2 puentes.

Consideremos el caso en el que una de las islas adyacentes a $S$ es destruida. Entonces, solo existirá un puente conectado a $S$, por lo que no se podrá formar un viaje completo pasando por $S$. Ahora, cada isla tiene al menos 3 puentes, por lo que hay $3 \times 8 = 24$ "extremos de puentes". Cada puente tiene exactamente dos "extremos de puente", por lo que debe haber al menos $\frac{24}{2} = 12$ puentes. La construcción que se muestra a continuación muestra que 12 es alcanzable.



12) La respuesta es $\frac{3031}{2021} = 1\frac{1010}{2021}$. Sean $x = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$ y $y = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$. Es fácil ver que $x + y = 3$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
x - y &= \frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{a+c} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + (a+b)(b-c)(a+c) + (a+b)(b+c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + (a+b)[(b-c)(a+c) + (b+c)(c-a)]}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(b+c)(a+c) + 2c(a+b)(b-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)[(b+c)(a-c) - 2c(a+b)]}{(a+b)(b+c)(a+c)} \\
&= \frac{(a-b)(ab+c^2-ac-bc)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = -\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = -\frac{1}{2021}.
\end{aligned}$$

Entonces, $x = \left(3 - \frac{1}{2021}\right) \div 2 = \frac{3031}{2021} = 1\frac{1010}{2021}$.

**Solución alternativa.** Sean $P = abc$, $Q = a2^b + b^2c + c^2a$ y $R = a^2c + b^2a + c^2b$. La condición $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{1}{2021}$ es equivalente a la condición

$$\frac{-Q+R}{2P+Q+R} = \frac{1}{2021}. \qquad (2)$$

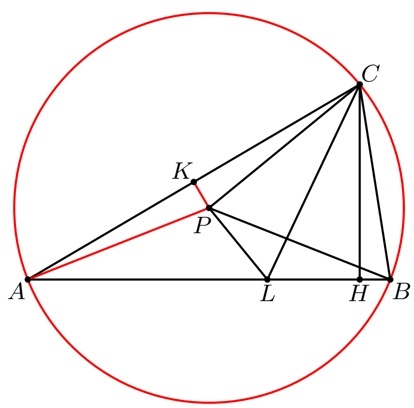
Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} &= \frac{a(b+c)(c+a)+b(c+a)(a+b)+c(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)(a+c)}\\ &= \frac{3P+2Q+R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3P+\frac{3}{2}Q+\frac{3}{2}R}{2P+Q+R}+\frac{\frac{1}{2}Q-\frac{1}{2}R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3}{2}\times\frac{2P+Q+R}{2P+Q+R}-\frac{1}{2}\times\frac{-Q+R}{2P+Q+R}\\ &= \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2021}=\frac{3031}{2021},\end{aligned}$$

donde usamos (2) en la penúltima igualdad.

## Parte B

1) La respuesta es $14$ cm. Observemos que $P$ es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo $ABC$. Tracemos $PA$ y sea $K$ el punto en $AC$ tal que $PK$ y $AC$ son perpendiculares. Entonces, $\angle APC = 2\angle ABC$ y, por ende, $\angle KPC = \angle ABC$.

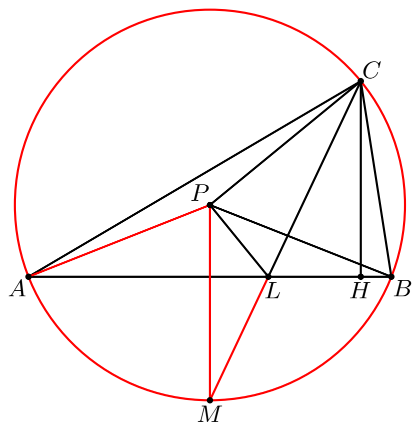



Luego, tenemos que $\angle ACP = 90° - \angle KPC = 90° - \angle ABC$, lo cual implica que $\angle PCL = \angle ACL - \angle ACP = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC - 90°$. Como $\angle CHB = 90°$, tenemos que $\angle BCH = 90° - \angle ABC$. Por lo tanto,

$$\angle LCH = \frac{1}{2}\angle ACB - \angle BCH = \frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC - 90° = \angle PCL$$

y, como $CP = CH$, concluimos que los triángulos $CPL$ y $CHL$ son congruentes por el criterio LAL. Esto significa que $\angle CPL = \angle CHL = 90°$ y $LP = LH$. Finalmente, como el área del triángulo $CPL$ es igual a $\frac{LP\times CP}{2} = 196$ cm$^2$, obtenemos que $LP = \frac{2\times 196}{28} = 14$ cm, esto es, $LH = 14$ cm.

**Solución alternativa.** Demostraremos de una forma distinta a la que se hizo en la primera solución, que los triángulos $CPL$ y $CHL$ son congruentes. Tenemos que $P$ es el centro de la circunferencia circunscrita del triángulo $ABC$. Sea $M$ el punto de intersección de $AB$ con la prolongación de $CL$. Como $\angle APM = 2\angle ACL = 2\angle BCL = \angle BPM$, se sigue que $PM$ biseca al ángulo $\angle APB$ y, por lo tanto, $PM$ es la mediatriz del segmento $AB$.




Como $PC = PM$, resulta que el triángulo $CPM$ es isósceles y, por consiguiente, $\angle PCM = \angle PMC$. Además, como $PM$ y $CH$ son paralelas, resulta que $\angle PMC = \angle HCL$ por ser ángulos alternos internos. Por lo tanto, concluimos que $\angle PCL = \angle PCM = \angle PMC = \angle HCL$. Esto significa que los triángulos $CPL$ y $CHL$ son congruentes por el criterio LAL. Terminamos como en la primera solución.

2) La respuesta es $476$. Supongamos que cada niño recibe $x > 0$ dulces y que cada niña recibe $y > 0$ dulces. Entonces, tenemos que

$$14x + 17y = n, \tag{3}$$

para algún entero positivo $n$. Por inspección, tenemos que $14 \times (-6) + 17 \times 5 = 1$, lo cual implica que

$$14 \times (-6n) + 17 \times (5n) = n. \tag{4}$$

Restando (4) de (3), obtenemos que $14(x + 6n) + 17(y - 5n) = 0$, esto es,

$$14(x + 6n) = -17(y - 5n),$$

de donde se sigue que 17 divide a $x+6n$. Luego, $x+6n = 17k$ para algún entero $k$ y, por consiguiente, $y-5n = -14k$. Esto significa que $x = 17k-6n$ y $y = 5n-14k$. Como $x$ y $y$ son positivos, tenemos que $\frac{6n}{17} < k < \frac{5n}{14}$. Como $k$ debe ser único (pues

$x$ y $y$ son únicos), es necesario que $\frac{5n}{14} - \frac{6n}{17} = \frac{n}{238} \leq 2$, de donde obtenemos que $n \leq 476$. Si $n = 476$, entonces $\frac{5n}{14} = 170$ y $\frac{6n}{17} = 168$, lo que significa que $k = 169$, dando la única solución $x = 17$ y $y = 14$. Por lo tanto, la respuesta es 476.

3) La respuesta es 28. Sea $a = C_{1010}^{2021}$. Tenemos que

$$a = \frac{2021!}{1010! \times (2021-1010)!} = \frac{2021!}{1010! \times 1011!}.$$

Si $n$ es un entero positivo, denotemos por $\nu_2(n)$ al mayor entero no negativo $m$ tal que $2^m \mid n$ y, denotemos por $\nu_3(n)$, al mayor entero no negativo $k$ tal que $3^k \mid n$. Si $x = \frac{y}{zr}$, donde $x, y, z, r$ son enteros positivos, es fácil convencerse de que $\nu_2(x) = \nu_2(y) - \nu_2(z) - \nu_2(r)$ y que $\nu_3(x) = \nu_3(y) - \nu_3(z) - \nu_3(r)$. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_2(a) &= \nu_2(2021!) - \nu_2(1010!) - \nu_2(1011!),\\ \nu_3(a) &= \nu_3(2021!) - \nu_3(1010!) - \nu_3(1011!).\end{aligned}$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned}\nu_2(2021!) &= \left\lfloor \frac{2021}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2021}{2^{10}} \right\rfloor\\ &= 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1\\ &= 2013.\end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_2(1010!) &= \left\lfloor \frac{1010}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1010}{2^9} \right\rfloor\\ &= 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1\\ &= 1003.\end{aligned}$$

Como 2 no divide a 1011, tenemos que $\nu_2(1011!) = \nu_2(1010!)$. Entonces, $\nu_2(a) = 2013 - 1003 - 1003 = 7$.
Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\nu_3(2021!) &= \left\lfloor \frac{2021}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2021}{3^6} \right\rfloor\\ &= 673 + 224 + 74 + 24 + 8 + 2\\ &= 1005.\end{aligned}$$

De manera análoga, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_3(1010!) &= \left\lfloor \frac{1010}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1010}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1010}{3^6} \right\rfloor\\ &= 336 + 112 + 37 + 12 + 4 + 1\\ &= 502\end{aligned}$$

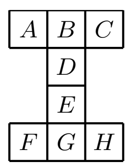
y

$$\begin{aligned}\nu_3(1011!) &= \left\lfloor \frac{1011}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1011}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1011}{3^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{1011}{3^6} \right\rfloor \\ &= 337 + 112 + 37 + 12 + 4 + 1 \\ &= 503.\end{aligned}$$

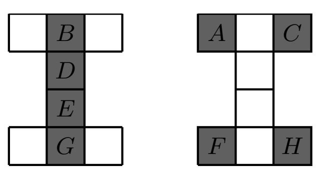
Entonces, $\nu_3(a) = 1005 - 502 - 503 = 0$.
Como $a$ es divisible por $2^M \times 3^N$, los valores posibles de $M$ son $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y el único valor posible de $N$ es $0$. Por lo tanto, la suma de los valores posibles de $M + N$ es igual a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$.

# Soluciones del Examen por Equipos

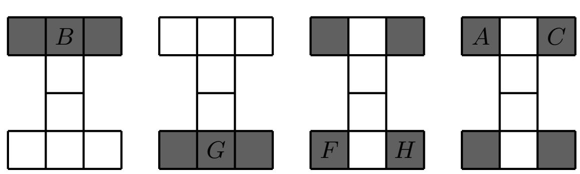
1) Marquemos a los cuadrados como sigue.




Como $B + D + E + G = A + C + F + H$, es fácil ver que la suma buscada es igual a $\frac{(-1)+(-1)+(-1)+0+0+1+1+1}{2} = 0$.




También, $B = F + H$ y $G = A + C$:




Por lo tanto, $B + G = A + C + F + H = 0$.
Caso 1: $B = G = 0$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & 0 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & 0 & H \\ \hline \end{array}$$

Observemos que $\{A, C\} = \{D, E\} = \{F, H\} = \{-1, 1\}$. Luego, el número de formas en este caso es igual a $2 \times 2 \times 2 = 8$.
Caso 2: $\{B, G\} = \{-1, 1\}$.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & -1 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & 1 & H \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline A & 1 & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & -1 & H \\ \hline \end{array}$$

Sin pérdida de generalidad supongamos que $B = -1$ y $G = 1$. Entonces, $\{A, C\} = \{0, 1\}$, $\{D, E\} = \{-1, 1\}$ y $\{F, H\} = \{0, -1\}$. Luego, el número de formas en este caso es igual a $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$.
Por lo tanto, la respuesta es $8 + 16 = 24$.

**Solución alternativa.** Primero marcamos los cuadrados como sigue.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A & B & C \\ \hline \multicolumn{1}{c|}{} & D & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-2} \multicolumn{1}{c|}{} & E & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline F & G & H \\ \hline \end{array}$$

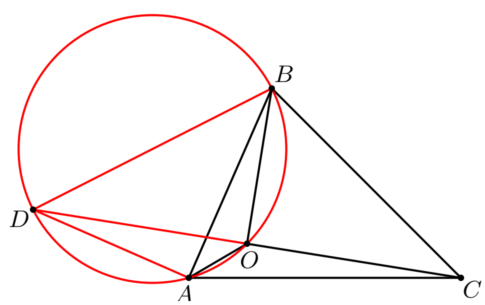
Tenemos que

$$A + B + C = 0, \tag{5}$$
$$B + D + E + G = 0, \tag{6}$$
$$F + G + H = 0, \tag{7}$$
$$A + C + F + H = 0. \tag{8}$$

De (5)+(7)−(8), obtenemos que $B + G = 0$. Sustituyendo esta relación en (6), resulta que $D + E = 0$. Ahora, $A, B, C$ son $1, -1, 0$ en algún orden y, de manera similar, con $F, G, H$. De lo anterior se sigue que $D, E$ son $-1, 1$ en algún orden, por lo que hay 2 arreglos para $D$ y $E$. Para cualquiera de los $3! = 6$ arreglos de $A, B, C$, el valor de $G = -B$ está determinado por el valor de $B$ (que tiene 3 opciones). Entonces, el número de arreglos de $F, H$ es $\frac{6}{3} = 2$. Por lo tanto, en total hay $6 \times 2 \times 2 = 24$ formas de llenar los cuadrados.

2) Observemos que $x^2 + 5xy + y^2 = (x + y)^2 + 3xy$ y $x^2y + xy^2 = (x + y)xy$. Consideremos las sustituciones $s = x + y$ y $p = xy$. Entonces, las primeras dos ecuaciones del sistema dado las podemos escribir como $s^2 + 3p = 7$ y $sp = 2$. Multiplicando la primera ecuación por $s$, obtenemos que $s^3 + 3sp = 7s$, esto es, $s^3 + 3(2) = 7s$. Luego, $s^3 - 7s + 6 = 0$. Notando ahora que $s = 1$ es una solución de esta ecuación, tenemos que $s - 1$ es un factor de $s^3 - 7s + 6$. Entonces, $(s-1)(s^2+s-6) = 0$, esto es, $(s-1)(s-2)(s+3) = 0$. Como $s = x+y \neq 2$, concluimos que $s = 1$ o $s = -3$.
Si $s = 1$, entonces $p = \frac{2}{s} = 2$, esto es, $x + y = 1$ y $xy = 2$. De la primera relación, obtenemos que $y = 1 - x$. Sustituyendo en la segunda relación, tenemos que $x(1-x) = 2$, esto es, $x^2 - x + 2 = 0$. Como el discriminante de esta ecuación es $(-1)^2 - 4 \times 2 = -7 < 0$, no hay soluciones reales para $x$ y $y$ en este caso.
Si $s = -3$, entonces $p = \frac{2}{s} = -\frac{2}{3}$, esto es, $x + y = -3$ y $xy = -\frac{2}{3}$. De la primera relación, obtenemos que $y = -(3 + x)$. Sustituyendo en la segunda relación, tenemos que $x(3 + x) = \frac{2}{3}$, esto es, $x^2 + 3x - \frac{2}{3} = 0$. Como el discriminante de esta ecuación es $9 - 4 \times (-\frac{2}{3}) > 0$, hay soluciones reales para $x$ y $y$ en este caso.
Concluimos que la única posibilidad es $x + y = -3$ y $xy = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (-3)^2 + 2 \times \frac{2}{3} = \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$.

3) Sea $D$ el punto simétrico de $C$ con respecto a $BO$. Entonces, $\angle BDO = \angle BCO = \angle BAO$. Luego, $D$ está en el circuncírculo del triángulo $ABO$ y $\angle ADO = \angle ABO = \angle CAO$. Por lo tanto, los triángulos $DAC$ y $AOC$ son semejantes.




Entonces, $\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{OC}$, esto es, $\frac{2OC}{AC} = \frac{AC}{OC}$. De aquí obtenemos que $\left(\frac{AC}{OC}\right)^2 = 2$ y, por lo tanto, $OC = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ cm.

4) Supongamos que $m - n = p$, donde $p$ es un número primo. Como $mn$ es un cuadrado, tenemos que $mn = n(n + p) = x^2$ para algún entero $x > 0$. Entonces, $4n^2 + 4np = 4x^2$, esto es, $(2n + p)^2 - p^2 = 4x^2$. Factorizando, obtenemos que $(2n - 2x + p)(2n + 2x + p) = p^2$. Como $p$ es primo y $2n - 2x + p < 2n + 2x + p$, necesariamente $2n - 2x + p = 1$ y $2n + 2x + p = p^2$. Sumando estas dos relaciones, obtenemos que $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ y, por consiguiente, $m = n + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$. Como $1000 \leq m < 2021$, tenemos que $64 \leq p + 1 \leq 89$, esto es, $63 \leq p \leq 88$. Como $p$ es primo, los valores posibles de $p$ son $67, 71, 73, 79$ y $83$. Por lo tanto, los valores de $m$ que satisfacen el problema son $1156$, $1296$, $1369$, $1600$ y $1764$.

**Solución alternativa.** Demostraremos que $m$ y $n$ son primos relativos. Supongamos, por contradicción, que $p$ es un divisor primo de $m$ y $n$. Entonces, $p$ también es divisor de $m-n$ y, como $m-n$ es primo, necesariamente $m-n=p$. Como $m=pr$ y $n=ps$, tenemos que $p=m-n=p(r-s)$, de donde se sigue que $r-s=1$. Esto implica que $mn=p^2rs=p^2r(r-1)$. Como $mn$ es un cuadrado, necesariamente $r(r-1)$ es un cuadrado. Luego, la única posibilidad es $r=1$ y, por consiguiente, $s=r-1=0$. En consecuencia, $n=0$ que es una contradicción.
Siendo $m$ y $n$ enteros positivos primos relativos tales que $mn$ es un cuadrado, resulta que cada uno de $m$ y $n$ es un cuadrado. Supongamos que $m=a^2$ y $n=b^2$, donde $a$ y $b$ son enteros positivos. Como $m-n=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ es primo, la única opción posible es $a-b=1$ y $a+b$ es primo.
Como $31^2=961<1000$, $1000<1024=32^2\leq m=a^2\leq 44^2=1936<2021$ y $45^2=2025>2021$, basta verificar las parejas $(m,n)=(a^2,b^2)$ de la lista $(32^2,31^2)$, $(33^2,32^2),\ldots,(44^2,43^2)$, tales que $a+b$ es primo. Es fácil ver que las parejas que cumplen esto son: $(34^2,33^2)$, $(36^2,35^2)$, $(37^2,36^2)$, $(40^2,39^2)$ y $(42^2,41^2)$. Por lo tanto, los valores de $m$ que cumplen las condiciones del problema son: $34^2=1156$, $36^2=1296$, $37^2=1369$, $40^2=1600$ y $42^2=1764$.

5) Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{15}=A_mA_n&=A_mA_{m+1}+A_{m+1}A_{m+2}+\cdots+A_{n-1}A_n\\&=\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}.\end{aligned}$$

Utilizando la relación $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ en cada sumando de la igualdad anterior y simplificando, obtenemos que $\dfrac{1}{15}=\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-m}{mn}$ y, por ende, $m(15+n)=15n$. Esto significa que $15+n$ divide a $15n$ y, por lo tanto, $15+n$ divide a $15(15+n)-15n=225$. De aquí obtenemos que los valores posibles de $n$ son 10, 30, 60 y, los correspondientes valores de $m$ son 6, 10 y 12. En conclusión, el mayor valor posible de $m+n$ es $12+60=72$.

6) Los números 1, 3, 6 y 8 deben tener diferentes colores entre ellos. Existen $4!=24$ maneras de pintarlos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que sus colores son rojo, verde, azul y amarillo, respectivamente.
Además, los números 3, 5, 8 y 10 también deben tener colores diferentes, por lo que 5 y 10 deben tener los colores rojo y azul en algún orden.
Como $1$ es de color rojo y $6$ es de color azul, tenemos que $4$ debe ser verde o amarillo. Como 5 y 10 son rojo y azul en algún orden, entonces 7 debe ser verde o amarillo. Como $4$ y $7$ deben tener colores diferentes, entonces $4$ y $7$ deben tener colores verde y amarillo en algún orden.
Como 2, 4, 7 y 9 deben tener colores diferentes, entonces 2 y 9 deben ser azul y rojo en algún orden. Pero 6 es de color azul, por lo que 9 debe ser de color rojo y 2 debe ser de color azul. Luego 5 no es azul, por lo que es rojo y 10 es azul.

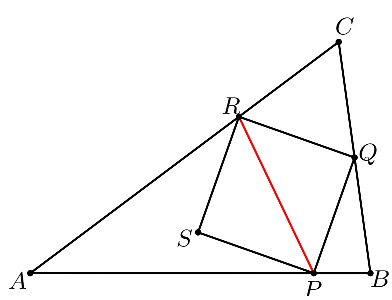
Ahora, $4$ y $7$ son verde y amarillo en algún orden y se puede ver que cualquier orden es aceptable (solo $3$ es verde, solo $8$ es amarillo y ninguno de estos números afecta a los colores de $4$ o $7$). Por lo tanto, hay $2 \times 4! = 48$ diferentes coloraciones.

**Solución alternativa.** Los números $1, 3, 6$ y $8$ deben tener diferentes colores entre ellos. Hay $4! = 24$ maneras de pintarlos. Sin pérdida de generalidad, supongamos que sus colores son rojo, verde, azul y amarillo, respectivamente.
Además, los números $2$, $4$, $5$ y $7$ también deben tener colores diferentes. Nótese que $4$ y $5$ deben tener colores diferentes, pues $4$ solo puede ser verde o amarillo, mientras que $5$ solo puede ser rojo o azul.
Observemos que $5$ no puede ser azul, pues si lo fuera, entonces $2$, $4$, $6$ y $7$ tendría cada uno un color diferente, lo cual indicaría que $9$ no se podría colorear. Así, $5$ debe ser rojo. Sin importar si $4$ es verde o amarillo, $7$ no puede ser de color azul, pues de ser así los números $3$, $5$, $7$ y $8$ ocuparían cada uno un color diferente, dejando sin opciones de colorear a $10$. Luego, $2$ debe ser azul.
En cada uno de los casos:

- $4$ es verde y $7$ es amarillo,
- $4$ es amarillo y $7$ es verde,

se pueden colorear $9$ de rojo y $10$ de azul. Por lo tanto, hay $2 \times 4! = 48$ posibles coloraciones.

7) Trazamos $PR$. Por el teorema del ángulo común, la razón del área de $APR$ a la de $ABC$ es $\frac{50\times 46}{60\times 68} = \frac{115}{204}$. Obsérvese que $BP = AB - AP = 10$, $CR = AC - AR = 22$ y $\frac{BQ}{BC} = \frac{CQ}{BC} = \frac{1}{2}$. Luego, otra vez por el teorema del ángulo común, la razón del área de $BPQ$ a la de $ABC$ es $\frac{10}{60} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$, mientras que la razón del área de $CQR$ a la de $ABC$ es $\frac{22}{68} \times \frac{1}{2} = \frac{11}{68}$.




Como el área del cuadrado $PQRS$ es el doble del área del triángulo $PQR$, tenemos que la razón del área de $PQRS$ a la de $ABC$ es

$$2 \times \left(1 - \frac{115}{204} - \frac{1}{12} - \frac{11}{68}\right) = \frac{39}{102} = \frac{13}{34}.$$

8) Denotemos por $(X)$ al área de la figura $X$. Notemos que

$$\frac{BD}{CD}=\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{AB\times BP\times \operatorname{sen}\angle ABP}{AC\times CP\times \operatorname{sen}\angle ACP}.$$

Podemos ver que $\angle ABP=180^\circ-\angle ACB$ y, por lo tanto, $\operatorname{sen}\angle ABP=\operatorname{sen}\angle ACB$. De forma similar, obtenemos que $\operatorname{sen}\angle ABP=\operatorname{sen}\angle ACB$. Luego, por la ley de senos en el triángulo $ABC$, tenemos que $\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle ACB}=\frac{AC}{\operatorname{sen}\angle ABC}$. Ahora,

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB\times BP\times \operatorname{sen}\angle ABP}{AC\times CP\times \operatorname{sen}\angle ACP}=\frac{AB}{AC}\times\frac{\operatorname{sen}\angle ACB}{\operatorname{sen}\angle ABC}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

Por lo tanto, $\frac{AB}{AC}=\sqrt{5}$.

**Solución alternativa.** Notemos que $\angle ACB+\angle ABP=180^\circ$. Por el teorema del ángulo común, $\frac{(ABC)}{(ABP)}=\frac{AC\times BC}{AB\times BP}$. De forma similar, tenemos que $\frac{(ABC)}{(ACP)}=\frac{AB\times BC}{AC\times CP}$. Ahora, $\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{(ABP)}{(ABC)}\times\frac{(ABC)}{(ACP)}=\frac{AB\times BP}{AC\times BC}\times\frac{AB\times BC}{AC\times CP}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ pues $BP=CP$. Por otro lado, $\frac{(ABP)}{(ACP)}=\frac{BD}{CD}=5$. Se sigue que $\frac{AB}{AC}=\sqrt{5}$.

9) Sea $n$ el menor número interesante. Observemos que 2 no puede ser un divisor de $2p+1$ para cualquier $p$, por lo que no hay necesidad de que $n$ sea par. Supongamos que 3 divide a $n$. Usando el hecho "Si $p$ es un primo divisor de $n$, entonces $2p+1$ es un divisor de $n$" repetidamente y concentrándonos en los divisores primos, obtenemos la siguiente sucesión de divisores de $n$:

$$3\to 7\to 3\times 5\xrightarrow{5}11\to 23\to 47\to 5\times 19\xrightarrow{19}3\times 13\xrightarrow{13}3\times 3\times 3$$

donde "$\xrightarrow{p}$" significa que se utilizó el hecho antes mencionado.
Obviamente la sucesión es circular, esto es, si se continúa desde alguno de los últimos tres 3's (o de cualquier otro número), se obtiene de nuevo la misma sucesión de números. Así, $n=3^3\times5\times7\times11\times13\times19\times23\times47$ será interesante. Obviamente es el menor número interesante que es divisible por alguno de los números 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23 o 47. Sea $m$ un número interesante que no es divisible por ninguno de los números 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23 o 47. Sea $p$ el menor divisor primo de $m$. De nuevo usando el hecho "Si $p$ es un divisor primo de $m$, entonces $2p+1$ es un divisor de $m$" repetidamente y enfocándonos en los divisores primos, tenemos que

- Si $p=17$: $17\to 5\times 7$, contradicción.
- Si $p=29$: $29\to 59\to 5\times 17$, contradicción.
- Si $p=31$: $31\to 3\times 3\times 7$, contradicción.
- Si $p=37$: $37\to 3\times 5\times 5$, contradicción.
- Si $p=41$: $41\to 83\to 167\to 5\times 67$, contradicción.
- Si $p=43$: $43\to 3\times 29$, contradicción.

Luego, $m$ no puede tener divisores primos menores a $50$. Así, todos los divisores compuestos de $m$ deben ser mayores o iguales que $p^2$ y que $53^2$. Ahora, considérese la sucesión:

$$p \to 2p+1 \to 4p+3 \to 8p+7 \to 16p+15 \to 32p+31 \to 64p+63 \to \cdots$$

Esta sucesión continúa hasta que aparece el primer número compuesto (que es al menos $p^2$). Como $p > 50$, entonces el número compuesto debe aparecer, por lo menos, hasta el 7° término (para obtener un número mayor o igual que $p^2$).
Entonces, los primeros seis términos son números primos y su producto debe ser un divisor de $m$. Como $p \geq 53$, este producto será claramente mayor que $n$, por lo que $m$ será mayor que $n$. Así, concluimos que $n$ es, en efecto, el número interesante más pequeño, el cual tiene $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 512$ divisores positivos.

10) Sea $T(n)$ la cantidad de maneras de expresar a $n$ como sumas tal cual se describieron. Entonces, $T(2n+1) = T(n)$ pues cualquier representación de un número impar debe tener exactamente un 1 en la posición de unidades (viéndolo en base binaria). Además, $T(2n) = T(n) + T(n-1)$ pues cada representación de $2n$ tiene un cero en la posición de unidades (que se puede hacer de $T(n)$ maneras) o tiene un dos en la posición de unidades (lo cual se puede hacer de $T(n-1)$ maneras). Trabajando en reversa desde 2021, tenemos que

$$\begin{aligned} T(2021) &= T(1010) = T(505) + T(504) = 2T(252) + T(251) \\ &= 2(T(126) + T(125)) + T(125) \\ &\vdots \\ &= 17T(7) + 5T(6) \\ &= 22T(3) + 5T(2) = 22 + 10 = 32. \end{aligned}$$

**Solución alternativa.** En base 2, 2021 se escribe como $11111100101_2$. Cuando 2021 es escrito como suma de potencias de 2, donde cada una aparece a lo mucho dos veces, es equivalente a un número binario donde cada dígito es 0, 1 o 2. Cuando tal número se convierte a un número binario con dígitos en $\{0, 1\}$, suceden acarreos. Específicamente, para cualquier sucesión de 1s y 2s entre dos 0s. Los 1s después del último "2" no serán cambiados, el último "2" se cambia a un 0, el primer "0" se cambia a un 1, mientras que todos los 1s entre el primer "0" y el último "2" se reducen en 1. El resultado después del acarreo en esas posiciones es una sucesión que empieza en "1" y termina en "0", donde en medio puede suceder cualquier cosa. Cada uno de estos conjuntos de posiciones donde se llevan a cabo los acarreos los llamamos "segmentos". Si al final queremos obtener $11111100101_2$, debemos contar de acuerdo al número de segmentos donde se llevan a cabo los acarreos. Si no hay tales segmentos, sólo hay un número. Si existe exactamente un segmento donde se llevan a cabo los acarreos, debemos buscar una subsucesión de $11111100101$ que empiece en "1" y termine en "0", donde se puede ver que hay $6+6+7 = 19$ de tales subsucesiones (6 para el primer "0", 6 para el segundo "0" y 7 para el tercero).

Si hay exactamente dos segmentos donde se llevan a cabo tales acarreos, debemos buscar dos de tales subsucesiones. Es claro que la segunda necesariamente debe ser "10", por lo que hay $6+6=12$ elecciones para la primer subsucesión. Por lo tanto, hay en total $1+19+12=32$ números binarios con dígitos en $\{0,1,2\}$ que se transforman en $11111100101_2$.

# Problemas de Olimpiadas Internacionales

## $1^{\text{a}}$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (Virtual)

Del 3 al 9 de octubre de 2021, se llevó a cabo de forma virtual, la primera Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (PAGMO, por sus siglas en inglés), con la participación de 18 países. La organización de esta primera edición de la PAGMO, estuvo a cargo de un equipo de 5 profesoras procedentes de Brasil, Chile, Ecuador, España y México. El comité organizador fue presidido por Isabel Hubard. México ocupó el tercer lugar por países quedando por debajo de Perú y Canadá, quienes ocuparon el primero y el segundo lugar, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
- Natalia Malpica Blackaller (Ciudad de México).
- Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas).
- María Fernanda López Tuyub (Yucatán).

Victoria y Natalia obtuvieron medallas de oro, Camila y María Fernanda obtuvieron medallas de plata. Las profesoras que acompañaron a la delegación fueron Myriam Hernández Ketchul (líder), Olga Medrano Martín del Campo (tutora), Marcela Cruz Larios y Cristina Sotomayor (tutoras), quienes fueron las encargadas de aplicar y revisar los exámenes del equipo mexicano.

A continuación presentamos los problemas de la $1^a$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de $4.5$ horas cada una para resolverlos.

**Problema 1.** Disponemos de $n \geq 2$ fichas numeradas del 1 al $n$. Se colocan, no necesariamente en orden, formando un círculo. Empezamos en las fichas número $1$ y nos movemos un lugar, siempre en el sentido de las agujas del reloj; si la ficha que está en ese lugar es la número $i$, en el siguiente turno avanzamos a la que está $i$ lugares más adelante; si caemos en la ficha número $j$ avanzamos $j$ lugares; y así sucesivamente.

Determine para qué valores de $n$ es posible ordenar las fichas de manera que se pase por todas ellas.

**Problema 2.** Sea $ABC$ un triángulo rectángulo isósceles con $\angle BAC = 90°$. Sea $P$, distinto de $B$, la intersección de la mediana desde $B$ con el círculo de diámetro $AB$. Demuestre que el círculo circunscrito del triángulo $ACP$ es tangente a la hipotenusa $BC$ en $C$.

**Problema 3.** Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene la igualdad

$$f(x + yf(x + y)) + xf(x) = f(xf(x + y + 1)) + y^2.$$

**Problema 4.** Lucía multiplica varios números de una cifra y obtiene un resultado $n > 10$. Luego multiplica todas las cifras de $n$ y obtiene un resultado impar. Determine la cifra de las unidades de $n$.

**Problema 5.** Celeste tiene una cantidad ilimitada de dulces de $n$ tipos diferentes. Inicialmente toma cierta cantidad de dulces y los pone en fila sobre una mesa. En cada paso realiza una de las siguientes dos operaciones:

- Se come un dulce del tipo $k$ y lo reemplaza por uno del tipo $k - 1$ seguido de uno del tipo $k + 1$;

- Escoge dos dulces consecutivos del mismo tipo y se los come.

Determine todos los enteros positivos $n$ para los que Celeste puede dejar la mesa sin dulces después de una cantidad finita de pasos sin importar la configuración inicial.

**Problema 6.** Sea $ABC$ un triángulo con incentro $I$. Suponga que el excírculo opuesto a $A$ es tangente a $BC$, $AC$ y $AB$ en $A_1$, $B_1$ y $C_1$, respectivamente. Suponga que $IA_1$, $IB_1$ e $IC_1$ intersectan al excírculo opuesto a $A$ en $A_2$, $B_2$ y $C_2$, respectivamente. Si $A_1B_1$ y $A_2B_2$ se intersectan en $X$, $A_1C_1$ y $A_2C_2$ en $Y$, y $M$ es el punto medio de $AA_1$, prueba que $MX = MY$.

# XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (Virtual)

Del 15 al 23 de octubre de 2021 se llevó a cabo de forma virtual la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM) organizada desde Costa Rica, en la que participaron 23 países y un total de 91 estudiantes. México ocupó el tercer lugar por países quedando por detrás de Perú y Brasil, quienes ocuparon el primero y el segundo lugar, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México),
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero),
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León),
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).

Omar obtuvo medalla de oro, Ana y Daniel obtuvieron medallas de plata y Eric obtuvo medalla de bronce. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron José Antonio Gómez Ortega (líder) y Rogelio Valdez Delgado (tutor). Como observador participó Leonardo Ariel García Morán.

Durante los últimos años, México se ha posicionado como uno de los líderes indiscutible en la OIM. Los resultados de México por países desde el año 2018, han sido los siguientes: cuarto lugar en 2018, tercer lugar en 2019, segundo lugar en 2020 y tercer lugar en 2021.

A continuación, presentamos los problemas de la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

**Problema 1.** Sea $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_{10}\}$ un conjunto de 10 primos distintos y sea $A$ el conjunto de todos los enteros mayores que 1 tales que en su descomposición en factores primos aparecen únicamente primos de $P$. Los elementos de $A$ se colorean de tal forma que:

a) cada elemento de $P$ tiene un color distinto,

b) si $m, n \in A$, entonces $mn$ tiene el mismo color de $m$ o $n$,

c) para cualquier par de colores distintos $R$ y $S$, no existen $j, k, m, n \in A$ (no necesariamente distintos), con $j, k$ de color $R$ y $m, n$ de color $S$, tales que $j$ divide a $m$ y $n$ divide a $k$, simultáneamente.

Demuestre que existe un primo de $P$ tal que todos sus múltiplos en $A$ tienen el mismo color.

**Problema 2.** Considere un triángulo acutángulo $ABC$, con $AC > AB$, y sea $\Gamma$ su circuncírculo. Sean $E$ y $F$ los puntos medios de los lados $AC$ y $AB$, respectivamente. El circuncírculo del triángulo $CEF$ y $\Gamma$ se cortan en $X$ y $C$, con $X \neq C$. La recta $BX$ y la tangente a $\Gamma$ por $A$ se cortan en $Y$. Sea $P$ el punto en el segmento $AB$ tal que $YP = YA$, con $P \neq A$, y sea $Q$ el punto donde se cortan $AB$ y la paralela a $BC$ que pasa por $Y$ . Demuestre que $F$ es el punto medio de $PQ$.
**Nota:** El circuncírculo de un triángulo es la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

**Problema 3.** Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión de enteros positivos y sea $b_1, b_2, b_3, \ldots$ la sucesión de números reales dada por

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Demuestre que si entre cada millón de términos consecutivos de la sucesión $b_1, b_2, b_3, \ldots$ existe al menos uno que es entero, entonces existe algún $k$ tal que $b_k > 2021^{2021}$.

**Problema 4.** Sean $a, b, c, x, y, z$ números reales tales que

$$a^2+x^2 = b^2+y^2 = c^2+z^2 = (a+b)^2+(x+y)^2 = (b+c)^2+(y+z)^2 = (c+a)^2+(z+x)^2.$$

Demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

**Problema 5.** Para un conjunto finito $C$ de enteros, se define $S(C)$ como la suma de los elementos de $C$. Encuentre dos conjuntos no vacíos $A$ y $B$ cuya intersección es vacía, cuya unión es el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ y tales que el producto $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

**Problema 6.** Considere un polígono regular de $n$ lados, $n \geq 4$, y sea $V$ un subconjunto de $r$ vértices del polígono. Demuestre que si $r(r-3) \geq n$, entonces existen al menos dos triángulos congruentes cuyos vértices pertenecen a $V$.

## 13ª Romanian Master of Mathematics

Del 10 al 15 de octubre de 2021 se llevó a cabo de forma virtual, la 13$^a$ Romanian Master of Mathematics, una competencia de matemáticas a la que solo se invita a un selecto grupo de países de entre los más destacados en Matemáticas en el mundo. En esta ocasión participaron 135 estudiantes provenientes de 22 países.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Pablo Alhui Valeriano Quiroz (Nuevo León).

- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
- Carlos Emilio Ramos Aguilar (Sinaloa).
- José Alejandro Reyes González (Morelos).
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León).

Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Ignacio Barradas Bribiesca (líder) y Marco Antonio Figueroa Ibarra (tutor). También participaron como observadores: Enrique Treviño López, Maximiliano Sánchez Garza y Myriam Hernández Ketchul.

Esta fue la cuarta participación de México en esta competencia. Nuestros estudiantes fueron premiados con una medalla de bronce para José Alejandro, mientras que Daniel, Omar, Carlos y Eric obtuvieron una mención honorífica por haber resuelto completamente un problema pero no haber obtenido puntaje suficiente para una medalla.

Los estudiantes presentaron dos pruebas, contando cada una con 3 problemas para resolver en un máximo de cuatro horas y media. Cada problema fue calificado con un número del 0 al 7, para un máximo de 42 puntos.

En esta competencia existe una clasificación oficial por equipos que toma en cuenta solo los tres puntajes más altos de cada equipo. En esta ocasión, México quedó ubicado en la $18^a$ posición. Rusia y China quedaron empatados en primer lugar (con 102 puntos) y Polonia ocupó el tercer lugar (con 98 puntos).

A continuación presentamos los problemas de la $13^a$ Romanian Master of Mathematics. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

**Problema 1.** Sean $T_1$, $T_2$, $T_3$ y $T_4$ puntos colineales, distintos por parejas, tales que $T_2$ se encuentra entre $T_1$ y $T_3$; $T_3$ se encuentra entre $T_2$ y $T_4$. Sea $\omega_1$ un círculo que pasa por $T_1$ y $T_4$; sea $\omega_2$ el círculo que pasa por $T_2$ y es tangente interiormente a $\omega_1$ en $T_1$; sea $\omega_3$ el círculo que pasa por $T_3$ y es tangente exteriormente a $\omega_2$ en $T_2$; sea $\omega_4$ el círculo que pasa por $T_4$ y es tangente exteriormente a $\omega_3$ en $T_3$. Una recta corta a $\omega_1$ en $P$ y $W$, a $\omega_2$ en $Q$ y $R$, a $\omega_3$ en $S$ y $T$, a $\omega_4$ en $U$ y $V$, siendo el orden de estos puntos $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$, $U$, $V$, $W$. Demuestra que $PQ + TU = RS + VW$.

**Problema 2.** Xenia y Sergey juegan el siguiente juego. Xenia piensa un entero positivo $N$ no mayor que $5000$. Después fija $20$ enteros positivos distintos por parejas $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$, de manera que para cada $k = 1, 2, \ldots, 20$, los números $N$ y $a_k$ son congruentes módulo $k$. En su turno, Sergey dice a Xenia un conjunto $S$ de enteros positivos no mayores que 20. Ella responde con el conjunto $\{a_k : k \in S\}$ sin decir qué número corresponde a cada índice. ¿Cuántos turnos requiere Sergey para determinar con seguridad el número en el que pensó Xenia?

**Problema 3.** Diecisiete trabajadores se encuentran formados en fila. Cada grupo contiguo de al menos 2 trabajadores forma una *brigada*. El jefe quiere asignar un líder a cada brigada (el cual es un miembro de la brigada) de manera que cada trabajador es asignado líder de brigada un número de veces divisible entre $4$. Demuestra que el número total de formas en las que se puede hacer lo anterior, es divisible entre 17.

**Problema 4.** Considera un entero $n \geq 2$ y escribe los números $1, 2, \ldots, n$ en un pizarrón. Un movimiento consiste en borrar dos números $a$ y $b$ y escribir los números $a + b$ y $|a - b|$ en el pizarrón y después borrar los números repetidos (por ejemplo, si el pizarrón contenía los números $2, 5, 7, 8$, se pueden usar los números $a = 5$ y $b = 7$, obteniendo en el pizarrón los números $2, 8, 12$). Para todos los enteros $n \geq 2$, determina si es posible dejar exactamente dos números en el pizarrón después de una cantidad finita de movimientos.

**Problema 5.** Sea $n$ un entero positivo. El reino de Zoomtopia es un polígono convexo con lados de longitud entera, perímetro $6n$ y simetría rotacional de $60°$ (es decir, existe un punto $O$ tal que una rotación de $60°$ alrededor de $O$, envía el polígono en el mismo). Debido a la pandemia, al gobierno de Zoomtopia le gustaría mover de lugar a sus $3n^2 + 3n + 1$ ciudadanos a $3n^2 + 3n + 1$ puntos en el reino de tal manera que cada dos ciudadanos estén a una distancia de al menos una unidad, para lograr la distancia social. Muestra que esto es posible. (Se asume que el reino contiene a su frontera).

**Problema 6.** Inicialmente, un polinomio no constante $S(x)$, con coeficientes reales se escribe en un pizarrón. Siempre que el pizarrón contenga un polinomio $P(x)$, no necesariamente tiene que ser el único polinomio escrito en el pizarrón, se escribe en el pizarrón cualquier polinomio de la forma $P(C + x)$ o $C + P(x)$, donde $C$ es una constante real. Además, si el pizarrón contiene dos polinomios (no necesariamente distintos) $P(x)$ y $Q(x)$, le puede escribir $P(Q(x))$ y $P(x) + Q(x)$ en el pizarrón. No se borra nunca un polinomio escrito en el pizarrón.
Dados dos conjuntos $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ de números reales, un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales es $(A, B)$-*suave* si $f(A) = B$, donde $f(A) = \{f(a_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$.
Determina todos los polinomios $S(x)$ que se pueden escribir inicialmente en el pizarrón, de tal forma que, para cualesquiera dos conjuntos finitos $A$ y $B$ de números reales, con $|A| = |B|$, se pueda producir un polinomio $(A, B)$-suave en un número finito de pasos.

## 8ª Olimpiada Iraní de Geometría

El 5 de noviembre de 2021 se aplicó en México el examen de la $8^a$ Olimpiada Iraní de Geometría. Este examen fue aplicado en 14 Estados del país, con la participación en los tres niveles de la competencia. En cada nivel, son 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas y cada problema vale 8 puntos. México envió a Irán los resultados de los exámenes con mayor puntuación en cada uno de los niveles:

elemental, intermedio y avanzado. En esta ocasión, se obtuvieron $5$ medallas de plata, $8$ medallas de bronce y una mención honorífica.

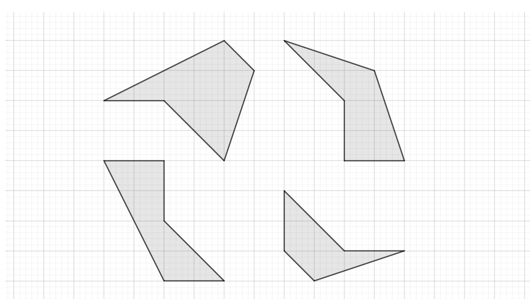
Los resultados fueron los siguientes:

| **Nombre** | **Estado** | **Medalla** | **Nivel** |
|---|---|---|---|
| Leonardo Melgar Rubí | Morelos | Plata | Elemental |
| Sebastián Montemayor Trujillo | Nuevo León | Plata | Elemental |
| Javier Caram Quirós | Ciudad de México | Bronce | Elemental |
| Takumi Hihashida Martínez | Ciudad de México | Bronce | Elemental |
| Andrea Sarahí Cascante Duarte | Morelos | Bronce | Elemental |
| Rogelio Guerrero Reyes | Aguascalientes | Plata | Intermedio |
| Mateo | Ciudad de México | Bronce | Intermedio |
| Ana Camila Cuevas González | Tamaulipas | Bronce | Intermedio |
| Rosa Victoria Cantú Rodríguez | Ciudad de México | Mención | Intermedio |
| Eric Ransom Treviño | Nuevo León | Plata | Avanzado |
| Daniel Alejandro Ochoa Quintero | Tamaulipas | Plata | Avanzado |
| Ana Illanes Martínez de la Vega | Ciudad de México | Bronce | Avanzado |
| Dariam Aguilar | Baja California | Bronce | Avanzado |
| Karla Rebeca Munguía Romero | Sinaloa | Bronce | Avanzado |

A continuación presentamos los problemas de la $8^a$ Olimpiada Iraní de Geometría.

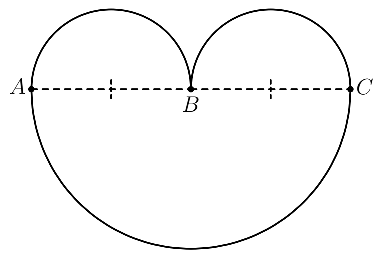
## Nivel Elemental

**Problema 1.** Junta las siguientes cuatro figuras en la siguiente cuadrícula para formar una figura con al menos dos ejes de simetría.



**Problema 2.** Los puntos $K, L, M, N$ están sobre los lados $AB, BC, CD, DA$ de un cuadrado $ABCD$, respectivamente, tales que el área de $KLMN$ es igual a la mitad del área de $ABCD$. Demuestra que alguna diagonal de $KLMN$ es paralela a algún lado de $ABCD$.

**Problema 3.** Como se muestra en la figura, un *corazón* es una figura que consiste de tres semicírculos con diámetros $AB$, $BC$ y $CA$ de manera que $B$ es el punto medio del segmento $AC$. Se tiene un corazón $\omega$. Una pareja de puntos $(P, P')$ es *bisectriz* si $P$ y $P'$ están sobre $\omega$ y bisecan a su perímetro. Sean $(P, P')$ y $(Q, Q')$ parejas bisectrices. Las tangentes a los puntos $P, P', Q$ y $Q'$ a $\omega$ forman un cuadrilátero convexo $XYZT$. Si el cuadrilátero $XYZT$ puede ser inscrito en un círculo, determina el ángulo entre las rectas $PP'$ y $QQ'$.




**Problema 4.** En un trapecio isósceles $ABC$ (con $AB$ paralela a $CD$), los puntos $E$ y $F$ están sobre el segmento $CD$ de manera que $D, E, F$ y $C$ están en ese orden y $DE = CF$. Sean $X$ y $Y$ las reflexiones de $E$ y $C$ con respecto a $AD$ y $AF$. Demuestra que los circuncírculos de los triángulos $ADF$ y $BXY$ son concéntricos.

**Problema 5.** Se tienen 2021 puntos en el plano $A_1, A_2, \ldots, A_{2021}$, de manera que no hay tres de ellos colineales y

$$\angle A_1A_2A_3 + \angle A_2A_3A_4 + \cdots + \angle A_{2021}A_1A_2 = 360^\circ.$$

En esta ecuación, al escribir el ángulo $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ nos referimos al que es menor que $180^\circ$ (supón que $A_{2022} = A_1$ y $A_0 = A_{2021}$). Demuestra que algunos de estos ángulos tienen suma igual a $90^\circ$.

## Nivel Intermedio

**Problema 1.** Sea $ABC$ un triángulo con $AB = AC$. Sea $H$ el ortocentro de $ABC$. El punto $E$ es el punto medio de $AC$ y $D$ es un punto sobre el lado $BC$ tal que $3CD = BC$. Prueba que $BE$ es perpendicular a $HD$.

**Problema 2.** Sea $ABCD$ un paralelogramo. Los puntos $E$ y $F$ están sobre los lados $AB$ y $CD$, respectivamente, tales que $\angle EDC = \angle FBC$ y $\angle ECD = \angle FAD$. Prueba que $AB \geq 2BC$.

**Problema 3.** Considera un cuadrilátero convexo $ABCD$ con $AB = BC$ y $\angle ABD = \angle BCD = 90^\circ$. Sea $E$ el punto de intersección de las diagonales $AC$ y $BD$. El punto $F$ está sobre el lado $AD$ tal que $\frac{AF}{FD} = \frac{CE}{EA}$. La circunferencia $\omega$ de diámetro $DF$ y el circuncírculo del triángulo $ABF$ se intersecan por segunda vez en el punto $K$. El punto $L$ es el segundo punto de intersección de $EF$ y $\omega$. Prueba que la recta $KL$ pasa por el punto medio de $CE$.

**Problema 4.** Sea $ABC$ un triángulo escaleno acutángulo con incentro $I$ y circuncírculo $\Gamma$. La recta $AI$ interseca a $\Gamma$ por segunda vez en el punto $M$. Sean $N$ el punto medio de $BC$ y $T$ el punto sobre $\Gamma$ tal que $IN$ es perpendicular a $MT$. Finalmente, sean $P$ y $Q$ los puntos de intersección de $TB$ y $TC$, respectivamente, con la recta perpendicular a $AI$ que pasa por $I$. Muestra que $PB = CQ$.

**Problema 5.** Considera un pentágono convexo $ABCDE$ y un punto variable $X$ sobre el lado $CD$. Los puntos $K$ y $L$ están sobre el segmento $AX$ de manera que $AB = BK$ y $AE = EL$. Los circuncírculos de los triángulos $CXK$ y $DXL$ se intersecan por segunda vez en $Y$. Cuando $X$ varía, prueba que todas las rectas $XY$ pasan por un punto fijo o todas son paralelas.

## Nivel Avanzado

**Problema 1.** Considera un triángulo acutángulo $ABC$ con circuncírculo $\omega$. Sean $D$ el punto medio de $AC$, $E$ el pie de la altura desde $A$ a $BC$ y $F$ el punto de intersección de $AB$ y $DE$. El punto $H$ está sobre el arco $\widehat{BC}$ de $\omega$ (el que no contiene a $A$) de tal forma que $\angle BHE = \angle ABC$. Demuestra que $\angle BHF = 90°$.

**Problema 2.** Dos circunferencias $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ se cortan en dos puntos distintos $A$ y $B$. Una recta que pasa por $A$ corta a $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ de nuevo en $C$ y $D$, respectivamente, de tal forma que $A$ se encuentra entre $C$ y $D$. La tangente en $A$ a $\Gamma_2$ corta a $\Gamma_1$ de nuevo en $E$. Sea $F$ un punto sobre $\Gamma_2$ tal que $F$ y $A$ se encuentran en lados opuestos respecto a $BD$ y $2\angle AFC = \angle ABC$. Demuestra que la tangente en $F$ a $\Gamma_2$ y las rectas $BD$ y $CE$ concurren.

**Problema 3.** Considera un triángulo $ABC$ con alturas $AD$, $BE$, $CF$ y ortocentro $H$. La recta perpendicular desde $H$ a $EF$ interseca a $EF$, $AB$ y $AC$ en $P$, $T$ y $L$, respectivamente. El punto $K$ está sobre el lado $BC$ de tal forma que $BD = KC$. Sea $\omega$ una circunferencia que pasa por $H$ y $P$, tangente a $AH$. Demuestra que el circuncírculo del triángulo $ATL$ y $\omega$ son tangentes y que $KH$ pasa por el punto de tangencia de estas circunferencias.

**Problema 4.** Se tienen 2021 puntos en el plano en posición convexa de tal forma que no hay tres colineales ni cuatro concíclicos. Demuestra que existen dos de ellos tales que cualquier circunferencia que pasa por estos dos puntos, contiene en su interior a al menos 673 de los otros puntos. (Un conjunto finito de puntos en el plano está en posición convexa si los puntos son los vértices de un polígono convexo).

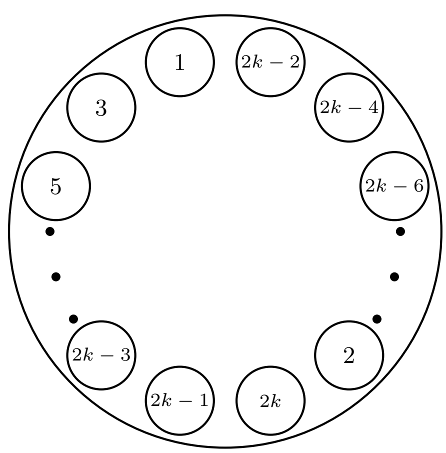
**Problema 5.** Sea $ABC$ un triángulo con incentro $I$. El circuncírculo del triángulo $ABC$ es tangente a $BC$ en $D$. Sean $P$ y $Q$ puntos sobre el lado $BC$ tales que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle QAC = \angle ABC$, respectivamente. Sean $K$ y $L$ los incentros de los triángulos $ABP$ y $ACQ$, respectivamente. Demuestra que $AD$ es la recta de Euler del triángulo $IKL$. (La recta de Euler de un triángulo es la recta que pasa por su circuncentro y su ortocentro).

# Soluciones de Olimpiadas Internacionales

## $1^{\text{a}}$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la $1^a$ Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas.

**Solución del problema 1. (Solución de Rosa Victoria Cantú Rodríguez).** Primero, se probará que si $n$ es par entonces se pueden acomodar las fichas de forma que se visiten todas. Para esto, si $n = 2k$ con $k$ un entero positivo, se propone el siguiente acomodo.




Con esto, la sucesión de fichas visitadas será: $1, 2k-2, 3, 2k-4, 5, 2k-6, \ldots, 2k-3$, $2$, $2k-1$, $2k$, visitando así todas las fichas.

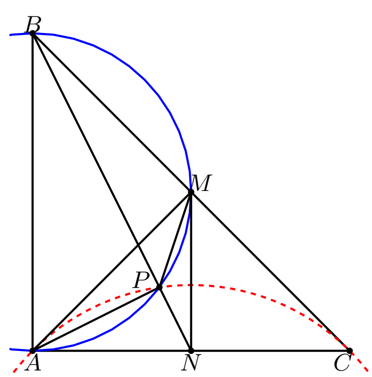
Ahora, se probará que para $n$ impar no se pueden acomodar las fichas de tal forma que se visiten todas. Supóngase que $n = 2k + 1$ con $k$ un entero positivo. Nótese que, si en algún momento se llega a la ficha $n$, entonces ya no se visitarán más fichas pues al moverse $n$ espacios en el sentido de las manecillas del reloj se vuelve a llegar a la misma ficha. Esto significa que, para que se puedan visitar todas las fichas, la ficha $n$ debe ser la última.

Se procede a obtener la distancia total que se debió de haber recorrido en total sin importar el orden de los saltos hasta llegar a la ficha $n$. Como se visitaron todas las fichas, esta distancia debe ser

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2k - 1) + 2k = \frac{(2k)(2k + 1)}{2} = k(2k + 1).$$

Como empezamos en la ficha 1, la cuenta anterior indica que se dieron exactamente $\frac{k(2k+1)}{2k+1} = k$ vueltas al círculo, por lo que se vuelve a llegar a la ficha 1. Sin embargo, al recorrer dicha distancia, se habrá llegado a la ficha $n$ pues se habrá pasado por todas las demás fichas. Esto implica que $n = 1$, lo cual es imposible pues se asumió $n \geq 2$. Se concluye que no es posible para los impares y, por lo tanto, los únicos valores de $n$ para los cuales se puede lograr el objetivo es para los enteros positivos pares.

**Solución del problema 2. (Solución de María Fernanda López Tuyub).** Sea $\Gamma$ la circunferencia de diámetro $AB$ y sea $M$ la intersección de $\Gamma$ con $BC$. Sea $N$ el punto medio de $AC$. Como $P$ y $M$ están sobre $\Gamma$, entonces $\angle AMB = 90° = \angle APB$. Sea $\alpha = \angle ABP$. Luego, por ser $ABMP$ cíclico, tenemos que $\angle AMP = \alpha$.




Por suma de ángulos en el triángulo $ABP$, se tiene que $\angle PAB = 180° - \angle ABP - \angle BPA = 90° - \alpha$. Esto implica que $\angle NAP = 90° - \angle PAB = \alpha$. Por otro lado, como $ABC$ es un triángulo rectángulo isósceles con $AB = AC$, se tiene que $\angle ABC = \angle BCA = 45°$. Entonces, al ser $ABMP$ cíclico, se sigue que $\angle MPA = 180° - \angle ABM = 135°$. Así, $\angle NPM = 360° - \angle MPA - \angle APN = 135°$. Por lo tanto, como $\angle NPM + \angle MCN = 180°$, se concluye que el cuadrilátero $MPNC$ es cíclico. Ahora, se tiene que $\angle ABM = \angle MAB = 45° = \angle CAM = \angle MCA$. Esto significa que $BM = MA = MC$, por lo que $M$ es punto medio de $BC$. Como $N$ es punto medio de $AC$ y $BA$ es perpendicular a $AC$, entonces $MN$ es perpendicular a $AC$. En

particular $\angle MNA = 90°$. Luego, $\angle AMN = 180° - \angle MNA - \angle NAM = 45°$. Se sigue que $\angle PMN = 45° - \angle AMP = 45° - \alpha$ y, como $MPNC$ es cíclico, se obtiene que $\angle MCP = \angle MNP = 180° - \angle NPM - \angle PMN = \alpha$.
Se sabe que la circunferencia circunscrita del triángulo $PAC$ será tangente a $BC$ en $C$ si y solo si $\angle PAC = \angle PCM$. Sin embargo, esto es cierto pues los dos ángulos son iguales a $\alpha$. De aquí se concluye el resultado.

**Solución del problema 3. (Solución de Ana Camila Cuevas González).** Al tomar $y = 0$ en la ecuación dada se obtiene que

$$(x+1)f(x) = f(xf(x+1)).$$

Al sustituir $x = -1$ en esta última ecuación, se obtiene que $f(-f(0)) = 0$. Por otro lado, tomando $x = 0$ en la ecuación original, se llega a que

$$f(yf(y)) = y^2 + f(0). \tag{9}$$

Tomando $y = -f(0)$ en (9), se obtiene que $f(-f(0)f(-f(0))) = (f(0))^2 + f(0)$, esto es, $f(0) = (f(0))^2 + f(0)$, lo cual implica que $(f(0))^2 = 0$ y, de aquí, $f(0) = 0$. Luego, tomando $y = 1$ en (9), se tiene que $f(f(1)) = 1$.
Tomando $y = -x$ en la ecuación original, se obtiene que

$$(x+1)f(x) = f(xf(1)) + x^2. \tag{10}$$

Sustituyendo $x = 1$ en (10) y usando que $f(f(1)) = 1$, se concluye que $f(1) = 1$. Luego, (10) se puede reescribir como $xf(x) = x^2$, lo cual implica que $f(x) = x$ si $x \neq 0$. Sin embargo, ya se sabe que $f(0) = 0$, por lo que necesariamente $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Es fácil verificar que esta función en efecto satisface la ecuación funcional dada, por lo que es la única función que cumple.

**Solución del problema 4. (Solución de Natalia Malpica Blackaller).** Sean $a_1$, $a_2$, $\ldots$, $a_k$ los números originales de un dígito. Entonces $a_1 a_2 \cdots a_k = n > 10$. Supóngase que $n = \overline{x_1 x_2 \ldots x_{s-1} x_s}$. Como $x_1 x_2 \ldots x_s$ es impar, entonces $x_i$ debe ser impar para $1 \leq i \leq s$, es decir, todos los dígitos de $n$ son impares. Nótese que si algún dígito $a_i$ es par, entonces $n$ será par, lo cual no puede suceder. Luego todos los dígitos iniciales deben ser impares, es decir, $a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ para $1 \leq i \leq k$.
Se probará que $x_s = 5$. Si $x_s \neq 5$, entonces $a_i \in \{1, 3, 7, 9\}$ para $1 \leq i \leq k$. Considérense todos los posibles productos entre dos de estas cuatro posibilidades para cada $a_i$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1 \cdot 1 = 1$ | $3 \cdot 1 = 3$ | $7 \cdot 1 = 7$ | $9 \cdot 1 = 9$ |
| $1 \cdot 3 = 3$ | $3 \cdot 3 = 9$ | $7 \cdot 3 = 21$ | $9 \cdot 3 = 27$ |
| $1 \cdot 7 = 7$ | $3 \cdot 7 = 21$ | $7 \cdot 7 = 49$ | $9 \cdot 7 = 63$ |
| $1 \cdot 9 = 9$ | $3 \cdot 9 = 27$ | $7 \cdot 9 = 63$ | $9 \cdot 9 = 81$ |

Se puede observar que, en cualquier producto de la tabla anterior, la cifra de las decenas es par. Luego, $a_1 a_2 = 20k + r$ con $r \in \{1, 3, 7, 9\}$. Siguiendo un análisis similar, si $a_1 a_2 \cdots a_j = 20m + t$ con $t \in \{1, 3, 7, 9\}$, entonces $a_1 a_2 \cdots a_j a_{j+1} = 20ma_{j+1} +$

$ta_{j+1} = 20(ma_{j+1} + \ell) + t_0$, donde $ta_{j+1} = 20\ell + t_0$ y $t_0 \in \{1, 3, 7, 9\}$ (por lo hecho en la tabla). Así, $a_1a_2 \cdots a_k \in \{1 \pmod{20}, 3 \pmod{20}, 7 \pmod{20}, 9 \pmod{20}\}$. Esto significa que el dígito de las decenas de $n$ será par, por lo que el producto de los dígitos de $n$ será par, lo cual es una contradicción. De aquí se concluye que algún $a_i$ es igual a 5 y, por lo tanto, el único valor posible para el dígito de las unidades de $n$ es 5.

**Solución del problema 5.** Cuando $n$ no es múltiplo de 3 sí se puede cumplir el objetivo. Primero veamos que esto es cierto probando el siguiente lema. Denotamos por $a_i$ a un dulce del tipo $i$. En lo que sigue, los tipos de dulces se toman módulo $n$, por ejemplo, un dulce del tipo 0 es lo mismo que un dulce del tipo $n$ y un dulce del tipo $n + 1$ es lo mismo que un dulce del tipo 1.

**Lema:** Si $n$ no es múltiplo de 3, entonces $a_i$ se puede transformar en $a_j$ para cualesquiera $0 < i, j \leq n$.

**Demostración:** Hacemos la serie de pasos, donde "$\xrightarrow{i}$" significa que se lleva a cabo la operación $i$:

$$a_i \xrightarrow{1} a_{i-1}a_{i+1} \xrightarrow{1} a_{i-1}a_ia_{i+2} \xrightarrow{1} a_{i-1}a_{i-1}a_{i+1}a_{i+2} \xrightarrow{2} a_{i+1}a_{i+2} \xrightarrow{1} a_{i+1}a_{i+1}a_{i+3} \xrightarrow{2} a_{i+3}.$$

Entonces podemos transformar $a_i$ en $a_{i+3}$ y, como $n$ no es múltiplo de 3, si aplicamos suficientes veces esta propiedad podemos llegar a que podemos transformar $a_i$ en $a_j$ para cualesquiera $0 < i, j \leq n$. $\square$

Tomemos alguna línea inicial de dulces. Si tiene longitud par no hacemos nada, y si tiene longitud impar llevamos a cabo la primera operación en cualquier dulce para que tenga longitud par. Con la línea de longitud par podemos aplicar el lema anterior para transformar todos los dulces en dulces del mismo tipo. Ahora usamos la operación 2 suficientes veces para eliminar todos los dulces.

Veamos ahora que cuando $n$ es múltiplo de 3 no siempre se puede cumplir el objetivo. Para esto, basta con ver que si tenemos inicialmente solo un dulce del tipo 1 y ninguno de cualquier otro tipo entonces no se puede vaciar la mesa. Separemos los dulces en 3 grupos dependiendo de la congruencia módulo 3 de su tipo. Denotamos a estos grupos $A$, $B$ y $C$. Nos enfocaremos en la paridad de la cantidad de dulces de cada grupo.

Nótese que la operación 1 le resta 1 a la cantidad de dulces de un grupo y le suma 1 a la cantidad de dulces de las otras dos, lo que significa que la paridad de todos los grupos cambia. Por otro lado, la operación 2 no cambia la paridad de ningún grupo, pues esta resta 2 dulces de un mismo grupo.

Como inicialmente se tiene la configuración

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| impar | par | par |

tenemos que las únicas posibles configuraciones de paridad son

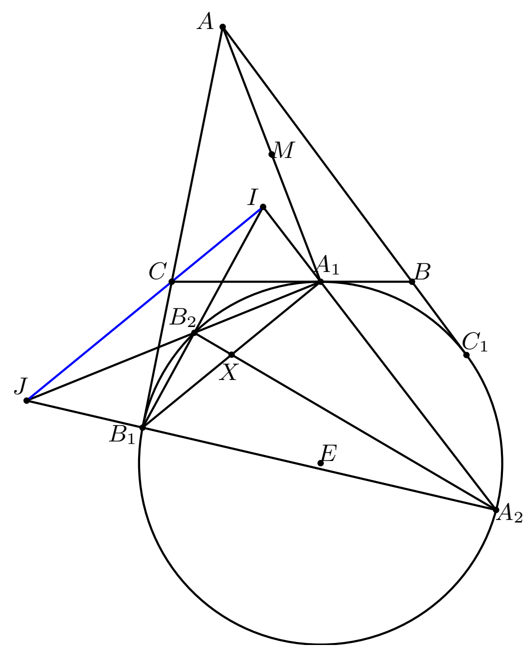
La operación 1 cambia de un estado a otro y la operación 2 mantiene el estado. La mesa vacía tiene la configuración de paridad

| $A$ | $B$ | $C$ | | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| impar | par | par | y | par | impar | impar |

| $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| par | par | par |

que no es una de las que se puede alcanzar. Entonces no se puede dejar la mesa vacía, lo que termina la demostración.

**Solución del problema 6. (Solución de Natalia Malpica Blackaller).** Nótese que $AB_1 = AC_1$ pues son las tangentes desde $A$ a $\Gamma$, el excírculo opuesto a $A$. Asumamos que $X$ y $Y$ son puntos medios de $A_1B_1$ y $A_1C_1$, respectivamente. Como $M$ es punto medio de $AA_1$, por homotecia con razón $\frac{1}{2}$ centrada en $A_1$ se tendría que el triángulo $AB_1C_1$ se mapea al triángulo $MXY$. En particular, $AB_1$ se mapea a $MX$ y $AC_1$ se mapea a $MY$. Como $AB_1 = AC_1$, se obtendría que $MX = MY$. Así, para concluir el problema y por la simetría de la figura, basta con probar que $X$ es punto medio de $A_1B_1$.




Para ver esto, sea $J$ la intersección de $A_1B_2$ y $B_1A_2$ y sea $E$ el excentro opuesto a $A$. Usando el Teorema de Pascal en el hexágono degenerado $A_1A_1B_2B_1B_1A_2$ se concluye que $I$, $C$ y $J$ son colineales. Además, se puede ver que $IC$ es perpendicular a $CE$ pues son bisectriz interna y externa del ángulo $\angle ACB$, respectivamente. Por otro lado, $A_1B_1$ y $CE$ son perpendiculares pues $A_1$ y $B_1$ son reflejados respecto a la recta $CE$ por ser los puntos de tangencia de las rectas tangentes desde $C$ a $\Gamma$. Esto significa que $A_1B_1$ es paralela a $IC$.

De lo anterior, se tiene que el cuadrilátero $IA_1B_1P$ es un trapecio. Es un hecho conocido que la recta que pasa por la intersección de los lados no paralelos de un trapecio y por la intersección de las diagonales biseca a los lados paralelos. Luego, se tendría que $A_2B_2$ biseca a los segmentos $IJ$ y $A_1B_1$. En particular $X$, la intersección de $A_2B_2$ y $A_1B_1$, debe ser el punto medio de $A_1B_1$, como se quería.

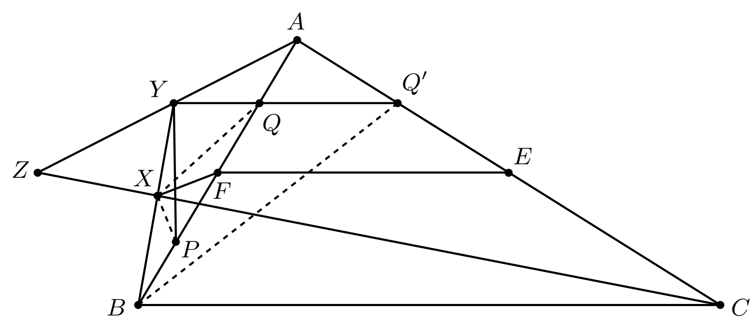
# XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

**Solución del problema 1. (Solución de Eric Ransom Treviño).** Sea $n \geq 1$. Consideremos una generalización al problema, donde tenemos un conjunto de $n$ primos distintos $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ y sea $A_n$ el conjunto de todos los enteros mayores que 1 tales que en su descomposición en factores primos aparecen únicamente primos de $P_n$. Coloreamos $A_n$ con las reglas a), b) y c). Demostraremos por inducción, que existe un número primo en $P_n$ tal que todos sus múltiplos en $A_n$ tienen el mismo color. Esto demostrará el problema, ya que el problema es el caso donde $n = 10$.
Para $n = 1$, todos los números de $A_1$ son de la forma $p_1^r$. Entonces, el color debe ser el mismo color de $p_1$ por el inciso b). Para $n = 2$ tenemos los primos $p_1$ y $p_2$. Los números de $A_2$ son de la forma $p_1^\alpha p_2^\beta$ (con $\alpha \geq 1$ o $\beta \geq 1$). Ahora, las potencias de $p_1$ tienen el mismo color que $p_1$ (por el inciso b)) y las potencias de $p_2$ tienen el mismo color que $p_2$. Entonces, por el inciso b), el número $p_1^\alpha p_2^\beta$ tiene el color de $p_1^\alpha$ o el color de $p_2^\beta$, por lo tanto tiene el color de $p_1$ o el color de $p_2$. Supongamos que $p_1$ tiene color $c_1$ y que $p_2$ tiene color $c_2$ (por a), $c_1 \neq c_2$). Sin pérdida de generalidad, el color de $p_1p_2$ es $c_1$. Entonces, consideramos $j = p_1$, $k = p_1p_2$, $n = p_2$ y $m$ un múltiplo de $p_1$. Por el inciso c), como $p_1 \mid m$ y $p_2 \mid p_1p_2$, tenemos que $m$ no puede ser de color $c_2$. Por lo tanto, los múltiplos de $p_1$ son de color $c_1$, que es lo que queríamos demostrar.
Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$. Ahora consideremos el caso donde tenemos $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Consideremos $A_{n-1}$ que son los múltiplos de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$. Como se cumplen los incisos a), b) y c) en el conjunto $A_n$, también se cumplen en el subconjunto $A_{n-1}$. Entonces, hay algún primo $p_i$ con $1 \leq i \leq n-1$, tal que todos los múltiplos de $p_i$ en $A_{n-1}$ son del mismo color $c_i$. Consideremos $p_ip_n$. Tenemos dos casos, uno donde es color $c_i$ y otro donde es el color de $p_n$, que es $c_n$. Primero supongamos que $p_ip_n$ es de color $c_i$. Entonces, los números de la forma $p_i^{\alpha_i}p_n^{\alpha_n}$ son de color $c_i$ por lo demostrado en el caso $n = 2$. Consideremos un entero $m$ múltiplo de $p_ip_n$. Como $p_n \mid m$, resulta que $m \notin A_{n-1}$ y existe un máximo $\alpha_n$ tal que $m = p_n^{\alpha_n}x$. Como $p_n \mid m$, $\alpha_n \geq 1$ y, como $\alpha_n$ es máximo, $x \in A_{n-1}$. Como $p_i \mid m$, tenemos que $p_i \mid x$, lo cual implica que $x$ es de color $c_i$. Luego, por el inciso b), $m$ es de color $c_i$ o es de color $c_n$. Ahora, como $p_ip_n$ es de color $c_i$, por el inciso c) tenemos que $m$ tiene que ser de color $c_i$. Notemos que esto acaba la demostración en este caso, ya que los múltiplos de $p_i$ en $A_n$ son múltiplos de $p_i$ en $A_{n-1}$ o múltiplos de $p_ip_n$.
Ahora supongamos que $p_ip_n$ es de color $c_n$ y consideremos a los números de la forma $p_i^{\alpha_i}p_n^{\alpha_n}$. Tales números deben de ser de color $c_n$ por el caso $n = 2$. Ahora, si $p_ip_n \mid m$,

entonces $m = p_n^{\alpha_n} x$ donde $x \in A_{n-1}$ y $p_i \mid x$. Luego, $x$ es de color $c_i$ y $p_n^{\alpha_n}$ es de color $c_n$. Por el inciso b), $m$ es de color $c_i$ o $c_n$. Pero por el inciso c) no puede ser de color $c_i$, ya que $p_i \mid p_i p_n$ y $p_n \mid m$. Entonces, todos los múltiplos de $p_i p_n$ son de color $c_n$. Ahora consideremos un número $t$ de la forma $t = p_n^{\alpha_n} z$ con $z \in A_{n-1}$ y $p_i \nmid z$. Sabemos que $tp_i = p_n^{\alpha_n} z p_i$ es de color $c_n$ por ser múltiplo de $p_i p_n$. Pero por el inciso b), $tp_i$ tiene el color de $t$ o el color de $p_i$. Como $tp_i$ tiene color $c_n$, no tiene el color de $p_i$. Entonces, el color de $t$ es $c_n$. Pero ya consideramos todos los múltiplos de $p_n$ en $A_n$ y todos tienen color $c_n$, que es lo que queríamos demostrar.

**Solución del problema 2. (Solución de Eric Ransom Treviño).** Sea $Q'$ la intersección de $YQ$ con $AC$. Notemos que el circuncírculo del triángulo $AQQ'$ es tangente al del triángulo $ABC$, ya que $BC \| QQ'$. Por lo tanto, $YA^2 = YQ \cdot YQ'$ y $YA^2 = YX \cdot YB$ por potencia de $Y$ con $\Gamma$. Luego, tenemos que $QQ'BX$ es cíclico.




Notemos que si $\angle BAC = \alpha$ y $\angle ACB = \theta$, entonces $\angle AQ'Q = \theta$ por el paralelismo. Luego,

$$\angle Q'QB = \alpha + \theta = \angle BAC + \angle AQ'Q,$$

lo cual implica que $\angle BXQ' = \theta + \alpha$ por el cíclico.
Como $YP^2 = YA^2 = YX \cdot YB$ y $\angle BAY = \angle BCA = \theta$ por seminscrito, entonces $\angle YAB = \angle YXA = \angle YPA = \theta$ (pues $YP = YA$) y los triángulos $YXA$ y $YAB$ son semejantes (pues $YA^2 = YX \cdot YB$). Luego, $\frac{YA}{YX} = \frac{YB}{YA}$. Así, el cuadrilátero $YXPA$ es cíclico porque $\angle YXA = \angle YPA$. Ahora, $\angle AQ'Y = \angle AXY = \angle ACB = \theta$ por el cíclico $ACBX$, lo cual implica que $YXQ'A$ es cíclico también y, por consiguiente, $YXPQ'A$ es cíclico.
Notemos que $EF, CX$ y $AY$ concurren por ser ejes radicales de $AEF$ y $CEFX$, $CEFX$ y $ABC$, y $ABC$ con $AEF$, respectivamente porque $EF \| BC$. Llamemos $Z$ al punto de concurrencia y notemos que $\angle AFZ = \theta + \alpha = \angle AEF + \angle FAE$, $\angle AXZ = \angle AXY + \angle YXZ$, $\angle AXY = \angle ACB = \theta$ y $\angle YXZ = \angle BXC = \angle BAC = \alpha$. Por lo tanto, $\angle AXZ = \angle AFZ = \theta + \alpha$. Entonces, $AFXZ$ es cíclico. Con esto obtenemos que $\angle FXC = \angle FAZ = \theta$, esto es,

$$\angle FXB = \angle FXC + \angle BXC = \theta + \alpha.$$

Como ya teníamos que $\angle BXQ' = \theta + \alpha$, concluimos que los puntos $X$, $F$ y $Q'$ son colineales. Como $QXBQ'$ y $Q'PXYA$ son cíclicos, aplicando potencia desde $F$

tenemos que

$$FX \cdot FQ' = FP \cdot FA = FQ \cdot FB.$$

Como $FA = FB$, se sigue que $FP \cdot FA = FQ \cdot FA$. Por lo tanto, $FP = FQ$, que es lo que queríamos demostrar.

**Solución del problema 3. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega).** Sean $P_n = a_1a_2 \cdots a_n$ y $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Como los $a_i$'s son enteros positivos, para $a > b$ tenemos que $P_a \geq P_b$ y $S_a > S_b$. Además, como $a_i \geq 1$ para todo $i$, tenemos que $S_n \geq n$.

Supongamos que $b_k \leq 2021^{2021}$ para todo entero positivo $k$. Por hipótesis del problema, en cada bloque de $10^6$ hay un entero $n$ tal que $b_n$ es entero, pero entonces podemos tomar $n$ arbitrariamente grande tal que $b_n$ es entero. Para tal $n$ tenemos que $P_n \geq S_n \geq n$. Luego, $P_n$ es arbitrariamente grande pero siempre menor o igual que $S_n 2021^{2021}$, ya que $b_n = \frac{P_n}{S_n} \leq 2021^{2021}$.

La idea es tomar un $n$ suficientemente grande tal que $b_n$ sea entero y ver que si los siguientes $10^6$ $a_i$'s fueran 1, aún así no se podría llegar a un entero, es decir, $b_{n+10^6} > b_n - 1$ si $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+10^6} = 1$. Como es lo menos que puede ser $b_{n+10^6}$, todos los demás también son mayores.

Sea $A = 2021^{2021}$. Para cada entero $n \geq A^2$, sea $B$ tal que $A^{B+1} > S_n \geq A^B$ y $A^{B-1} > 10^6$. Sabemos que $P_n \geq S_n \geq A^B$ y que $A > \frac{P_n}{S_n} \geq 1$. Como $b_n = \frac{P_n}{S_n}$ y $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{n+10^6} = 1$, tenemos que $b_{n+10^6} = \frac{P_n}{S_n + 10^6}$.

Si $b_n - b_{n+10^6} \geq 1$, entonces

$$\frac{P_n}{S_n} - \frac{P_n}{S_n + 10^6} \geq 1,$$

esto es, $10^6 P_n \geq S_n(S_n + 10^6)$, lo cual implica que

$$10^6 A \geq \frac{10^6 P_n}{S_n} \geq S_n + 10^6 \geq A^B + 10^6.$$

Pero esto es una contradicción, ya que $A^B > 10^6 A \geq A^B + 10^6$. Concluimos que $b_{n+10^6}$ es mayor que $b_n - 1$ y cualquier número entre $b_n$ y $b_{n+10^6}$ también. Lo último es porque si algún $a_k$ es mayor que 1 con $n < k \leq n + 10^6$, entonces $P_k/S_k > P_{k-1}/S_{k-1}$ ya que si $p = P_{k-1}$ y $s = S_{k-1}$, entonces

$$\frac{P_k}{S_k} - \frac{P_{k-1}}{S_{k-1}} = \frac{pa_k}{s + a_k} - \frac{p}{s} = \frac{psa_k - ps - pa_k}{s(s + a_k)}.$$

Como $ps - p > 0$, el numerador es creciente con $a_k$, por lo que es mínimo cuando $a_k = 1$.

Por lo tanto, si algún entero aparece entre $b_{n+1}$ y $b_{n+10^6}$, entonces tiene que ser mayor o igual que $b_n$. Entonces para que la secuencia $b_n$ esté acotada, existe un $b_k$ tal que todos los enteros $b_i$ con $i \geq k$ cumplen que $b_i = b_k$.

Para pasar de $b_k$ al siguiente entero, digamos $b_r$, no se pueden solo agregar 1's, porque

$b_r$ sería menor que $b_k$, entonces algún $a_i \geq 2$. Como $b_r$ es entero tal que $r - k \leq 10^6$ y, denotando $d = a_i \geq 2$, tenemos que

$$b_r \geq \frac{P_k d}{S_k + d + 10^6}.$$

Entonces

$$b_r - b_k \geq P_k \left( -\frac{1}{S_k} + \frac{d}{S_k + d + 10^6} \right) = P_k \left( \frac{S_k d - S_k - d - 10^6}{S_k(S_k + d + 10^6)} \right).$$

Sabemos que $P_k > 0$, $S_k(S_k + d + 10^6) > 0$ y además

$$S_k d - S_k - d - 10^6 = (S_k - 1)(d - 1) - 10^6 - 1.$$

Como $d - 1 \geq 1$ y $S_k \geq 10^6 + 3$ (ya que $k$ es arbitrariamente grande), resulta que $b_r - b_k > 0$. Esto contradice que $b_r = b_k$. Por lo tanto, existe algún $b_i$ tal que $b_i > 2021^{2021}$.

**Solución del problema 4. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán).** Sea $m$ el valor de $a^2 + x^2$. Entonces

$$\begin{aligned} m &= (a+b)^2 + (x+y)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab) + (x^2 + y^2 + 2xy) \\ &= (a^2 + x^2) + (b^2 + y^2) + 2(ab + xy) = 2m + 2(ab + xy). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$ab + xy = -\frac{m}{2}. \tag{11}$$

Análogamente, obtenemos que

$$bc + yz = -\frac{m}{2}, \tag{12}$$

y

$$ac + xz = -\frac{m}{2}. \tag{13}$$

Ahora combinando (11) y (13) con $a^2 + x^2 = m$ nos queda

$$\begin{gathered} (a^2 + x^2) + (ab + xy) + (ac + xz) = m - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \\ (a^2 + ab + ac) + (x^2 + xy + xz) = 0, \end{gathered}$$

$$a(a + b + c) + x(x + y + z) = 0. \tag{14}$$

Similarmente, usando que $b^2 + y^2 = m$, $bc + yz = -m/2$ y $ba + yx = -m/2$ llegamos a que

$$b(a + b + c) + y(x + y + z) = 0, \tag{15}$$

mientras que usando $c^2 + z^2 = m$, $ca + zx = -m/2$ y $cb + zy = -m/2$ llegamos a que

$$c(a + b + c) + z(x + y + z) = 0. \tag{16}$$

Sumando (14), (15) y (16) obtenemos que

$$(a+b+c)^2+(x+y+z)^2=0.$$

Pero como $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ son números reales, tenemos que la igualdad se obtiene si y solo si $a+b+c=x+y+z=0$.
Si $m=0$, entonces $0=a=x=y=b$ y $c=-a-b=0$, $z=-x-y=0$. Luego, $a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$ como queremos. Por lo tanto, podemos suponer que $m\neq 0$. Ahora, podemos asumir que $m=2$ ya que si $a^2+x^2=M$ entonces al dividir $a,b,c,x,y,z$ por $\sqrt{M/2}$ obtenemos que

$$a'^2+x'^2=\frac{a^2}{M/2}+\frac{x^2}{M/2}=2.$$

Entonces supongamos que $a^2+x^2=2=b^2+y^2$. También tenemos que

$$ab+xy=-\frac{m}{2}=-1.$$

Notamos que lo que queremos probar ($a^2+b^2+c^2=x^2+y^2+z^2$) es equivalente a

$$\begin{aligned}a^2+b^2+(-a-b)^2&=x^2+y^2+(-x-y)^2\\2(a^2+b^2+ab)&=2(x^2+y^2+xy)\\a^2+b^2+ab&=x^2+y^2+xy.\end{aligned}$$

Entonces, es suficiente demostrar que $a^2+b^2+ab=x^2+y^2+xy$.
Hagamos el cambio de variables donde $w_1$ y $w_2$ son $a^2=1+w_1$, $x^2=1-w_1$, $b^2=1+w_2$, $y^2=1-w_2$. De este modo tenemos que $2=a^2+x^2=b^2+y^2$ y

$$(ab)^2-(xy)^2=(1+w_1)(1+w_2)-(1-w_1)(1-w_2)=2(w_1+w_2). \tag{17}$$

Como $ab+xy=-1$, tomando $k=a^2+b^2+ab$, tenemos que

$$xy=-1-ab=w_1+w_2+1-k.$$

Entonces, usando la factorización $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$, resulta que

$$\begin{aligned}(ab)^2-(xy)^2&=(k-2-w_1-w_2)^2-(w_1+w_2+1-k)^2\\&=(-1)(2k-3-2(w_1+w_2))=2(w_1+w_2)+3-2k.\end{aligned}$$

Pero por (17), tenemos que $(ab)^2-(xy)^2=2(w_1+w_2)$. Por lo tanto,

$$2(w_1+w_2)=2(w_1+w_2)+3-2k,$$

y entonces $k=3/2$.
Notemos que

$$\begin{aligned}x^2+y^2+xy&=(a^2+x^2)+(b^2+y^2)+(ab+xy)-(a^2+b^2+ab)\\&=2+2-1-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\\&=a^2+b^2+ab.\end{aligned}$$

Entonces $x^2 + y^2 + xy = a^2 + b^2 + ab$ como queríamos.

**Solución del problema 5. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero).** Sea $C$ el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$. Entonces,

$$S(C) = 1 + 2 + \ldots + 2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 1011 \cdot 2021.$$

Demostraremos primero un lema.
**Lema.** Sea $x$ cualquier número entero con $1 \leq x \leq S(C)$. Entonces podemos encontrar un subconjunto $W$ de $C$ tal que $S(W) = x$.

*Demostración.* La prueba la haremos por inducción. Sea $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$. Vamos a demostrar que para todo $1 \leq x \leq S(A_i)$, existe un subconjunto $L$ de $A_i$ tal que $S(L) = x$. El caso $i = 1$ cumple porque $A_1 = \{1\}$, $S(A_1) = 1$ y el subconjunto $\{1\}$ tiene suma $1$. El caso $i = 2$ cumple porque $S(A_2) = 3$, el subconjunto $\{1\}$ tiene suma $1$, el subconjunto $\{2\}$ tiene suma $2$ y el subconjunto $\{1, 2\}$ tiene suma $3$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para $i = m$ para algún $m \geq 2$. Si $x \in \{1, 2, \ldots, S(A_m)\}$, entonces por hipótesis de inducción, existe un subconjunto $R$ de $A_m$ tal que $S(R) = x$. Supongamos que $S(A_m) < x \leq S(A_{m+1})$. Tenemos que $S(A_{m+1}) - S(A_m) = m + 1$, lo cual implica que $x - (m + 1) \leq S(A_m)$. Por otro lado, usando que $S(A_m) = \frac{m(m+1)}{2}$ y que $m \geq 2$, tenemos que

$$\begin{aligned} x - (m + 1) \geq S(A_m) + 1 - (m + 1) &= \frac{m(m + 1)}{2} - (m + 1) + 1 \\ &= \frac{(m + 1)(m - 2)}{2} + 1 \geq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x - (m + 1) \in A_m$. Luego, existe un subconjunto $R$ de $A_m$ tal que $S(R) = x - (m + 1)$. Por lo tanto, el subconjunto $L = R \cup \{m + 1\}$ de $A_{m+1}$ cumple que $S(L) = x$. □

Tenemos que

$$S(C) = 2021 \cdot 1011 = 2021 \cdot 3 \cdot 337 = 2021 \cdot 3(256 + 81).$$

Sabemos que existe un subconjunto $K \subset C$ tal que $S(K) = 2021 \cdot 3 \cdot 256$ ya que $1 \leq S(K) \leq S(C)$. Si $P$ es el complemento, es decir el subconjunto de $C$ tal que $K \cup P = C$ y $K \cap P = \emptyset$, entonces $S(P) + S(K) = S(C)$. Por lo tanto,

$$S(P) = S(C) - S(K) = 2021 \cdot 3(256 + 81) - 2021 \cdot 3(256) = 2021 \cdot 3 \cdot 81.$$

Esto implica que

$$S(P)S(K) = 2021 \cdot 3 \cdot 256 \cdot 2021 \cdot 3 \cdot 81 = 2021^2 \cdot 3^2 \cdot 16^2 \cdot 9^2 = (2021 \cdot 27 \cdot 16)^2.$$

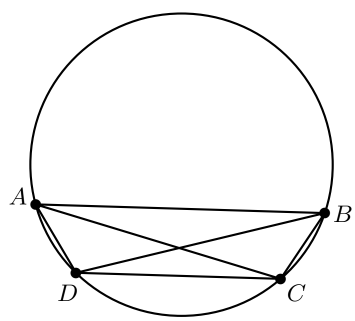
El problema nos pide dar a los conjuntos $K$ y $P$ explícitamente. Usando el algoritmo implícito en la inducción, podemos construir a $K$. Como queremos que $S(K) = 2021 \cdot 3 \cdot 256$ entonces comparamos este número contra $2020 \cdot 2021/2$. Como es menor, entonces no usamos el número 2021. Seguimos comparando con $i(i+1)/2$ hasta que $i(i+1)/2$ sea menor que $2021 \cdot 3 \cdot 256$. Esto pasa cuando $i = 1761$. Entonces un elemento del conjunto $K$ es 1762. Ahora restamos 1762 y comparamos de la misma manera. Siguiendo este algoritmo llegamos a que $K$ es

$$K = \{1762, 1761, \ldots, 1075, 1073, 1072, \ldots, 2\},$$

es decir, los números enteros del 2 al 1762 excluyendo 1074. El conjunto $P$ es el complemento, esto es,

$$P = \{1, 1074, 1763, 1764, \ldots, 2021\}.$$

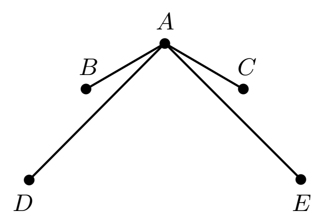
**Solución del problema 6. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán).** Empezamos viendo qué es lo que sucede si tenemos dos parejas de puntos $(A_i, A_j)$ y $(A_k, A_\ell)$, de modo que $i, j, k, \ell$ son distintos por parejas y satisfacen que $A_iA_j = A_kA_\ell$. Como el polígono es regular, tenemos que $A_i, A_j, A_k, A_\ell$ son concíclicos, es decir, están en una misma circunferencia. Pero, es un hecho conocido, que sin importar la posición en la que se encuentran, van a formar un trapecio isósceles. Notemos que en un trapecio isósceles siempre podemos tomar dos triángulos distintos congruentes, por ejemplo en la figura de abajo, los triángulos $ABC$ y $BAD$ son congruentes. De modo que si esto pasara, tendríamos una pareja de triángulos congruentes que es lo que queremos.




Supongamos, por contradicción, que esto no pasa en nuestro subconjunto $V$ de vértices del polígono. Tomemos algún punto $A_1$ del conjunto $V$ y denotemos por $A_2$ el siguiente punto de $V$ (en el sentido de las manecillas del reloj), luego denotemos por $A_3$ al siguiente y así sucesivamente, hasta $A_r$. Ahora, a cada $A_j$, vamos a asociarle los números correspondientes a su distancia (en sentido de las manecillas del reloj) con respecto a todos los demás puntos. Por ejemplo, si hay dos vértices del polígono entre $A_j$ y $A_{j+1}$, entonces le asociamos el número 3 (porque hay tres segmentos entre $A_j$ y $A_{j+1}$) con respecto a $A_{j+1}$, pero así le asociamos números con respecto a los demás puntos. Entonces, a cada $A_j$ se le asocia un conjunto de tamaño $r-1$ (como todas las distancias son diferentes, al ser medidas en la misma dirección).
Ahora, supongamos que para dos puntos $A_k$ y $A_i$, sucede que tienen en común dos parejas de distancias. Entonces se forman dos triángulos congruentes distintos, a menos

que se forme un triángulo equilátero. Pero notemos que solo puede haber a lo más un triángulo equilátero, porque si hubiera dos, serían dos triángulos congruentes. Ahora, supongamos que para algún $A_m$, sucede que en su conjunto de distancias, una distancia de $A_m$ es igual a una distancia de $A_i$. Supongamos que $m > i$ y que las distancias que se repiten son $A_mA_w$ y $A_iA_k$. Como no podemos tener trapecios isósceles, entonces $k = m$. Ahora supongamos también que existe $j \neq i$ tal que $m > j$ y hay una distancia en el conjunto de $A_j$ igual a una de las distancias en $A_m$. Entonces, de la misma manera que el análisis con $i$, tenemos que una de las distancias que usamos es $A_jA_m$. Digamos que la otra distancia es $A_mA_t$, entonces $A_i, A_j, A_t, A_w$ forman un trapecio isósceles y acabamos.

Supongamos que alguna distancia aparece al menos 3 veces entre todos los conjuntos de distancias. Entonces, la única manera de evitar el trapecio isósceles es cuando se forma un triángulo equiátero $A_iA_jA_k$. Esto solo puede pasar a lo más una vez (porque no puede haber dos triángulos equiláteros). Ahora, contemos de cuántas maneras puede pasar que haya una distancia en exactamente 2 conjuntos de distancias de dos puntos distintos $A_i$ y $A_j$. Esto pasa a lo mucho $2r$, pues, si hay dos distancias iguales en dos conjuntos distintos, para evitar un trapecio isósceles tendrá que suceder que se forme un triángulo isósceles (o un punto diametralmente opuesto a otro). Para cada punto, esto pasa a lo más una vez, ya que si pasara dos veces se formaría un triángulo isósceles como en la figura de abajo.




En el caso de tener punto diametralmente opuesto, se forma un deltoide (o papalote), en el cual también hay dos triángulos (distintos) congruentes. De modo que, por cada vértice solo va a haber un triángulo isósceles. Entonces, la cantidad de pares de distancias iguales en nuestros conjuntos es a lo más $2r$, pues hay a lo más una por cada vértice y cada distancia se puede contar de dos maneras (con respecto a las manecillas del reloj y en contra). Pero entonces habrá a lo más $2r$ distancias que se cuentan doble y, como en total tenemos $r(r-1)$ entre todos los conjuntos, va a haber al menos $r(r-1) - 2r = r(r-3)$ distancias distintas. Pero $r(r-3) \geq n$. Como solo hay $n-1$ posibles distancias $(1, 2, \ldots, n-1)$, entonces llegamos a una contradicción.

# Apéndice

**Definición 1** (Divisibilidad)**.** *Si $a$ y $b$ son enteros, se dice que $a$ divide a $b$ o que $b$ es múltiplo de $a$ si $b = aq$ para algún entero $q$, y se denota por $a \mid b$.*

**Definición 2** (Congruencias)**.** *Dados dos enteros $a$, $b$ y un entero positivo $m$, decimos que $a$ es congruente con $b$ módulo $m$ si $a - b$ es múltiplo de $m$. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod $m$).*

**Teorema 1** (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean $a, b, c, d, m$ enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod $m$) y $c \equiv d$ (mod $m$), entonces $a \equiv d$ (mod $m$).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod $m$) y $b \equiv d$ (mod $m$), entonces $ab \equiv cd$ (mod $m$).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod $m$), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod $m$) para todo entero positivo $n$.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod $m$), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde $(b, m)$ denota el máximo común divisor de $b$ y $m$.*

**Teorema 2** (Pequeño de Fermat)**.** *Si $p$ es un número primo y $a$ es un entero primo relativo con $p$, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod $p$).*

**Teorema 3.** *Si $p$ es un número primo de la forma $4k + 3$ y $p$ divide a una suma de cuadrados $a^2 + b^2$, entonces $p$ divide a cada uno de $a$ y $b$.*

**Teorema 4** (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde $k_0$ es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

*Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.*

**Teorema 5** (Principio de las Casillas). *Si $kn + 1$ objetos son colocados en $n$ casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

**Teorema 6** (Combinaciones). *Dado un conjunto $A$ de $n$ elementos, una combinación de $m$ elementos de $A$, es un subconjunto de $A$ formado de $m$ elementos. El número de combinaciones de $m$ elementos de $A$, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

*donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.*

**Teorema 7** (Binomio). *Para $a$ y $b$ números cualesquiera y $n$ un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

**Teorema 8** (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si $x_1$, $x_2$, $\ldots$, $x_n$ son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

*y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.*

**Teorema 9** (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

**Teorema 10** (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

**Definición 3** (Congruencia de triángulos). *Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo $ABC$ son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

**Criterio 1** (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

**Criterio 2** (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

**Definición 4** (Semejanza de triángulos). *Los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

**Criterio 3** (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos $ABC$ y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

**Teorema 11** (Tales). *Si $ABC$ es un triángulo y $D$, $E$ son puntos sobre los lados $AB$ y $CA$, respectivamente, entonces los segmentos $DE$ y $BC$ son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

**Teorema 12** (Bisectriz). *Dado un triángulo $ABC$ y un punto $D$ sobre el lado $BC$, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

**Teorema 13** (Ceva). *Si $L$, $M$ y $N$ son puntos sobre los lados (o extensiones) $BC, CA$ y $AB$, respectivamente, del triángulo $ABC$, entonces $AL$, $BM$ y $CN$ son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

**Teorema 14** (Menelao). *En un triángulo $ABC$, si $L$, $M$ y $N$ son puntos sobre los lados $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces $L$, $M$ y $N$ son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

**Definición 5** (Ángulos en la circunferencia).

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

**Teorema 15** (Medida del ángulo inscrito). *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

**Teorema 16** (Medida del ángulo seminscrito). *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

**Teorema 17** (Potencia de un punto).

1. *Si dos cuerdas $AB$ y $CD$ de una circunferencia se intersectan en un punto $P$, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si $A$, $B$ y $T$ son puntos sobre una circunferencia y la tangente en $T$ intersecta en un punto $P$ a la prolongación de la cuerda $AB$, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

**Definición 6** (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

**Teorema 18** (Cuadrilátero cíclico). *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

**Teorema 19** (Circuncírculo e Incentro). *Si $\Omega$ es el circuncírculo de un triángulo $ABC$, $I$ es el incentro y $M$ es la intersección de $AI$ con $\Omega$, entonces $MI = MB = MC$.*

# Bibliografía


[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

# Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez