SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Olimpiada Mexicana de Matemáticas

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 2

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Mayo de 2022

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2022, Número 2

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Maximiliano Sánchez Garza (conocido en la comunidad olímpica mexicana como Max), quien se integró a este comité a partir del No. 2 del año 2020. Te deseamos el mayor de los éxitos en tus nuevos proyectos. ¡Muchas gracias Max!

Pasando al contenido, destaca el artículo *Geometría Combinatoria y el Teorema del Ham Sandwich*, de Cuauhtémoc Gómez Navarro. En él, Cuauhtémoc nos muestra algu-

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

nas de las ideas que han servido para resolver problemas de olimpiadas de matemáticas en el área de la geometría combinatoria. Estamos seguros que esta aportación será de utilidad para todos los lectores.

De especial interés para los más pequeños, en este segundo número del año 2022, incluimos el examen estatal de Yucatán 2022 para $4°$, $5°$ y $6°$ de primaria.
De interés para todos, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel III del Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2021 de forma virtual. También incluimos los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, realizada de forma virtual en el mes de noviembre de 2021.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) 2022, realizada en el mes de abril de 2022 de forma presencial.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2003. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2022-2023 y, para el 1° de julio de 2023, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2022. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2022 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2023) y a la XXXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2023).

De entre los concursantes nacidos en 2006 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2023).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2023.

6ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2022, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Sexta Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2022.

Nivel II. Estudiantes de sexto año de primaria y primer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2022.

Nivel III. Estudiantes de segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2022.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 6^a OMMEB se realizará del 10 al 13 de junio de 2022 de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2023.

Geometría Combinatoria y el Teorema del Ham Sandwich

Por Cuauhtémoc Gómez Navarro

Nivel Avanzado

La geometría combinatoria es un área de las matemáticas que ha tomado mucha fuerza en los últimos años, tanto en la investigación matemática, como en problemas de olimpiadas.
Muchos problemas de esta área matemática se caracterizan por tener soluciones que solo usan ideas sencillas, sin embargo, esto no significa que el problema sea fácil de resolver. Un ejemplo de esto es el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del año 2011, que tiene una solución sencilla y, sin embargo, a la mayoria de los participantes de esa competencia no se les ocurrió esa idea sencilla.
Este artículo tiene como propósito mostrar algunas de las ideas que han servido para resolver problemas de olimpiadas de matemáticas del área de la geometría combinatoria, además veremos que esas ideas nos llevan a resultados más fuertes de investigación en geometría combinatoria (también llamada geometría discreta).
Se ha tratado de dar las referencias de todos los problemas y resultados que aparecen en este artículo. Pido una disculpa por cualquier error en las referencias. Por último, se recomienda al lector intentar los problemas antes de leer la solución.

Problemas de Olimpiadas de Matemáticas

Imaginemos que estamos manejando un automóvil sobre una avenida A y que a nuestro lado izquierdo, se encuentra otra avenida B. Supongamos que después de 30 minutos de manejar sobre la avenida A (en la misma dirección), nos damos cuenta que ahora la avenida B se encuentra a nuestro lado derecho. Si pensamos a las avenidas como líneas rectas en el plano, nuestra intuición nos debería decir que en un momento intermedio

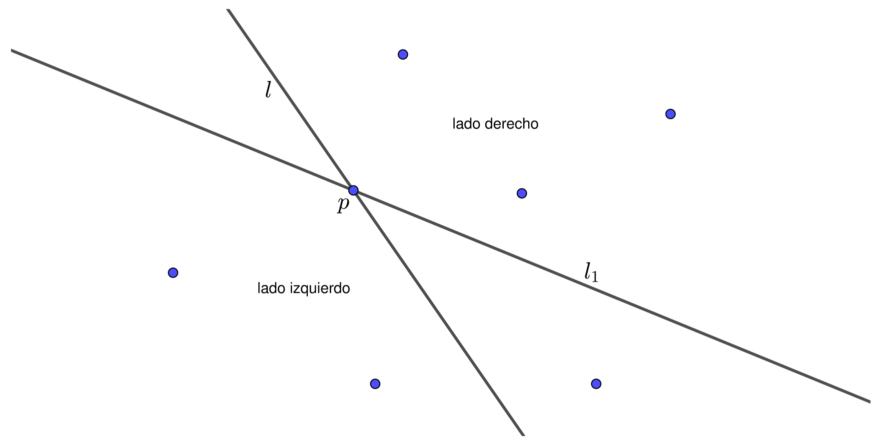


Figura 1: *En este ejemplo (del Problema 1), inicialmente el lado derecho de la recta l tiene más de la mitad de puntos. Entonces, antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_1, que deja la mitad de los puntos en cada uno de los lados que determina.*

las dos avenidas se cruzaron, es decir, en un momento estuvimos simultáneamente sobre las dos avenidas.

En esta sección veremos las soluciones de algunos problemas de olimpiadas de matemáticas. La idea intuitiva para resolverlos será la misma intuición que usamos en el ejemplo de las avenidas.

Problema 1. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano y con una cantidad impar de puntos. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Demuestra que para cualquier punto p de S, hay una recta que pasa por p y que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados (semiplanos) definidos por esa recta.

Solución. Sea p cualquier punto de S. Nos tomamos cualquier recta l que pase por p, pero no pase por ningún otro punto de S.
Si l es una recta que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta, es la recta que estamos buscando, si no podemos asignarle una dirección a la recta y considerar su lado derecho y su lado izquierdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el lado derecho tiene más de la mitad de puntos de S. Si empezamos a rotar la recta con centro en p al dar un giro de $180°$ habremos invertido los lados, así que ahora el lado derecho va tener menos puntos de S que la mitad. Como no hay 3 puntos de S sobre la recta l (o alguna de sus rotaciones), al hacer la rotación los puntos de S van cambiando de lado uno por uno, así que antes de dar el giro de $180°$, encontraremos una recta l_1 que pase por p y deje la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que determina la recta (ver Figura 1). □

El siguiente problema es un resultado de un tema de investigación que se ha trabajado en geometría combinatoria (el lector interesado en la historia del problema puede consultar [5]).

Problema 2. Sea n un entero mayor que 1. Sea A un conjunto de $2n$ puntos sobre una circunferencia (en el plano). Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Una trayectoria de longitud k es una sucesión $p_1, p_2, \ldots, p_k$ de puntos distintos en el conjunto A. Decimos que la trayectoria (con vértices en el conjunto A) es una *trayectoria alternante simple* si alterna puntos azules con puntos rojos y, para toda $i \neq j$ con $0 < i, j < k$, los segmentos $p_i p_{i+1}$ y $p_j p_{j+1}$ no se cruzan. Demuestra que hay una trayectoria alternante simple (con vértices en el conjunto A) de longitud al menos n.

Solución. Primero veamos que hay una recta l que deja la mitad de los puntos de A de un lado y la otra mitad en el otro lado. Para eso, tomemos cualquier recta l_0 que cumpla que ni l_0 ni ninguna de las rectas paralelas a l_0 pasa por dos puntos de A. Entonces, empecemos a trasladar la recta l_0 hasta llegar a una recta l que deje la mitad de los puntos de A de un lado y la otra mitad en el otro lado. Asignemos una dirección a la recta l y consideremos el lado derecho. Por el principio de las casillas, el lado derecho tiene al menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos de alguno de los dos colores, sin pérdida de generalidad el lado derecho tiene al menos $p \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos azules, los cuales numeramos de arriba hacia abajo como $a_1, \ldots, a_p$. Entonces, el lado izquierdo debe tener al menos $q \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ puntos rojos, los cuales numeramos de arriba hacia abajo como $r_1, \ldots, r_q$. Sin pérdida de generalidad, $p \geq q$. Entonces, la trayectoria $r_1, a_1, r_2, a_2, \ldots, r_q, a_q$ es una trayectoria alternante simple de longitud $2q \geq n$ (ver Figura 2). $\square$

A continuación veremos el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del 2011, que fue propuesto por Geoff Smith.

Problema 3. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta l que pasa por exactamente un punto p de S. La recta se empieza a rotar con centro en p en sentido de las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre por primera vez con otro punto q de S. En ese momento, se cambia el centro de rotación al punto q y se continúa rotando la recta en sentido a las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre con otro punto de S. Este proceso continúa indefinidamente. Demuestra que se puede elegir un punto p en S y una recta l que pase por p, de tal manera que el remolino que resulta usa cada punto de S como centro de rotación una infinidad de veces.

Solución. Primero tomemos cualquier recta l que cumpla que ni l ni ninguna de las rectas paralelas a l pasa por dos puntos de S. Entonces, empecemos a trasladar la recta l hasta llegar a una recta l_1 que pase por un punto p de S y que cumpla que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1 (notemos que si S tiene una cantidad impar de puntos, entonces l_1 es una recta que deja

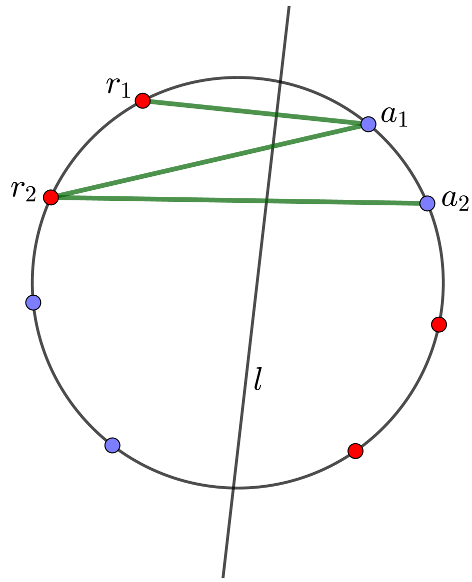


Figura 2: *Ejemplo del Problema 2 con $n = 4$ y una trayectoria alternante simple de longitud $n = 4$. Notemos que en este ejemplo, la trayectoria alternante simple que nos da la solución del Problema 2, se puede extender a una trayectoria alternante simple de longitud $2n = 8$.*

la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta). Proponemos que si empezamos el remolino con ese punto p y esa recta l_1, obtendremos lo que queremos.

Digamos que una recta es *justa*, si cumple que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1.

Si empezamos a rotar la recta l_1 con centro en p, es claro que la recta seguirá siendo justa hasta que llegue a otro punto de S. Cuando lleguemos a otro punto q de S y cambiemos el centro de rotación a q, uno de los lados perderá al punto q, sin embargo, inmediatamente ganará al punto p, por lo que la recta se mantendrá siendo justa.

Como la recta se mantiene justa durante todo el remolino, entonces, cuando demos un giro de $180°$, llegaremos a otra recta l_2, paralela a l_1, que cumple que en la franja entre las rectas l_1 y l_2 no hay ningún punto (ver Figura 3).

Esto significa que en el remolino, cuando pasamos de la recta l_1 a la recta l_2, pasamos por todos los puntos de S. Entonces, si seguimos rotando la recta, cada vez que demos un giro de $180°$, pasaremos por todos los puntos de S. Por lo tanto, si empezamos el remolino con una recta justa, obtenemos el resultado. $\square$

Ahora veremos un problema que se resuelve con ideas similares a las que hemos estado viendo y que además usa la definición de *envolvente convexa*.

Decimos que un conjunto C (en el plano) es *convexo*, si para cada par de puntos x, y en C, se cumple que el segmento que tiene como extremos a x y a y, se queda contenido

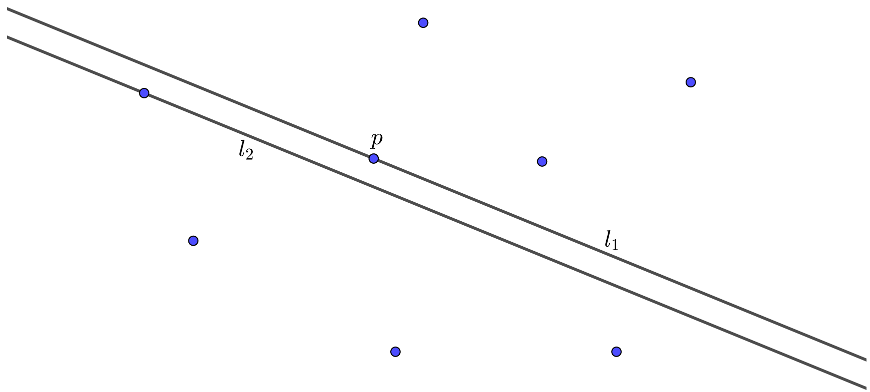


Figura 3: *En este ejemplo (del Problema 3) el conjunto tiene una cantidad par de puntos, por lo que las rectas l_1 y l_2 son distinas, pero no hay puntos en la región que está entre esas dos rectas.*

en C. Un conjunto convexo C lo podemos visualizar como un conjunto que no tiene hoyos. Por ejemplo, un círculo, un triángulo y un rectángulo, son ejemplos de conjuntos convexos.
Sea S un conjunto de puntos (en el plano). Diremos que C es la *envolvente convexa* de S, si es el conjunto convexo más pequeño que contiene en su interior o en su frontera, a todos los puntos de S, en el sentido de que cualquier otro conjunto convexo que contenga a S, contiene a C. Además, cuando un punto de S esté en el interior o sobre la frontera de la envolvente convexa C, diremos que ese punto está sobre la envolvente convexa.
La definición de envolvente convexa puede llegar a ser muy útil a la hora de resolver problemas de geometría combinatoria, ya que en muchas ocasiones, los puntos sobre las envolventes convexas tienen propiedades interesantes.
El siguiente problema se resuelve usando ideas similares a las que hemos estado viendo, además, es un ejemplo de la importancia que puede llegar a tener la envolvente convexa. Fue el problema 5 de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos (USAMO) del 2005.

Problema 4. Sea n un entero mayor que 1. Consideremos un conjunto de $2n$ puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Una recta en el plano se llama *balanceada* si pasa por exactamente un punto azul y un punto rojo, y para cada lado definido por la recta, el número de puntos azules en ese lado es igual al número de puntos rojos en ese lado. Demuestra que existen al menos dos rectas balanceadas.

Solución. Observemos que la envolvente convexa del conjunto de los $2n$ puntos, contiene al menos 3 puntos sobre ella. Por el principio de las casillas, hay al menos 2 de esos puntos que son del mismo color, sin pérdida de generalidad, supongamos que son

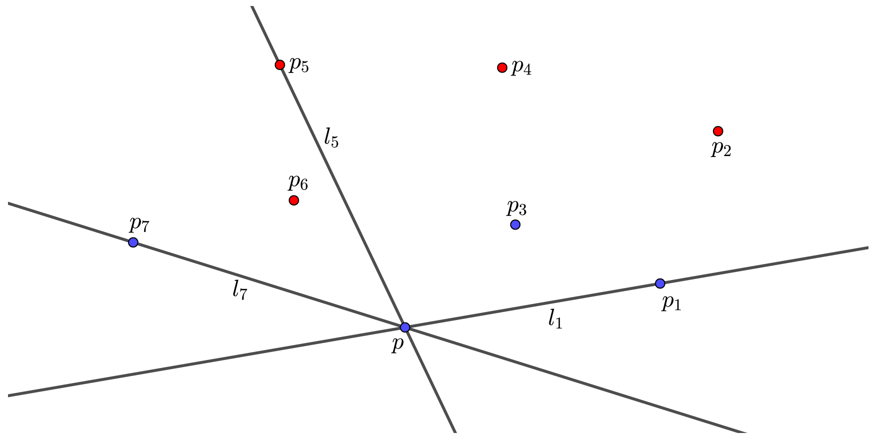


Figura 4: *En este ejemplo (del Problema 4) tenemos 4 puntos azules y 4 puntos rojos. Notemos que la recta l_3 cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, sin embargo, el punto p_3 es azul, por lo cual l_3 no es balanceada. La recta l_5 también cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, y como el punto p_5 sí es rojo, tenemos que l_5 sí es balanceada.*

de color azul. La idea será buscar una recta balanceada por cada punto azul sobre la envolvente convexa.

Consideremos uno de los puntos azules p sobre la envolvente convexa. Sean p_1 y p_{2n-1} los dos puntos que están sobre la envolvente convexa y que son adyacentes a p. Si alguno de p_1 o p_{2n-1} es de color rojo, al unirlo con el punto azul p, obtendremos una recta balanceada. Entonces, supongamos que tanto p_1 como p_{2n-1} son azules.

Sea l_1 la recta que pasa por p y p_1. Empecemos a rotar la recta l_1 con centro en p en sentido contrario a las manecillas del reloj. Numeremos a los $2n-1$ puntos que son distintos de p, de acuerdo al orden en que la recta fue pasando por esos puntos, cuando hicimos la rotación con centro en p; al i-ésimo punto lo llamamos p_i. Notemos que esta numeración es compatible con las etiquetas que ya le habíamos puesto a los puntos p_1 y p_{2n-1}. Dado el orden anterior, llamemos l_i a la recta que pasa por los puntos p y p_i (ver Figura 4).

A todas las rectas l_i les asignamos una dirección: apuntando hacia el lado contrario de p visto desde p_i. Entonces, la recta l_2 cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos; y la recta l_{2n-1} cumple que su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos. Como no hay tres de los puntos que sean colineales, cuando hacemos la rotación con centro en p, estamos cambiando a los puntos de lado uno por uno. Por lo tanto, hay una recta l_i (con $2 \leq i \leq 2n-2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Además, si el punto p_i es rojo, entonces, el lado izquierdo de l_i también tiene el mismo número de puntos azules y rojos, por lo cual l_i sería balanceada.

En otro caso, el punto p_i es azul. Entonces, la recta l_{i+1} cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos, y como ya sabemos que la recta l_{2n-1} cumple que

su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos, tenemos que existe una recta l_j (con $i + 1 \leq j \leq 2n - 2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Notemos que si desde el principio nos hubieramos tomado i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces l_j nos hubiera dado una contradicción.
El párrafo anterior nos dice que si nos tomamos i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces l_i será una recta balanceada.
Por lo tanto, para cada punto azul sobre la envolvente convexa hay una recta balanceada que pasa por el punto azul. Como estamos suponiendo (sin pérdida de generalidad) que hay al menos dos puntos azules, tenemos al menos dos rectas balanceadas. $\square$

Como seguramente recordarán, en las rotaciones de las soluciones de los Problemas 1 y 3, no usamos que los centros de rotación estuvieran sobre la envolvente convexa del conjunto de puntos. Esto nos podría llevar a pensar que en la solución del Problema 4 podemos usar cualquier punto como centro de rotación, por lo cual tendríamos al menos n rectas balanceadas (una recta por cada punto azul o una recta por cada punto rojo). Sin embargo, no hay ninguna recta balanceada que pase por el punto p_6 de la Figura 4, por lo que la solución anterior puede fallar si nos tomamos como centro de rotación cualquier punto en el interior de la envolvente convexa. Afortunadamente, sí es cierto que hay al menos n rectas balanceadas, y eso es un resultado de J. Pach y R. Pinchasi. Como la demostración de ese resultado es muy larga y queda fuera del propósito de este artículo, los lectores interesados pueden consultar [7].

El teorema del Ham Sandwich

Los Problemas 1 y 3 de la sección anterior nos motiva a preguntarnos si, dados dos conjuntos finitos de puntos S_1 y S_2 (ajenos) en el plano, existe una recta l que cumpla que cada uno de los semiplanos (lados) definidos por l contiene a la mitad de los puntos de S_1 y a la mitad de los puntos de S_2.

Dado un conjunto S de puntos en el plano, decimos que una recta l *biseca* el conjunto S, si l pasa por a lo más 1 punto de S, y los dos semiplanos (lados) definidos por l continen la misma cantidad de puntos de S.

El siguiente teorema es la versión discreta en el plano de un teorema conocido como el *teorema del Ham Sandwich*.

Teorema 1. *Consideremos m puntos azules y n puntos rojos en el plano, de tal manera que no hay 3 puntos (azules o rojos) que sean colineales. Entonces, existe una recta que biseca simultáneamente los dos conjuntos de colores.*

Demostración. Para demostrar este teorema, primero supongamos que alguno de m o n es impar, sin pérdida de generalidad, m es impar.
Por el Problema 1, podemos encontrar una recta l_1 que pasa por un punto p azul y que biseca los puntos azules. Empecemos a rotar la recta l_1 en sentido de las manecillas del

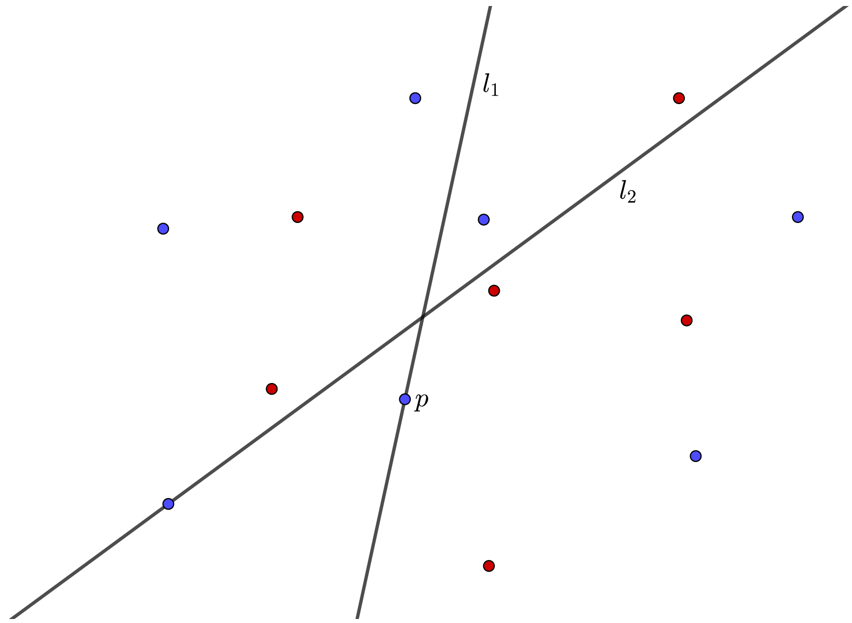


Figura 5: *En este ejemplo (del Teorema 1), la recta l_1 pasa por el punto p azul y biseca el conjunto de puntos azules, sin embargo, no biseca el conjunto de puntos rojos. Cuando hacemos las rotaciones (del Problema 3), antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_2, que biseca ambos conjuntos de colores.*

reloj con centro en p, hasta intersectar a otro punto azul q, en ese momento cambiemos el centro de rotación a q y sigamos rotando la recta. Continuemos rotando la recta de esa manera, cambiando el centro de rotación cada vez que toquemos otro punto azul. De acuerdo al Problema 3, obtenemos rectas que siempre van a bisecar el conjunto de puntos azules, y como m es impar, al dar un giro de $180°$ tenemos que regresar a la misma recta l_1 pero en sentido contrario. Por el mismo argumento de la solución del Problema 1, al hacer estas rotaciones, antes de dar un giro de $180°$ tendremos una recta l_2 que también biseque los puntos rojos, por lo tanto, esa recta biseca ambos conjuntos (ver Figura 5).
Si ambos números m, n son pares, podemos considerar un punto r (que no sea azul ni rojo), agregar el punto r al conjunto de puntos azules y aplicar las rotaciones anteriores a ese nuevo conjunto. Por el mismo argumento, llegaremos a una recta que biseque el conjunto de puntos rojos, además, si la recta pasa por el punto r también bisecará el conjunto de puntos azules. Si la recta no pasa por r significa que pasa por algún punto azul y alguno de los lados tendrá un punto azul más que el otro, pero como hay una cantidad finita de puntos, podemos trasladar un poco la recta para pasar ese punto azul al lado correspondiente, sin afectar los puntos rojos, así tendremos la recta buscada. □

Ahora vamos a ver una aplicación sencilla de la versión discreta del teorema del Ham

Sandwich (Teorema 1). El siguiente teorema es un resultado de J. Akiyama y N. Alon [1]. Aunque la demostración que veremos usa la versión discreta del teorema del Ham Sandwich, el siguiente teorema también se puede demostrar sin usar el teorema del Ham Sandwich, lo que lo hace un buen ejercicio de práctica para estudiantes que participan en Olimpiadas de Matemáticas.

Teorema 2. *Sea n un entero mayor que 1. Consideremos un conjunto de $2n$ puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Decimos que un segmento es* arcoíris *si uno de sus extremos es un punto azul y su otro extremo es un punto rojo. Demuestra que es posible trazar n segmentos arcoíris que no se intersecten entre sí.*

Demostración. Demostraremos por Inducción sobre n. Como no hay 3 puntos colineales, entonces podemos aplicar la versión discreta del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1), por lo que hay una recta l que biseca simultáneamente el conjunto de puntos rojos y el conjunto de puntos azules. Entonces, en cada uno de los semiplanos (lados) definidos por l aplicamos la hipótesis de inducción, es decir, en cada semiplano (lado) trazamos segmentos arcoíris que no se intersecten entre sí (ver Figura 6).

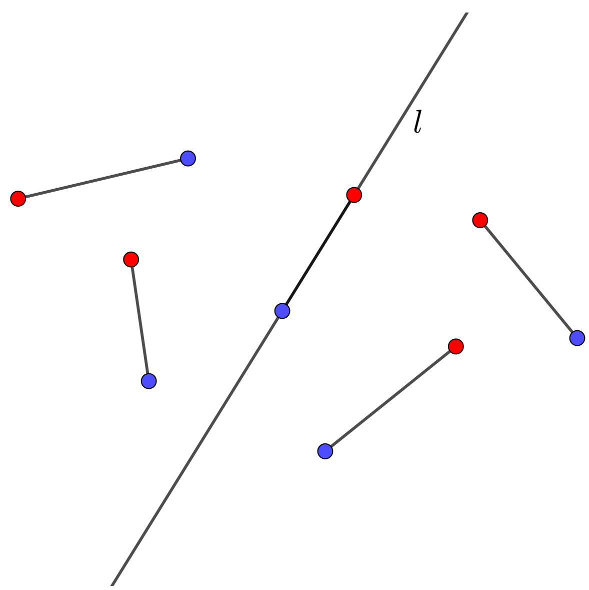


Figura 6: *Ejemplo del Teorema 2 con $n = 5$. La recta l biseca simultáneamente el conjunto de puntos azules y el conjunto de puntos rojos, por lo que podemos aplicar la hipótesis de inducción en cada uno de los lados definidos por l, con lo que obtenemos los segmentos arcoíris que queremos.*

Como l separa a esos dos semiplanos (lados), entonces obtenemos segmentos arcoíris que no se intersectan entre sí. Si n es par hemos acabado. Si n es impar, entonces en l hay un punto rojo y un punto azul, si trazamos el segmento entre esos dos puntos, ese segmento arcoíris no intersecta a los demás segmentos arcoíris que ya habíamos trazado, lo que concluye la prueba. □

Veamos otra aplicación del Teorema 1. El siguiente resultado es conocido como *el teorema del collar*.

Teorema 3. *Dos ladrones han robado un collar (abierto) con* 2 *tipos de perlas diferentes: perlas azules y perlas rojas. Ellos quieren partir el collar en varias partes, para después repartir esas partes de tal manera que a los dos les toque la misma cantidad de perlas de cada uno de los* 2 *tipos de perlas. Demuestra que el collar puede ser repartido entre los dos ladrones usando a lo más* 2 *cortes.*

Demostración. Vamos a colocar el collar en el plano de tal manera que cada perla es representado por un punto (el punto es del mismo color de la perla) y no hay 3 puntos en el collar que sean colineales. Entonces, por la versión discreta del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1), existe una recta l que biseca simultáneamente los puntos azules y los puntos rojos (ver Figura 7).

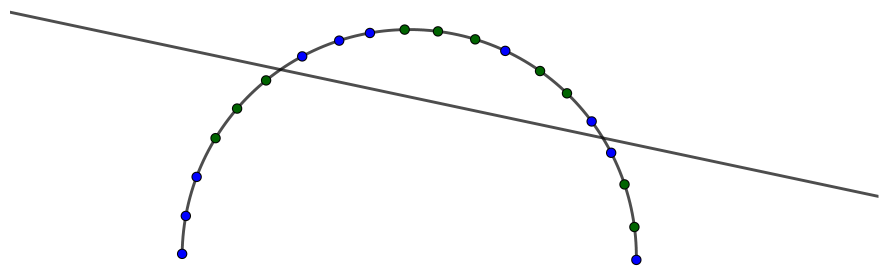


Figura 7: *Ejemplo de un collar dividido en tres partes (con 2 cortes), donde las partes 1 y 3 le tocan a un ladrón y la parte 2 le toca al otro ladrón.*

Si los ladrones hacen un corte por cada vez que esa recta interseca al collar, habrán hecho a lo más 2 cortes, ya que no hay 3 puntos en el collar que estén sobre la recta l. Por lo tanto, se puede repartir el collar con 2 cortes: todas las perlas que quedaron en uno de los lados definidos por l son para uno de los ladrones y todas las perlas que se quedaron en el otro lado definido por l son para el otro ladrón. ☐

Ya hemos trabajado con rectas que bisecan conjuntos finitos de puntos. Una pregunta muy natural es si también existen rectas que bisecan el área de polígonos en el plano. Antes de responder esta pregunta, precisemos a qué nos referimos cuando decimos polígonos en el plano.

Un polígono en el plano, es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en el plano, que cumplen que no hay 3 de esos puntos que sean colineales. Además, diremos que una recta *biseca* el área de un polígono, si la recta parte al polígono en dos polígonos con la misma área.

Motivados por el Teorema 1, ahora nos gustaría probar que, dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos. Ese resultado es la versión en el plano del *teorema del Ham Sandwich*, que enunciamos a continuación. La demostración queda como ejercicio al lector.

Teorema 4. *Dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos.*

Conclusiones y comentarios finales

Como vimos a lo largo de este artículo, muchos de los problemas de geometría combinatoria tienen la característica de tener soluciones sencillas. De hecho, a nivel investigación, estas mismas ideas sencillas son uno de los ingredientes principales para demostrar resultados fuertes de geometría combinatoria (también llamada geometría discreta).

Por ejemplo, Soberón [8], Karasev, Hubard, Aronov [6], Blagojevic y Ziegler [2], demostraron un teorema que generaliza el teorema del Ham Sandwich (Teorema 4), y la solución geométrica de ese teorema es muy similar a la idea que vimos en la demostración del Teorema 1, la diferencia es que para concluir sus resultados, usan herramientas muy fuertes de topología algebraica. Para una continuación amigable de los temas vistos en este artículo, se puede consultar [3], [4] y [9]. Además, en la siguiente sección dejamos algunos ejercicios de práctica para el lector.

Ejercicios

1) (Oriol Solé Pi, Olimpiada Regional del Centro de México 2019) Considera n líneas en el plano tal que no hay 3 que pasen por un mismo punto. Demuestra que es posible etiquetar los k puntos donde esas líneas se intersectan con los números del 1 al k (usando cada número exactamente una vez), de tal manera que en cada línea, las etiquetas de los $n-1$ puntos que están sobre esa línea están arreglados en orden creciente (en una de las dos direcciones).

2) Considera n rectas en el plano tal que no hay 3 que pasen por un mismo punto. Definamos una gráfica donde los vértices son las intersecciones de las rectas, y dos vértices están conectados por una arista (son vecinos en la gráfica) si y solo si son consecutivos en una misma recta. Demuestra que los vértices de esa gráfica se pueden colorear con 3 colores, de tal manera que no hay dos vértices vecinos del mismo color.

3) Dar una demostración alternativa del Teorema 2, que no use ninguna de las dos versiones que vimos del teorema del Ham Sandwich (Teorema 1 y Teorema 4).

4) (Víctor Dominguez Silva, Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2019) Sea $n \geq 2$ un entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestre que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

5) (El teorema del Ham Sandwich) Considera dos polígonos convexos en el plano. Demuestra que siempre existe una recta que parte a la mitad el área de ambos polígonos.

6) (Olimpiada Geometrense 2020) Sea K un polígono convexo en el plano con perimetro igual a 1. Sea $n \geq 2$ un entero y sea $r < n$ un entero positivo. Demuestra que existe un par de rectas perpendiculares que dividen la frontera de K en arcos de longitudes $\frac{r}{2n}, \frac{r}{2n}, \frac{n-r}{2n}, \frac{n-r}{2n}$, en ese orden cíclico.

7) Sea $t \in [0, \frac{1}{4}]$ un número real y K un polígono convexo en el plano de área 1. Demuestra que existe una pareja de rectas perpendiculares que divide a K en 4 polígonos de áreas $t, t, (\frac{1}{2} - t), (\frac{1}{2} - t)$, en ese orden cíclico.

8) (A. Kaneko, M. Kano, K. Suzuki [5]) Considera 8 puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que 4 de los puntos están coloreados de azul y los otros 4 puntos están coloreados de rojo. Demuestra que hay una trayectoria alternante simple (con la misma definición del Problema 2) de longitud 8 (es decir, que pasa por los 8 puntos).

Bibliografía

1) J. Akiyama, N. Alon. *Disjoint simplices and geometric hypergraphs*, Combinatorial Mathematics; Proc. of the Third International Conference (New York, 1985), volume 555, pages 1-3. Annals of the New York Academy of Sciences, 1989. (ref: p. 53)

2) P.V.M. Blagojevic, G.M. Ziegler, *Convex equipartitions via equivariant obstruction theory*, Israel Journal of Mathematics, 200:49-77, 2014.

3) C. Gomez-Navarro, *Teoremas de equipartición: una generalización del teorema del Ham Sandwich*, Tesis UNAM, 2020.

4) C. Gomez-Navarro, *Una introducción a la geometría combinatoria: problemas de divisiones justas*, Espacio Matemático 2(1), 16-30, 2021.

5) A. Kaneko, M. Kano, K. Suzuki, *Path Coverings of Two Sets of Points in the plane*, Towards a theory of geometric graphs, 99-111, ed. by J. Pach, Contemp. Math. 342, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

6) R. Karasev, A. Hubard, B. Aronov, *Convex equipartitions: The spicy chicken theorem*, Geometriae Dedicata, 170:263-279, 2014.

7) J. Pach, R. Pinchasi, *On the Number of Balanced Lines*, Discrete and Computational Geometry 25:611-628 (2001).

8) P. Soberón, *Balanced convex partitions of measures in* $\mathbb{R}^d$, Mathematatika 58(1), 71-76, 2012.

9) A.H. Stone, J.W. Tukey, *Generalized sandwich theorems*, Duke Math. J.9 (1942).

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este segundo número del año 2022. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Demuestra que entre cualesquiera 7 enteros positivos, podemos escoger dos de ellos tales que su suma o su resta es múltiplo de 10.

Problema 2. Determina el menor entero positivo n con las siguientes propiedades:

a) Su dígito de las unidades es 6.

b) Si el último dígito 6 se borra y se coloca al principio del número, el resultado es 4 veces n.

Problema 3. ¿Cuántos números enteros positivos menores que 10^{12} cumplen que los dígitos en posición impar (contando de derecha a izquiera) son impares y los dígitos en posición par son pares?

Problema 4. Determina todos los enteros positivos m y n tales que los números $\frac{3n^2}{m}$ y $\sqrt{n^2+m}$ sean números enteros.

Problema 5. Sea m un entero positivo tal que $\frac{m(m+1)}{3}$ es un cuadrado perfecto. Prueba que m es divisible por 3 y que $m+1$ y $\frac{m}{3}$ son ambos cuadrados perfectos.

Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $AB + BC = 2022$ cm y $AD = CD$. Si $\angle ABC = \angle CDA = 90°$, determina la longitud de la diagonal BD.

Problema 7. Considera el polinomio $P(x) = x^3 + ax + b$ con a y b números reales. Si $P(x)$ tiene tres raíces reales distintas, demuestra que $a < 0$.

Problema 8. Determina todas las parejas de enteros positivos (x, y) tales que ambos x, y tienen la misma cantidad de dígitos y se satisface la ecuación $\frac{x}{y} = \overline{y.x}$, donde $\overline{y.x}$ representa el número que se obtiene de colocar un punto decimal después de y y luego concatenar el número x.

Problema 9. Sabiendo que 13 es un divisor de 512064008001, determina los seis divisores primos del número 512064008001.

Problema 10. Sean D, E y F los puntos de tangencia del incírculo del triángulo ABC con los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean P y Q los puntos medios de DF y DE, respectivamente. Las rectas PC y DE se intersecan en R, mientras que las rectas BQ y DF se intersecan en S. Prueba que:

a) Los puntos B, C, P y Q son concíclicos.

b) Los puntos P, Q, R y S son concíclicos.

Problema 11. Encuentra la mayor cantidad de elementos que un subconjunto S del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ puede tener, de tal manera que no haya un elemento de S que sea igual a la suma de dos elementos diferentes de S.

Problema 12. Encuentra todas las parejas de enteros (x, y) tales que

$$y^5 + 2xy = x^2 + 2y^4.$$

Problema 13. Se tiene un tablero de 2022×2022. Se dice que este tablero está teselado por cuadrados de $k \times k$, si estos cubren al tablero (posiblemente sobrelapándose) y tienen sus esquinas en los cuadrados unitarios. Encuentra el mínimo valor de k tal que la mínima cantidad de cuadrados de $k \times k$ que teselan al tablero es 100.

Problema 14. Sean O, M y N puntos colineales, en este orden, de manera que $OM = 3$ y $MN = 5$. Sea ω el círculo de radio 2 centrado en O. Encuentra, entre todos los puntos P en ω, el máximo valor posible para el ángulo $\angle MPN$.

Problema 15. Sea $n > 2$ un entero. Sea S_n el conjunto de enteros positivos menores a n que son primos relativos con n. Llamemos $\phi(n)$ al número de elementos en S_n. Demuestra que la suma de los números en S_n es igual a

$$\frac{n\phi(n)}{2}.$$

Problema 16. En un tablero de ajedrez de 9×9 hay 9 torres que no se atacan. Cada torre se mueve una casilla horizontalmente o verticalmente. Prueba que tras mover las torres, hay dos que se atacan.

Problema 17. Determina todas las parejas de enteros positivos (x, y) que satisfacen la ecuación $x^5 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$.

Problema 18. Demuestra que para cada entero $n \geq 1$, el número $371\ldots1$, que termina en n unos, no es primo.

Problema 19. Determina todos los números reales que satisfacen la ecuación

$$\frac{10}{x-10}+\frac{11}{x-11}+\frac{12}{x-12}+\frac{13}{x-13}=2x^2-23x-4.$$

Problema 20. Demuestra que para cada entero positivo m, existe un entero positivo n tal que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>m.$$

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Consideremos los seis conjuntos $\{0\}$, $\{1,9\}$, $\{2,8\}$, $\{3,7\}$, $\{4,6\}$ y $\{5\}$. Por el principio de las casillas, entre cualesquiera 7 enteros positivos hay dos números a y b tales que sus dígitos de las unidades están en el mismo conjunto. Si el dígito de las unidades de a es igual al dígito de las unidades de b, entonces $a-b$ es múltiplo de 10. Pero, si el dígito de las unidades de a es distinto al dígito de las unidades de b, entonces por la construcción de los conjuntos, $a+b$ será múltiplo de 10 ya que $1+9=2+8=3+7=4+6=10$.

Solución del problema 2. Escribimos $n=10m+6$. Sea k la cantidad de dígitos de m. Tenemos entonces que $4(10m+6)=6\cdot 10^k+m$, esto es, $13m=2\cdot(10^k-4)$. De aquí, se sigue que 13 divide a 10^k-4, esto es, $10^k\equiv 4 \pmod{13}$. Por prueba y error, encontramos que el menor entero positivo k con esta propiedad es $k=5$, lo cual implica que $m=15384$. Por lo tanto, el menor valor de n es 153846.

Solución del problema 3. Los contaremos por el número de dígitos. Si el número de dígitos es $2k$, entonces hay $4^k\cdot 5^k=20^k$ números ya que las k posiciones impares tienen 5 posibilidades y las k posiciones pares tienen 4 posibilidades. Si el número de dígitos es $2k+1$, entonces el número de posibilidades es $5^{k+1}\cdot 4^k=5\cdot 20^k$. Por lo tanto, la respuesta es

$$
\begin{aligned}
&(5+20)+(5(20)+20^2)+\cdots+(5(20)^5+20^6)\\
&=25(1+20+\cdots+20^5)=25\cdot\frac{20^6-1}{19}=\frac{25(20^2-1)(20^4+20^2+1)}{19}\\
&=\frac{25(20+1)(20-1)(20^4+20^2+1)}{19}=\frac{25(20+1)(20-1)[(20^2+1)^2-20^2]}{19}\\
&=\frac{25(20+1)(20-1)(20^2+1-20)(20^2+1+20)}{19}=\frac{25(21)(19)(381)(421)}{19}\\
&=3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 127\cdot 421.
\end{aligned}
$$

Solución del problema 4. Sea k un entero positivo tal que $\sqrt{n^2+m}=k$. Entonces, tenemos que $m=k^2-n^2$. Sea $d=\text{mcd}(k,n)$, esto es, $k=dx$ y $n=dy$ para algunos enteros positivos primos relativos x,y. Como m es positivo, necesariamente $x>y$. Entonces,

$$\frac{3n^2}{m}=\frac{3d^2y^2}{d^2(x^2-y^2)}=\frac{3y^2}{x^2-y^2}.$$

Es fácil ver que y^2 y x^2-y^2 son primos relativos, pues x y y lo son. Entonces, x^2-y^2 debe dividir a 3. Luego, $x^2-y^2=1$ o 3.
Si $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1$, entonces $x+y=x-y=1$, de donde $x=1$, $y=0$. Como y debe ser positivo, no hay soluciones en este caso.
Si $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=3$, entonces $x+y=3$ y $x-y=1$, de donde $x=2$, $y=1$. Luego, $m=k^2-n^2=4d^2-d^2=3d^2$ y $n=d$. Es fácil ver que para cualquier entero positivo d, los números $m=3d^2$ y $n=d$ satisfacen las condiciones del problema.

Solución del problema 5. Si $\frac{m(m+1)}{3}$ es un cuadrado perfecto, en particular debe ser un entero, por lo que 3 divide a $m(m+1)$. Como 3 es primo, tenemos que 3 divide a m o a $m+1$. Supongamos que 3 no divide a m. Entonces 3 divide a $m+1$. Esto significa que $m\left(\frac{m+1}{3}\right)$ es un cuadrado perfecto. Como m y $m+1$ son primos relativos, tenemos que m y $\frac{m+1}{3}$ también son primos relativos. Luego, ambos enteros m y $\frac{m+1}{3}$ son cuadrados perfectos, lo que es una contradicción ya que $m\equiv -1\equiv 2 \pmod 3$ y se sabe que los cuadrados perfectos son congruentes con 0 o 1 módulo 3. Por lo tanto, concluimos que 3 divide a m. Así, $\left(\frac{m}{3}\right)(m+1)$ es un cuadrado perfecto con $\frac{m}{3}$ y $m+1$ primos relativos, lo cual implica que ambos enteros $\frac{m}{3}$ y $m+1$ son cuadrados perfectos.

Solución del problema 6. Como los dos ángulos rectos del cuadrilátero son opuestos, el cuadrilátero es cíclico. Luego, si $AD=CD=a$, por el teorema de Pitágoras tenemos que $AC=a\sqrt{2}$. Ahora, por el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero $ABCD$, tenemos que $AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$. Sustituyendo, obtenemos que $a\cdot AB+a\cdot BC=a\cdot\sqrt{2}\cdot BD$, esto es, $\sqrt{2}\cdot BD=AB+BC=2022$ cm. Por lo tanto, $BD=\frac{2022}{\sqrt{2}}=1011\sqrt{2}$ cm.

Solución del problema 7. Sean r, s y t las tres raíces reales distintas de $P(x)$. De las fórmulas de Vieta tenemos que $r+s+t=0$ y $a=rs+st+tr$. Luego, sustituyendo $t=-r-s$ en el valor de a, obtenemos que

$$a=rs+s(-r-s)+(-r-s)r=-\left(r^2+rs+s^2\right)=-\frac{1}{2}\left[r^2+s^2+(r+s)^2\right]<0.$$

Solución del problema 8. Como x y y tienen la misma cantidad de dígitos, el número $10y$ tiene más dígitos que x, por lo que $x<10y$. Esto significa que $\frac{x}{y}<10$, es decir, y tiene exactamente un dígito, lo cual implica que x también es de un solo dígito.
Luego, la ecuación dada se puede reescribir como $\frac{x}{y}=y+\frac{x}{10}$, la cual equivale a $\frac{xy}{10}=x-y^2$. De aquí obienemos que $x-y^2>0$ y que $10\mid xy$. De lo primero podemos ver que $y^2<x\leq 9$, esto es, $y<3$. Así, $y\in\{1,2\}$. Si $y=1$, entonces $10\mid x$, lo cual es imposible pues x tiene un solo dígito y no puede ser igual a cero. Luego, $y=2$, de donde se sigue que $x=5$. Podemos verificar que la pareja $(5,2)$ satisface las condiciones, pues 2 y 5 son ambos de un solo dígito y $\frac{5}{2}=2.5$. Por lo tanto, $(5,2)$ es la única solución.

Solución del problema 9. Notemos que $512=2^9$, $64=2^6$, $8=2^3$ y $1=2^0$. Entonces,

$$\begin{aligned}512064008001&=2^9\cdot 10^9+2^6\cdot 10^6+2^3\cdot 10^3+2^0\cdot 10^0\\&=(20)^9+(20)^6+(20)^3+1\\&=\frac{20^{12}-1}{20^3-1}.\end{aligned}$$

Ahora usando diferencia de cuadrados, diferencia de cubos y suma de cubos, obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{20^{12}-1}{20^3-1}&=\frac{(20^6-1)(20^6+1)}{20^3-1}=(20^3+1)(20^6+1)\\&=(20+1)(20^2-20+1)(20^2+1)(20^4-20^2+1).\end{aligned}$$

Como $21=3\cdot 7$, resulta que

$$512064008001=3\cdot 7\cdot 381\cdot 401\cdot 159601.$$

Es fácil ver que 13 no divide a ninguno de los números 421, 381 y 401, por lo que debe dividir a 159601. Luego, $159601=13\cdot 12277$. Usando que $381=3\cdot 127$, obtenemos que

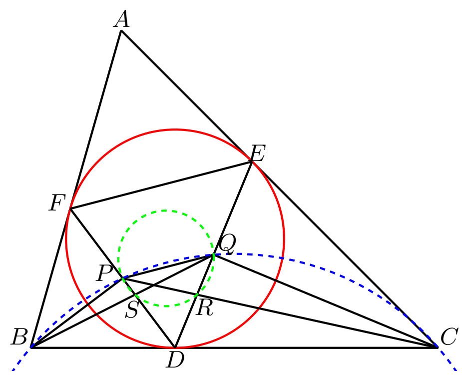
$$512064008001=3\cdot 7\cdot 13\cdot 381\cdot 401\cdot 12277=3^2\cdot 7\cdot 13\cdot 127\cdot 401\cdot 12277.$$

Como $3,7,13,127,401$ y 12277 son primos relativos y el problema nos dice que hay 6 divisores primos, entonces los seis números deben ser primos. La respuesta es $3,7,13,127,401$ y 12277.

Solución del problema 10. a) Observemos que $CE = CD$ por ser los segmentos tangentes desde C al incírculo del triángulo ABC, por lo que CQ es perpendicular a DE. Análogamente, $BF = BD$ y, por lo tanto, BP es perpendicular a FD. Notemos que $\angle DPQ = \angle DFE = \angle DEC = 90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}$. Luego,

$$\angle BPQ = \angle BPD + \angle DPQ = 90^\circ + \left(90^\circ - \frac{\angle BCA}{2}\right) = 180^\circ - \angle BCQ,$$

lo cual implica que el cuadrilátero $BCQP$ es cíclico.



b) Del inciso anterior tenemos que $\angle BPC = \angle BQC$. Sin embargo, $\angle BPC = 90^\circ + \angle DPC = 90^\circ + \angle SPR$ y, de manera similar, $\angle BQC = \angle SQR + 90^\circ$. Se sigue que $\angle SPR = \angle SQR$, por lo que los puntos P, Q, R y S son concíclicos.

Solución del problema 11. El subconjunto $\{25, 26, 27, \ldots, 50\}$ tiene 26 elementos y es claro que cumple con la condición dada (pues la suma de cualesquiera dos elementos diferentes es mayor o igual a 51). Esto significa que la respuesta buscada es mayor o igual a 26.
Supongamos que existe un subconjunto S con 27 elementos que tiene la propiedad dada, digamos $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{27}\}$ con $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{27} \leq 50$. Consideremos las $\left\lfloor \frac{a_{27}-1}{2} \right\rfloor$ parejas $(1, a_{27} - 1)$, $(2, a_{27} - 2)$, $\ldots$, $\left(\left\lfloor \frac{a_{27}-1}{2} \right\rfloor, a_{27} - \left\lfloor \frac{a_{27}-1}{2} \right\rfloor\right)$. Para cada una de estas parejas, a lo más uno de los dos números que la forman puede estar en S, de donde tenemos que hay a lo más $\left\lfloor \frac{a_{27}-1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{50-1}{2} \right\rfloor = 24$ números en S que están en alguna de estas parejas. Dependiendo de si a_{27} es par o no, podría ser que $\frac{a_{27}}{2}$ esté en S. Como a_{27} ya está en S, entonces hay a lo más $24 + 1 + 1 = 26$ elementos en S, lo cual contradice que haya al menos 27 elementos en S. Por lo tanto, la respuesta es 26.

Solución del problema 12. La ecuación dada la podemos ver como una ecuación cuadrática en x: $x^2 - (2y)x + (2y^4 - y^5) = 0$. Para que tenga soluciones en enteros, su discriminante debe ser un cuadrado perfecto, esto es, $4y^2 - 4(2y^4 - y^5)$ debe ser un cuadrado. Como $4y^2 - 4(2y^4 - y^5) = 4y^2(y^3 - 2y^2 + 1)$, debemos tener que $y^3 - 2y^2 + 1$ debe ser un cuadrado. Factorizando, obtenemos que $(y-1)(y^2 - y - 1) = m^2$ con $m \geq 0$. Como $y^2 - y - 1 = y(y-1) - 1$, ambos factores $y - 1$ y $y^2 - y - 1$ son

primos relativos. De aquí se sigue que cada factor es un cuadrado o es el negativo de un cuadrado.
Supongamos que $y-1=a^2$ y $y^2-y-1=b^2$ con $a\geq 0$ y $b\geq 0$. La última ecuación se puede escribir como $y^2-y-(b^2+1)=0$. Viendo esta última ecuación como una cuadrática en y, dado que y es un número entero, debe suceder que el discriminante es un cuadrado perfecto, esto es, $1-4[-\big(b^2+1\big)]=c^2$ para algún entero $c\geq 0$. Entonces, $c^2-4b^2=5$, es decir, $(c-2b)(c+2b)=5$. Dado que $c+2b\geq 0$, $c+2b\geq c-2b$ y ambos factores deben ser enteros, necesariamente debe suceder que $c+2b=5$ y $c-2b=1$. De aquí se llega a que $b=1$ y, por lo tanto, $y^2-y-1=1$, por lo que $y^2-y-2=0$. Luego $y=2$ o $y=-1$.

- Si $y=-1$, sustituyendo en la ecuación original obtenemos que $-1-2x=x^2+2$, esto es, $x^2+2x+3=0$, que no tiene soluciones enteras (de hecho, ni siquiera tiene soluciones reales).

- Si $y=2$, sustituyendo en la ecuación original obtenemos que $32+4x=x^2+32$, es decir, $x^2-4x=0$. Luego, $x=0$ o $x=4$ y, en ambos casos, obtenemos soluciones válidas.

Supongamos que $y-1$ y y^2-y-1 son negativos de cuadrados. Como $y^2-y-1=(y-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}\geq-\frac{5}{4}$, los valores posibles de y^2-y-1 son -1 y 0. En el primer caso, tenemos que $y^2-y=0$, de donde obtenemos las soluciones $y=0,1$.

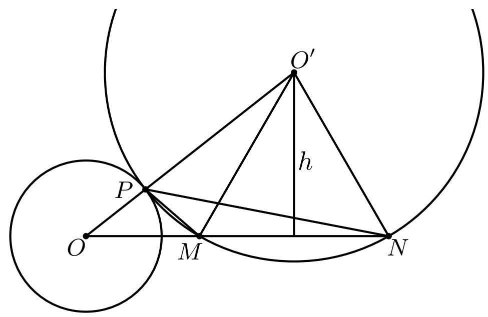
- Si $y=0$, de la ecuación original obtenemos que $x=0$.

- Si $y=1$, de la ecuación original resulta que $1+2x=x^2+2$, esto es, $(x-1)^2=0$, por lo que $x=1$.

En el segundo caso, no hay soluciones en números enteros.
Por lo tanto, las únicas parejas que satisfacen la ecuación inicial son $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ y $(4,2)$.

Solución del problema 13. Asignemos coordenadas a las casillas del tablero, desde $(0,0)$ hasta $(2021,2021)$. Para cualquier valor de k, es posible teselar el tablero con $f(k)=(\lfloor 2021/k\rfloor+1)^2$ cuadrados de $k\times k$, colocando uno por cada casilla cuyas coordenadas sean múltiplos de k. Recíprocamente, cada cuadrado solo puede cubrir a una de estas $f(k)$ casillas, por lo que esta cantidad es mínima. Por lo tanto, buscamos el mínimo entero positivo k tal que $f(k)=100$, esto es, tal que $2021<10k$, el cual es 203.

Solución del problema 14. Sea P un punto arbitrario en ω. Si el círculo ω' por M, N y P tiene una segunda intersección Q con ω, entonces cada punto R en el arco $\widehat{PQ}$ sobre ω estará en el interior de ω', de manera que $\angle MRN>\angle MPN$. Por lo tanto, el punto P que maximiza el ángulo $\angle MPN$ ha de ser tal que el círculo ω' es tangente a ω. Sea O' el centro de ω' y sea R su radio. Sea h la altura desde O' sobre MN.



Por el teorema de Pitágoras, tenemos que $h^2 + 2.5^2 = R^2$ y $h^2 + 5.5^2 = (R+2)^2$. Restando la primera ecuación de la segunda y simplificando, obtenemos que $R = 5$. En particular, el triángulo $MO'N$ es equilátero, de donde $\angle MO'N = 60°$ y $\angle MPN = 30°$.

Solución del problema 15. Notemos que si a es primo relativo con n, entonces $n - a$ también lo es, ya que $d \mid n$ y $d \mid a$ si y solo si $d \mid n$ y $d \mid (n-a)$. También notemos que para $n > 2$, $a \neq n - a$ ya que si $a = n - a$ entonces $n = 2a$ y como $a \mid n$ y $a > 1$ entonces n y a no serían primos relativos. Por lo tanto, podemos emparejar a los términos de S_n en parejas de la forma $(a, n-a)$. Cada una de las parejas suma n y hay $\phi(n)/2$ parejas, de donde se sigue el resultado.

Solución del problema 16. Asignemos coordenadas a las casillas desde $(0,0)$ hasta $(8,8)$. Que las torres inicialmente no se ataquen significa que hay una por fila y por columna. Por lo tanto, la suma de sus coordenadas es $2(0+1+\cdots+8)$, el cual es un número par. Tras mover cada torre, una de las coordenadas de cada torre cambia por 1, lo cual hace que la suma de sus coordenadas sea impar. Por lo tanto, hay dos torres que se atacan.

Solución del problema 17. Observemos que

$$(y+2)^5 = 2^5 + 5(2^4)y + 10(2^3)y^2 + 10(2^2)y^3 + 5(2)y^4 + y^5.$$

Luego, es fácil ver que si y es positivo,

$$y^5 < y^5 + 10y^2 + 20y + 1 < (y+2)^5.$$

Como y es un entero positivo tal que $x^5 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$, la única posibilidad es que $x = y + 1$. Entonces, tenemos que $(y+1)^5 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$, esto es,

$$0 = (y+1)^5 - (y^5 + 10y^2 + 20y + 1) = 5(y-1)y(y^2 + 3y + 3).$$

Como $y > 0$, la única opción es $y - 1 = 0$, esto es, $y = 1$ y, por consiguiente, $x = 2$. Verificando, vemos que $2^5 = 1 + 10 + 20 + 1$. En conclusión, la única pareja (x, y) en enteros positivos que satisface la ecuación $x^5 = y^5 + 10y^2 + 20y + 1$ es $(2, 1)$.

Solución del problema 18. Sea $a_n = 371\ldots1$, terminando con n unos. Demostraremos por inducción fuerte que para todo $n \geq 0$, a_n siempre tiene un factor primo en el conjunto $S = \{3, 7, 13, 37\}$. Para $0 \leq n \leq 5$, esto se puede verificar directamente:

$$37 \mid a_0,\ 7 \mid a_1,\ 3 \mid a_2,\ 37 \mid a_3,\ 13 \mid a_4,\ 3 \mid a_5.$$

Para $n \geq 6$, como a_{n-6} tiene un factor primo en S por la hipótesis de inducción, entonces $a_n = 10^6 a_{n-6} + 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$ también lo tendrá. En particular, para $n \geq 1$, a_n no puede ser primo.

Solución del problema 19. Sumando 1 a cada una de las fracciones y 4 al lado derecho, obtenemos

$$\frac{x}{x-10} + \frac{x}{x-11} + \frac{x}{x-12} + \frac{x}{x-13} = 2x^2 - 23x.$$

De aquí obtenemos una solución $x = 0$. Para cualquier otra solución $x \neq 0$, podemos dividir por x para obtener

$$\frac{1}{x-10} + \frac{1}{x-11} + \frac{1}{x-12} + \frac{1}{x-13} = 2x - 23.$$

Sea $y = x - 23/2$. Esto nos permite reescribir la ecuación como

$$\frac{1}{y-3/2} + \frac{1}{y-1/2} + \frac{1}{y+1/2} + \frac{1}{y+3/2} = 2y.$$

Juntando la primera y cuarta fracción, al igual que la segunda y tercera, obtenemos

$$\frac{2y}{y^2-(3/2)^2} + \frac{2y}{y^2-(1/2)^2} = 2y.$$

De aquí obtenemos otra solución $y = 0$ o $x = 23/2$. En cualquier otro caso, podemos dividir por $2y$ y simplificar para obtener

$$y^4 - \frac{9}{2}y^2 + \frac{49}{16} = 0.$$

Esta es una cuadrática en y^2. Resolviéndola y sustituyendo para x, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{23}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{2} \pm \sqrt{2}},$$

además de las que ya habíamos obtenido.

Solución del problema 20. Sea m un entero positivo y sea $n = 2^{2m} - 1$. Entonces, podemos separar la suma como sigue

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^{2m}-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2m} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k}.$$

Como $2^{j-1} < 2^{j-1}+1 < \cdots < 2^j - 1 < 2^j$ para cada entero positivo j, tenemos que

$$\frac{1}{2^{j-1}} > \frac{1}{2^j},\ \frac{1}{2^{j-1}+1} > \frac{1}{2^j},\ \ldots,\ \frac{1}{2^j-1} > \frac{1}{2^j},$$

lo cual implica que

$$\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^j} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} 1 = \frac{1}{2^j} \cdot 2^{j-1} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{2m} \sum_{k=2^{j-1}}^{2^j-1} \frac{1}{k} > \sum_{j=1}^{2M} \frac{1}{2} = m.$$

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2022 No. 2.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este segundo número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Un grillo está parado en el origen del plano cartesiano. El grillo puede hacer saltos de longitud 5 siempre y cuando el salto inicie y termine en un punto de coordenadas enteras. ¿Cuál es el mínimo número de saltos con los que el grillo puede llegar al punto $(2021, 2021)$?

Problema 2. Sea $\{p_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de los números primos, esto es, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ y así sucesivamente. Para cada entero positivo n, sea $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Demuestra que para cada entero positivo n, existe un cuadrado perfecto entre S_n y S_{n+1}.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con puntos E y F sobre el segmento BC. Sean K y L puntos sobre los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que EK es paralela a AC y FL es paralela a AB. Los incírculos de los triángulos BEK y CFL son tangentes a los segmentos AB y AC en X y Y, respectivamente. Las rectas AC y EX se cortan en M, mientras que las rectas AB y FY se cortan en N. Si $AX = AY$, demuestra que MN es paralela a BC.

Problema 4. Sea p un número primo impar y sea $Q(x)$ un polinomio de grado $n < p-1$. Demuestra que p divide a $Q(0) + Q(1) + \cdots + Q(p-1)$.

Problema 5. Sean m un entero positivo y $r_1, r_2, \ldots, r_m$ números racionales positivos tales que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = 1$. Se define la función f por

$$f(n) = n - (\lfloor r_1 n \rfloor + \lfloor r_2 n \rfloor + \cdots + \lfloor r_m n \rfloor)$$

para cada entero positivo n. Determina el menor y el mayor valor posible de $f(n)$.
Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Problema 6. Determina un polinomio $P(x, y)$ distinto de cero tal que

$$P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$$

para todo número real a.
Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Problema 7. Once estudiantes presentaron un examen. Para cualesquiera dos preguntas en el examen, hay al menos 6 estudiantes que resolvieron exactamente una de esas dos preguntas. Prueba que no hay más de 12 preguntas en el examen.

Problema 8. Sea S un conjunto de 2022 rectas en el plano, tales que no hay dos paralelas ni tres concurrentes. S divide al plano en regiones finitas y regiones infinitas. ¿Es posible que todas las regiones finitas tengan un número entero de área?

Problema 9. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determina todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para todos los enteros positivos m y n, el entero $f(m)+f(n)-mn$ es distinto de cero y divide a $mf(m) + nf(n)$.

Problema 10. Sean a, b, c y d enteros no negativos y p un número primo. Demuestra que

$$\binom{ap+b}{cp+d} \equiv \binom{a}{c}\binom{b}{d} \pmod{p}.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2021 No. 3.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2021. En esta ocasión, agradecemos a Alejandro Solís

Mercado, a Emmanuel Iván Montiel Paredes y a Rogelio Esaú Aguirre González, por haber enviado sus soluciones y aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2021, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Determina todos los enteros positivos n tales que $n+200$ y $n-269$ sean ambos cubos de números enteros.

Solución de Alejandro Solís Mercado. Sean $n+200=x^3$ y $n-269=y^3$ con x y y números enteros tales que $x>y$. Entonces $x^3-y^3=469$, es decir, $(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=469$. Como $469=7\cdot 67$ y $x-y>0$, tenemos cuatro casos que se representan en la siguiente tabla, donde los valores de la tercera columna se calculan observando que $xy=\frac{1}{3}\left(\left(x^2+xy+y^2\right)-(x-y)^2\right)$ y las parejas de la cuarta columna se obtienen resolviendo la ecuación cuadrática $z^2-(x-y)z-xy=0$ (que tiene como soluciones $z=x$ y $z=-y$).

$x-y$	x^2+xy+y^2	xy	(x,y)	$n=x^3-200$
1	469	156	$(13,12)$, $(-12,-13)$	$1997, -1928$
7	67	6	No son enteros	-
67	7	-1494	No son enteros	-
469	1	-73320	No son enteros	-

Por lo tanto, el único valor de n que cumple es $n=1997$.
Este problema también fue resuelto por Emmanuel Iván Montiel Paredes y Rogelio Esaú Aguirre González.

Problema 2. Sean a y b enteros positivos tales que $2(a+b)=\text{mcd}(a,b)+\text{mcm}(a,b)$. Determina el valor de $\dfrac{\text{mcm}(a,b)}{\text{mcd}(a,b)}$.

Solución de Emmanuel Iván Montiel Paredes. Sean $a=mu$, $b=mv$, donde $\text{mcd}(a,b)=m$. Luego, $\text{mcm}(a,b)=muv$. Ahora, $2m(u+v)=m+muv$, por lo que $2u+2v=1+uv$ Así, $(u-2)(v-2)=3$, lo cual nos dice que $(u,v)=(5,3),(3,5)$. Por lo tanto, $\frac{\text{mcm}(a,b)}{\text{mcd}(a,b)}=\frac{muv}{m}=uv=2(u+v)-1=15$.

Solución de Rogelio Esaú Aguirre González. Sea $\text{mcd}(a,b)=q$ y sean x, y enteros positivos tales que $a=qx$ y $b=qy$. Es fácil ver que $\text{mcm}(a,b)=qxy$. Por lo tanto, la ecuación dada en el problema se puede reescribir como $2(qx+qy)=q+qxy$, lo cual equivale a $2x+2y=xy+1$. Reordenando términos y factorizando, obtenemos que $2y-1=x(y-2)$. Como $2y-1>0$ y $x>0$, tenemos que $y-2>0$. Además, dado que $y-2$ divide a $x(y-2)$, entonces $y-2$ divide a $2y-1$, por lo que también divide a $2y-1-2(y-2)=3$. Así, $y-2=1$ o $y-2=3$. Si $y-2=1$, entonces $y=3$ y, por lo tanto, $x=5$. Si $y-2=3$, entonces $y=5$ y, por consiguiente, $x=3$. En cualquier caso, tenemos que $\frac{\text{mcm}(a,b)}{\text{mcd}(a,b)}=\frac{qxy}{q}=xy=3\cdot 5=15$.

Problema 3. Los números reales a, b y c satisfacen la condición

$$|a-b| = 2|b-c| = 3|c-a|.$$

Demuestra que $a = b = c$.

Solución de Emmanuel Iván Montiel Paredes. Si al menos dos de los números son iguales, es claro que los tres números tendrán que ser iguales. Así, supongamos que a, b y c son diferentes por parejas. Procedemos a analizar cada uno de los posibles casos en donde se ordenan los números a, b y c.

- Si $a < b < c$, se obtiene que $b-a = 2(c-b) = 3(c-a)$. De la primera igualdad se tiene que $b = \frac{2c+a}{3}$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $\frac{7}{3}(c-a) = 0$, es decir, $a = c$, lo cual contradice la suposición inicial.

- Si $a < c < b$, se obtiene que $b-a = 2(b-c) = 3(c-a)$. De la primera igualdad se tiene que $b = 2c-a$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $c-a = 0$, es decir, $a = c$, lo cual contradice la suposición inicial.

- Si $b < a < c$, se obtiene que $a-b = 2(c-b) = 3(c-a)$. De la primera igualdad se tiene que $a = 2c-b$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $5(c-b) = 0$, es decir, $c = b$, lo cual contradice la suposición inicial.

- Si $b < c < a$, se obtiene que $a-b = 2(c-b) = 3(a-c)$. De la primera igualdad se tiene que $a = 2c-b$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $c-b = 0$, es decir, $c = b$, lo cual contradice la suposición inicial.

- Si $c < a < b$, se obtiene que $b-a = 2(b-c) = 3(a-c)$. De la primera igualdad se tiene que $b = 2c-a$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $5(c-a) = 0$, es decir, $c = a$, lo cual contradice la suposición inicial.

- Si $c < b < a$, se obtiene que $a-b = 2(b-c) = 3(a-c)$. De la primera igualdad se tiene que $a = 3b-2c$. Al sustituir en la segunda igualdad y reordenar términos, obtenemos que $7(b-c) = 0$, es decir, $b = c$, lo cual contradice la suposición inicial.

Del análisis anterior se concluye que $a = b = c$.

Solución alternativa. Si $a = b$, entonces $|c-a| = 0$ y, por consiguiente, $a = c$. Luego, $a = b = c$.
Si $a \neq b$, entonces podemos reescalar los números de manera que $|a-b| = 6$. En este caso, tenemos que $|b-c| = 3$ y $|c-a| = 2$. Como $a-b = (a-c)+(c-b)$, por la desigualdad del triángulo resulta que$|a-b| \leq |b-c|+|c-a|$. Sin embargo, $6 > 3+2$ así que esto es imposible. Por lo tanto, $a = b = c$.

Problema 4. Los números naturales a y b se escriben en notación decimal usando los mismos dígitos, esto es, cada dígito del 0 al 9 aparece la misma cantidad de veces en a que en b. Demuestra que si $a + b = 10^{1000}$, entonces ambos números a y b son múltiplos de 10.

Solución. Notemos que a y b deben tener ambos 1000 dígitos, así que hay 999 dígitos que no son las unidades. Además, si alguno de a o b no es divisible por 10, entonces ninguno es divisible por 10, ya que $a + b$ es múltiplo de 10. Luego, si a y b no son divisibles por 10, entonces los dígitos de las unidades de a y b deben sumar 10, y los demás dígitos en la misma posición deben sumar 9. Por lo tanto, la suma de los dígitos de a y b debe ser $999 \cdot 9 + 10$, lo cual claramente es impar. Esto es una contradicción, puesto que la suma debe ser par ya que a y b utilizan los mismos dígitos. Concluimos que a y b son divisibles por 10.

Problema 5. Sean x, y números reales positivos tales que

$$x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000.$$

Determina el valor de $x + y$.

Solución de Emmanuel Iván Montiel Paredes. Usando la factorización conocida

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2],$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 30xy &= x^3 + y^3 + (-10)^3 - 3xy(-10) - (-10)^3 \\ &= \frac{1}{2}(x + y - 10)\left[(x - y)^2 + (x + 10)^2 + (y + 10)^2\right] + 10^3. \end{aligned}$$

Así, al sustituir en la ecuación dada en el problema y reordenando términos, llegamos a que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x + y - 10)\left[(x - y)^2 + (x + 10)^2 + (y + 10)^2\right] \\ &= 1000 - (x + y)^3 \\ &= -(x + y - 10)\left[10^2 + 10(x + y) + (x + y)^2\right], \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} &(x + y - 10)\left[(x - y)^2 + (x + 10)^2 + (y + 10)^2\right] \\ &= -2(x + y - 10)\left[10^2 + 10(x + y) + (x + y)^2\right] \end{aligned}$$

y, lo por tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= (x + y - 10)\left[(x - y)^2 + (x + 10)^2 + (y + 10)^2 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10(x + y) + 2(x + y)^2\right] \\ &= (x + y - 10)\left[2x^2 + 2y^2 + 2(x + 10)^2 + 2(y + 10)^2 + xy\right]. \end{aligned}$$

Nótese que el segundo factor en la última ecuación es positivo al ser x y y números reales positivos. Así, forzosamente debe suceder que $x+y-10=0$, es decir, $x+y=10$.

Solución alternativa. Sean $A = x+y$ y $B = xy$. Así, la ecuación dada se puede escribir como

$$A\left(A^2-3B\right)+A^3+30B=2000,$$

lo cual se puede expresar como

$$(A-10)\left(2A^2+20A+200-3B\right)=0.$$

De la desigualdad MA-MG, tenemos que $(x+y)^2 \geq 4xy$, esto es, $A^2 \geq 4B$. De aquí se puede ver que $2A^2+20A+200-3B>0$, lo que indica que $A-10=0$. Por lo tanto, $x+y=10$.

Problema 6. En el plano hay 1024 puntos tales que no hay tres que sean colineales. Cada par de puntos se une con un segmento. Ana y Beto juegan el siguiente juego: Beto le asigna un dígito a cada segmento y Ana le asigna un dígito a cada punto. Beto gana si hay dos puntos cuyo dígito es el mismo que el del segmento que los une, de lo contrario pierde. Prueba que Beto tiene una estrategia ganadora.

Solución. La estrategia de Beto será la siguiente:

- Agrupar los 1024 vértices en parejas y poner 0 en las aristas que unen los vértices de cada pareja (512 parejas, 512 aristas).
- Agrupar las 512 parejas en 256 "parejas de parejas" y poner 1 en las aristas que no han sido marcadas entre los cuatro vértices de cada grupo.
- Agrupar ahora de forma similar en 128 grupos de 8 vértices y poner 2 en las aristas que no han sido marcadas; luego 64 grupos de 16 vértices donde pone 3, 32 grupos de 32 donde pone 4, 16 grupos de 64 donde pone 5, 8 grupos de 128 donde pone 6, 4 grupos de 256 donde pone 7, 2 grupos de 512 donde pone 8 y un grupo de 1024 donde pone 9.

Veamos que esta estrategia en efecto es ganadora.
En cada una de las 512 parejas, Ana puede poner ceros en a lo más un vértice, por lo que a lo mucho 512 vértices tienen ceros. En cada grupo de 4 vértices, hay al menos dos vértices que no son 0 y están en distintas parejas, por lo que al menos uno de esos debe ser diferente a 1. En cada uno de los grupos de 8 hay al menos 2 vértices que no son 1 ni 0 y están en distintos grupos de 4, entonces al menos uno de esos vértices no tiene un 2.
Luego, en cada uno de los grupos de 16 hay al menos 2 vértices que no son 0, 1 ni 2 y están en distintos grupos de 8, entonces al menos uno de esos vértices no tiene un 3.
Después, en cada uno de los grupos de 32 hay al menos 2 vértices que no son 0, 1, 2 ni 3 y están en distintos grupos de 16, entonces al menos uno de esos vértices no tiene un 4.

Continuando el argumento: en cada uno de los grupos de 64 vértices hay al menos un vértice que no tiene un 0, 1, 2, 3, 4 o 5; en cada grupo de 128 hay al menos un vértice que no tiene un 0, 1, 2, 3, 4, 5 o 6; en cada grupo de 256 hay al menos un vértice que no tiene un 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 o 7; en cada grupo de 512 hay al menos un vértice que no tiene un 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8 y, en cada grupo de 1024, hay al menos un vértice que no tiene un 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 o 9, lo que es imposible. Esto quiere decir que Ana no puede ganar si Beto sigue su estrategia, justo como se quería.

Problema 7. Sea k un entero positivo. Demuestra que si $n \geq k + \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$, entonces $\binom{n}{k}$ tiene al menos k divisores primos distintos.

Solución. Tenemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdots(1)}.$$

Consideremos $n - i$ para $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Tenemos que $n - i > \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$. Demostraremos que existe un primo q_i y un entero positivo j tal que q_i^j divide a $n - i$ y $q_i^j \nmid \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$. Supongamos que para todo primo p que divide a $n - i$, tenemos que $\nu_p(n-i) \leq \nu_p(\operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k))$. Entonces,

$$n - i = \prod_p p^{\nu_p(n-i)} \leq \prod_p p^{\nu_p(\operatorname{mcm}(1,2,\ldots,k))} = \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k).$$

Esto contradice que $n-i > \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$. Luego, tal primo q_i existe con q_i^j divisor de $n-i$ pero $q_i^j \nmid \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$. Podemos escoger j de tal manera que $n-i = q_i^j b_i$ para algún entero b_i con $q_i \nmid b_i$. Entonces, tenemos que $n = q_i^j b_i + i$ con $0 \leq i < q_i^j$ y $i < k$, lo cual implica que

$$\left\lfloor \frac{n}{q_i^j} \right\rfloor = b_i \quad \text{y} \quad \left\lfloor \frac{n-k}{q_i^j} \right\rfloor < b_i.$$

Usando la fórmula de Legendre tenemos que

$$\nu_{q_i}\left(\binom{n}{k}\right) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{n}{q_i^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{q_i^t} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{q_i^t} \right\rfloor \right).$$

Es conocido que si $x + y = z$ con $x, y \geq 0$, entonces $\lfloor z \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$. Entonces cada sumando es 0 o 1. Al encontrar un sumando 1, tenemos que $q_i \mid \binom{n}{k}$. El sumando que sale de $t = j$ nos da

$$\left\lfloor \frac{n}{q_i^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{q_i^j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{q_i^j} \right\rfloor \geq 1,$$

ya que $q_i^j \nmid \operatorname{mcm}(1, 2, \ldots, k)$ implica que $\left\lfloor \frac{k}{q_i^j} \right\rfloor = 0$.

Entonces para cada $n - i$ tenemos un q_i que divide a $\binom{n}{k}$. Nos falta demostrar que cada uno de estos q_i's es distinto. Supongamos que $q_a = q_b = q$. Entonces existen enteros j, r tales que q^j divide a $n-a$ y $q^j \nmid \mathrm{mcm}(1,2,\ldots,k)$ y q^r divide a $n-b$ y $q^r \nmid \mathrm{mcm}(1,2,\ldots,k)$. Supongamos que $r \leq j$. Entonces, q^r divide a $n-a$ y a $n-b$, lo cual implica que q^r divide a $|a-b| \leq \mathrm{mcm}(1,2,\ldots,k)$. Esto implica que $q^r \mid \mathrm{mcm}(1,2,\ldots,k)$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, hay k primos distintos que dividen a $\binom{n}{k}$.

Problema 8. Determina todos los números primos p tales que $p! + p$ es un cuadrado perfecto.

Solución. Si $p = 2$, entonces $p! + p = 4 = 2^2$, que cumple. Si $p = 3$, entonces $3! + 3 = 9 = 3^2$, que cumple. Supongamos que $p \geq 5$ y que $p! + p = x^2$. Como $p! + p$ es impar, necesariamente x es impar y, por lo tanto, $x^2 \equiv 1 \pmod 8$. Pero $p! + p \equiv p \pmod 8$ porque $p \geq 5$. Sea $q < p$ un primo impar. Como $q < p$ entonces $q \mid p!$, pero $q \nmid p$, así que q no divide a la suma $p! + p$. Como $p! + p$ es un cuadrado perfecto y $q \mid p!$, entonces por la ley de reciprocidad cuadrática tenemos que

$$1 = \left(\frac{p! + p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right).$$

Esto significa que para cada primo $q < p$, q es un residuo cuadrático módulo p. Pero el producto de residuos cuadráticos es un residuo cuadrático. Por lo tanto, todo número impar es residuo cuadrático módulo p. Tenemos que en el conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ debe haber $(p-1)/2$ residuos cuadráticos. Entonces deben ser los impares, pero $p \geq 5$, así que 4 es un residuo cuadrático módulo p, lo que es una contradicción. Por lo tanto, si $p > 3$, $p! + p$ no es cuadrado perfecto.

Problema 9. Determina todos los enteros positivos $n, k_1, k_2, \ldots, k_n$ tales que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 5n - 4$ y

$$\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

Solución. Por la desigualdad media aritmética-media armónica tenemos que

$$\frac{5n-4}{n} = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_n}} = n.$$

Entonces, $5n - 4 \geq n^2$. Por lo tanto, $1 \leq n \leq 4$. En los casos $n = 1, 4$ obtenemos que $5n - 4 = n^2$. Luego, las desigualdades deben ser igualdades y, por lo tanto, $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$. Con $n = 1$ tenemos que $k_1 = 1$ y con $n = 4$ tenemos que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 4$. Si $n = 2$, entonces $k_1 \geq 2$, ya que $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 1$. Esto implica que $k_2 \leq 2$ y, por consiguiente, $k_1 = k_2 = 2$. Así, $k_1 + k_2 = 4 \neq 6 = 5(2) - 4$. Esto significa que con $n = 2$ no hay soluciones. Si $n = 3$, entonces $k_1 + k_2 + k_3 = 11$. Supongamos que $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Si $k_1 \geq 3$, entonces $k_1 = k_2 = k_3 = 3$, que no cumple. Luego, $k_1 = 2$. Si $k_2 \geq 4$, entonces $k_2 = k_3 = 4$ y $k_1 + k_2 + k_3 \neq 11$. Por lo tanto, $k_2 = 3$

y, por consiguiente, $k_3 = 6$. Por lo tanto, las soluciones $(n, k_1, k_2, \ldots, k_n)$ son $(1,1)$, $(3,2,3,6)$, $(3,2,6,3)$, $(3,3,2,6)$, $(3,3,6,2)$, $(3,6,2,3)$, $(3,6,3,2)$, $(4,4,4,4,4)$.

Problema 10. Sea S el conjunto de secuencias de longitud 2018 cuyos términos son números del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,10\}$ que suman 3860. Demuestra que

$$|S| \leq 2^{3860}\left(\frac{2018}{2048}\right)^{2018}.$$

Solución. Sea $a(k,n)$ el número de secuencias de longitud k con elementos del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,10\}$ que suman n. Entonces tenemos que $a(k,n)$ es el coeficiente de x^n del polinomio

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^{10})^k.$$

Como el polinomio tiene coeficientes no negativos, para cualquier $x > 0$ tenemos que

$$a(k,n)x^n < (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^{10})^k.$$

Entonces con $x = \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\begin{aligned} a(k,n) &< 2^n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{1024}\right)^k = 2^n\left(\frac{1009}{1024}\right)^k \\ &= 2^n\left(\frac{2018}{2048}\right)^k. \end{aligned}$$

En particular, $|S| = a(2018, 3860) < 2^{3860}\left(\dfrac{2018}{2048}\right)^{2018}$.

Concursos Estatales: Yucatán, 2022 – 4°, 5° y 6° de Primaria

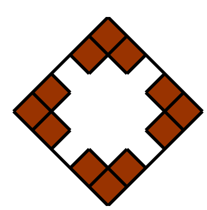
El pasado 5 de febrero de 2022 se llevó a cabo el concurso estatal de la olimpiada mexicana de matemáticas en Yucatán 2022, en los niveles de Primaria, Secundaria y Bachillerato. En el nivel Primaria, participaron estudiantes de 4°, 5° y 6° grado, de los cuales fueron seleccionados 21, 19 y 20 estudiantes de cada grado, respectivamente, los cuales fueron invitados a participar en los entrenamientos con los que se seleccionará a la delegación yucateca para participar en el 6° concurso nacional de la olimpiada mexicana de matemáticas para educación básica (OMMEB) a realizarse en el mes de junio de forma virtual.
A continuación presentamos los problemas del examen estatal 2022 de la olimpiada mexicana de matemáticas en Yucatán para 4°, 5° y 6° de Primaria. Los alumnos tuvieron 2 horas para contestarlo. Al final están las respuestas del examen.

Sección A: Los problemas de esta sección valen 1 punto cada uno.

1. ¿Cuántos números entre 100 y 1000 cumplen que la cifra de las decenas es impar?

2. ¿De cuántas maneras diferentes puedes lograr 240 multiplicando dos números (por ejemplo 24×10)? Nota: 24×10 y 10×24 son un ejemplo de **dos maneras diferentes**.

3. La figura muestra una ventana cuadrada de cristal que mide 30 cm en cada lado. En las esquinas hay adornos de color café con forma de L y el centro es de cristal blanco. ¿Cuánto es el resultado de restar el área de color blanco menos el área de color café?



4. Ocho amigos se reúnen a comer pizza y toman el acuerdo de que todos tienen que pagar la misma cantidad de dinero. Julia olvidó llevar su monedero, por lo que no

puede pagar. Entonces, sus amigos ponen 5 pesos más para completar la parte de Julia. ¿Cuánto se pagó en total por las pizzas?

5. Si las cuatro letras A, B, C y D representan dígitos diferentes y se cumplen la suma y la resta siguientes, ¿cuánto vale D?

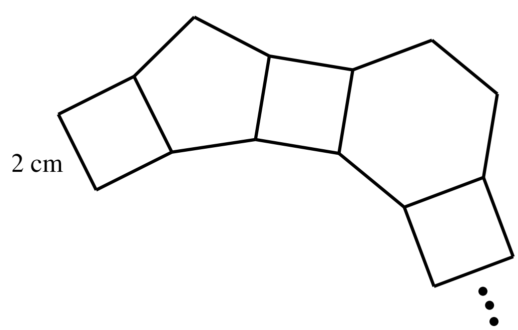
$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ + & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ \hline & \mathrm{D} & \mathrm{A} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ - & \mathrm{C} & \mathrm{A} \\ \hline & & \mathrm{A} \end{array}$$

Sección B: Los problemas de esta sección valen 2 puntos cada uno.

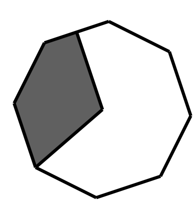
6. Drini está ahorrando. El 1 de febrero, pone 1 peso en una alcancía. El 2 de febrero pone 3 pesos. El 3 de febrero pone 5 pesos. El 4 de febrero pone 7 pesos. ¿Cuánto dinero tendrá después de poner las monedas del 28 de febrero?

7. ¿Cuántos números de 3 cifras cumplen que, si multiplicas sus cifras, el resultado es 24?

8. Imagina que tomas un cuadrado de cartulina cuyo lado mide 2 cm. Le pegas en un lado un pentágono (cinco lados iguales) de cartulina, luego otro cuadrado de cartulina, luego un hexágono (seis lados iguales), luego otro cuadrado, luego un heptágono (siete lados iguales) y sigues pegando hasta llegar a un decágono (diez lados iguales). En la figura te mostramos las primeras 5 piezas que se pegan. ¿Cuál es el perímetro de la figura completa que se forma?



9. Si la figura mostrara un octágono regular que tuviera área de 400 cm^2 y la parte sombreada se forma uniendo el centro con un vértice (esquina) y un punto que está en la mitad de un lado, ¿cuánto valdría el área que queda sombreada?



10. Observa las siguiente serie de figuras. ¿Cuánto sumarán los números en los cuadros de la figura 20, si continúas el patrón?

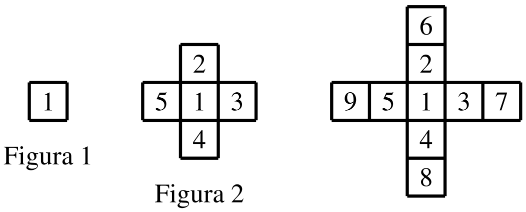
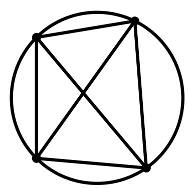


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Sección C: Los problemas de esta sección valen 3 puntos cada uno.

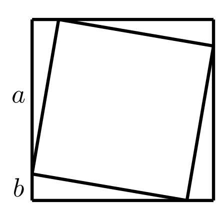
11. Si pones 4 puntos en la orilla de un círculo, como muestra la figura, puedes formar 6 líneas rectas uniéndolos. ¿Cuántas líneas rectas puedes formar si pones 10 puntos en un círculo?



12. Math Vader necesita construir urgentemente una escuela de Matemáticas, así que se dedica a encontrar colegas en todo el planeta que le ayuden a construirla. Los Geometrucos le dicen que pueden construir la escuela en un año. Los Combinatóricos le dicen que la pueden construir en un año y medio. Si en el planeta de Math Vader los años duran 400 días, ¿en cuántos días construirán la escuela los Geometrucos y los Combinatóricos trabajando juntos?

13. Julio va al parque cada 10 días, Víctor va al parque cada 8 días y Bruno cada 6 días. Si se encontraron en el parque hace 9 días, ¿cuántos días faltan para que se vuelvan a encontrar la siguiente vez?

14. En la figura se muestran dos cuadrados, el mayor tiene área 64 cm^2 y el menor tiene área 48 cm^2. ¿Cuánto vale la multiplicación de las medidas marcadas como a y b?



15. A continuación te mostramos dos formas de llenar una cuadrícula de 3×3 con los números $1, 2, 3$, de manera que no haya repeticiones en ningún renglón (horizontal) ni en ninguna columna (vertical). ¿Cuántas maneras diferentes hay en total de llenar la cuadrícula sin que haya repeticiones en renglones o en columnas?

1	2	3
3	1	2
2	3	1

3	2	1
2	1	3
1	3	2

RESPUESTAS

Sección A	Sección B	Sección C
1. 450	6. 784 pesos	11. 45
2. 20	7. 21	12. 240
3. 36 cm^2	8. 94 cm	13. 111
4. 280 pesos	9. 125 cm^2	14. 8 cm^2
5. 9	10. 3003	15. 12

5^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 17 al 21 de junio de 2021 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 5^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 117 estudiantes de primaria, representando a 29 entidades federativas y, 149 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel III, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas

(IMC), a celebrarse en el verano de 2022.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel III de la 5^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Alonso Baeza Quevedo	Baja California Sur	Oro individual
Alan Alejandro López Grajales	Chiapas	Oro individual
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Oro individual
Héctor Juan Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Javier Santiago Alfaro González	Ciudad de México	Oro por equipos
Emmanuel Buenrostro Briseño	Jalisco	Oro individual
Angela María Flores Ruiz	Sinaloa	Oro individual

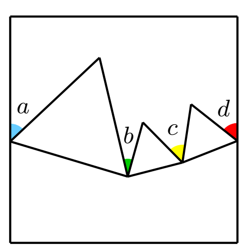
En la prueba por equipos en el Nivel III, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 265 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 255 puntos) y el Estado de Sinaloa obtuvo el tercer lugar (con 180 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel III fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 501 puntos).
Segundo lugar: Jalisco (con 436 puntos).
Tercer lugar: Sinaloa (con 336 puntos).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel III de la 5^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) En el interior de un cuadrado hay tres triángulos equiláteros como se muestra en la figura. Si la suma de los ángulos a y b es $50°$, ¿cuál es el valor de la suma, en grados, de los ángulos c y d?



2) En una olimpiada participan cinco hermanos: Aldo, César, Hugo, Luis y Saúl. Sus edades son $12, 13, 14, 17$ y 25 años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Sin

embargo, se sabe que si sumas la edad de Saúl y la de César, obtienes la edad de Luis, mientras que si sumas la edad de Saúl y la de Aldo, obtienes el doble de la edad de César. ¿Cuál es la edad de Hugo?

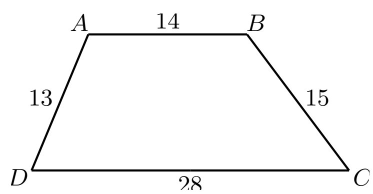
3) Rogelio escribe una lista de los divisores positivos de 10! de menor a mayor. Luego multiplica los números que ocupan los lugares 10 y 261 de su lista. ¿Qué resultado obtiene Rogelio?

4) Carolina planea vender crepas dulces y la forma de prepararlas es acompañarlas con una o dos frutas diferentes y un aderezo. Carolina ha considerado utilizar como aderezo chocolate, cajeta o mermelada de fresa. A ella le gustaría ofrecer a sus clientes al menos 100 tipos de crepas distintas. ¿Cuál es la cantidad mínima de frutas que debe ofrecer Carolina a sus clientes para garantizar al menos 100 tipos de crepas distintas?

5) Ivannia escribió en el pizarrón la siguiente ecuación: $m^2 - n^2 = 2021$. Calcula la suma de todos los posibles valores del último dígito de n^m, tomando en cuenta que m y n son enteros positivos.

6) ¿Cuántos números de siete dígitos hay para los cuales el producto de sus dígitos es 45^3 y la suma de sus dígitos no es un número primo?

7) Sea $ABCD$ un trapecio con AB paralela a CD, $AB = 14$ cm, $BC = 15$ cm, $CD = 28$ cm y $DA = 13$ cm. Encuentra el área, en cm^2, de $ABCD$.



8) La taquería "*El taco matemático*" tiene dos promociones: Promo100, donde son tres órdenes de tacos por 100 pesos, y Promo70, donde son dos órdenes de tacos por 70 pesos. Matilde quiere hacer una fiesta y quiere minimizar el dinero que gastará en los platillos. Si ella quiere pedir exactamente 31 órdenes de tacos, ¿cuánto es lo menos que puede gastar en pesos?

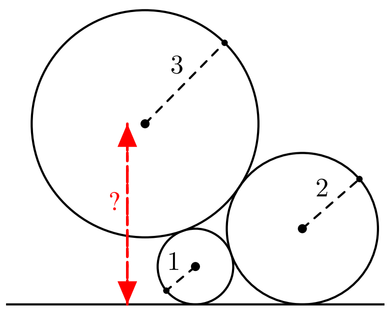
9) Determina cuántos enteros positivos a menores que 10000, satisfacen que $1010a - 1011$ es múltiplo de 2021.

10) Se tiene un cubo con sus caras pintadas de 6 colores distintos, una de cada color. Cada cara se separa en 4 cuadrados iguales trazando líneas perpendiculares a sus lados que pasen por sus centros. En los 24 cuadrados que resultan de la división, se acomodan los números del 1 al 24 de manera que después de colocarlos todos, la suma de cada 3 números cuyos cuadrados tienen un vértice en común y este sea un vértice del cubo sea múltiplo de 3 y, además, cada dos números cuyos cuadrados estén en la misma cara del cubo y estos compartan un lado sumen también un múltiplo de 3. Si el número de formas de realizar este acomodo se puede expresar

de la forma $a \cdot (b!)^c$ donde a, b y c son enteros positivos tales que a no es divisible por el cuadrado de ningún número primo, determina el valor de $a + b + c$.

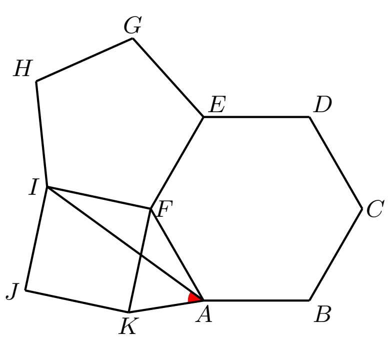
11) Los números reales positivos x, y, z satisfacen
$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{5x} = \frac{z+x}{2y}.$$
Si el valor de la expresión $\frac{x+2y}{3z}$ se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros positivos cuyo máximo común divisor es igual a 1, encuentra $m + n$.

12) En la figura se observan dos circunferencias de radios 1 cm y 2 cm tangentes a una recta horizontal. Una tercera circunferencia de radio 3 cm es tangente a las otras dos circunferencias. ¿A qué distancia, en centímetros, se encuentra el centro de la tercera circunferencia de la recta horizontal?



Parte B

13) La siguiente figura muestra un hexágono regular cuyos vértices son A, B, C, D, E, F, un pentágono regular cuyos vértices son E, G, H, I, F, y un cuadrado cuyos vértices son I, F, K, J. ¿Cuánto mide, en grados, el ángulo $\angle KAI$?



14) David, Américo y Nicho tienen 12, 13 y 14 años, respectivamente. Al inicio, cada uno de ellos tiene un número. Por turnos, siguiendo el orden de acuerdo a su edad del menor al mayor, juegan al “Oportuno veinte veintiuno” que consiste en, durante su turno, elegir y hacer uno de los siguientes movimientos:

- Restar 3 a su número.
- Multiplicar por 7 su número y al resultado sumarle 9.
- Multiplicar por 4 su número y al resultado restarle 3.

Gana el primero que obtenga como resultado el número 2021. Si cada uno comienza con el número de su edad, ¿quién ganará?

15) Los números reales x, y, z, N cumplen las siguientes ecuaciones:

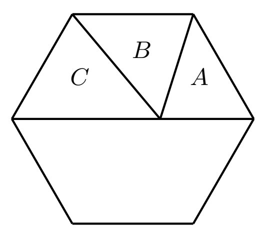
$$x + y + z = 3,$$

$$N = x^2y^2 + 4z = y^2z^2 + 4x = z^2x^2 + 4y.$$

Encuentra todos los posibles valores de N.

Prueba por Equipos, Nivel III

1) En la figura se observa un hexágono regular y una diagonal entre dos vértices opuestos. El área del triángulo B resulta de multiplicar por n el área del triángulo A. El área del triángulo C resulta de multiplicar por m el área del triángulo A. Determina el valor de $2n - m$.



2) Un número de 5 dígitos $\overline{abcde}$ es *fósil* si cumple las siguientes condiciones:

- El número $\overline{ab}$ es múltiplo de 2.
- El número $\overline{abc}$ es múltiplo de 3.
- El número $\overline{abcd}$ es múltiplo de 4.
- El número $\overline{abcde}$ es múltiplo de 5.

Por ejemplo, el número 10245 es fósil porque 10 es múltiplo de 2, 102 es múltiplo de 3, 1024 es múltiplo de 4 y 10245 es múltiplo de 5. ¿Cuántos números fósiles hay?

3) Sean a y c números reales diferentes de cero y diferentes entre sí, tales que

$$a + \frac{4}{a} = c + \frac{4}{c}.$$

Determina el valor del producto ac.

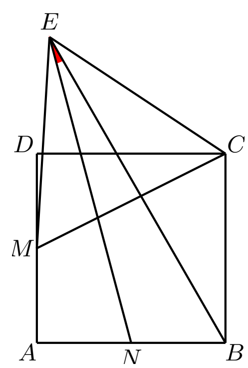
4) Encuentra el mayor entero positivo n tal que 7^n divide a

$$49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + 49 \cdot 3 \cdot 3! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!.$$

(NOTA: Si n es un entero positivo, entonces $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$. Por ejemplo, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

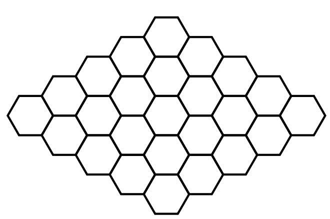
5) Ángel escribe en un pizarrón exactamente una vez cada uno de los números de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$. Por ejemplo, uno de esos números que escribe es $-1+2-3+4-5+6+7+8 = 18$. Determina la cantidad de números positivos que escribe Ángel.
NOTA: *si más de una expresión de la forma $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 8$ da el mismo resultado positivo, entonces ese resultado se cuenta tantas veces como la cantidad de expresiones que dan dicho resultado.*

6) En la siguiente figura, se tiene un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero CME, donde M es el punto medio del segmento AD. Sea N el punto medio de AB. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle NEB$.



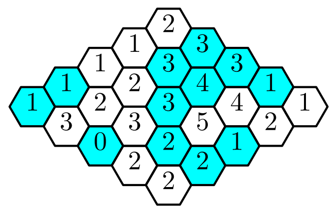
7) Considera todos los números enteros de 7 dígitos que se forman con los dígitos 1, 2 y 3 de manera que el 3 aparezca exactamente 2 veces. ¿Cuántos de tales enteros son divisibles entre 11?

8) Roberto y Tomás colorean por turnos los hexágonos del siguiente tablero. Empieza Roberto y terminan una vez que hayan coloreado 12 hexágonos en total. Después escriben en cada hexágono la cantidad de hexágonos coloreados con los que comparten un lado y por último suman todos los números de los hexágonos. Si la suma total del tablero es múltiplo de 5, entonces gana Tomás, de otra forma gana Roberto.



¿Quién tiene la estrategia ganadora y cuál es?

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra cómo terminaría una posible partida.



En este caso la suma es 54, por lo que ganó Roberto.

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

1) La respuesta es $130°$. Consideremos el hexágono formado por los dos vértices superiores del cuadrado y los cuatro vértices en los que están los ángulos marcados. La suma de los ángulos internos de este hexágono es igual a $4(180°)$. Sin embargo, esta misma suma se puede expresar como la suma de los 2 ángulos rectos en los vértices del cuadrado, de los 6 ángulos de $60°$ en los triángulos equiláteros y de los ángulos marcados. Es decir, si S es la suma de ángulos buscada, entonces

$$2\,(90°) + 3\,(120°) + S + 50° = 4\,(180°)\,,$$

de donde obtenemos que $S = 130°$.

2) La respuesta es 17. Para cada uno de los hermanos, su edad se denotará por la primera letra de su nombre. Así, tenemos las ecuaciones

$$s + c = \ell,$$
$$s + a = 2c.$$

De la primera, como cada una de las posibles edades es mayor a 10, entonces $\ell >$ 20, por lo que $\ell = 25$ y, por ende, s y c son, en algún orden, 12 y 13. Si $c = 12$, entonces $s + a = 26$ con $s = 13$, por lo que $a = 13$, lo cual es imposible. Esto implica que $c = 13$ y $s = 12$, de donde se obtiene que $a = 14$ y, por lo tanto, $h = 17$.

3) La respuesta es $10! = 3628800$. Factorizando, obtenemos que

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7,$$

por lo que $10!$ tiene $(8 + 1)(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 270$ divisores positivos. Ordenando los divisores de menor a mayor, tenemos que el producto de cada pareja de elementos en posiciones 1 y 270, 2 y 269, 3 y 268, ..., 10 y 261, es igual a $10!$. Así, el resultado de Rogelio es $10! = 3628800$.

4) La respuesta es 8. Tomando en cuenta que la crepa se acompaña de un aderezo, podemos concluir que la cantidad total de crepas que se pueden ofrecer es tres veces la cantidad de crepas diferentes con un aderezo en particular. Si hay n frutas, entonces se pueden preparar n crepas acompañadas de una fruta y $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ crepas acompañadas de dos frutas. Así, buscamos el menor valor posible de n tal que
$$3\left(n + \frac{n(n-1)}{2}\right) > 100.$$
En este caso, el menor valor de n que cumple lo anterior es $n = 8$.

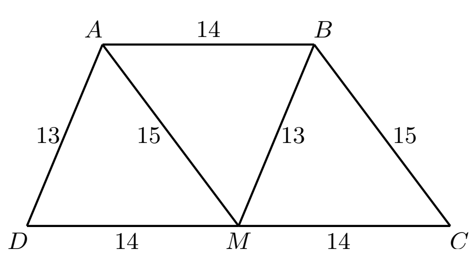
5) La respuesta es 2. De la ecuación dada, tenemos que $(m+n)(m-n) = 2021$. Además, $2021 = 43 \cdot 47$. Como $0 < m - n < m + n$, hay únicamente dos opciones:

   - $m - n = 43$ y $m + n = 47$. De aquí obtenemos que $m = 45$ y $n = 2$. Así, buscamos el último dígito de 2^{45}. Considerando que $2^1 \equiv 2 \pmod{10}$, $2^2 \equiv 4 \pmod{10}$, $2^3 \equiv 8 \pmod{10}$, $2^4 \equiv 6 \pmod{10}$, $2^5 \equiv 2 \pmod{10}$ y $45 \equiv 1 \pmod 4$, concluimos que $2^{45} \equiv 1 \pmod{10}$.
   - $m - n = 1$ y $m + n = 2021$. Luego, $m = 1011$ y $n = 1010$. El último dígito de 1010^{1011} claramente es 0.

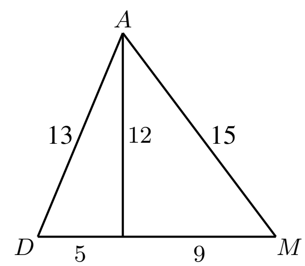
   Por lo tanto, la suma de todos los posibles valores del último dígito de n^m es $2+0 = 2$.

6) La respuesta es 210. Tenemos que $45^3 = 3^6 \cdot 5^3$. Así, tres de las cifras del número tienen que ser iguales a 5. Las cuatro restantes solo pueden ser 1, 3 o 9, y su producto debe ser 3^6. Las únicas opciones para lograr esto es que los cuatro dígitos restantes sean 9, 9, 3 y 3, o 9, 9, 9 y 1, en algún orden.
   En el primer caso, la suma de las cifras es igual a 39, el cual no es un número primo. En este caso hay $\binom{7}{3}\binom{4}{2}\binom{2}{2} = 210$ números.
   En el segundo caso, la suma de las cifras es igual a 43, el cual sí es un número primo.
   Por lo tanto, en total hay 210 números.

7) La respuesta es 252. Sea M el punto medio de CD. Tenemos que $DM = MC = 14 = AB$, lo cual implica que $ABMD$ es un paralelogramo con $AM = BC = 15$ y $BM = AD = 13$. Por lo que el área de $ABCD$ es el triple del área de un triángulo de lados 13, 14 y 15.

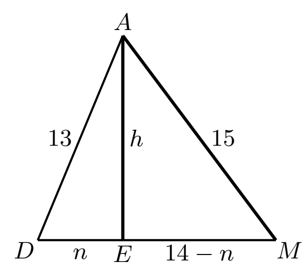


Como ese triángulo se puede construir con dos triángulos de lados 13, 12, 5 y 15, 12, 9, tiene altura 12 y área 84.



Por lo tanto, el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

Solución alternativa. Consideremos el triángulo ADM y tracemos su altura AE desde el vértice A y sean $h = AE$, $n = DE$ y $EM = 14 - n$ como se muestra en la figura.



Entonces, por el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos AED y AEM, tenemos que $13^2 - n^2 = h^2 = 15^2 - (14-n)^2$, de donde $(14-n)^2 - n^2 = 15^2 - 13^2$, esto es, $14^2 - 28n = (15+13)(15-13) = 28(2)$. De aquí, obtenemos que $28n = 14^2 - 2(28) = 2(7)(14) - 2(28) = 7(28) - 2(28) = (7-2)(28) = 5(28)$, de donde se sigue que $n = 5$. Por lo tanto, $DE = n = 5$, $EM = 14 - n = 9$, $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ y el área de $ABCD$ es igual a $84 \times 3 = 252$.

8) La respuesta es 1040. Denotemos por m y n al número de Promo100 y Promo70, respectivamente. Sabemos entonces que $3m + 2n = 31$. Buscamos minimizar $100m + 70n$. Observemos que

$$100m + 70n = 105m + 70n - 5m = 35(3m + 2n) - 5m = 35 \cdot 31 - 5m,$$

por lo que, para minimizar $100m + 70n$, basta maximizar m. Como $3m + 2n = 31$, tenemos que $m = \frac{31-2n}{3}$. Al querer maximizar m, se quiere minimizar n. Es claro que para $n = 0$ y $n = 1$ no se obtiene un valor entero de m. Para $n = 2$ obtenemos que $m = \frac{31-2(2)}{3} = 9$, donde $3(9) + 2(2) = 31$. Por lo tanto, lo menos que puede gastar Matilde es $100(9) + 70(2) = 1040$ pesos.

9) La respuesta es 4. Sea a un entero positivo menor que 10000. Si $1010a - 1011$ es múltiplo de 2021, entonces $1010a - 1011 = 2021x$ para algún entero x, esto es, $1010a = 2021x + 1011$. Si multiplicamos esta ecuación por 2 y reducimos módulo 2021, obtenemos que $-a \equiv 1 \pmod{2021}$. Esto significa que $a = 2021t - 1$ para algún entero t.
Si $t \leq 0$, entonces $a \leq -1$, así que no hay soluciones en este caso.
Si $t \geq 5$, entonces $a \geq 2021(5) - 1 = 10104 > 10000$, así que no hay soluciones en este caso.
Si $t = 1, 2, 3$ o 4, entonces $a = 2021, 4041, 6062$ o 8083, respectivamente, los cuales satisfacen la condición del problema.
Por lo tanto, solo hay 4 posibles valores de a.

10) La respuesta es 17. Analizando una esquina, podemos observar que tres cuadros que comparten una esquina deben tener números que tengan todos sus residuos módulo 3 iguales o todos distintos. De analizar las caras del cubo notamos que al saber el residuo módulo 3 de un número en algún cuadro, las congruencias de sus vecinos quedan determinadas (al haber un único residuo que sume 0 con el del cuadro), determinando así las congruencias de toda su cara.
Si se toma una cara con una casilla que tiene un número divisible por 3, todos los números en esa cara serán divisibles por 3. Ninguna de las caras vecinas a esta pueden tener un múltiplo de 3, puesto que las esquinas que comparten indicarían que las otras dos caras adyacentes a ambas tienen todas sus casillas con múltiplos de 3, a pesar de solo haber 8 múltiplos de 3 entre 1 y 24. Así, los múltiplos de 3 estarán en dos caras opuestas y cada una de las demás caras tendrá en un patrón de ajedrez números congruentes a 1 o 2 módulo 3.
Hay 3 formas de elegir las dos caras opuestas que tendrán a los múltiplos de 3, luego hay 2 formas de escoger el patrón de ajedrez de números congruentes a i módulo 3 para cada $i = 0, 1, 2$. Esto resulta en un total de $6 \times (8!)^3$ acomodos posibles. Por lo tanto, la respuesta es $6 + 8 + 3 = 17$.

11) La respuesta es 14. Si a, b, c y d son números reales tales que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad + cd = bc + cd$, por lo que $\frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. En el problema, tenemos que

$$\frac{3x+3y}{3z} = \frac{y+z}{5x} = \frac{2z+2x}{4y},$$

de donde, usando lo mencionado al principio,

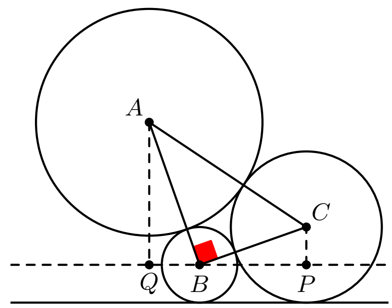
$$\frac{3x+3y}{3z} = \frac{(3x+3y)+(y+z)+(2z+2x)}{3z+4y+5x} = 1.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{5x} = \frac{z+x}{2y} = 1,$$

lo que implica que $x + y = z$. Usando esto en $\frac{y+z}{5x} = 1$, obtenemos que $\frac{x+2y}{5x} = 1$. Por consiguiente, $y = 2x$, lo que indica que $z = 3x$. Por lo tanto, $\frac{x+2y}{3z} = \frac{x+4x}{9x} = \frac{5}{9}$, de donde se concluye que la respuesta es $5 + 9 = 14$.

12) La respuesta es $\frac{8\sqrt{2}}{3}+1 \approx 4.76$. Sean A, B y C los centros de las circunferencias (como se muestra en la figura). Observemos que el triángulo ABC tiene lados de longitudes 3 cm, 4 cm y 5 cm, por lo que es un triángulo rectángulo.
Tracemos la recta que pasa por B y que también es paralela a la recta horizontal. Luego tracemos las perpendiculares AQ y CP como se observa en la figura.



Ahora notemos que $\angle CBP = 90° - \angle QBA = \angle BAQ$ por lo que los triángulos AQB y BPC son semejantes. En el triángulo BPC tenemos que $BC = 3$ cm y $CP = 1$ cm, por lo que, por Pitágoras, resulta que $BP = \sqrt{8}$ cm. De la semejanza anterior obtenemos que $\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{BP}$, de donde $AQ = \frac{4\sqrt{8}}{3}$ cm. Finalmente, la distancia de A a la recta horizontal es $AQ + 1 = \frac{4\sqrt{8}}{3} + 1 = \frac{8\sqrt{2}}{3} + 1 \approx 4.76$ cm.

Parte B

13) Primero, observemos que $AF = KF = IF$, por lo que F es el circuncentro del triángulo KAI. Como $\angle KFI = 90°$, entonces $\angle KAI = \frac{1}{2}\angle KFI = \frac{1}{2}(90°) = 45°$.

14) Notemos que los tres movimientos no alteran el residuo módulo 3 del número de cada uno. Como $2021 \equiv 14 \pmod 3$, el único que puede ganar es Nicho. La siguiente sucesión de movimientos muestra que, en efecto, puede ganar:

$$14 \to 11 \to 86 \to 83 \to 80 \to 77 \to 74 \to 71 \to 506 \to 2021.$$

15) De las igualdades dadas tenemos que $x^2y^2 + 4z = y^2z^2 + 4x$, lo cual implica que $x^2y^2 - y^2z^2 = 4x - 4z$, esto es, $y^2(x^2 - z^2) = 4(x - z)$. Si $x \neq z$, de la última ecuación y de la primera ecuación dada obtenemos que $4 = y^2(x+z) = y^2(3-y)$. Esto se puede reescribir como $0 = y^3 - 3y^2 + 4 = (y-2)^2(y+1)$. Se sigue que, si $x \neq z$, entonces $y = -1$ o $y = 2$. Análogamente, si $x \neq y$, entonces $z = -1$ o $z = 2$, y si $y \neq z$, entonces $x = -1$ o $x = 2$.
Por consiguiente x, y y z no pueden ser todos diferentes. En efecto, asumiendo que sí, se obtiene una contradicción pues se tendría que x, y y z serían cada uno -1 o 2, lo cual por el principio de las casillas, implica que hay dos iguales. De aquí se tienen dos casos.

- Si dos de x, y y z son iguales y el otro es diferente, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x \neq y$ y $y = z$. Así, se tiene que $z = -1$ o $z = 2$.
  Si $z = -1$, entonces $y = -1$ y $3 = x + y + z = x - 2$, por lo que $x = 5$. Es claro que estos valores cumplen las ecuaciones dadas. Así, se obtiene que $N = (-1)^2(-1)^2 + 4(5) = 21$.
  Si $z = 2$, entonces $y = 2$ y $3 = x + y + z = x + 4$, por lo que $x = -1$. Estos valores cumplen las ecuaciones dadas. Se llega a que $N = (2)^2(2)^2 + 4(-1) = 12$.
- Si $x = y = z$, de la primera ecuación dada se concluye que $x = y = z = 1$, valores que claramente cumplen las ecuaciones dadas. Así, $N = (1)^2(1)^2 + 4(1) = 5$.

Por lo tanto, los únicos valores posibles de N son 5, 12 y 21.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) Sin pérdida de generalidad, supongamos que la base del triángulo A mide 1 cm. Como los triángulos A, B y C tienen la misma altura (vertical), entonces la razón entre áreas es igual a la razón entre bases. Esto indica que la base del triángulo B (que es igual al lado del hexágono), es igual a n y la base del triángulo C es igual a m. Como el hexágono de la figura es regular, entonces su diagonal principal mide el doble del lado del hexágono, por lo que $m + 1 = 2n$, esto es, $2n - m = 1$.

   Solución alternativa. Sea h la distancia entre la diagonal principal trazada del hexágono (cuya longitud se denota por d) y el lado horizontal superior del hexágono (cuya longitud se denota por ℓ). Tenemos que $d = 2\ell$, pues el hexágono es regular. Entonces, el área del triángulo B es igual a $\frac{1}{2}h\ell$, mientras que el área del trapecio formado por los triángulos A, B y C es igual a $\frac{1}{2}(h)(3\ell) = \frac{3}{2}h\ell$. Si a denota el área del triángulo A, entonces $a + an + am = \frac{3}{2}h\ell$ y $an = \frac{1}{2}h\ell$, por lo que $a + am = h\ell$. Se sigue que
   $$\frac{1+m}{n} = \frac{a+am}{an} = \frac{h\ell}{\frac{1}{2}h\ell} = 2,$$
   de donde $1 + m = 2n$, esto es, $2n - m = 1$.

2) Por el criterio de divisibilidad del 4, para que $\overline{abcd}$ sea múltiplo de 4, debemos tener que $\overline{cd}$ es múltiplo de 4. Como hay 25 múltiplos de 4 que se pueden formar con dos dígitos, tenemos 25 maneras de elegir al número $\overline{cd}$.
   Para que $\overline{ab}$ sea múltiplo de 2, b debe ser par. Por lo tanto, tenemos 5 maneras de elegir al dígito b.
   Para que $\overline{abc}$ sea múltiplo de 3, por el criterio de divisibilidad del 3 debemos tener que $a + b + c$ es múltiplo de 3. Si $b + c$ es $3, 6, 9, 12, 15$ o 18, entonces a debe ser $3, 6$ o 9. Si $b + c$ es $4, 7, 10, 13$ o 16, entonces a debe ser $2, 5$ u 8. Si $b + c$ es $2, 5, 8, 11, 14$ o 17, entonces a debe ser $1, 4$ o 7. En cualquier caso, a siempre tiene 3 opciones.
   Finalmente, para que $\overline{abcde}$ sea múltiplo de 5, e debe ser 0 o 5, esto es, e tiene 2

opciones.
En total hay $25 \times 5 \times 3 \times 2 = 750$ números fósiles.

3) La igualdad dada implica que $a - c = \frac{4}{c} - \frac{4}{a} = \frac{4(a-c)}{ac}$. Como a y c son diferentes, tenemos que $a - c \neq 0$ y, de la última ecuación, concluimos que $ac = 4$.

4) Si k es un entero positivo, entonces $k \cdot k! = k!\,[(k+1) - 1] = (k+1)! - k!$ Usando esta relación y llamando S a la suma $49 \cdot 1 \cdot 1! + 49 \cdot 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49 \cdot 49!$, tenemos que

$$\begin{aligned} S &= 49\,(1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + 49 \cdot 49!) \\ &= 49[(2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + (50! - 49!)] = 49\,(50! - 1!)\,. \end{aligned}$$

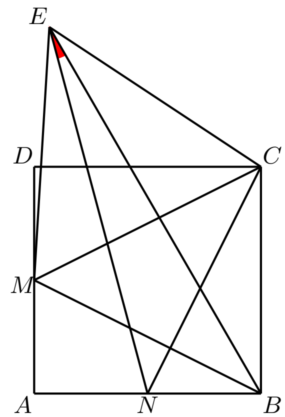
Como $49 \mid 50!$, tenemos que $\text{mcd}(49, 50! - 1) = 1$, por lo que 7 no divide a $50! - 1$. Así, los únicos factores 7 de $49(50! - 1)$ son los factores 7 de 49, de los cuales hay 2.

5) El número total de números escritos por Ángel es $2^8 = 256$, por la diferente elección de signo de los 8 números. Notemos que la cantidad de números positivos es igual a la cantidad de números negativos, pues si una expresión da como resultado un número positivo, invirtiendo los signos de los 8 números que pertenecen a la operación se obtiene un número negativo (que corresponde al número positivo mencionado anteriormente), por lo que basta enfocarse en aquellas expresiones cuyo resultado es 0. Para eso, los números del 1 al 8 se dividen en dos conjuntos A y B dependiendo de cuáles serán positivos (conjunto A) y cuáles serán negativos (conjunto B). Como el 8 pertenece a alguno de los dos conjuntos, sin pérdida de generalidad se puede asumir que está en A y multiplicar por 2 la cantidad de formas que se obtengan.
La suma de ambos conjuntos debe ser la misma. Como la suma de los 8 números es $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$, en cada conjunto se debe sumar 18, por lo que una vez puesto el 8 en A, el resto de los números de A deben sumar $18 - 8 = 10$. Así, obtenemos las siguientes posibilidades:

$$8, 1, 2, 3, 4; \quad 8, 7, 2, 1; \quad 8, 6, 3, 1; \quad 8, 5, 3, 2; \quad 8, 5, 4, 1; \quad 8, 7, 3; \quad 8, 6, 4.$$

Son 7 posibilidades si 8 está en A, por lo que Ángel escribe $7 \cdot 2 = 14$ veces el número 0 en el pizarrón. Por lo tanto, la cantidad de resultados positivos es $\frac{256-14}{2} = 121$.

6) Observemos que $CN = CM = MB$, pues los tres segmentos son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos cumplen que uno de ellos es igual al lado del cuadrado y el otro es igual a la mitad del lado del cuadrado. Más aún, por este argumento, tenemos que los triángulos AMB y BNC son congruentes, por lo que $\angle MBN = \angle NCB$. Como $\angle CBN = 90°$, concluimos que los segmentos CN y MB son perpendiculares.



Sean $\alpha = \angle MEN$ y $\beta = \angle BEC$. De la construcción de la figura, como $ME = MC = MB$ y $CE = CM = CN$, tenemos que M y C son los circuncentros de los triángulos ECB y EMN, respectivamente. Esto significa que $\angle BMC = 2\angle BEC = 2\beta$ y $\angle MCN = 2\angle MEN = 2\alpha$. Como MB y CN son perpendiculares, entonces $\angle BMC + \angle MCN = 90°$. Esto quiere decir que $2\alpha + 2\beta = 90°$ y, por consiguiente, $\alpha + \beta = 45°$. Por lo tanto,

$$\angle NEB = \angle MEC - (\angle MEN + \angle BEC) = 60° - (\alpha + \beta) = 60° - 45° = 15°.$$

7) Sea $n = abcdefg$ uno de los números buscados. Por el criterio de divisibilidad del 11, $x = a + c + e + g - (b + d + f)$ debe ser múltiplo de 11. Observemos que el valor mínimo de x es $(1 + 1 + 1 + 1) - (3 + 3 + 2) = -4$, mientras que el valor máximo de x es $(3 + 3 + 2 + 2) - (1 + 1 + 1) = 7$, por lo que $x = 0$ es el único valor posible.
Sea $y = a + c + e + g = b + d + f$. Luego, la suma de los dígitos de n es $2y$. Observemos que el valor mínimo de $2y$ es $3+3+1+1+1+1+1 = 11$ y el valor máximo de $2y$ es $3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$, de donde se sigue que y puede ser 6, 7 u 8.

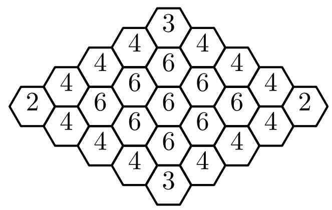
- Si $y = 6$, entonces no puede suceder que dos de los dígitos b, d y f sean 3, al igual que con a, c, e y g. Entonces, dos de los dígitos b, d y f suman 3, lo que implica que $\{b, d, f\} = \{3, 2, 1\}$, los cuales se pueden ordenar de $3! = 6$ formas. Como tres de los dígitos a, c, e y g suman 3, entonces esos tres tienen que ser iguales a 1 y el otro igual a 3, dando un total de $4 \cdot 6 = 24$ números en este caso.
- Si $y = 7$, como $b + d + f = 7$, entonces b, d, f deben ser 1, 3, 3 (en algún orden) o 2, 2, 3 (en algún orden). En el primer caso, como $a + c + e + g = 7$ y ninguno es 3, se tiene que tres de los dígitos deben ser 2 y el otro es 1, dando $3 \cdot 4 = 12$ números. En el segundo caso, uno de los números a, c, e, g es 3 y los demás suman 4, por lo que los dígitos a, c, e, g son 1, 1, 2, 3 en algún orden,

dando $3 \cdot \binom{4}{2}\binom{2}{1} = 36$ números. Así, en este caso hay un total de $12+36 = 48$ números que cumplen.

- Si $y = 8$, como $b + d + f = 8$, la única opción es que b, d, f sean 2, 3, 3 en algún orden. Además, como $a + c + e + g = 8$ y ninguno es 3, entonces $a = c = e = g = 2$. Se sigue que solo hay 3 números en este caso.

Por lo tanto, en total hay $24 + 48 + 3 = 75$ números.

8) Tomás tiene estrategia ganadora. Para ver esto, observemos que cada vez que se colorea un hexágono, la suma aumenta en la cantidad de hexágonos que lo rodean, de modo que al considerar la cantidad de hexágonos que rodean a cada celda, se obtiene un tablero como el que se muestra.



La estrategia es como sigue. Si Roberto colorea uno que tenga un 3, Tomás colorea uno que tenga un 2 y viceversa. Lo mismo sucede con las celdas de 6 y 4: si Roberto escoge una que tenga un 6, Tomás puede colorear una con un 4 y viceversa.
Como hay tantas celdas con un 3 como celdas como un 2, además de que hay doce celdas con un 4 y nueve celdas con un 6, la estrategia de Tomás sí se puede llevar a cabo pues se tomarán a lo mucho seis celdas con un 4 y a lo mucho seis celdas con un 6.
Como Tomás solo está escogiendo números de manera que, después de su turno, la suma sea un múltiplo de 5, la suma al final del juego deberá de ser múltiplo de 5.

35^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas Concurso Nacional (Virtual)

Del 7 al 14 de noviembre de 2021 se llevó a cabo en forma virtual el Concurso Nacional de la 35^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas, con la participación de 190 estudiantes provenientes de los 32 Estados del país.

Los 17 alumnos ganadores del primer lugar fueron:

1. Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
2. Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
3. Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).
4. Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
5. Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León).
6. Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
7. Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
8. Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
9. Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nuevo León).
10. Víctor Manuel Bernal Ramírez (Sinaloa).
11. Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
12. Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur).
13. Adrián Arturo García López (Jalisco).
14. Sebastián Montemayor Trujillo (Nuevo León).
15. Dariam Samuel Aguilar García (Baja California).
16. Carlos Fernando Martínez Quintero (Ciudad de México).
17. Megan Ixchel Monroy Rodríguez (Hidalgo).

Los 9 alumnos preseleccionados para la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe fueron:

1. Alonso Baeza Quevedo (Baja California Sur).
2. Emiliano Hernández Barranco (Morelos).
3. Leonardo Melgar Rubí (Morelos).
4. Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
5. Rodrigo Saldívar Mauricio (Zacatecas).
6. Iker Torres Terrazas (Chihuahua).
7. Alan Alejandro López Grajales (Chiapas).
8. Luis Veudi Vivas Pérez (Quintana Roo).
9. Ángela María Flores Ruiz (Sinaloa).

Las 12 alumnas preseleccionadas para la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas fueron:

1. Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
2. Karla Rebeca Munguía Romero (Sinaloa).
3. Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
4. Megan Ixchel Monroy Rodríguez (Hidalgo).
5. Sandra Gabriela García Barraza (Sonora).
6. Andrea Escalona Contreras (Morelos).
7. Alexandra Valdepeñas Ramírez (Coahuila).
8. Cynthia Naely López Estrada (Guanajuato).
9. Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
10. Marcela Aguirre Valdez (Sinaloa).
11. María Fernanda López Tuyub (Yucatán).
12. Jimena Sofía Díaz Sánchez (Zacatecas).

Aunque la participación en el Concurso Nacional es individual, es importante destacar la labor que han llevado los estados de la República apoyando a sus concursantes. Con el propósito de reconocer este trabajo, presentamos el registro de los estados que obtuvieron los primeros 10 lugares en el Concurso Nacional de la 35^a OMM.

1. Ciudad de México.
2. Nuevo León.
3. Sinaloa.
4. Morelos.
5. Jalisco.
6. Oaxaca.
7. Guerrero.
8. Tamaulipas.
9. Aguascalientes.
10. Hidalgo.
10. Yucatán.

En esta ocasión, el premio a la Superación Académica fue ganado por Oaxaca. El segundo y tercer lugar de este premio lo ocuparon Guerrero y Baja California Sur, respectivamente.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del 35 Concurso Nacional de la OMM (Virtual). Los alumnos tuvieron dos sesiones de cuatro horas y media cada una para resolverlos.

Problema 1. Los números positivos y distintos a_1, a_2, a_3, son tres términos consecutivos de una progresión aritmética y, de la misma manera, los números positivos y distintos b_1, b_2, b_3 son tres términos consecutivos de una progresión aritmética. ¿Es posible usar tres segmentos con longitudes a_1, a_2, a_3 como bases y otros tres segmentos con longitudes b_1, b_2, b_3 como alturas (en algún orden), para construir tres rectángulos con la misma área?

(Problema sugerido por David Torres Flores).

Solución de Rogelio Guerrero Reyes. Se probará que no es posible. Con el fin de llegar a una contradicción, supongamos que sí es posible. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 < a_2 < a_3$ y $b_1 < b_2 < b_3$. Si el rectángulo de base a_1 tiene altura b_1 o b_2, digamos b_i, entonces su área es a_1b_i, pero entonces el rectángulo de altura b_3 tiene de base a a_2 o a_3, digamos a_j. Como $a_1 < a_j$ y $b_i < b_3$, entonces $a_1b_i < a_jb_3$, lo cual no es posible. Así, la base a_1 está con la altura b_3 y, análogamente, a_3 está con la altura b_1, por lo que la base a_2 debe estar con la altura b_2.
De esto tenemos que

$$a_1b_3 = a_2b_2 = a_3b_1. \tag{1}$$

Ahora, se sabe que $a_2 = a_1 + x$ y $a_3 = a_1 + 2x$ para algún $x > 0$, así como $b_2 = b_1 + y$ y $b_3 = b_1 + 2y$ para algún $y > 0$. Al sustituir en (1), obtenemos que

$$a_1(b_1 + 2y) = (a_1 + x)(b_1 + y) = (a_1 + 2x)b_1,$$

lo cual es equivalente a

$$a_1b_1 + 2a_1y = a_1b_1 + a_1y + b_1x + xy = a_1b_1 + 2b_1x$$

y, al restar a_1b_1, se llega a que

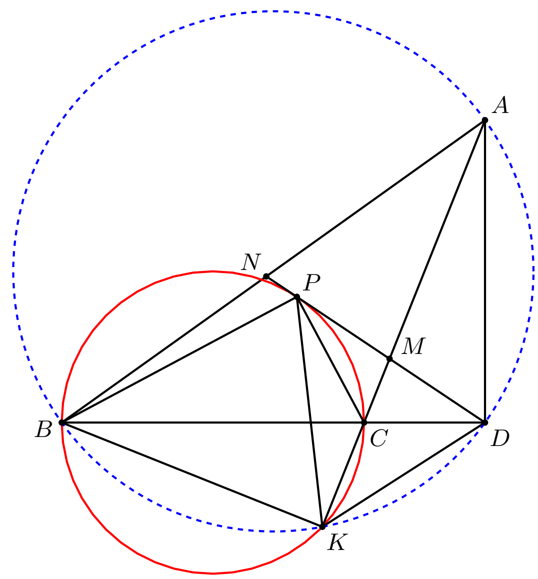
$$2a_1y = a_1y + b_1x + xy = 2b_1x. \tag{2}$$

De la cadena anterior de igualdades se tiene que $2a_1y = 2b_1x$, es decir, $a_1y = b_1x$. Así, al usar la primera igualdad de (2), se tendrá que $a_1y + b_1x = a_1y + b_1x + xy$, esto es, $xy = 0$, lo cual es imposible pues tanto x como y son positivos. Esta es la contradicción buscada y, por lo tanto, no es posible construir tales rectángulos.

Problema 2. Sea ABC un triángulo tal que $\angle ACB > 90^\circ$ y sea D el punto de la recta BC tal que AD es perpendicular a BC. Considera Γ la circunferencia de diámetro BC. Una recta que pasa por D es tangente a la circunferencia Γ en P, corta al lado AC en M (quedando M entre A y C) y corta al lado AB en N. Demuestra que M es punto medio de DP si y solo si N es punto medio de AB.

(Problema sugerido por Alexis Jonathan Dorantes Vázquez).

Solución de Omar Farid Astudillo Marbán. Empezamos notando que la condición $\angle ACB > 90^\circ$, implica que el punto D está sobre la recta BC más allá de C. Ahora, prolongamos la recta AC hasta que interseque a Γ en K, con $C \neq K$. Este punto existe, ya que de lo contrario, se tendría que AC es tangente a Γ y, como BC es diámetro, entonces BC sería perpendicular a AC, lo cual contradice que $\angle ACB > 90°$. Además, justo por el hecho de que $\angle ACB > 90°$, el punto K está en la extensión del lado AC más allá de C. Dado que BC es diámetro de Γ, se tiene que $\angle CKB = 90°$ pero, como $\angle AKB = \angle CKB = 90° = \angle ADB$, se tiene que el cuadrilátero $ABKD$ es cíclico.



Tenemos que M es punto medio de PD si y solo si $MP = MD$, si y solo si $MP^2 = MD^2$. Por potencia desde M a Γ, se tiene que $MP^2 = MC \cdot MK$ y, por consiguiente, $MD^2 = MC \cdot MK$. Luego, M es punto medio de PD si y solo si $\frac{MD}{MC} = \frac{MK}{MD}$. Esta última igualdad significa que los triángulos MCD y MDK son semejantes por el criterio de semejanza LAL. Así, tenemos que M es punto medio de PD si y solo si $\angle MDC = \angle MKD = \angle AKD = \angle ABD$, donde la última igualdad se debe a que $ABKD$ es cíclico. Por lo tanto, M es punto medio de PD si y solo si $\angle NBD = \angle ABD = \angle MDC = \angle NDB$. Como $\angle ADB = 90°$, concluimos que M es punto medio de PD si y solo si N es punto medio de AB (pues el punto medio de AB es la intersección de la mediatriz de BD con AB).

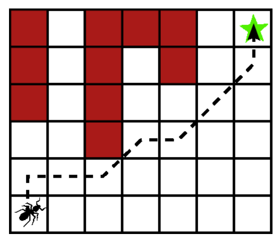
Problema 3. Sean $m, n \geq 2$ dos enteros. En una cuadrícula de $m \times n$, una hormiga empieza en el cuadrito inferior izquierdo y quiere caminar al cuadrito superior derecho. Cada paso que da la hormiga debe ser a un cuadrito adyacente, de acuerdo a las siguientes posibilidades: $\uparrow$, $\rightarrow$ y $\nearrow$. Sin embargo, un malvado mago ha dejado caer lava desde arriba y ha destruido algunos de los cuadritos, de forma tal que:

- Si un cuadrito está destruido, entonces todos los cuadritos superiores a él también están destruidos.
- El número de cuadritos destruidos es mayor o igual a 0.

- Quedan suficientes cuadritos sin destruir para que la hormiga pueda llegar a la meta.

Sea P el número de caminos de longitud par que puede seguir la hormiga. Sea I el número de caminos de longitud impar que puede seguir la hormiga. Encuentra los valores posibles de $P - I$.

Nota. La longitud de un camino es el número de pasos que da la hormiga. Por ejemplo, se muestra un posible camino de longitud 8 en la figura de 6×7 siguiente, en la que los cuadritos destruidos están sombreados y la meta está indicada con una estrella.



(Problema sugerido por Miguel Raggi Pérez y Gerardo Raggi Cárdenas).

Solución de Adrián Arturo García López. A cada cuadrito de la cuadrícula en el que no hay lava se le asigna el valor de $P - I$ que le corresponde, es decir, se cuenta la cantidad de caminos de longitud par y la cantidad de caminos de longitud par que se pueden hacer desde la posición inicial de la hormiga hasta ese cuadrito y se restan esas cantidades. Al cuadrito inicial de la hormiga se le asigna el valor de 1. Nótese que a los cuadritos de la fila inferior de la cuadrícula se les asignarán los valores de 1 y -1 alternadamente, así como a los cuadritos de la columna izquierda de la cuadrícula. Además, en la fila inferior de la cuadrícula, nótese que la suma de los números asignados a cualesquiera dos cuadritos adyacentes horizontales es igual a 0. En la figura de abajo se muestra cómo se asignarían los números para un tablero de 6×7 en el que la primera columna no tiene lava.

-1						
1						
-1						
1						
-1						
1	-1	1	-1	1	-1	1

Ahora, para cualquier cuadrito que no esté en la primera columna o en la última fila, nótese que este será el negativo de la suma de los números asignados a las casillas que están a la izquierda, abajo y en diagonal hacia la izquierda y abajo. En efecto, supongamos que los cuadritos tienen los números asignados como se muestran en la siguiente figura.

$P_1 - I_1$	$P_4 - I_4$
$P_2 - I_2$	$P_3 - I_3$

Así, se puede ver que $P_4 = I_1 + I_2 + I_3$ y que $I_4 = P_1 + P_2 + P_3$, pues de cada cuadrito se llega en un movimiento al cuadrito de arriba a la derecha. Entonces,

$$\begin{aligned} P_4 - I_4 &= (I_1 + I_2 + I_3) - (P_1 + P_2 + P_3) \\ &= -\left[(P_1 - I_1) + (P_2 - I_2) + (P_3 - I_3)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Luego, suponiendo que no hay lava en la cuadrícula, se probará que en cada fila los valores asignados en la cuadrícula se alternan entre 1 y -1, donde el primer valor asignado es el que se encuentra en la columna de la izquierda. Se puede probar por inducción sobre el número de filas en el que se encuentra (siendo la fila de abajo la primera fila). En la primera fila es claro que se cumple. De ahí, si en cierta fila se cumple esto, en la siguiente se pueden calcular los valores asignados a los cuadritos de izquierda a derecha usando (3). Sin embargo, se tendría que $(P_2 - I_2) + (P_3 - I_3) = 0$, por lo que (3) se convertiría en $P_4 - I_4 = -(P_1 - I_1)$, es decir, $(P_4 - I_4) + (P_1 - I_1) = 0$, lo cual completa la inducción. De aquí se concluye que, cuando no hay lava en la cuadrícula, el cuadrito de la esquina superior derecha cumple que $P - I$ es igual a 1 o -1, el cual depende de la paridad de m y n.

Por último, tomemos el caso en el que el tablero tiene lava. Sabemos que todas las filas que no contengan lava van a cumplir que los números asignados a cualesquiera dos cuadritos adyacentes horizontales sumarán 0. Fijémonos en la primera fila con lava. Entonces todos los cuadritos a la derecha del cuadrito con lava que esté más a la derecha en esa fila, tendrán como número asignado al 0, pues para calcular el número que se les asigna se ocupan los cuadritos abajo y en diagonal hacia abajo y a la izquierda, los cuales suman 0, mientras que el cuadrito de la izquierda tendrá lava o tendrá un 0. De aquí se tiene que toda esa fila tendrá únicamente 0's después del último cuadrito con lava y, por lo tanto, los cuadritos en las siguientes filas hacia arriba también tendrán como número asignado al 0. Como hay lava en algún cuadrito, por hipótesis también hay lava en los cuadritos arriba de él. En particular debe haber lava en la fila de arriba, lo cual implica que la esquina superior derecha tendrá un 0 como número asignado.

Por lo tanto, los posibles valores de $P - I$ son -1, 0 y 1.

Problema 4. Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno con $\angle BAC = 60°$ y ortocentro H. Sean ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a AB en B y, ω_c, la circunferencia que pasa por H y es tangente a AC en C.

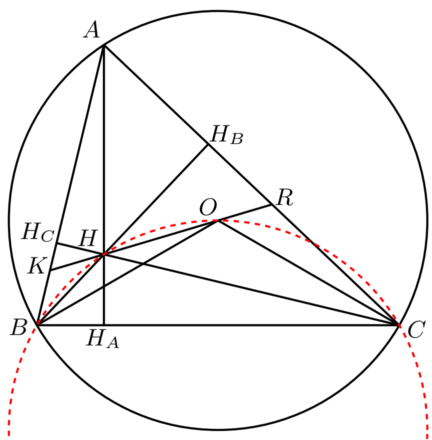
a) Prueba que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común.

b) Prueba que la recta que pasa por H y el circuncentro O del triángulo ABC, es una tangente común a ω_b y ω_c.

Nota: El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de sus tres alturas, mientras que el circuncentro de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por sus tres vértices.

(Problema sugerido por Maximiliano Sánchez Garza).

Solución de Karla Rebeca Munguía Romero. Sean K y R los puntos de intersección de la recta HO con AB y AC, respectivamente. Como O es circuncentro y $\angle BAC = 60°$, tenemos que $\angle BOC = 120°$.
Sean H_A, H_B y H_C los pies de las alturas en el triángulo ABC desde A, B y C, respectivamente. Como ABH_AH_B y CAH_CH_A son cíclicos, tenemos que $\angle H_BBC + \angle H_CCB = \angle H_AAC + \angle BAH_A = 60°$ y $\angle BHC = 120°$. Por lo tanto, $BHOC$ es cíclico.



Como $OB = OC$, resulta que $\angle OHC = \angle OBC = 30°$. De aquí se sigue que $\angle KHB = 180° - \angle BHC - \angle OHC = 30°$. De manera análoga, obtenemos que $\angle RHC = 30°$. Además, fijándonos en los triángulos ABH_B y ACH_C, vemos que $\angle ABH_B = 30°$ y $\angle ACH_C = 30°$. Esto implica que los triángulos KBH y RCH son isósceles.
Demostraremos que HO es tangente a ω_b por contradicción. Sea H' la segunda intersección de HO con ω_b. Por potencia de un punto, tenemos que $KB^2 = KH \cdot KH'$. Sin embargo, por ser el triángulo KBH isósceles, esto implica que $H = H'$. De manera análoga se demuestra que HO es tangente a ω_c en H, de donde ambos incisos se siguen de inmediato.

Problema 5. Para cada entero $n > 0$ con expansión decimal $\overline{a_1a_2\dots a_k}$ definimos $s(n)$ como sigue:

- Si k es par, $s(n) = \overline{a_1a_2} + \overline{a_3a_4} + \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$.
- Si k es impar, $s(n) = a_1 + \overline{a_2a_3} + \cdots + \overline{a_{k-1}a_k}$.

Por ejemplo, si $n = 123$, entonces $s(n) = 1 + 23 = 24$ y, si $n = 2021$, entonces $s(n) = 20 + 21 = 41$.
Decimos que n es *digital* si n es múltiplo de $s(n)$. Muestra que entre cualesquiera 198 enteros positivos consecutivos, todos ellos menores a 2000021, hay uno de ellos que es digital.

(Problema sugerido por Germán Puga Castillo).

Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero. Demostraremos que $99 \mid s(99k)$ para cada entero positivo k. Si $99k = \overline{a_1a_2\dots a_k}$ tiene una cantidad par de dígitos, entonces

$$s(99k) = 10(a_1 + a_3 + \cdots + a_{k-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_k).$$

En este caso, tenemos que $s(99k) \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod 9$ y $s(99k) \equiv -a_1 + a_2 - \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{11}$, lo cual implica que $s(99k) \equiv 0 \pmod{99}$.
Si $99k = \overline{a_1a_2\dots a_k}$ tiene una cantidad impar de dígitos, entonces

$$s(99k) = 10(a_2 + a_4 + \cdots + a_{k-1}) + (a_1 + a_3 + \cdots + a_k).$$

En este caso, tenemos que $s(99k) \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod 9$ y $s(99k) \equiv a_1 - a_2 + \cdots + a_k \equiv 0 \pmod{11}$, lo cual implica que $s(99k) \equiv 0 \pmod{99}$.
Notamos también que si $n \leq 9,999,999$, entonces $s(n) \leq 3 \cdot 99 + 9$. En particular, si $n < 2000021$ es múltiplo de 99, entonces $s(n) \in \{99, 2 \cdot 99, 3 \cdot 99\}$.
Entre 198 números enteros consecutivos, hay un múltiplo n de 198. Si $s(n) \neq 3 \cdot 99$, entonces $s(n) \mid n$. De otra forma, n ha de ser necesariamente igual a $1,999,998$, el cual también satisface $s(n) \mid n$. En cualquier caso, tenemos un número digital.

Problema 6. Determina todos los conjuntos no vacíos $C_1, C_2, C_3, \dots$ tales que cada uno de ellos tienen un número finito de elementos y todos sus elementos son enteros positivos, con la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros positivos m y n, la cantidad de enteros positivos en el conjunto C_m más la cantidad de enteros positivos en el conjunto C_n, es igual a la suma de los enteros positivos en el conjunto C_{m+n}.
Nota. Al denotar por $|C_k|$ la cantidad de elementos del conjunto C_k y por S_k a la suma de los elementos del conjunto C_k, la condición del problema es que para m, n enteros positivos, se cumple

$$|C_m| + |C_n| = S_{m+n}.$$

(Problema sugerido por José Alejandro Reyes González).

Primera solución. Sea a la diferencia $|C_2| - |C_1|$. Para cualquier entero $n \geq 2$, tenemos que $|C_1| + |C_n| = S_{n+1} = |C_2| + |C_{n-1}|$, por lo que $|C_n| - |C_{n-1}| =$

$|C_2| - |C_1| = a$ es constante. Por lo tanto, $|C_1|, |C_2|, |C_3|, \dots$ es una progresión aritmética con

$$|C_n| = a(n-1) + |C_1|,$$

para todo $n \geq 2$. Si $a < 0$, entonces la sucesión $|C_1|, |C_2|, |C_3|, \dots$ es estrictamente decreciente de números enteros positivos, lo cual no es posible. Por lo tanto, tenemos que $a \geq 0$. Supongamos que $a > 0$. Como $|C_2| + |C_2| = S_4 = 2(a + |C_1|)$ y $|C_4| = 3a + |C_1|$, tenemos que

$$S_4 \geq 1 + 2 + \cdots + (3a + |C_1| - 1) + (3a + |C_1|).$$

Luego,

$$2(a + |C_1|) \geq 1 + 2 + \cdots + (3a + |C_1| - 1) + (3a + |C_1|),$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} 0 &\geq 1 + 2 + \cdots + (3a + |C_1| - 2) + (3a + |C_1| - 1) + (3a + |C_1|) - 2(a + |C_1|) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (3a + |C_1| - 2) + (4a - 1) \\ &> 0, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Esto significa que $a = 0$ y, por consiguiente, $|C_n| = b$, para todo $n \geq 1$, donde b es una constante y $S_n = 2b$, para todo $n \geq 2$. Luego, para $n \geq 2$ tenemos C_n tiene b elementos (por las condiciones del problema $b > 0$) y, por lo tanto, $2b = S_n \geq 1 + 2 + \cdots + b = \frac{b(b+1)}{2}$. Esto se simplifica como $b \leq 3$.
Si $b = 1$, buscamos conjuntos C_n con 1 elemento tales que $S_n = 2$, por lo que la única solución es $|C_1| = 1$ y $\{2\} = C_2 = C_3 = \cdots$.
Si $b = 2$, buscamos conjuntos C_n con 2 elementos tales que $S_n = 4$. Como los dos elementos son distintos, la única solución es $|C_1| = 2$ y $\{1, 3\} = C_2 = C_3 = \cdots$.
Si $b = 3$, buscamos conjuntos C_n con 3 elementos tales que $S_n = 6$. Como los elementos son diferentes, la única solución es $|C_1| = 3$ y $\{1, 2, 3\} = C_2 = C_3 = \cdots$.

Segunda solución. Sea $S_i = \sum_{x \in C_i} x$, para $i = 2, 3, \dots$ La condición del problema es que para todos m, n enteros positivos, se tiene que

$$|C_m| + |C_n| = S_{m+n}.$$

Supongamos que $C_1, C_2, C_3, \dots$ es una sucesión que cumple la condición. Sea k el mínimo elemento del conjunto $L = \{|C_1|, |C_2|, |C_3|, \dots\}$, el cual existe porque L es un conjunto de enteros positivos, y sea C_j un conjunto tal que $|C_j| = k$.
Tenemos que $2j - 1 \geq 2 - 1 = 1$, $|C_1| \geq k$ y $|C_{2j-1}| \geq k$. Entonces,

$$2k = |C_j| + |C_j| = S_{2j} = |C_1| + |C_{2j-1}| \geq k + k,$$

de donde se cumple la igualdad. En particular, tenemos que $|C_1| = k$.
Como $|C_2| \geq k$, resulta que $S_2 \geq 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, lo cual implica que

$$2k = |C_1| + |C_1| = S_2 \geq \frac{k(k+1)}{2}$$

de donde $4 \geq k+1$, esto es, $3 \geq k$.
Consideremos los conjuntos $A_1 = \{2\}$, $A_2 = \{1, 3\}$ y $A_3 = \{1, 2, 3\}$. Notemos que $|A_k| = k$ para $k = 1, 2, 3$.

Lema. Si $S_i = 2k$, entonces $C_i = A_k$.

Demostración. Si $k = 1$, entonces C_i no puede tener más de un elemento o si no tendríamos $S_i \geq 1 + 2 > 2$. Entonces C_i tendrá solo un elemento que debe ser 2 para que $S_i = 2$.
Si $k = 2$, entonces C_i no puede tener más de dos elementos o si no tendríamos $S_i \geq 1+2+3 > 4$. Entonces C_i tendrá exactamente dos elementos y, como $1+3 = 2+2 = 4$ son las únicas maneras de sumar 4 con dos enteros positivos, $C_i = A_2$.
Si $k = 3$, entonces $S_i \geq 1+2+3$ y, como se da la igualdad, debemos tener exactamente $C_i = A_3$, lo cual termina la demostración del lema. $\square$

Ahora, demostraremos por inducción que $A_k = C_2 = C_3 = \cdots$.

En efecto, $S_2 = |C_1| + |C_1| = 2k$, de donde $C_2 = A_k$ por el lema anterior, lo que prueba la base de inducción. Para $n \geq 3$, supongamos que $C_{n-1} = A_k$, de donde $|C_{n-1}| = |A_k| = k$, luego $S_n = |C_1| + |C_{n-1}| = k + k = 2k$ por la hipótesis de inducción, de donde $C_n = A_k$ por el lema anterior. Así que los conjuntos que cumplen la condición deben cumplir que $|C_1| = k \leq 3$ y $A_k = C_2 = C_3 = \cdots$ y es fácil verificar que tales conjuntos satisfacen la condición del problema, por lo que son todas las soluciones.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2022

Del 6 al 12 de abril de 2022, se llevó a cabo la decimoprimera edición de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) de manera presencial en Hungría, después de dos años de haberse realizado de manera virtual. El equipo mexicano estuvo integrado por: Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México), Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México), Cynthia Naely López Estrada (Guanajuato) y Andrea Escalona Contreras (Morelos).

El equipo mexicano obtuvo excelentes resultados: Ana y Cynthia obtuvieron medallas de plata; Victoria y Andrea obtuvieron medallas de bronce. México obtuvo el decimoquinto lugar de 57 países participantes. La líder del equipo mexicano fue Myriam Hernández Ketchul y la tutora fue Nuria Sydykova.

Aunque este concurso es europeo, se invitan a países de otros continentes. México ha sido invitado desde 2014 y esta es la novena ocasión en que participa.

Usualmente la participación de las mujeres en las olimpiadas internacionales de matemáticas es de entre el 10 y el 20 por ciento del total de participantes. Conscientes de la necesidad de enriquecer la formación de las niñas en esta área del conocimiento, algunos países europeos como Inglaterra, Turquía y Luxemburgo, impulsaron la *European Girl's Mathematical Olympiad* (EGMO). En este concurso pueden competir mujeres de hasta 20 años de edad que hayan sido seleccionadas en las olimpiadas nacionales de cada país.

A continuación presentamos los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2022. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo acutángulo con $BC < AB$ y $BC < AC$. Considere los puntos P y Q en los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que $P \neq B$, $Q \neq C$ y $BQ = BC = CP$. Sean T el circuncentro del triángulo APQ, H el ortocentro del triángulo ABC y S el punto de intersección de las rectas BQ y CP. Pruebe que los puntos T, H y S están en una misma recta.

Problema 2. Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualquier pareja de enteros positivos a y b, se cumplen las siguientes dos condiciones:
(1) $f(ab) = f(a)f(b)$,
(2) al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a + b)$ son iguales.

Problema 3. Se dice que una sucesión infinita de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots$ es *húngara* si
(1) a_1 es un cuadrado perfecto, y
(2) para todo entero $n \geq 2$, a_n es el menor entero positivo tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$$

es un cuadrado perfecto.
Pruebe que si $a_1, a_2, \ldots$ es una sucesión húngara, entonces existe un entero positivo k tal que $a_n = a_k$ para todo entero $n \geq k$.

Problema 4. Para cada entero positivo $n \geq 2$, determine el mayor entero positivo N con la propiedad de que existen $N + 1$ números reales $a_0, a_1, \ldots, a_N$ tales que
(1) $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$, y
(2) $(a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} - a_{k+1}$ para todo $1 \leq k \leq N - 1$.

Problema 5. Dados n y k enteros positivos, sea $f(n, 2k)$ el número de formas en que un tablero de tamaño $n \times 2k$ puede ser completamente cubierto por nk fichas de dominó de tamaño 2×1 (por ejemplo, $f(2, 2) = 2$ y $f(3, 2) = 3$).
Encuentre todos los enteros positivos n tales que para todo entero positivo k, el número $f(n, 2k)$ es impar.

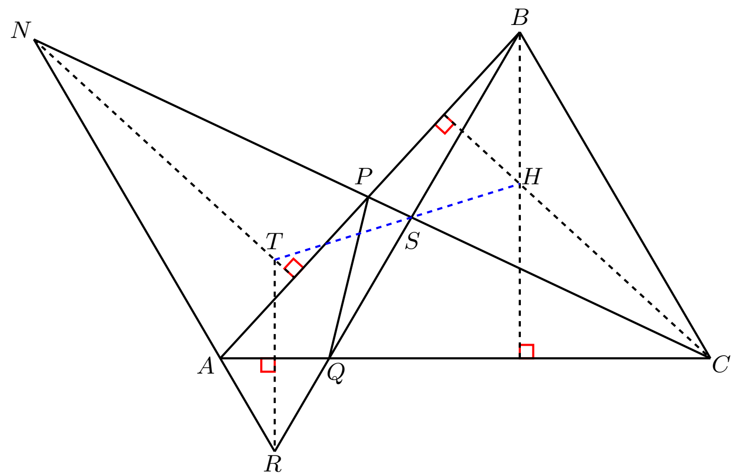
Problema 6. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico con circuncentro O. Sea X el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle ABC$; sea Y el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$; sea Z el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle BCD$ y $\angle CDA$; y sea W el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle CDA$ y $\angle DAB$. Sea P el punto de intersección de las rectas AC y BD. Suponga que los puntos O, P, X, Y, Z y W son distintos. Pruebe que O, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia si y solo si P, X, Y, Z y W están sobre una misma circunferencia.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2022

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas 2022.

Solución del problema 1. (Solución de Rosa Victoria Cantú Rodríguez). Como $BQ = BC$, el triángulo BQC es isósceles y, como H es ortocentro del triángulo ABC, entonces BH y QC son perpendiculares, lo cual indica que BH es mediatriz de QC y, por lo tanto, BH es bisectriz del ángulo $\angle SBC$. Análogamente, CH es bisectriz del ángulo $\angle BCS$ pues $BC = CP$ y CH es perpendicular a BP. Por lo tanto, H es el incentro del triángulo BCS. En particular, HS es bisectriz del ángulo $\angle BSC$.



Sean R la intersección de la recta BQ y la mediatriz de AQ, y N la intersección de la recta CP y la mediatriz de AP. Nótese que $RA = RQ$ y $\angle AQR = \angle CQB$. Esto significa que los triángulos AQR y CQB son semejantes y, por lo tanto, AR y BC son paralelas. De forma análoga, los triángulos ANP y BCP son semejantes, de donde tenemos que AN y BC son paralelas. Así, las rectas AR y AN son paralelas a BC que pasan por el mismo punto A. De esto concluimos que son la misma recta, es decir, que N, A y R son colineales.

Ahora, podemos ver que $\angle ART = \angle TRQ$ pues T está sobre la mediatriz de AQ, ya que AQ es un lado del triángulo AQP y T es su circuncentro. Esto significa que RT es la bisectriz del ángulo $\angle ARQ$. De forma similar, obtenemos que NT es bisectriz del ángulo $\angle ANP$. Como estas bisectrices son bisectrices internas del triángulo SRN y se intersecan en T, obtenemos que T es el incentro del triángulo SRN. En particular, TS es bisectriz del ángulo $\angle NSR$.

Finalmente, notemos que $\angle NSR = \angle BSC$ por ser opuestos por el vértice, y tanto TS como SH bisecan a estos ángulos. Por lo tanto, deben ser la misma recta las bisectrices de los ángulos $\angle NSR$ y $\angle CSB$. Así, queda demostrado que T, H y S están sobre una misma recta.

Solución del problema 2. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Primero, al tomar $b = 1$ obtenemos que $f(a \cdot 1) = f(a) \cdot f(1)$. Como $f(a) \neq 0$, llegamos a que $f(1) = 1$. Ahora, sea p el menor entero positivo tal que $f(p) \neq 1$. Si este no existe, entonces $f(n) = 1$ para todo entero positivo n, función que claramente cumple con las condiciones pues $f(ab) = f(a)f(b) = 1$ y $f(a) = f(b) = f(a+b) = 1$. Si este entero p existe, entonces debe ser primo. En efecto, si no lo fuese, existirían dos enteros positivos a y b tales que $ab = p$ y $1 < a, b < p$. Luego, por la minimalidad de p se tendría que $f(a) = f(b) = 1$, lo que implica que $f(p) = f(ab) = f(a)f(b) = 1$, que es una contradicción. Luego, p es primo.

Sea $f(p) = m > 1$. Probaremos que $f(n) = m^{\nu_p(n)}$, donde $\nu_p(n)$ es el entero no negativo k más grande tal que $p^k \mid n$. Se puede ver que esta función satisface las condiciones, pues es bien sabido que $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$ y $\nu_p(a+b) \geq \text{mín}\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, donde la igualdad en esta última desigualdad se da si $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$. De esto tenemos que

$$f(ab) = m^{\nu_p(ab)} = m^{\nu_p(a)+\nu_p(b)} = m^{\nu_p(a)} \cdot m^{\nu_p(b)} = f(a) \cdot f(b).$$

Además, si $\nu_p(a) = \nu_p(b)$, entonces $f(a) = f(b)$. Si $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, entonces

$$f(a+b) = m^{\nu_p(a+b)} = m^{\text{mín}\{\nu_p(a),\nu_p(b)\}} = \text{mín}\{f(a), f(b)\},$$

por lo que al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a+b)$ son iguales.

Sea $e \geq 2$ un entero positivo. Probaremos por inducción sobre e, que para todo entero positivo $n < p^e$, se cumple que $f(n) = m^{\nu_p(n)}$. El caso base es $e = 2$, donde buscamos probar para todo entero positivo $n < p^2$ que $f(n) = m$ si $p \mid n$ y $f(n) = 1$ si $p \nmid n$. Primero, si $p \mid n$, entonces $n = p\ell$ con $\ell < p$ (pues $n < p^2$), por lo que $f(n) = f(p)f(\ell) = m \cdot 1 = m$. Ahora, si p no divide a n, por el algoritmo de la división tenemos que $n = p\ell + r$ con $0 < \ell, r < p$ (pues $n < p^2$). Por la condición (2) del problema, dos de los números $f(r)$, $f(p\ell)$ $(= f(p)f(\ell) = m)$ y $f(n)$ son iguales. Si $f(n) = 1$, acabamos. Si no, $f(n) = m$, lo que significa que existe un primo q tal que $q \mid n$ y $f(q) \neq 1$. Como p es el mínimo entero positivo tal que $f(p) \neq 1$, entonces $q > p$ (no pueden ser iguales pues p no divide a n). Más aún, $q < p^2$ pues $n < p^2$. Sin pérdida de generalidad, q es el primo más pequeño que es mayor a p, menor que p^2 y que cumple que $f(q) \neq 1$. Luego $1 < q - p < q$ y ni p ni q dividen a $q - p$, por lo que todos sus factores primos son menores a q y diferentes a p. Por lo tanto, $f(q-p) = 1$. Así, por la condición (2) del problema, dos de los números $f(q-p)$ $(= 1)$, $f(p)$ y $f(q)$ son iguales, de donde se sigue que $f(p) = f(q) = m$. Sea $c = \left\lfloor \frac{p^2}{q} \right\rfloor$. Entonces, $0 < c < p$ (pues $p < q < p^2$), por lo que $f(c) = 1$. Como $0 < p^2 - cq < q$, obtenemos que $f\left(p^2 - cq\right) = 1$. Ahora $f\left(p^2 - cq\right) = 1$, $f\left(p^2\right) = m^2$ y $f(cq) = f(c)f(q) = m$ son todos distintos, lo cual contradice la condición (2) del problema. De aquí se sigue que tal primo q no puede existir y, por lo tanto, $f(n) = 1$ cuando $n < p^2$ y p no divide a n. Con esto queda completo el caso base.

Ahora procedemos con el paso inductivo. Sea $e \geq 2$ un entero positivo. Supongamos que el resultado es cierto para todo entero positivo $n < p^e$ y buscamos probarlo para todo entero positivo $n < p^{e+1}$. Tomamos $n \geq p^e$. Podemos escribir a n en base p, es decir, de la forma

$$n = a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_e$ son enteros no negativos entre 0 y $p - 1$, inclusive, con $a_e \geq 1$ pues $n \geq p^e$. Primero, si $a_0 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} f(n) &= f\left(a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p\right) = f(p) f\left(a_e p^{e-1} + \cdots + a_1\right) \\ &= p \cdot f\left(a_e p^{e-1} + \cdots + a_1\right), \end{aligned}$$

donde $a_e p^{e-1} + \cdots + a_1 < p^e$. De aquí usando la hipótesis de inducción se obtiene lo deseado. Así, tomamos $a_0 \neq 0$, es decir $1 \leq a_0 \leq p - 1$. Por la condición (2) del problema, dos de los números $f(a_0) = 1$, $f\left(a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p\right)$ y $f(n)$ son iguales. Como $f(p)$ divide a $f\left(a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p\right)$, entonces

$$f(n) \in \left\{1, f\left(a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p\right)\right\}. \tag{4}$$

Por otro lado, tenemos que $f\left(a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_0\right) = 1$ pues a_0 no es divisible por p y $a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_0 < p^e$, por lo que la hipótesis de inducción aplica. Además, $f\left(a_e p^e\right) = f(a_e) m^e = m^e$ pues $a_e < p$. Por la condición (2) del problema, dos de los números $f\left(a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_0\right) = 1$, $f\left(a_e p^e\right)$ $(= m^e)$ y $f(n)$ son iguales, por lo que

$$f(n) \in \{1, m^e\}. \tag{5}$$

Si $f(n) = 1$, acabamos. Así, supongamos que $f(n) \neq 1$. Luego, de (4) y (5) tenemos que $f(n) = m^e$ y también es igual a $f\left(a_e p^e + a_{e-1} p^{e-1} + \cdots + a_1 p\right)$. Comparando estos dos valores, tenemos que $m^{e-1} = f\left(a_e p^{e-1} + \cdots + a_1\right)$, donde $a_e p^{e-1} + \cdots + a_1 < p^e$. Por la hipótesis de inducción, se tiene que p^{e-1} divide a $a_e p^{e-1} + \cdots + a_1$, es decir, $a_{e-1} = a_{e-2} = \cdots = a_1 = 0$. Luego, $n = a_e p^e + a_0$, con $1 \leq a_0, a_e \leq p - 1$. Nótese que

$$n = a_e p^e + a_0 = \left(a_e p + a_0\right) + a_e\left(p^e - p\right),$$

donde $f(a_ep + a_0) = 1$ por el caso base, $f(n) > 1$ por suposición y

$$f(a_e(p^e - p)) = f(a_e)f(p)f\left(p^{e-1} - 1\right) = m$$

por hipótesis de inducción. Por la condición (2) del problema, dos de los números $f(a_ep + a_0) = 1$, $f(a_e(p^e - p))$ $(= m)$ y $f(n)$ son iguales. Así, $f(n) = m$. Sin embargo, anteriormente ya habíamos obtenido que $f(n) = m^e$. Luego $m^e = m$, es decir, $m^{e-1} = 1$, lo cual es imposible pues $m > 1$ y $e \geq 2$. Esta es la contradicción deseada y, por lo tanto, $f(n) = 1$ para todo $n < p^{e+1}$ tal que p no divide a n. Con esto se completa el paso inductivo y, con ello, la inducción.
Por lo tanto, las funciones que satisfacen las condiciones son las de la forma $f(n) = a^{\nu_q(n)}$, donde a es un entero positivo y q es un número primo (nótese que aquí también incluimos la función que es idénticamente igual a 1 tomando $a = 1$).

Solución del problema 3. Consideremos las siguientes sucesiones auxiliares:

$$\begin{aligned} b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \\ c_n &= b_1 + b_2 + \cdots + b_n. \end{aligned}$$

Observemos que $c_n - c_{n-1} = b_n$ y $b_n - b_{n-1} = a_n$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} c_n &= b_n + c_{n-1} = (a_n + b_{n-1}) + c_{n-1} = (a_n + (c_{n-1} - c_{n-2})) + c_{n-1} \\ &= 2c_{n-1} - c_{n-2} + a_n. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos también que $c_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$. Como a_n es el entero positivo más pequeño tal que

$$na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n = 2c_{n-1} - c_{n-2} + a_n$$

es un cuadrado, se sigue que $2c_{n-1} - c_{n-2} + a_n$ es el cuadrado más pequeño que es mayor que $2c_{n-1} - c_{n-2}$.

Afirmación. $\sqrt{c_n} - \sqrt{c_{n-1}} \leq \sqrt{c_{n-1}} - \sqrt{c_{n-2}}$.
Demostración. Denotemos $c_{n-1} = x^2$ y $c_{n-2} = (x-d)^2$. Entonces,

$$2c_{n-1} - c_{n-2} = 2x^2 - (x-d)^2 = x^2 + 2dx - d^2 = (x+d)^2 - 2d^2 < (x+d)^2.$$

De aquí se sigue que $c_n \leq (x+d)^2$. □

Como consecuencia de esta afirmación, tenemos que la sucesión de enteros positivos $\sqrt{c_n} - \sqrt{c_{n-1}}$ es decreciente y es eventualmente constante. Además, para n suficientemente grande, tenemos que $c_n = (x + nd)^2$ con x y d enteros fijos. Luego, $a_n = c_n - 2c_{n-1} + c_{n-2} = 2d^2$ lo que significa que la sucesión a_n es constante.

Solución alternativa. Escribamos $s_n^2 = S_n = a_1 + (a_1 + a_2) + \cdots + (a_1 + \cdots + a_n)$. Haciendo $b_n := a_1 + \cdots + a_n$, tenemos que $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ y, en particular, $S_{n+1} = S_n + b_{n+1}$. Ahora, estudiaremos la cantidad $S_n + b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_n$

de dos formas diferentes. Como b_{n+1} es el menor entero estrictamente mayor que b_n tal que $b_1 + \cdots + b_n + b_n$ es un cuadrado, necesariamente

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_n \geq (s_{n+1} - 1)^2.$$

Sin embargo, también tenemos que

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_n = S_n + b_n = 2S_n - S_{n-1}.$$

Combinando lo anterior, obtenemos que

$$s_n^2 \geq \frac{s_{n-1}^2 + (s_{n+1} - 1)^2}{2} > \left(\frac{s_{n-1} + s_{n+1} - 1}{2}\right)^2,$$

donde la última desigualdad es estricta ya que la sucesión s_n es estrictamente creciente. Ahora, tomando raíz cuadrada y notando que todos los términos de la sucesión s_n son enteros, obtenemos que $s_{n+1} - s_n \leq s_n - s_{n-1}$.
Ahora, consideremos la sucesión $d_n = s_{n+1} - s_n$. Como la sucesión s_k es estrictamente creciente, la sucesión d_k es positiva. Sin embargo, demostramos que $d_{n+1} \leq d_n$, lo que implica que la sucesión d_k es eventualmente constante. Luego, eventualmente tendremos que $s_n = bn + c$ y $S_n = (bn + c)^2$ para algunos números b y c. Por lo tanto,

$$a_{n+2} = S_{n+2} - 2S_{n+1} + S_n = (b(n+2)+c)^2 - 2(b(n+1)+c)^2 + (bn+c)^2 = 2b^2.$$

Solución del problema 4. (Solución de Andrea Escalona Contreras). Probaremos que el mayor valor posible de N es n. Para esto procedemos por inducción sobre n.
Primero, analizamos el caso $n = 2$. Para ver que $N = 2$ cumple, consideremos $(a_0, a_1, a_2) = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$. Ahora, con el fin de llegar a una contradicción, supongamos que existen al menos cuatro números reales a_0, a_1, a_2, a_3 que satisfacen las condiciones. Tenemos que $-\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = (a_1 + a_0)(a_1 + a_2) = a_0 - a_2$, lo cual es equivalente a $-a_1 - 2a_0 + a_2 = 0$, es decir, $-\left(-\frac{1}{2}\right) - a_0 + a_2 = 0$, de donde obtenemos que $a_0 - a_2 = \frac{1}{2}$. Así, $a_1 + a_2 = (a_0 + a_1) - (a_0 - a_2) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$. Por otro lado, también tenemos que $-(a_2 + a_3) = (a_2 + a_1)(a_2 + a_3) = a_1 - a_3$, lo cual implica que $a_1 + a_2 = 0$, que es una contradicción dado que $a_1 + a_2 = -1$. Por lo tanto, concluimos que el máximo valor posible de N es 2.
Ahora, sea $R \geq 2$ que cumple la hipótesis de inducción. Procedemos a analizar el caso $n = R + 1$. Aquí, es claro que $N = R + 1$ es posible pues, si $(b_0, b_1, \ldots, b_R)$ es una sucesión de valores que cumplen las hipótesis para R, entonces

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{R+1}) = \left(-\frac{1}{R+1} - b_0, b_0, b_1, \ldots, b_R\right)$$

satisface las condiciones para $R + 1$. En efecto, lo único que se tiene que verificar es que $(a_1 + a_0)(a_1 + a_2) = a_0 - a_2$. El lado izquierdo es igual a

$$\left(-\frac{1}{R+1}\right)(b_0 + b_1) = \left(-\frac{1}{R+1}\right)\left(-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R(R+1)},$$

mientras que el lado derecho es igual a

$$-\frac{1}{R+1} - b_0 - b_1 = -\frac{1}{R+1} + \frac{1}{R} = \frac{1}{R(R+1)},$$

como se quería.
Para ver que este es el máximo, sean a_0, a_1, $\ldots$, a_N números reales que cumplen las condiciones para $R+1$. Tenemos que $-\frac{1}{R+1}(a_1+a_2) = (a_1+a_0)(a_1+a_2) = a_0-a_2$, de donde se obtiene que $a_0 - a_2 = \frac{1}{R(R+1)}$. Por lo tanto,

$$a_1 + a_2 = (a_0 + a_1) - (a_0 - a_2) = -\frac{1}{R+1} - \frac{1}{R(R+1)} = -\frac{1}{R}.$$

Esto significa que los N valores $a_1, a_2, \ldots, a_N$, satisfacen las condiciones para $n = R$. De la hipótesis de inducción se sabe que $N - 1 \leq R$, es decir, $N \leq R + 1$, que es lo que se quería. Esto concluye la inducción y el problema.

Solución del problema 5. (Solución de Cynthia Naely López Estrada). Sean n y k enteros positivos. Procedemos a analizar la paridad de $f(n, 2k)$. Para esto, tomemos un tablero de $n \times 2k$ que fue cubierto completamente por nk fichas de dominó de 2×1. A este le asociamos el tablero que resulta de reflejar el que tenemos respecto a la mediatriz del lado que mide $2k$ (que lo tomaremos como el horizontal). Es decir, hacemos la asociación

$$\boxed{\text{R}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Я}}$$

Así, la cantidad de tableros que en esta asociación se asociarán a tableros diferentes será una cantidad par, por lo que no afecta a la paridad de $f(n, 2k)$ si no los contamos. Luego, consideramos únicamente tableros que son simétricos respecto a un eje de simetría vertical. Sin embargo, también podemos considerar la simetría respecto a un eje de simetría horizontal, esto es,

$$\boxed{\text{R}} \longleftrightarrow \boxed{\text{ʁ}}$$

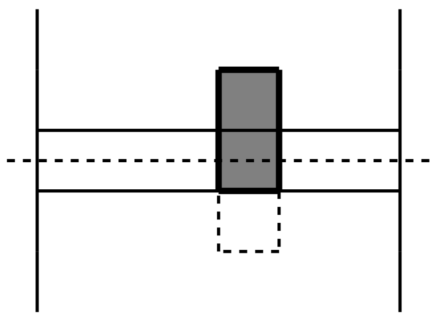
Así, los tableros que se asocien a tableros diferentes bajo la última asociación podemos ignorarlos, pues habrá una cantidad par de ellos. Luego, consideramos únicamente a los tableros que son simétricos respecto a un eje de simetría vertical y respecto a un eje de simetría horizontal, es decir, a los tableros de alguna de las siguiente formas:

R	Я
ʁ	ᴚ

R	Я
ʁ	ᴚ

donde sería el caso de la izquierda si n es par y sería el caso de la derecha si n es impar. Luego, la paridad de $f(n, 2k)$ es igual a la paridad de la cantidad de tableros de alguna de las formas anteriores.
Ahora, probaremos que los valores pares de n no cumplen con lo deseado. Sea n par y tomamos $k = \frac{n}{2}$. Luego, buscamos la paridad de $f(n, n)$, es decir, la paridad de la cantidad de tableros simétricos respecto a un eje vertical y respecto a un eje horizontal.

Sin embargo, en este caso el tablero es cuadrado (de $n \times n$), por lo que también se puede hacer una asociación por medio de rotación de $90°$ respecto al centro del tablero. Nótese que, si la ficha que cubre a la esquina inferior izquierda del tablero es horizontal, entonces al rotar $90°$ en cualquier dirección, la ficha en la nueva esquina inferior izquierda será vertical y viceversa. Además, no importa en qué dirección rotamos $90°$ pues, al ser el tablero simétrico respecto a un eje de simetría vertical y uno horizontal, entonces es simétrico respecto a la intersección de los ejes, que en este caso debe ser el centro del tablero. Luego, la rotación de $90°$ dará un tablero diferente en cualquier caso, lo cual implica que $f(n,n)$ será par, como se quería.
Así, nos concentramos en los valores impares de n. Luego, el eje de simetría horizontal debe de cortar por la mitad a la fila media del tablero. Entonces, si colocamos una ficha vertical de tal forma que cubra a una de las casillas en esa fila, el tablero ya no será simétrico respecto al eje de simetría horizontal, como se puede ver en la siguiente figura.



Luego, todas las fichas en esa fila deben de ser horizontales, es decir, debe de haber k fichas horizontales en esa fila. Esto significa que la fila de en medio parte el tablero en tres subtableros: dos de tamaño $\left(\frac{n-1}{2}\right) \times 2k$ y uno de tamaño $1 \times 2k$. Más aún, los tableros de tamaño $\left(\frac{n-1}{2}\right) \times 2k$ serán reflejados el uno del otro (por ser reflejados respecto al eje horizontal del tablero de $n \times 2k$) y cada uno de estos tableros será simétrico respecto al eje vertical. Por lo que se mencionó desde el principio (sobre reducir la búsqueda de tableros a tableros simétricos respecto al eje de simetría vertical), obtenemos que $f(n,2k)$ y $f\left(\frac{n-1}{2}, 2k\right)$ tendrán la misma paridad. Nótese que podemos llevar a cabo este proceso de nuevo si $\frac{n-1}{2}$ es impar y $\frac{n-1}{2} > 1$. Así, podemos hacer la operación $m \mapsto \frac{m-1}{2}$ siempre y cuando $\frac{n-1}{2}$ sea un número impar mayor que 1. Luego, al repetir la operación $m \mapsto \frac{m-1}{2}$ a n, nos detendremos cuando se obtenga que $\frac{m-1}{2}$ sea un número par o que $\frac{m-1}{2} = 1$.
Tomemos el primer caso en el que, en algún momento, se obtiene un número par, digamos 2ℓ. Luego, $f(n,2k)$ y $f(2\ell,2k)$ tienen la misma paridad para todo entero positivo k. Tomando $k=\ell$, tendremos que $f(n,2\ell)$ y $f(2\ell,2\ell)$ tendrán la misma paridad. Sin embargo, anteriormente se probó que $f(2\ell,2\ell)$ es par, lo cual implica que $f(n,2\ell)$ también es par. Por lo tanto, en este caso se obtiene que n no cumple con la condición deseada.
Ahora tomemos el segundo caso en el que eventualmente se llega a 1 con la operación descrita. Es claro que $f(1,2k)=1$ (que es impar) para todo entero positivo k (pues el tablero se puede llenar únicamente poniendo fichas horizontales y solo hay una manera

de hacerlo). Se sigue que $f(n, 2k)$ también será impar y esto se cumplirá para cualquier entero positivo k, que es justo lo que se desea. Por lo tanto, buscamos los enteros positivos n tales que al aplicar la operación descrita suficientes veces, eventualmente se llega a 1.
Nótese que, si se escribe a n en binario, la operación $m \mapsto \frac{m-1}{2}$ simplemente elimina el último dígito del número (que es igual a 1 pues n es impar). Si algún dígito de n en binario es igual a 0, digamos el dígito en la posición t de derecha a izquierda, entonces al iterar la operación descrita $t-1$ veces, se obtendrá el entero positivo n' que, en binario, termina en 0, es decir, n' será par, lo cual no puede suceder. Esto significa que n no puede tener dígitos 0 en su expansión binaria. Luego, $n = 11\ldots11_{(2)}$. Si n tiene d dígitos, entonces $n = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{d-1} = 2^d - 1$. Por lo tanto, los enteros positivos que satisfacen la condición buscada son los de la forma $2^d - 1$ con d un entero positivo.

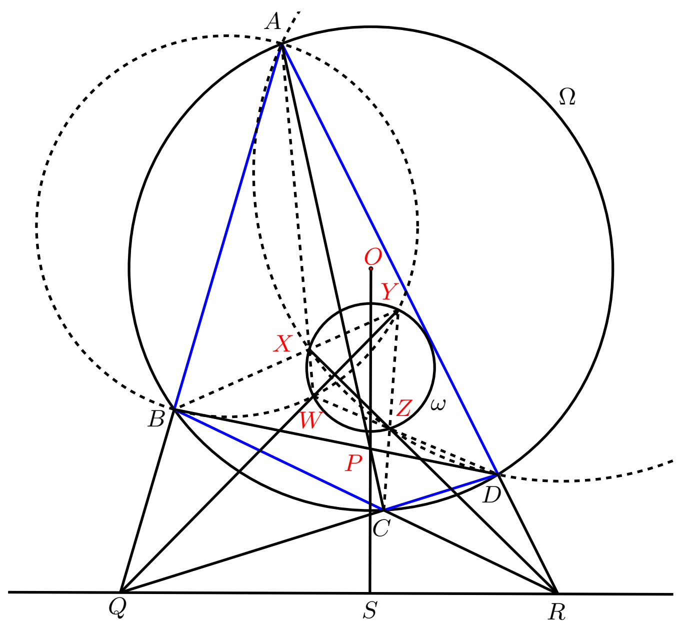
Solución del problema 6. Sea Ω el circuncírculo del cuadrilátero $ABCD$ y sea r su radio. Primero, notemos que los puntos X, Y, Z y W con concíclicos. En efecto, usando ángulos dirigidos (módulo 180°), tenemos que

$$\begin{aligned}\angle(XW, XY) + \angle(ZY, ZW) &= \angle(XA, XB) + \angle(ZC, ZD)\\ &= -\frac{\angle A + \angle B}{2} - \frac{\angle C + \angle D}{2} = 0,\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sostiene por el cíclico $ABCD$. Sea ω la circunferencia que pasa por estos cuatro puntos. El objetivo es probar que $O \in \omega$ si y solo si $P \in \omega$.
Primero descartamos el caso en el que $ABCD$ es un trapecio. Supongamos que $ABCD$ es un trapecio (que debe ser isósceles por ser cíclico) y, sin pérdida de generalidad, supongamos que AB es paralela a CD. Por simetría, los puntos X, Z, O y P están sobre el eje de simetría del trapecio (esto es, la mediatriz de los segmentos AB y CD, que coinciden pues $ABCD$ es un trapecio isósceles), por lo que son colineales. Por las condiciones del problema, estos cuatro puntos son distintos y X y Z están sobre ω, por lo que ni O ni P están sobre ω, lo que indica que el resultado es trivial.
De ahora en adelante asumiremos que $ABCD$ no tiene lados opuestos paralelos. Supongamos que las rectas AB y CD se cortan en Q y, que las rectas BC y AD, se cortan en R. Sin pérdida de generalidad, asumimos que B está entre A y Q, y que D está entre A y R. Probaremos que QR es el eje radical de las circunferencias Ω y ω.
El punto W es la intersección de las bisectrices de los ángulos $\angle A$ y $\angle D$, por lo que en el triángulo ADQ, el punto W es el incentro. Similarmente, BY y CY son las bisectrices externas de los ángulos $\angle QBC$ y $\angle BCQ$, por lo que en el triángulo BCQ, el punto Y es el excentro opuesto a Q. Así, tanto Y como W están sobre la bisectriz de $\angle DQA$. Como $\angle DQA = 180° - \angle D - \angle A = \angle B - \angle A$, tenemos que

$$\begin{aligned}\angle BYQ = \angle YBA - \angle YQB = \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle DQA}{2} = \frac{\angle B}{2} - \frac{1}{2}(\angle B - \angle A)\\ = \frac{\angle A}{2} = \angle BAW,\end{aligned}$$

por lo que los puntos A, B, Y y W son concíclicos y, por lo tanto, $QA \cdot QB = QY \cdot QW$. Así, Q tiene la misma potencia con respecto a Ω y ω. De forma similar se puede ver que R tiene la misma potencia con respecto a Ω y ω. Luego, el eje radical de las circunferencias Ω y ω es precisamente la recta QR.



Supongamos que las rectas OP y QR se cortan en el punto S. Por el teorema de Brocard en el cuadrilátero $ABCD$, tenemos que el triángulo PQR es autopolar respecto a Ω. Consecuentemente obtenemos que OP es perpendicular a QR y que los puntos P y S son inversos respecto a Ω, por lo que $OS \cdot OP = r^2$.
Nótese que P y O están dentro de Ω, por lo que la recta polar QR está completamente fuera, así que S es diferente de P y O. Más aún,

$$SO \cdot SP = OS \cdot (OS - OP) = OS^2 - OS \cdot OP = SO^2 - r^2,$$

por lo que $SO \cdot SP$ es igual a la potencia de S con respecto a Ω. Como S está sobre el eje radical QR, debe tener la misma potencia con respecto a ambas circunferencias. Por lo tanto, $SO \cdot SP$ es igual a la potencia de S con respecto a ω. De aquí, se sigue que $O \in \omega$ si y solo si $P \in \omega$.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez