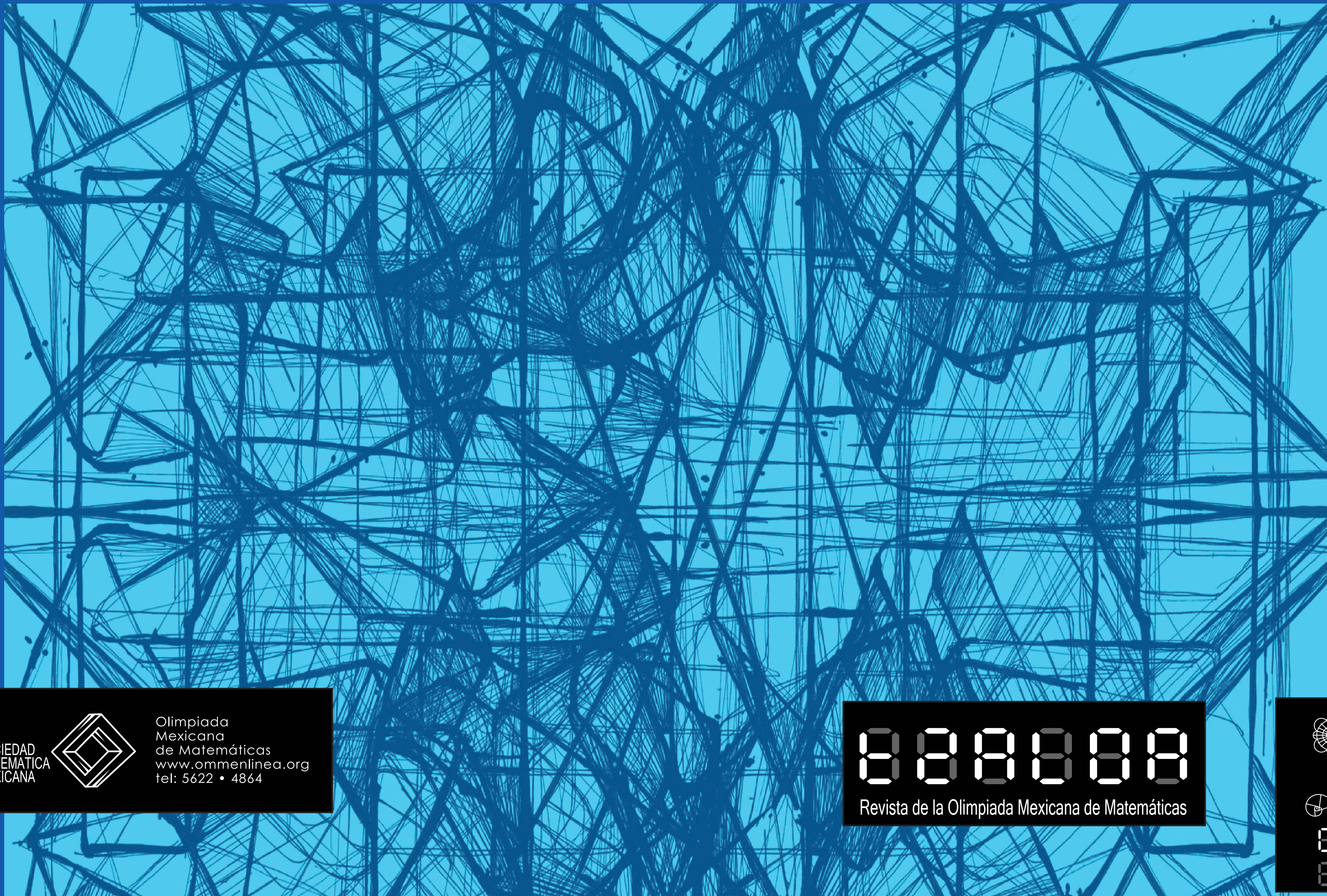


tzaloa

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

03

14

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 14, No. 3, agosto - octubre 2022, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo: 04-2022-101718033000-102, ISSN: en trámite.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 3

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Agosto de 2022

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2022, Número 3

El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, aprovechamos la ocasión para la bienvenida a Jordi Andrés Martínez Álvarez, quien se integra a este comité a partir de este número.

Pasando al contenido, destaca el artículo *La ecuación de Pell en las olimpiadas de matemáticas*, de José Hernández Santiago, integrante del equipo de entrenadores de la olimpiada de matemáticas del Estado de Guerrero. En él, José nos muestra algunos resultados centrales sobre el conjunto de soluciones de una ecuación de Pell, que en la

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

olimpiada de matemáticas es común que surjan este tipo de ecuaciones en el planteamiento de problemas. Estamos seguros que esta aportación será de utilidad para todos los lectores.

De especial interés para todos, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel I del Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2022 de forma virtual. También incluimos los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 1^a Olimpiada Femenil Mexicana de Matemáticas, realizada de forma virtual en el mes de febrero de 2022.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO) 2022, realizada en el mes de marzo de 2022.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2003. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2022-2023 y, para el 1° de julio de 2023, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

`http://www.ommenlinea.org`.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana del mes de noviembre de 2022. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2022 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2023) y a la XXXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2023).

De entre los concursantes nacidos en 2006 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2023).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2023.

La ecuación de Pell en las olimpiadas de matemáticas

Por José Hernández Santiago

1. Introducción: tres problemas

Consideremos los siguientes problemas:

Problema 1. *(USAMO 1986, problema 3). La media cuadrática de los números* a_1, $a_2, \ldots, a_k$ *es igual a*

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_k^2}{k}}.$$

¿Existe un número entero positivo $k > 1$ *tal que la media cuadrática de los primeros* k *números enteros positivos sea igual a un número entero?*

Problema 2. *En una maratón reciente en Alfagonia*[2]*, todos los corredores fueron numerados con números enteros consecutivos comenzando con el* 1.
Uno de los participantes observó que la suma de los números de todos los corredores cuyos números eran menores al suyo era igual a la suma de los números de los corredores cuyos números eran mayores que el de él.
Si había más de 100 *corredores pero menos de* 1000*, ¿puede decir cuál era el número del corredor que contaba y cuántos otros corredores participaron en la maratón?*

Problema 3. *(B. J. Venkatachala;* Amer. Math. Monthly*, 2001, p. 469). Halle todos los números enteros positivos* Q *y* u *tales que* $3^Q = 2u^2 + 1$.

[2]Este problema proviene del libro *Las nueve cifras y el cambiante cero* del Prof. Bernardo Recamán Santos (hay varias ediciones de ese texto): se trata de una variante de uno planteado por Henry Dudeney (1857-1930) en *Strand Magazine* en 1914. El problema es célebre pues hay una anécdota de cómo Prasanta Chandra Mahalanobis (1873-1972) lo planteó al genio matemático hindú Srinivasa Ramanujan (1887-1920) en una ocasión y cómo éste rápidamente lo resolvió mientras preparaba la cena para ambos.

Por inconexos que estos problemas puedan parecer, al trabajar en ellos se aprecia que los tres pueden vincularse con la determinación del conjunto de pares ordenados $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen una ecuación de la forma

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{1}$$

donde d es un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto[3]. A una ecuación de esa forma se le conoce como[4] *ecuación de Fermat-Pell* o simplemente *ecuación de Pell* y al conjunto de pares ordenados $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que la satisfacen se le denomina el *conjunto de soluciones de la ecuación*. El **objetivo principal** en este artículo es discutir los resultados centrales sobre el conjunto de soluciones de las ecuaciones de Pell; una vez expuestos tales resultados, la idea es ilustrar cómo es que ellos permiten establecer problemas como los planteados arriba y varios más.

A fin de abundar en lo mencionado al inicio del párrafo previo, analicemos el Problema 1. Este problema solicita determinar si existen números enteros positivos k y N, con $k > 1$, tales que

$$\sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + k^2}{k}} = N. \tag{2}$$

Al aplicar la conocida fórmula para sumar los cuadrados de los primeros números enteros positivos y simplificar lo así obtenido tenemos que la ecuación en (2) puede reescribirse como

$$\frac{(k+1)(2k+1)}{6} = N^2$$

o bien como $2k^2 + 3k + 1 = 6N^2$. Al multiplicar por 2 ambos lados de la ecuación anterior se llega a

$$\left(2k + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = 12N^2$$

[3] Algunas aclaraciones sobre la terminología y la notación: con $\mathbb{Z}^+$ denotamos al conjunto de los números enteros positivos; $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el conjunto conformado por todos los pares ordenados (x, y) en los que tanto x como y son números enteros positivos. En un par ordenado (x, y), al número x se le conoce como *abscisa* y al número y se le conoce como *ordenada*. Por último, con *cuadrado perfecto* nos referimos a un número que es el cuadrado de un número entero.

[4] Aunque las frases "ecuación de Fermat-Pell" o "ecuación de Pell" están muy establecidas en la literatura ello no significa que los teoremas básicos sobre la ecuación fueron establecidos por Pierre de Fermat (1601-1665) o por John Pell (1611-1685). El apellido de Pierre de Fermat figura ahí porque hay evidencia de que él había resuelto algunos casos específicos de la ecuación y porque, en alguna de sus cartas, él dejó entrever que ya sabía que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ tiene una infinidad de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ (cuando d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto); sin embargo, Fermat no explicó su demostración de esto último en lado alguno. El apellido de John Pell entró a escena por una atribución errónea que hizo Leonhard Euler (1707-1783) al escribir sobre un método de William Brouncker (1620-1684) para resolver tales ecuaciones. La primera persona en demostrar que una ecuación de Pell siempre tiene soluciones en números enteros positivos fue Joseph Louis Lagrange (1736-1813). En el artículo nosotros no seguimos el enfoque de Lagrange sino el tratamiento de Richard Dedekind (1831-1916) del enfoque introducido por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Para más detalles sobre la peculiar historia de la ecuación de Pell se puede consultar [11, pp. 92-98, 173-174 y 314-315].

o, equivalentemente, a

$$(4k+3)^2 - 48N^2 = 1. \tag{3}$$

Así pues, el problema original se ha conectado con la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1. \tag{4}$$

Esta ecuación tiene al menos una solución en números enteros positivos $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$: aquella en la que $\mathcal{X} = 7$ y $\mathcal{Y} = 1$ y la cual se relaciona con la solución $(k = 1, N = 1)$ de (3). En este momento surgen de modo natural dos interrogantes:

A) ¿Hay otras soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (4)?

B) ¿Cada solución de (4) da lugar a una solución de (3)?

Es evidente que una respuesta afirmativa a ambas preguntas produciría una respuesta afirmativa al problema que se está analizando. En la Sección 2 del artículo discutiremos la respuesta a la pregunta en A para la ecuación general de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ (donde d es un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto); en la Sección 3 explicaremos cómo aplicar esa información para responder a la pregunta B (y concluir con ello la solución del Problema 1).

Consideremos ahora el Problema 2. Denotemos con y al número del corredor que observó las sumas de los números de los otros corredores y denotemos con T al total de corredores en la maratón. Del planteamiento del problema se sigue que y y T satisfacen

$$1 + 2 + \cdots + (y-1) = (1 + 2 + \cdots + T) - (1 + 2 + \cdots + y). \tag{5}$$

Después de calcular las sumas y simplificar, la ecuación en el renglón anterior se transforma en $(y-1)y + y(y+1) = T(T+1)$ o bien en

$$\begin{aligned} T(T+1) - 2y^2 &= 0, \\ 4T^2 + 4T - 8y^2 &= 0, \\ (2T+1)^2 - 8y^2 &= 1. \end{aligned} \tag{6}$$

De (6) es evidente la conexión del problema con la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$. En la Sección 3 veremos cómo la teoría de la ecuación de Pell nos permite generar soluciones para (6) a partir de la solución $(\mathcal{X} = 3, \mathcal{Y} = 1)$ de $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$.

En el análisis del Problema 3 también puede introducirse una ecuación de Pell. No obstante, para obtener la conclusión en ese caso, aparte de la teoría en la Sección 2 del artículo, recurriremos a algunas ideas que discutiremos en la Sección 4: es por ello que relegaremos la resolución de este problema a una de las subsecciones de esa sección.

Cabe recalcar que, en nuestro artículo, el punto medular no es que los problemas considerados solamente se pueden resolver cuando se sabe de la ecuación de Pell: el punto es más bien que la ecuación de Pell provee un marco común dentro del cual podemos englobar y sistemáticamente abordar una buena cantidad de problemas de teoría de números.

2. Dos teoremas

Una ecuación de Pell es una ecuación de la forma

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{7}$$

donde d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. El problema básico consiste en determinar todos los pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen (7). Son dos los *hechos* que todo olímpico debe conocer sobre la ecuación de Pell:

- Que toda ecuación de Pell tiene una *solución fundamental* (o *mínima*).
- Que toda ecuación de Pell tiene una infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ y que todas ellas se pueden obtener al calcular *potencias* de la solución fundamental.

Lo que haremos a continuación es demostrar ambas afirmaciones. La factorización $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = \left(\mathcal{X} - \mathcal{Y}\sqrt{d}\right)\left(\mathcal{X} + \mathcal{Y}\sqrt{d}\right)$ indica que para ubicar las soluciones de (7) tiene sentido estudiar el conjunto $\left\{\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{Y}} - \sqrt{d} \colon (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+\right\}$ o, dicho de otra forma, las aproximaciones a $\sqrt{d}$ mediante números racionales. El primer resultado de la sección es un caso especial de un teorema de Peter Gustav Lejeune Dirichlet al que se le conoce como *teorema de aproximación diofántica de Dirichlet* (en caso de no haberlo hecho aún, ver la nota al pie no. 4). Fue en esas investigaciones de Dirichlet que surgieron unas de las primeras aplicaciones de lo que ahora llamamos **el principio de las casillas**; a ello se debe que el principio suela atribuirse a ese gran matemático–algunos autores incluso le denominan *el principio de las cajas de Dirichlet* (ver, por ejemplo, [2, p. 59], [8, p. 1] o [12, p. 80])–pero la legitimidad de tal atribución está en duda en la actualidad (cf. [6]).

Lema 1. *Sean d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto y N un número entero positivo. Existen $x, y \in \mathbb{Z}^+$ tales que*

$$\left|x - y\sqrt{d}\right| < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{y} \tag{8}$$

Demostración. Para cada $j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$, sea $a_j = j\sqrt{d} - \lfloor j\sqrt{d} \rfloor$ (esto es, a_j es la parte fraccionaria del número $j\sqrt{d}$). Puesto que d no es un cuadrado perfecto, para cada $a_j \in \{1, 2, \ldots, N+1\}$ se cumple que $a_j \in (0, 1)$; se observa además que en la sucesión $a_1, a_2, \ldots, a_{N+1}$ no hay números repetidos[5]. Consideremos ahora la

[5] Si $a_i = a_j$ entonces $\sqrt{d} = \frac{a}{b}$ para algunos números enteros positivos a y b tales que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. La sugerencia universal en aritmética (ver [3, p. 42] o [7, Teorema 6]) garantiza en tal caso que $ax + by = 1$ para algunos números enteros x y y. Elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad anterior se obtiene que

$$1 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = db^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 = b(dbx^2 + 2axy + by^2);$$

de esto se sigue que $b \mid 1$ y, consiguientemente, que $b = 1$. Así pues, $d = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = a^2$, *quod est absurdum.*

partición del intervalo $(0,1]$ dada por los intervalos

$$\left(0,\frac{1}{N}\right],\left(\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right],\left(\frac{2}{N},\frac{3}{N}\right],\ldots,\left(\frac{N-1}{N},1\right]:$$

Por el principio de las casillas, existen $m,n\in\{1,2,\ldots,N+1\}$, con $m>n$, tales que

$$a_m,a_n\in\left(\frac{\ell-1}{N},\frac{\ell}{N}\right)$$

para algún $\ell\in\{1,2,\ldots,N\}$. De esto se sigue que $|a_n-a_m|<\frac{1}{N}$, lo cual es equivalente a

$$\left|(n\sqrt{d}-\lfloor n\sqrt{d}\rfloor)-(m\sqrt{d}-\lfloor m\sqrt{d}\rfloor)\right|<\frac{1}{N},$$

$$\left|(\lfloor m\sqrt{d}\rfloor-\lfloor n\sqrt{d}\rfloor)-(m-n)\sqrt{d}\right|<\frac{1}{N}. \tag{9}$$

Haciendo $x=\lfloor m\sqrt{d}\rfloor-\lfloor n\sqrt{d}\rfloor$ y $y=m-n$ se consigue lo deseado pues de esa manera (9) se puede reescribir como

$$|x-y\sqrt{d}|<\frac{1}{N};$$

además, por la información que se tiene sobre m y n se garantiza que x es un número entero positivo y que y es un número entero positivo menor o igual que N. □

Lema 2. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Existe una infinidad de pares ordenados $(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ tales que*

$$\left|x-y\sqrt{d}\right|<\frac{1}{y}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{S}=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+ : |x-y\sqrt{d}|<\frac{1}{y}\right\}$. Supongamos que $\mathcal{S}$ es finito y denotemos con $\mathfrak{m}$ al elemento mínimo del conjunto $\left\{|x-y\sqrt{d}| : (x,y)\in\mathcal{S}\right\}$: este número $\mathfrak{m}$ está bien definido y es positivo. Sea N un número entero positivo tal que $\frac{1}{N}\le\mathfrak{m}$. Por el lema 1, existe $(x_0,y_0)\in\mathbb{Z}^+\times\mathbb{Z}^+$ tal que

$$\left|x_0-y_0\sqrt{d}\right|<\frac{1}{N}\le\frac{1}{y_0}.$$

De la desigualdad previa se sigue que $(x_0,y_0)\in\mathcal{S}$. Contemplando esto y la minimalidad de $\mathfrak{m}$ se llega a que

$$\mathfrak{m}\le|x_0-y_0\sqrt{d}|<\frac{1}{N}\le\mathfrak{m}$$

lo cual es un absurdo y la demostración termina. □

Viene ahora el primer teorema del artículo: la demostración inicia con la observación de que, cuando d es un entero positivo que no es un cuadrado perfecto, la expresión $|x^2 - dy^2|$ es igual a un mismo número entero para una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Teorema 1. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. La ecuación de Pell*

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{10}$$

admite soluciones en $\mathbb{Z}^+$: es decir, existen $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que $x^2 - dy^2 = 1$.

Demostración. Por el lema anterior sabemos que hay una infinidad de pares ordenados en el conjunto $\mathcal{S} = \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ : |x - y\sqrt{d}| < \frac{1}{y}\right\}$. Para cada par ordenado (x, y) en $\mathcal{S}$ se cumple que

$$\left|x + y\sqrt{d}\right| = \left|(x - y\sqrt{d}) + 2y\sqrt{d}\right| \leq \left|x - y\sqrt{d}\right| + 2y\sqrt{d} < \frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}$$

y que

$$\begin{aligned}\left|x^2 - dy^2\right| &= \left|x - y\sqrt{d}\right| \left|x + y\sqrt{d}\right| \\ &< \frac{1}{y}\left(\frac{1}{y} + 2y\sqrt{d}\right) \\ &= \frac{1}{y^2} + 2\sqrt{d} \\ &\leq 1 + 2\sqrt{d}.\end{aligned}$$

Puesto que hay una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathcal{S}$, existe un número entero $k \neq 0$ (y de valor absoluto menor o igual que $1 + 2\sqrt{d}$) tal que la igualdad

$$x^2 - dy^2 = k \tag{11}$$

vale para una infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$: lo que haremos a continuación es **construir** una solución–en enteros positivos–para (10) con ayuda de (11). Entre la infinidad de pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen (11), es posible elegir dos pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2), distintos, tales que

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{|k|} \quad \text{y} \quad y_1 \equiv y_2 \pmod{|k|}. \tag{12}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}k^2 &= (x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1^2x_2^2 + d^2y_1^2y_2^2) - d(x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2) \\ &= (x_1x_2 - dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 - x_2y_1)^2.\end{aligned} \tag{13}$$

En vista de (12) tenemos que $x_1x_2 - dy_1y_2 \equiv x_2^2 - dy_2^2 \pmod{|k|}$ y que $x_1y_2 - x_2y_1 \equiv x_2y_2 - x_2y_2 \pmod{|k|}$; estas congruencias indican que las dos expresiones que aparecen entre paréntesis en (13) son divisibles por $|k|$ y que esa igualdad se puede reescribir como

$$1 = \left(\frac{x_1x_2 - dy_1y_2}{|k|}\right)^2 - d\left(\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{|k|}\right)^2.$$

Para garantizar la existencia de una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (10) a partir de esta última igualdad, resta verificar que $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. Hacemos esto por reducción al absurdo.
Si $x_1y_2 = x_2y_1$, entonces de (13) se desprende que $x_1x_2 - dy_1y_2 = \pm k$. Surgen dos casos:

1) Si $x_1x_2 - dy_1y_2 = k$, entonces $(x_1y_2)x_2 - dy_1y_2^2 = ky_2$ y, en consecuencia, $(x_2y_1)x_2 - dy_1y_2^2 = ky_2$ lo cual implica que $y_1(x_2^2 - dy_2^2) = ky_2$; apelando a la igualdad $x_2^2 - dy_2^2 = k$ se obtiene que $y_1 = y_2$ y $x_1 = x_2$, lo que entra en conflicto con el hecho de que los pares ordenados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son distintos.

2) Si $x_1x_2 - dy_1y_2 = -k$, entonces $(x_1y_2)x_2 - dy_1y_2^2 = -ky_2$ y, en consecuencia, $(x_2y_1)x_2 - dy_1y_2^2 = -ky_2$ lo cual implica que $y_1(x_2^2 - dy_2^2) = -ky_2$; recurriendo a la igualdad $x_2^2 - dy_2^2 = k$ se llega a que $y_1 = -y_2$, lo que también es un absurdo (pues $-y_2$ es un número negativo).

$\square$

Podemos precisar ahora la noción de *solución fundamental* (o *mínima*) de la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1.$$

La *solución fundamental* de esta ecuación es el par ordenado $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, **con la menor abscisa posible**, tal que $x^2 - dy^2 = 1$. Notemos que si (x, y) es la solución fundamental de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es otra solución de esa misma ecuación entonces $y \leq \mathbf{y}$ y $x + y\sqrt{d} \leq \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$. Lo muy relevante de la solución fundamental de una ecuación de Pell es que con ayuda de ella se determinan el resto de soluciones de la misma.

Teorema 2. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Supongamos que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación de Pell*

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1. \tag{14}$$

Si $r \in \mathbb{Z}^+$ y $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el par ordenado que se determina mediante la igualdad

$$(x + y\sqrt{d})^r = u + v\sqrt{d}, \tag{15}$$

entonces

$$u^2 - dv^2 = 1.$$

Recíprocamente, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de (14) entonces

$$u + v\sqrt{d} = (x + y\sqrt{d})^r$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$.

Antes de ir a la demostración de este teorema, es necesario hacer algunas precisiones sobre la manera en que funciona (15). Si $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(x + y\sqrt{d})^r$ siempre se puede llevar a la forma $A + B\sqrt{d}$ para algunos números enteros A y B; además, dado que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, hay una única representación de $(x + y\sqrt{d})^r$ en esa forma.
Consideremos, a guisa de ejemplo, el caso de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$. La solución fundamental de esta ecuación es $(x = 3, y = 2)$. De acuerdo con la primera parte del teorema 2, al calcular potencias de $3 + 2\sqrt{2}$ se consiguen otras soluciones de $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$: por ejemplo, al tomar el cuadrado de $3 + 2\sqrt{2}$, se llega a que

$$\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 3^2 + 2\,(3)\left(2\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

lo que dice que $(x_2 = 17, y_2 = 12)$ es otra solución de $\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{Y}^2 = 1$. Al tomar el cubo de $3 + 2\sqrt{2}$ se obtiene que $(x_3 = 99, y_3 = 70)$ es otra solución de la ecuación pues $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3 = 99 + 70\sqrt{2}$; al desarrollar $\left(3 + 2\sqrt{2}\right)^4$ se obtiene la solución $(x_4, y_4) = (577, 408)$ y así sucesivamente...
Pasando a otro orden de ideas, denotemos con $\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]$ al conjunto $\{u+v\sqrt{d}\colon u, v \in \mathbb{Z}\}$ y consideremos la función $\mathrm{N}\colon \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbb{Z}$ definida por la regla $\mathrm{N}\left(u + v\sqrt{d}\right) = u^2 - dv^2$. Esta función N es completamente multiplicativa: es decir, para cualesquiera enteros u_1, u_2, v_1 y v_2 se cumple que

$$\mathrm{N}\left(\left(u_1 + v_1\sqrt{d}\right)\left(u_2 + v_2\sqrt{d}\right)\right) = \mathrm{N}\left(u_1 + v_1\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(u_2 + v_2\sqrt{d}\right).$$

La verificación de esta propiedad es sencilla y la dejamos como ejercicio para el lector. En varios momentos de la demostración del teorema recurriremos a la función N para determinar si un par ordenado $(U, V) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$: la clave a tener en mente aquí es que (U, V) es solución de esa ecuación si y solo si $\mathrm{N}\left(U + V\sqrt{d}\right) = 1$.

Demostración del Teorema 2. Lo primero que hay que demostrar es que si $r \in \mathbb{Z}^+$ y $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es el par ordenado que se determina por

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = u + v\sqrt{d},$$

entonces $u^2 - dv^2 = 1$. Aplicando la función N en ambos lados de esta igualdad se obtiene que

$$u^2 - dv^2 = \mathrm{N}\left(u + v\sqrt{d}\right) = \left(\mathrm{N}\left(x + y\sqrt{d}\right)\right)^r = \left(x^2 - dy^2\right)^r; \tag{16}$$

al ser (x, y) la solución fundamental de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, de (16) se concluye que $u^2 - dv^2 = 1$.
Vamos a demostrar ahora que, si $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, entonces

$$u + v\sqrt{d} = \left(x + y\sqrt{d}\right)^r$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^{+}$. Supongamos que $u+v\sqrt{d}$ no es igual a una potencia de $x+y\sqrt{d}$ (de exponente entero y positivo). Si R es el mayor número entero positivo tal que $\left(x+y\sqrt{d}\right)^{R} < u+v\sqrt{d}$, entonces

$$\left(x+y\sqrt{d}\right)^{R} < u+v\sqrt{d} < \left(x+y\sqrt{d}\right)^{R+1},$$

de lo cual se sigue que

$$1 < \frac{u+v\sqrt{d}}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^{R}} < x+y\sqrt{d}. \tag{17}$$

Dado que

$$\left(x-y\sqrt{d}\right)^{R} = C+D\sqrt{d}$$

para algunos números enteros C y D y además

$$\begin{aligned}
\frac{u+v\sqrt{d}}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^{R}} &= \frac{\left(u+v\sqrt{d}\right)}{\left(x+y\sqrt{d}\right)^{R}} \cdot \frac{\left(x-y\sqrt{d}\right)^{R}}{\left(x-y\sqrt{d}\right)^{R}} \\
&= \frac{\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right)}{\left(x^{2}-dy^{2}\right)^{R}} \\
&= \left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right) \qquad (18) \\
&= \left(uC+dvD\right)+\left(uD+vC\right)\sqrt{d}, \qquad (19)
\end{aligned}$$

al hacer $\mathbf{x} = uC+dvD$ y $\mathbf{y} = uD+vC$, podemos reescribir (17) como

$$1 < \mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d} < x+y\sqrt{d}. \tag{20}$$

Afirmamos que $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es solución de la ecuación $\mathcal{X}^{2}-d\mathcal{Y}^{2}=1$ y que tanto $\mathbf{x}$ como $\mathbf{y}$ son números enteros positivos. La primera parte de esta afirmación la establecemos recurriendo a (18), (19) y a la multiplicatividad de la función N:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{2}-d\mathbf{y}^{2} &= \mathrm{N}\left(\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}\right) \\
&= \mathrm{N}\left(\left(u+v\sqrt{d}\right)\left(C+D\sqrt{d}\right)\right) \\
&= \mathrm{N}\left(u+v\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(C+D\sqrt{d}\right) \\
&= \left(u^{2}-dv^{2}\right)\left(\mathrm{N}\left(x-y\sqrt{d}\right)\right)^{R} \\
&= \left(u^{2}-dv^{2}\right)\left(x^{2}-dy^{2}\right)^{R} \\
&= 1. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Para determinar el signo de $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, empezamos por notar que (20) y (21) implican que

$$0 < \mathbf{x}-\mathbf{y}\sqrt{d} = \frac{1}{\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}} < 1. \tag{22}$$

De (20) y (22) se sigue que $\mathbf{x} > \frac{1}{2}$ y $2\mathbf{y}\sqrt{d} = (\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d})+(-\mathbf{x}+\mathbf{y}\sqrt{d}) > 1+(-1) = 0$ y, así, $\mathbf{y} > 0$. Puesto que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación y $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, entonces $x + y\sqrt{d} \le \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$; combinando esto con (20) se obtiene que $\mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d} < x + y\sqrt{d} \le \mathbf{x} + \mathbf{y}\sqrt{d}$, lo que es un absurdo. □

3. Primeros ejemplos

Apelando a los teoremas 1 y 2, concluiremos las soluciones de los Problemas 1 y 2.

Solución del Problema 1. Como se vio en la introducción del artículo, el problema solicita determinar si existen números enteros positivos k y N, con $k > 1$, tales que

$$(4k + 3)^2 - 48N^2 = 1. \tag{23}$$

Esto indica que, dentro de la infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1$, hay que buscar una solución (x, y) en la que la abscisa x sea de la forma $4k + 3$ para algún número entero $k > 1$.
La solución fundamental de esa ecuación es $(x = 7, y = 1)$. Para $r \in \mathbb{Z}^+$ denotemos con (x_r, y_r) a la solución de $\mathcal{X}^2 - 48\mathcal{Y}^2 = 1$ que se obtiene de

$$\left(7 + \sqrt{48}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{48}.$$

De esta igualdad y del teorema del binomio deducimos que

$$x_r = \sum_{\substack{0 \le j \le r,\\ 2\,|\,j}} \binom{r}{j} 7^{r-j} \left(\sqrt{48}\right)^j. \tag{24}$$

Puesto que $7^r \equiv \begin{cases} 1 \pmod 4 & \text{si } 2 \mid r \\ 3 \pmod 4 & \text{si } 2 \nmid r \end{cases}$ y $4 \mid \left(\sqrt{48}\right)^j$ siempre que j es un número par y positivo, de (24) se desprende que x_r es de la forma $4k + 3$ para todo número impar r: podemos concluir entonces que hay una infinidad de números enteros positivos k y N, con $k > 1$, que satisfacen (23). □

¡Nótese que la demostración de hecho indica cómo hallar soluciones (concretas) a (23)! Por ejemplo, cuando $r = 3$, la igualdad (24) implica que

$$x_r = \binom{3}{0} 7^{3-0} \left(\sqrt{48}\right)^0 + \binom{3}{2} 7^{3-2} \left(\sqrt{48}\right)^2 = 7^3 + (3 \cdot 7)(48) = 1351$$

y que $y_r = 3 \cdot 7^2 + 48 = 195$. Dado que $1351 = 4(337) + 3$, tenemos que $(k, N) = (337, 195)$ es una solución para (23).

Solución del Problema 2. Según lo que discutimos en la introducción del artículo, en este problema tenemos que determinar si hay un par ordenado $(T, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tal que

$$(2T + 1)^2 - 8y^2 = 1 \tag{25}$$

y de tal manera que $100 < T < 1000$.
Consideremos la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$: la solución fundamental de esta ecuación es $(x = 3, y = 1)$. Para $r \in \mathbb{Z}^+$ denotemos con (x_r, y_r) a la solución de $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$ que se obtiene al calcular $\left(3+\sqrt{8}\right)^r$. Ya que $\left(3+\sqrt{8}\right)^3 = 99 + 35\sqrt{8}$, $\left(3+\sqrt{8}\right)^4 = 577 + 204\sqrt{8}$ y $\left(3+\sqrt{8}\right)^5 = 3363 + 1189\sqrt{8}$, se sigue que

$$(x_3, y_3) = (99, 35), \quad (x_4, y_4) = (577, 204) \quad \text{y} \quad (x_5, y_5) = (3363, 1189). \tag{26}$$

Cada uno de estos pares ordenados da lugar a una solución $(T, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación (25): despejando T de $2T + 1 = x_3$ vemos que el par ordenado (x_3, y_3) da lugar a la solución $(T = 49, y = 35)$; despejando T de $2T + 1 = x_4$ se observa que el par ordenado (x_4, y_4) da lugar a la solución $(T = 288, y = 204)$ y, finalmente, despejando T de $2T + 1 = x_5$ se ve que el par ordenado (x_5, y_5) da lugar a la solución $(T = 1681, y = 1189)$. Como el total T de corredores en la maratón era un número entero del intervalo $(100, 1000)$, concluimos que en la maratón participaron 288 corredores y que el número que llevaba el corredor que analizó las sumas de los números de los otros corredores era 204. $\square$

Las dudas que haya sobre la unicidad de la conclusión anterior se disiparán con el teorema que presentamos a continuación.

Teorema 3. *Sea d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto. Supongamos que (x, y) es la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ y, para cada $r \in \mathbb{Z}^+$, denotemos con (x_r, y_r) a la solución de esa ecuación que se obtiene de*

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}.$$

Se cumple que las sucesiones $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son estrictamente crecientes: esto es, para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que

$$x_r < x_{r+1} \quad \text{y} \quad y_r < y_{r+1}.$$

Demostración. Demostremos primero que la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ es estrictamente creciente. Supongamos que para algún $r \in \mathbb{Z}^+$ se observa que

$$x_{r+1} \leq x_r. \tag{27}$$

Como (x_r, y_r) y (x_{r+1}, y_{r+1}) son soluciones de $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, la desigualdad (27) implica que

$$y_{r+1}^2 = \frac{x_{r+1}^2 - 1}{d} \leq \frac{x_r^2 - 1}{d} = y_r^2. \tag{28}$$

De (27) y (28) se desprende que

$$x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d} \leq x_r + y_r\sqrt{d},$$

lo cual es un absurdo pues lo que sabemos es que

$$x_r + y_r\sqrt{d} = \left(x + y\sqrt{d}\right)^r < \left(x + y\sqrt{d}\right)^{r+1} = x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d}.$$

Tenemos así que la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ es estrictamente creciente. La conclusión sobre el crecimiento de $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ se obtiene fácilmente de lo anterior. □

Presentamos otros dos problemas para que el lector los intente (antes de leer las soluciones que compartimos) y ponga a prueba su entendimiento de lo que hemos estado discutiendo hasta este punto.

Problema 4. *(All-Russian Mathematical Olympiad 2015 [9th grade], prob. 3). Para cualesquiera tres números enteros u, v y d, mayores que 100, que cumplen la igualdad $u^2-1=(d^2-1)v^2$, calcúlese la fracción $\frac{v}{d}$. ¿Cuál es el menor número que se obtiene de este modo?*

Solución. Para cada número entero $d>100$ se tiene que la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2-(d^2-1)\mathcal{Y}^2=1$ es $(x=d, y=1)$. Luego, si con (u_r,v_r) denotamos a la solución de esta ecuación que proviene de la igualdad

$$u_r+v_r\sqrt{d^2-1}=\left(d+\sqrt{d^2-1}\right)^r, \tag{29}$$

tenemos que la sucesión $v_1,v_2,v_3,\ldots$ es estrictamente creciente y, en consecuencia,

$$\frac{v_r}{d}\geq\frac{v_2}{d} \tag{30}$$

para todo número entero $r\geq 2$. Dado que $\left(d+\sqrt{d^2-1}\right)^2=(2d^2-1)+2d\sqrt{d^2-1}$, se sigue que $v_2=2d$; de esto y (30) se concluye que $v_r/d\geq 2$ para todo número entero $r\geq 2$. Concluimos así que el menor número que se obtiene mediante el proceso indicado es 2. □

Problema 5. *(M. Z. Garaev) Supóngase que x,y son números enteros tales que la fracción*

$$\frac{4x^2-1}{4x^2-y^2}$$

es igual a un número entero positivo k. Demuestre que $k=1$.

Solución. Supongamos que $k>1$. De

$$4x^2-1=k(4x^2-y^2), \tag{31}$$

se sigue que

$$((2k-2)x+ky)^2-(k^2-k)(2x+y)^2=1. \tag{32}$$

Consideremos la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2-(k^2-k)\mathcal{Y}^2=1.$$

La solución fundamental de esta ecuación es $(x=2k-1, y=2)$: de esto y (32) se deduce que

$$(2k-2)x+ky+(2x+y)\sqrt{k^2-k}=\left(2k-1+2\sqrt{k^2-k}\right)^r \tag{33}$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$. Puesto que

$$\left(2k-1+2\sqrt{k^2-k}\right)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j, \tag{34}$$

tenemos que

$$(2x+y)\sqrt{k^2-k} = \sum_{\substack{0\leq j\leq r,\\ 2\nmid j}} \binom{r}{j} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j; \tag{35}$$

en vista de que el coeficiente de $\sqrt{k^2-k}$ en el lado derecho de (35) es un número par (lo cual queda claro después de hacer la respectiva reducción de términos semejantes), inferimos que y es un número par. Esto indica por un lado que $(2k-2)x+ky$ es un número par; por otra parte, de (33) se desprende que

$$(2k-2)x+ky = \sum_{\substack{0\leq j\leq r,\\ 2\mid j}} (2k-1)^{r-j} \left(2\sqrt{k^2-k}\right)^j,$$

lo que implica que $(2k-2)x+ky$ es un número impar. Como $(2k-2)x+ky$ no puede ser par e impar simultáneamente hemos conseguido un absurdo y la demostración termina. $\square$

4. Algunos "pro tips"

En esta sección comentaremos algunos datos y algunas tácticas adicionales que conviene conocer al trabajar con problemas que involucran ecuaciones de Pell. La sección está dividida en tres subsecciones:

- Cambios de variable.
- Relaciones de recurrencia para las soluciones de una ecuación de Pell.
- La ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$.

Cambios de variable

En los primeros dos problemas que se resolvieron en el artículo vimos que, en ocasiones, para llegar a las ecuaciones de Pell es necesario efectuar algunas manipulaciones algebraicas básicas (por ejemplo, la completación de algunos trinomios). En otros problemas, digamos que en las incógnitas x y y, lo que haremos a fin de dar con una ecuación de Pell es expresar a x y y en términos de otras variables u y v: resulta que, al sustituir y hacer las simplificaciones correspondientes, se puede conseguir una ecuación de Pell en u y v.

Problema 6. *Demuestre que hay una infinidad de pares ordenados* $(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *tales que* $2021x^2 + 2022x = y^2$.

Solución. Si hacemos $x = 2022v^2$ y $y = 2022uv$ y reemplazamos en la ecuación dada, obtenemos

$$2021(2022v^2)^2 + 2022(2022v^2) = (2022uv)^2,$$

lo cual *podría* simplificarse en

$$1 = u^2 - 2021v^2. \tag{36}$$

¡Se ha llegado así a una ecuación de Pell! La demostración solicitada la podemos iniciar en (36):
Como 2021 no es un cuadrado perfecto, hay una infinidad de pares ordenados $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen la ecuación de Pell (36); si para cada uno de esos pares ordenados (u, v) hacemos $x = 2022v^2$ y $y = 2022uv$, tenemos que $2021x^2 + 2022x = y^2$. Puesto que distintos pares ordenados $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ dan lugar a distintos pares ordenados $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, se obtiene lo que deseábamos demostrar. □

Esta idea de expresar a las incógnitas en una ecuación en términos de otras (con la finalidad de pasar a una ecuación más familiar) se usa frecuentemente. Cuando la ecuación original es de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$$

para algunos números enteros a, b y c, **un cambio de variable** que conviene tener en mente es $x = \alpha u + \beta v$, $y = \gamma u + \delta v$ donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son números enteros tales que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Problema 7. *(R. S. Luthar; Amer. Math. Monthly, 1976, p. 566). Demuestre que hay una infinidad de números enteros n tales que $2n+1$ y $3n+1$ son cuadrados perfectos y n es múltiplo de 40.*

Solución. Busquemos números enteros n tales que $2n + 1 = x^2$ y $3n + 1 = y^2$ para algunos números enteros x, y. Multiplicando ambos lados de la primera igualdad por 3 y ambos lados de la segunda igualdad por 2 llegamos al sistema:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= 6n + 3 \\ 2y^2 &= 6n + 2. \end{aligned}$$

Restando a cada miembro de la primera ecuación el respectivo miembro de la segunda obtenemos:

$$3x^2 - 2y^2 = 1. \tag{37}$$

Cada solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ a la ecuación (37) da lugar a un número entero n que satisface lo requerido. En efecto, si $3x^2 = 2y^2 + 1$ entonces $y^2 = 3n + 1$ para algún $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y, en consecuencia, $3x^2 = 6n + 3$ y $x^2 = 2n + 1$.
Es relativamente fácil establecer que un n de esa índole será múltiplo de 40. De $x^2 = 2n + 1$ se sigue que $x = 2x_0 + 1$ para algún $x_0 \in \mathbb{Z}$ y entonces $2 \mid n$; de esto se desprende a su vez que $y = 2y_0 + 1$ para algún $y_0 \in \mathbb{Z}$ y, en consecuencia, $8 \mid n$. Por otra parte, al tenerse que $x^2+y^2 = 5n+2$, entonces $x^2 \equiv 1 \pmod 5$ y $y^2 \equiv 1 \pmod 5$;

de esto se obtiene que $2n + 1 \equiv 1 \pmod 5$ y, consiguientemente, que $5 \mid n$. De todo esto colegimos que $40 \mid n$.
Resta mostrar que (37) tiene una infinidad de soluciones en números enteros positivos x y y. Hagamos $x = u + 2v$ y $y = u + 3v$; con este cambio de variables la ecuación (37) deviene en

$$\begin{aligned} 3(u+2v)^2 - 2(u+3v)^2 &= 1, \\ u^2 - 6v^2 &= 1. \end{aligned}$$

Como esta última ecuación es de Pell (en las variables u y v), ella admite una infinidad de soluciones $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$; cada una de esas soluciones da lugar a una solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de $3x^2 - 2y^2 = 1$. $\square$

Relaciones de recurrencia para las soluciones de una ecuación de Pell

Ya sabemos que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es la solución fundamental de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, entonces el resto de las soluciones de esa ecuación las podemos obtener al calcular las potencias de $x + y\sqrt{d}$. De hecho, a lo largo del artículo nos hemos apegado a esta convención: si $r \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(x_r, y_r) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es la solución determinada por la igualdad

$$\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}. \tag{38}$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} x_{r+1} + y_{r+1}\sqrt{d} &= \left(x + y\sqrt{d}\right)^{r+1} && (39) \\ &= \left(x + y\sqrt{d}\right)^r \left(x + y\sqrt{d}\right)^1 \\ &= \left(x_r + y_r\sqrt{d}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right) \\ &= (x_r x_1 + y_r y_1 d) + (x_r y_1 + x_1 y_r)\sqrt{d} && (40) \end{aligned}$$

De (39) y (40) y del supuesto de que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto, obtenemos las siguientes **relaciones de recurrencia** para (x_{r+1}, y_{r+1}):

$$\begin{cases} x_{r+1} = x_r x_1 + y_r y_1 d \\ y_{r+1} = x_r y_1 + x_1 y_r \end{cases}$$

Estas relaciones permiten obtener (x_2, y_2) a partir de la solución fundamental (x_1, y_1), (x_3, y_3) a partir de (x_2, y_2) y de (x_1, y_1), (x_4, y_4) a partir de (x_3, y_3) y de (x_1, y_1), y así sucesivamente. Haciendo las modificaciones pertinentes en el análisis de arriba es posible conseguir las recurrencias generales que damos enseguida: para cualesquiera $r, s \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$\begin{cases} x_{r+s} = x_r x_s + y_r y_s d \\ y_{r+s} = x_r y_s + x_s y_r \end{cases} \tag{41}$$

Ilustraremos a continuación cómo es que estas relaciones se aplican al resolver problemas.

Problema 8. *Demuestre que si* $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *es una solución de la ecuación de Pell* $\mathcal{X}^2 - 24\mathcal{Y}^2 = 1$, *entonces* $5 \mid xy$.

Solución. La solución fundamental de la ecuación es $(x_1 = 5, y_1 = 1)$. Por lo discutido en esta subsección tenemos que

$$\begin{cases} x_{r+1} = 5x_r + 24y_r \\ y_{r+1} = x_r + 5y_r \end{cases} \tag{42}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. Demostraremos por inducción matemática que, para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $5 \mid x_r y_r$. Claramente esto se verifica para $r = 1$. Supongamos que

$$5 \mid x_r y_r \tag{43}$$

para algún $r \in \mathbb{Z}^+$ fijo (pero arbitrario). Puesto que 5 es un número primo, de (43) se sigue que $5 \mid x_r$ o $5 \mid y_r$. Consideremos por separado ambos casos:

i) Si $5 \mid x_r$, de la segunda igualdad en (42) se desprende que $5 \mid y_{r+1}$.

ii) Si $5 \mid y_r$, de la primera igualdad en (42) se desprende que $5 \mid x_{r+1}$.

En cualquiera de estos dos casos tenemos que $5 \mid x_{r+1} y_{r+1}$, que es justamente a lo que queríamos llegar. □

Problema 9. *Demuestre que si* $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ *es una solución de la ecuación de Pell* $\mathcal{X}^2 - 15\mathcal{Y}^2 = 1$, *entonces* y *no puede ser de la forma* $3^\alpha \cdot 5^\beta$ *para algunos enteros* $\alpha > 1$ *y* $\beta > 1$.

Solución. La solución fundamental de la ecuación es $(x_1 = 4, y_1 = 1)$. En este problema, las relaciones de recurrencia para la solución $(x_{r+1}, y_{r+1}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ son

$$\begin{cases} x_{r+1} = 4x_r + 15y_r \\ y_{r+1} = x_r + 4y_r \end{cases} \tag{44}$$

En vista de que $(x_2 = 31, y_2 = 8)$, las recurrencias generales en (41) implican que

$$\begin{cases} x_{r+2} = 31x_r + 120y_r \\ y_{r+2} = 8x_r + 31y_r \end{cases} \tag{45}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. De la segunda igualdad en (44) y de la segunda igualdad en (45) se obtiene que

$$y_{r+2} = 8y_{r+1} - y_r \tag{46}$$

para todo $r \in \mathbb{Z}^+$. Esta relación de recurrencia para la sucesión $\{y_r\}_{r \in \mathbb{Z}^+}$ permite obtener, de manera rápida, información aritmética sobre sus términos. Por ejemplo, con ayuda de (46) podemos fácilmente ver que los restos en la división por 3 de los términos de la sucesión son como se indica en la siguiente tabla:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$y_r \pmod 3$	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	...

No resulta difícil inferir de la periodicidad de los números en la segunda fila que el r-ésimo término de la sucesión $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ es divisible por 3 si y solo si $3 \mid r$. Esto indica que si y_r es de la forma $3^\alpha \cdot 5^\beta$ (para algunos enteros $\alpha > 1$ y $\beta > 1$) entonces $3 \mid r$. Sin embargo, ninguno de los términos $y_3, y_6, y_9, y_{12}, \ldots$ resulta ser de dicha forma pues todos estos términos, aparte de ser divisibles por 3, también son divisibles por 7; este último aserto se puede corroborar al analizar la tabla de los restos en la división por 7 de los términos de la sucesión $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$:

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\ldots$
$y_r \pmod 7$	1	1	0	6	6	0	1	1	0	6	6	0	$\ldots$

Nuevamente, por la periodicidad de los números en la segunda fila de la tabla se infiere que el r-ésimo término de la sucesión $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ es divisible por 7 si y solo si $3 \mid r$. Podemos concluir así que no existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $y_r = 3^\alpha \cdot 5^\beta$ para algunos números enteros $\alpha > 1$ y $\beta > 1$. $\square$

Resolveremos enseguida el tercer problema planteado en la introducción del artículo (¡finalmente!). El problema solicita determinar todos los números enteros positivos Q y u tales que

$$3^Q = 2u^2 + 1.$$

Al igual que en el caso del problema 9, en una etapa de la solución echaremos mano del recurso de analizar los términos de una sucesión recurrente de números enteros con respecto a dos módulos distintos.

Solución del Problema 3. Primero buscaremos las soluciones (Q, u) en las que Q es par y después las soluciones en las que Q es impar.
Si suponemos que Q es par entonces $Q = 2q$ para algún número entero $q \geq 1$ y entonces tenemos que resolver $(3^q-1)(3^q+1) = 2u^2$. Después de notar que el máximo común divisor de los números en la izquierda es 2 podemos inferir que $3^q - 1 = 4r^2$ y $3^q + 1 = 2t^2$ para algunos números enteros positivos r y t o que $3^q - 1 = 2r^2$ y $3^q + 1 = 4t^2$ para algunos números enteros positivos r y t. Que la primera de las dos posibilidades no puede tener lugar se puede establecer mediante congruencias módulo 3; la segunda posibilidad nos lleva a que $3^q = (2t-1)(2t+1)$, de lo cual se obtiene que $t = 1$. De todo este análisis se desprende que la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ tiene una única solución $(Q, u) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ con Q par: a saber, $(Q = 2, u = 2)$.
Buscamos ahora las soluciones para la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ con Q impar. Supongamos que $Q = 2q + 1$ para algún número entero $q \geq 1$. Se debe cumplir que

$$3(3^q)^2 - 2u^2 = 1.$$

Así pues, nuestra tarea consiste en determinar las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación

$$3x^2 - 2y^2 = 1 \tag{47}$$

en las que x es una potencia de 3. Por lo que vimos en el problema 7, las soluciones en números enteros positivos de la ecuación (47) están en correspondencia biunívoca con las soluciones en números enteros no negativos de la ecuación de Pell $u^2 - 6v^2 = 1$.

Como la solución fundamental de $u^2 - 6v^2 = 1$ es $(u_1 = 5, v_1 = 2)$ y para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

$$(u_{r+1}, v_{r+1}) = (5u_r + 12v_r, 2u_r + 5v_r)$$

y

$$(u_{r+2}, v_{r+2}) = (49u_r + 120v_r, 20u_r + 49v_r),$$

entonces podemos obtener una relación de recurrencia para las abscisas x_r de las soluciones (x_r, y_r) de $3x^2 - 2y^2 = 1$. Puesto que $x_r = u_r + 2v_r$, para cada $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ se tiene que

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 9 \quad \text{y} \quad x_{r+2} = 10x_{r+1} - x_r. \tag{48}$$

Ya que estamos interesados en saber qué términos de la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son potencias de 3, lo que hacemos ahora es estudiar los primeros términos de esta módulo 27. Es fácil ver que los números $x_0, x_1, \ldots, x_{17}$ son, respectivamente, congruentes módulo 27 a

$$1, 9, 8, 17, 0, 10, 19, 18, 26, 26, 18, 19, 10, 0, 17, 8, 9, 1.$$

En esta lista ha quedado de manifiesto la periodicidad de los residuos en la división por 27 de los términos de la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$. Además, de la información ahí recabada se infiere que $27 \mid x_r$ si y solo si $r \equiv 4 \pmod{18}$ o $r \equiv 13 \pmod{18}$; no obstante, al analizar los restos en la división por 17 de los términos de $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ caemos en la cuenta de que $27 \mid x_r$ si y solo si $17 \mid x_r$.
De todo el análisis previo se desprende que las únicas soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $3x^2 - 2y^2 = 1$, en las que x es una potencia de 3, son $(x = 1, y = 1)$ y $(x = 9, y = 11)$; de esto se sigue que las únicas soluciones en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ con Q impar son $(Q = 1, u = 1)$ y $(Q = 5, u = 11)$.
En conclusión: la ecuación $3^Q = 2u^2 + 1$ tiene en total tres soluciones $(Q, u) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$: $(Q = 1, u = 1)$, $(Q = 2, u = 2)$ y $(Q = 5, u = 11)$. $\square$

La ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$

Sean d un número entero positivo que no es igual a un cuadrado perfecto y M un número entero distinto de 1. ¿Qué podemos decir del conjunto de soluciones, en números enteros positivos, de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$?
A diferencia de lo que ocurre con la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$, la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ no necesariamente tiene soluciones: por ejemplo, mediante congruencias módulo 3 se puede ver que si $3 \mid d$ y $M \equiv 2 \pmod{3}$ entonces no existen números enteros $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ tales que $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$. Por otro lado, demostraremos a continuación que cuando la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ tiene una solución $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ entonces su conjunto de soluciones es infinito.

Teorema 4. *Sean d un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto y M un número entero distinto de 1. Si la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$ tiene una solución $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, entonces tiene una infinidad de soluciones en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Recurriremos a la función $\mathrm{N}\colon \mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right] \to \mathbb{Z}$ que usamos en la demostración del teorema 2; recuérdese que si U y V son números enteros entonces $\mathrm{N}\left(U + V\sqrt{d}\right) = U^2 - dV^2$. Esta función N es completamente multiplicativa y es de gran ayuda al determinar si un par ordenado $(U, V) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$: la observación clave aquí es que (U, V) es solución de tal ecuación si y solo si $\mathrm{N}\left(U + V\sqrt{d}\right) = M$.
Supongamos que la solución fundamental de la ecuación de Pell

$$\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1 \tag{49}$$

es (x, y). Si $r \in \mathbb{Z}^+$, con (x_r, y_r) denotamos a la solución de (49) que se obtiene al elevar $x + y\sqrt{d}$ a la r: esto es, $\left(x + y\sqrt{d}\right)^r = x_r + y_r\sqrt{d}$. Consideremos el producto

$$\left(u + v\sqrt{d}\right)\left(x_r + y_r\sqrt{d}\right) = (ux_r + vy_rd) + (uy_r + vx_r)\sqrt{d}.$$

Si para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ hacemos $u_r = ux_r + vy_rd$ y $v_r = uy_r + vx_r$, entonces tenemos que cada par ordenado (u_r, v_r) es una solución, en números enteros positivos, de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$: en efecto,

$$\begin{aligned} u_r^2 - dv_r^2 &= \mathrm{N}\left(u_r + v_r\sqrt{d}\right) = \mathrm{N}\left(\left(u + v\sqrt{d}\right)\left(x_r + y_r\sqrt{d}\right)\right) \\ &= \mathrm{N}\left(u + v\sqrt{d}\right)\mathrm{N}\left(x_r + y_r\sqrt{d}\right) = (u^2 - dv^2)(x_r^2 - dy_r^2) \\ &= M \cdot 1 = M. \end{aligned}$$

Como las sucesiones $\{x_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ y $\{y_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son estrictamente crecientes, las soluciones (u_r, v_r) son todas diferentes entre sí y tenemos la conclusión deseada. □

A las ecuaciones de la forma $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = M$, donde M es un número entero distinto de 1, se les denomina *ecuaciones de tipo Pell* (por ejemplo, ver [1, p. 120]). El problema que exponemos a continuación apareció en la sección de problemas de entrenamiento del segundo número de 2021 de esta revista. La solución que proporcionamos abajo es un tanto más sucinta que la que se publicó en [10, pp. 29-30].

Problema 10. *Para cada número entero positivo n, denotemos con T_n al n-ésimo número triangular. Demuestre que hay una infinidad de tercias de números triangulares consecutivos cuya suma es otro número triangular. (Un ejemplo de una tercia de ese tipo es la conformada por T_1, T_2 y T_3 pues $T_1 + T_2 + T_3 = 1 + 3 + 6 = 10 = T_4$).*

Solución. Puesto que $T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo número entero positivo n, en este problema se trata de determinar si la ecuación

$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

admite una infinidad de soluciones $(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Al multiplicar por 2 ambos lados y haciendo después la reducción de términos semejantes obtenemos la ecuación equivalente $3n^2 + 3n + 2 = m^2 + m$. Esta ecuación se puede reescribir a su vez como

$$(2m+1)^2 - 3(2n+1)^2 = 6. \tag{50}$$

Esto nos lleva a considerar la ecuación

$$\mathcal{X}^2 - 3\mathcal{Y}^2 = 6. \tag{51}$$

Es claro que $(\mathcal{X} = 3, \mathcal{Y} = 1)$ es una solución de (51); el teorema 4 garantiza entonces que esa ecuación tiene una infinidad de soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Puesto que, en cada una de esas soluciones de (51), ni x ni y son números pares se sigue que cada solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (51) en la que $y > 1$ da lugar a una solución de (50) en números enteros positivos m y n: a saber, a la solución $\left(m = \frac{x-1}{2}, n = \frac{y-1}{2}\right)$. $\square$

5. Ejemplos varios

En esta sección expondremos tres problemas más que se pueden abordar mediante ecuaciones de Pell.

Problema 11. *(J. L. Pietenpol; Amer. Math. Monthly, 1961, p. 573). Demuestre que hay una infinidad de cuadrados perfectos en la sucesión de números triangulares*[6].

Solución. Presentaremos dos soluciones de este problema. Recordemos que el n-ésimo número triangular se denota por T_n y es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

1. Si $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ es un cuadrado perfecto, entonces

$$\begin{aligned} T_{4n(n+1)} &= \frac{[4n(n+1)][4n(n+1)+1]}{2} = 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)(4n^2 + 4n + 1) \\ &= 4T_n(2n+1)^2 \end{aligned}$$

   es otro número triangular que es igual a un cuadrado perfecto. Como $T_1 = 1$ es un cuadrado perfecto, concluimos que hay una infinidad de cuadrados perfectos en la sucesión de números triangulares.

2. El problema es equivalente a determinar si la ecuación $\frac{n(n+1)}{2} = m^2$ tiene una infinidad de soluciones $(n, m) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Esta ecuación se puede reescribir como

$$(2n+1)^2 - 8m^2 = 1. \tag{52}$$

   La conclusión deseada se obtiene al considerar la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$ y notar que $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de esa ecuación si y solo si $(n, m) = \left(\frac{x-1}{2}, y\right)$ es solución de (52).

$\square$

En la lista de problemas adicionales de la Sección 7 el lector encontrará otros problemas que se resuelven usando la observación de que $4n^2 + 4n + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto; en esa lista aparecerán también algunos problemas que se pueden abordar con una ecuación de Pell conveniente o aplicando un argumento recursivo parecido al que se usó en la primera solución.

[6] Ver también [11, pp. 173-174].

La ventaja de la solución mediante la ecuación de Pell en el problema recién expuesto es que con ella podemos obtener una fórmula para el r-ésimo número entero que es tanto triangular como cuadrado perfecto. En efecto, de dicha solución se desprende que si t_r es el r-ésimo número triangular que es cuadrado perfecto entonces

$$\mathsf{t}_r = \frac{\left(\frac{x_r-1}{2}\right)\left(\frac{x_r-1}{2}+1\right)}{2} = \frac{x_r^2-1}{8}$$

donde x_r es la abscisa de la solución (x_r, y_r) de la ecuación $\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 1$. Dado que la solución fundamental de esta ecuación de Pell es $(x = 3, y = 1)$ se sigue que $x_r = \frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^r+\left(3-\sqrt{8}\right)^r}{2}$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathsf{t}_r &= \frac{\frac{\left(3+\sqrt{8}\right)^{2r}+\left(3-\sqrt{8}\right)^{2r}+2\left(3+\sqrt{8}\right)\left(3-\sqrt{8}\right)-4}{4}}{8} \\
&= \frac{\left(17+12\sqrt{2}\right)^r+\left(17-12\sqrt{2}\right)^r-2}{32}.
\end{aligned}$$

Los primeros cinco términos de esta sucesión $\{\mathsf{t}_r\}_{r\in\mathbb{Z}^+}$ son 1, 36, 1225, 41616 y 1413721. Un excelente sitio para ver más términos de la sucesión o aprender más acerca de ella es [5].

En el problema que viene a continuación usaremos que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, el número

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$$

es un cuadrado perfecto; este hecho se puede establecer fácilmente al transformar esa expresión en un producto de binomios conjugados:

$$\begin{aligned}
n(n+1)(n+2)(n+3) &= (n^2+3n)(n^2+3n+2) \\
&= ((n^2+3n+1)-1)((n^2+3n+1)+1) \\
&= (n^2+3n+1)^2-1.
\end{aligned}$$

Problema 12. *(M. Tetiva; Math. Magazine, 2017, p. 299). Demuestre que la ecuación $n(n+1)(n+2)(n+3) = a^2+b^2$ admite una infinidad de soluciones en números enteros a, b y n.*

Solución. En vista de que $(n^2+3n+1)^2 = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$, llegamos a que

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)^2+2(n^2+3n).$$

Así pues, para que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ sea una suma de dos cuadrados perfectos basta con que $n^2+3n = 2y^2$ para algún número entero y; esta última igualdad es equivalente a $(2n+3)^2-8y^2 = 9$. ¡Es en este momento que se vislumbra una conexión con las ecuaciones de tipo Pell!

Consideremos la ecuación

$$\mathcal{X}^2 - 8\mathcal{Y}^2 = 9. \tag{53}$$

Dado que $9^2 - 8 \cdot 3^2 = 9$, esa ecuación tiene una solución en números enteros positivos; el teorema 4 garantiza la existencia de una infinidad de soluciones, en números enteros positivos, de (53). Si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es solución de (53), entonces haciendo $n = \frac{x-3}{2}$ obtenemos un número entero que satisface $(2n+3)^2 - 9 = x^2 - 9 = 8y^2$ y tal que

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = \underbrace{(n^2+3n)^2}_{a^2} + \underbrace{(2y)^2}_{b^2}. \quad (54)$$

Como hemos mostrado que cada solución $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de (53) da lugar a una terna (propia) de números enteros (n, a, b) que cumplen la igualdad $n(n+1)(n+2)(n+3) = a^2 + b^2$, la aserción se ha establecido. $\square$

En el último problema de la sección se ilustra que en ocasiones, cuando es posible resolver determinada situación a través de ecuaciones de Pell, la solución que se obtiene no solamente es concisa o fecunda sino que tiene una buena estética también.

Problema 13. *(M. N. Deshpande; Amer. Math. Monthly, 1997, p. 870). Encuentre una infinidad de tercias $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ tales que a, b y c estén en progresión aritmética y de tal modo que $ab+1$, $ac+1$ y $bc+1$ sean cuadrados perfectos.*

Solución. Si $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 3\mathcal{Y}^2 = 1$ (distinta de la solución fundamental), entonces la terna $(a = 2v-u, b = 2v, c = 2v+u)$ consiste de números enteros positivos que están en progresión aritmética. Se cumple además que

$$\begin{aligned} ab+1 &= (2v-u)(2v)+1 = (u-v)^2, \\ ac+1 &= (2v-u)(2v+u)+1 = v^2, \\ bc+1 &= (2v)(2v+u)+1 = (v+u)^2. \end{aligned}$$

Como la ecuación de Pell considerada tiene una infinidad de soluciones $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, concluimos que hay una infinidad de ternas $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ que satisfacen lo deseado. $\square$

6. Comentarios finales

Hemos expuesto la teoría básica de la ecuación de Pell y hemos dado varios ejemplos de la aplicación de la misma en la resolución de problemas de las olimpiadas. Un aspecto de la teoría que no tocamos en este artículo es el de la determinación (eficiente) de la solución fundamental de una ecuación de Pell dada: decidimos proceder así porque, por un lado, consideramos que es más adecuado desarrollar ese aspecto en un trabajo aparte y, por otro lado, porque en el ámbito olímpico por lo general surgen ecuaciones de Pell cuya solución fundamental se puede hallar mediante inspección (esto es algo que ha sido señalado ya por otros autores en el pasado–e.g., A. Engel en [2, p. 129]–y que el lector seguramente ha podido corroborar en estas páginas).

7. Problemas adicionales

1) Con este problema quedará claro por qué en el estudio de la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = 1$ solamente es relevante el caso en que d es un número entero positivo que no es un cuadrado perfecto.

   a) Sean n un número entero y d un número entero negativo. Demuestre que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = n$ tiene una cantidad finita de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

   b) Sean n un número entero y d un cuadrado perfecto. Demuestre que la ecuación $\mathcal{X}^2 - d\mathcal{Y}^2 = n$ tiene una cantidad finita de soluciones $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) Decimos que el par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es de *coordenadas enteras* si tanto x como y son número enteros. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el conjunto

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 - 3y^2 - 1 = 0,\ 0 \leq x \leq 100,\ 0 \leq y \leq 100\right\}?$$

3) *(Folleto de problemas avanzados para la 22a. OMM, p. 1).* Denotemos con $S(n)$ a la suma de los primeros n números enteros positivos. Diremos que un número entero positivo n es *fantástico* si n y $S(n)$ son ambos cuadrados perfectos. Por ejemplo, el número 49 es fantástico pues $49 = 7^2$ y $S(49) = 1+2+\cdots+49 = 1225 = 35^2$ son ambos cuadrados perfectos. Encuentre un número entero $n > 49$ que sea fantástico.

4) *(H. Dudeney)* "Los hombres de Harold permanecían muy juntos, como era su costumbre, y formaban trece cuadrados con igual número de hombres en cada cuadrado, ¡y ay del normando que se atreviera a entrar en su reducto, pues un solo golpe de un hacha de guerra sajona quebraría su lanza y penetraría en su cota de malla...! Cuando Harold se lanzó en persona a la batalla, los sajones conformaron un único y poderoso cuadrado, profiriendo los gritos de batalla de *¡Ut!*, *¡Olicrosse!*, *¡Godemitè!...*"

   En pocas palabras: si las fuerzas de Harold se dividían en trece cuadrados que, al agregarse el mismo Harold, podían disponerse en un gran cuadrado único, ¿de cuántos hombres consistía el ejército de Harold?

Observación. El grabado pudiera sugerir que es inexacto atribuir el “acertijo” a Dudeney; no obstante, el mismo Loyd presentó a este problema como una creación de Dudeney.

5) Demuestre que la ecuación $5u^2+2u = v^2$ tiene una infinidad de soluciones $(u, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

6) Las tres preguntas que se listan enseguida se pueden resolver con ayuda del trinomio $4n^2 + 4n + 1$.

   a) Sea m un entero distinto de 0. Halle una solución $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ de la ecuación $\mathcal{X}^2 - (m^2 + 1)\mathcal{Y}^2 = 1$.

   b) Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 1 = z^2$ tiene una infinidad de soluciones en números enteros x, y y z.

   c) En las descomposiciones canónicas de los números enteros m y n aparecen los mismos números primos; en las descomposiciones canónicas de los números enteros $m + 1$ y $n + 1$ ocurre lo mismo (es decir, también aparecen los mismos números primos). ¿Hay una infinidad de pares ordenados $(m, n) \in (\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+) \setminus \{(\ell, \ell) \colon \ell \in \mathbb{Z}^+\}$ de ese tipo?

7) *(Examen W. L. Putnam; prob. A-2, 2000).* Demuestre que hay una infinidad de números enteros n tales que n, $n + 1$ y $n + 2$ se pueden expresar como una suma de dos cuadrados perfectos.

8) Un número entero positivo es *potencioso* si es divisible por el cuadrado de cada uno de sus divisores primos. Por ejemplo, el 72 es potencioso ya que sus factores primos son 2 y 3 y 72 es múltiplo de 2^2 y 3^2. Demuestre que hay una infinidad de números potenciosos consecutivos.

   Observación. Este es un problema muy popular (se encuentra en [12, p. 248] y también apareció en [9, p. 26]); al igual que al problema anterior se le puede resolver con una ecuación de Pell o con un argumento como el de la primera solución que dimos al problema 11 de la Sección 5.

9) *([2, p. 135]).* Sea n un entero positivo. Demuestre que si $3n + 1$ y $4n + 1$ son cuadrados perfectos, entonces $56 \mid n$.

10) *(Olimpiada Nacional de Turquía; prob. 2 [2a. ronda], 2014).* Determine todas las tercias (x, y, z), de números enteros positivos, para las cuales se verifica la igualdad $x^3 = 3^y \cdot 7^z + 8$.

    Observación. Este problema se reduce a demostrar que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ es una solución de la ecuación de Pell $\mathcal{X}^2 - 3\mathcal{Y}^2 = 1$ y x es una potencia de 7 entonces $x = 7$. Es posible armar una demostración de esto emulando el análisis de las relaciones de recurrencia que se efectuó en los problemas 3 y 9; una demostración alternativa se puede consultar en [4, pp. 8-9].

11) *(Nieuw Archief voor Wiskunde; prob. C, marzo de 2015).* Determine todos los pares ordenados (p,q) en los que p y q son números primos impares, $q \equiv 3 \pmod 8$ y $\dfrac{q^{p-1}-1}{p}$ es un cuadrado perfecto.

12) *(G. Martínez)* Demuestre que hay una infinidad de tercias $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ en las que a, b y c son distintos entre sí y $ab-1$, $ac-1$ y $bc-1$ son cuadrados perfectos.

13) Demuestre que hay una infinidad de cuadrados perfectos de la forma $1+2^{x^2}+2^{y^2}$ con $(x,y) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

14) *(P. G. Walsh)* ¿Para qué números enteros positivos m y n se cumple que

$$(2^m-1)(3^n-1)$$

es un cuadrado perfecto?

8. Bibliografía

1) T. Andreescu, D. Andrica, and I. Cucurezeanu. *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Birkhäuser Verlag, 2010.

2) A. Engel. *Problem-solving strategies*. Springer Verlag, 1997.

3) E. R. Gentile. *Aritmética elemental*. Secretaría General de la OEA, Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, 1985, 138 pp.

4) J. Hernández. Solving problems by looking at a discriminant. *Mathematical Reflections*, (2020), No. 4, pp. 1-10.

5) OEIS Foundation Inc. (2022). The square triangular numbers, entry A001110 in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org/A001110`.

6) B. Rittaud and A. Heeffer. The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet. *The Mathematical Intelligencer*, (2014), No. 2, Vol. 36, pp. 27-29.

7) C. J. Rubio y J. A. Lara. El máximo común divisor. *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2015), No. 1, pp. 1-13.

8) P. Soberón. El principio de las casillas. *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2010), No. 2, pp. 1-6.

9) *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2013), No. 2.

10) *Tzaloa: Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas*, (2022), No. 1.

11) A. Weil. *Number theory: An approach through history (from Hammurapi to Legendre)*. Birkhäuser Verlag, 1983.

12) P. Zeitz. *The art and craft of problem solving*. Third edition, John Wiley and Sons Inc., 2017.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este tercer número del año 2022. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección `revistaomm@gmail.com`, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Demuestra que no existe ningún número entero n tal que $n^2 + 3n + 5$ es múltiplo de 121.

Problema 2. ¿De cuántas maneras se puede escoger un subconjunto no vacío del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que la suma de sus elementos sea múltiplo de 5?

Problema 3. Determina todos los números racionales $x \neq 0$ tales que $x + \frac{1}{x}$ es un entero.

Problema 4. Si $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, determina el valor de $x^{11} - 7x^7 + x^3$.

Problema 5. Se quiere llenar una canasta con 12 pelotas de tres colores: azul, rojo y verde, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) Hay al menos dos pelotas azules.

b) Hay al menos una pelota roja.

c) Hay un número par de pelotas verdes.

¿De cuántas maneras se puede llenar la canasta si no importa el orden de las pelotas en la canasta?

Problema 6. En una fiesta, 6 personas estrechan la mano a lo más una vez por pareja. Encuentra el número de formas en las que puede ocurrir que cada persona estreche la mano con una cantidad par de personas.

Problema 7. Desde un punto A se trazan dos tangentes a una circunferencia Γ en los puntos B y C. La cuerda DE de Γ cumple que A, D y E son colineales, y la cuerda BF es paralela a DE. Demuestra que FC pasa por el punto medio de la cuerda DE.

Problema 8. Los números reales positivos a, b, c y d satisfacen que $ab = 2$ y $cd = 27$. Determina el valor mínimo de $(a + 1)(b + 2)(c + 3)(d + 4)$.

Problema 9. Determina el menor entero positivo n para el cual

$$\sqrt{100 + \sqrt{n}} + \sqrt{100 - \sqrt{n}}$$

es un número entero.

Problema 10. Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_8$ se trazan en sentido horario sobre una semicircunferencia de diámetro $P_1P_8 = 2$ de forma tal que $P_iP_{i+1} = P_jP_{j+1}$ para i, j de 1 a 7. Determina el valor de $(P_1P_8)^2 + (P_2P_8)^2 + \cdots + (P_7P_8)^2$.

Problema 11. Determina el valor numérico de la suma

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{16}} + \frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{25}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{30} + \sqrt[3]{36}} + \frac{1}{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{42} + \sqrt[3]{49}} + \frac{1}{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{64}}.$$

Problema 12. Sean a, b y n números enteros. Demuestra que si n divide a $a - b$, entonces n^2 divide a $a^n - b^n$.

Problema 13. Se tienen 10 palitos cuyas longitudes en centímetros son números enteros. Los dos palitos más cortos miden 1 cm y el más largo mide 50 cm. Demuestra que se pueden escoger 3 palitos que formen un triángulo.

Problema 14. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles con ángulo recto en B y catetos de longitud 1. Encuentra todos los puntos X que están a distancia entera de A, B y C.

Problema 15. Hércules pelea contra la temible hidra, un monstruo de muchas cabezas. Cada vez que le corta una cabeza, una cantidad finita de cabezas "hijos" (posiblemente cero) surgen en su lugar. Suponemos que no existe una sucesión infinita de cabezas tal que cada una es hija de la anterior. Si inicialmente, la hidra tiene una sola cabeza, demuestra que mientras Hércules siga cortando cabezas, no importa cómo lo haga, eventualmente todas las cabezas serán cortadas y la hidra será derrotada.

Problema 16. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros no negativos. Sea $\star$ una operación binaria en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, $m \star n$ es el menor valor en $\mathbb{N}$ que excede al entero $m' \star n + m \star n' - m' \star n'$ para cualesquiera $m', n' \in \mathbb{N}$ con $m' < m$ y $n' < n$. En particular, $0 \star n = n \star 0 = 0$. Determina el valor de $2022 \star 2022$.

Problema 17. Sea P un punto en el interior de un triángulo ABC. La recta por A y P interseca al circuncírculo del triángulo ABC en los puntos A y A_1. Sea A_2 el punto medio de AA_1. Los puntos B_2 y C_2 se definen de manera análoga. Demuestra que P está en el circuncírculo del triángulo $A_2B_2C_2$.

Problema 18. Sean a, b y c enteros positivos tales que las siguientes fracciones son todas números enteros:

$$\frac{a(b+1)}{a-1}, \quad \frac{b(c+1)}{b-1}, \quad \frac{c(a+1)}{c-1}.$$

Determina el valor máximo del producto abc.

Problema 19. Determina el máximo común divisor de todos los números de la forma $p^4 - 1$, donde p es un número primo mayor que 5.

Problema 20. Antonio tiene un pastel en forma de triángulo. Cada minuto, corta el pastel por una bisectriz y se come una de las mitades. ¿Deberá Antonio haberse comido la mitad del pastel en algún momento?

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección `revistaomm@gmail.com`.

Solución del problema 1. Supongamos, por contradicción, que hay un entero n tal que $n^2 + 3n + 5$ es múltiplo de 121, en particular, $n^2 + 3n + 5$ es múltiplo de 11. Como $n^2+3n+5 = (n+7)(n-4)+33$ y 33 es múltiplo de 11, tenemos que $(n+7)(n-4)$ también lo es. De aquí que 11 divide a $n + 7$ o a $n - 4$, ya que 11 es primo. Como $(n + 7) - (n - 4) = 11$, concluimos que 11 divide a $n + 7$ y también a $n - 4$, lo cual implica que $(n + 7)(n - 4)$ es múltiplo de 121. Luego, necesariamente 33 debe ser múltiplo de 121, lo que es una contradicción. Por lo tanto, no existe tal entero n.

Solución del problema 2. Como $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, las sumas posibles son: 5, 10 o 15. Solo hay una manera de obtener 15. Hay 3 maneras de obtener una suma igual a 10: $1 + 2 + 3 + 4$, $2 + 3 + 5$ y $1 + 4 + 5$. Hay 3 maneras de obtener una suma igual a 5: $1 + 4$, $2 + 3$, 5. Por lo tanto, en total hay 7 maneras.

Solución del problema 3. Sea $x = \frac{a}{b}$, con $\text{mcd}(a, b) = 1$, tal que $x + \frac{1}{x} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$ para un entero k. Entonces, $b^2 = a(kb - a)$. Como a y b son primos relativos, se sigue que b divide a $kb - a$, lo cual implica que $b \mid a$. Por lo tanto, $b = \pm 1$. Sustituyendo en la igualdad anterior, obtenemos que $1 = a(\pm k - a)$, de donde se sigue que $a \mid 1$.

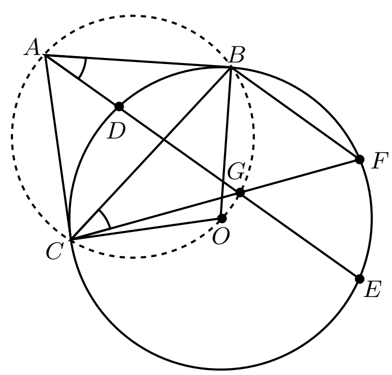
Entonces, $a = \pm 1$ y, por consiguiente, $x = \pm 1$. Es fácil ver que estos valores de x cumplen la condición del problema.

Solución del problema 4. Elevando al cuadrado la igualdad $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$, obtenemos que $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 5$, esto es, $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$. Multiplicando ahora por x^2, obtenemos que $x^4 + 1 = 3x^2$, de donde $(x^4+1)^2 = (3x^2)^2$, que es equivalente a $x^8 - 7x^4 + 1 = 0$. Como $x^{11} - 7x^7 + x^3 = x^3(x^8 - 7x^4 + 1)$, resulta que $x^{11} - 7x^7 + x^3 = 0$.

Solución del problema 5. Podemos separar 2 pelotas azules y una pelota roja y meterlas a la canasta. Entonces tenemos que meter 9 pelotas de tal manera que el número de pelotas verdes sea par. Supongamos que usamos k pelotas verdes. Si escogemos a pelotas azules, necesitamos $9 - k - a$ pelotas rojas. Como $0 \leq a \leq 9 - k$, tenemos $10 - k$ maneras de llenar la canasta. Sumando sobre $k = 0, 2, 4, 6, 8$, obtenemos en total $10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 30$ formas de llenar la canasta.

Solución del problema 6. Fijamos una persona X. Hay $\binom{5}{2} = 10$ parejas entre las demás personas y cada una puede o no estrechar la mano, por lo que hay $2^{10} = 1024$ formas en las que pueden estrechar la mano. Para cada una de estas, hay exactamente una forma en la que X puede hacer que se satisfaga la condición: que estreche la mano con todos los que solo han estrechado la mano una cantidad impar de veces. Esto implica que para cualquier forma en que los demás estrechan la mano, hay exactamente una forma en la que todos estrechan las manos una cantidad par de veces. Por lo tanto, la respuesta es 1024.

Solución del problema 7. Sea O el centro de Γ y sea G el punto de intersección de FC con DE.



Como BF y DE son paralelas, tenemos que $\angle BAE = \frac{\widehat{BF}}{2} = \angle BCF$, lo cual implica que los puntos A, B, G y C están en una misma circunferencia Ω. Como $\angle ABO = \angle ACO = 90°$, los puntos A, B, O y C están en el circuncírculo del triángulo ABC y, por lo tanto, están en la circunferencia Ω. De aquí se sigue que AO es diámetro de Ω y, por lo tanto, $\angle AGO = 90°$. Como O es el centro de Γ, se sigue que OG es mediatriz de DE.

Solución del problema 8. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que

$$(a+1)(b+2) \geq (2\sqrt{a})(2\sqrt{2b}) = 4\sqrt{2ab} = 4\sqrt{4} = 8,$$

con la igualdad si y solo si $a = 1$ y $b = 2$.
Por otro lado, tenemos que

$$(c+3)(d+4) = cd + 3d + 4c + 12 = 27 + 3d + 4c + 12 = 39 + 3d + 4c.$$

Aplicando otra vez la desigualdad MA-MG, obtenemos que

$$3d + 4c \geq 2\sqrt{3d(4c)} = 2\sqrt{12cd} = 2\sqrt{12(27)} = 36,$$

con la igualdad si y solo si $3d = 4c$. Multiplicando por c y usando que $cd = 27$, obtenemos que $3(27) = 4c^2$, esto es, $c^2 = (9/2)^2$, de donde $c = \frac{9}{2}$ y $d = 6$. Por lo tanto, el valor mínimo de $(a+1)(b+2)(c+3)(d+4)$ es

$$(1+1)(2+2)\left(\frac{9}{2}+3\right)(6+4) = 600.$$

Solución del problema 9. Sea $x = \sqrt{100+\sqrt{n}} + \sqrt{100-\sqrt{n}} > 0$. Elevando al cuadrado la igualdad y simplificando, obtenemos que $x^2 = 200 + 2\sqrt{100^2 - n}$, esto es,

$$n = 100^2 - \left(\frac{x^2-200}{2}\right)^2.$$

Como n es positivo, necesariamente $\left(\frac{x^2-200}{2}\right)^2 < 100^2$, de donde $\frac{x^2-200}{2} < 100$, lo cual implica que $x^2 < 400$ y, por consiguiente, $x < 20$. Además, si x es un entero impar, entonces n no es un número entero. Por lo tanto, x es par. Como queremos minimizar n, bastará maximizar x. Si $x = 18$, entonces $n = 100^2 - (\frac{18^2-200}{2})^2 = 6156$ es el número buscado.

Solución del problema 10. Sea O el centro de la semicircunferencia y tracemos el triángulo P_8OP_7. Tenemos que $\angle P_8OP_7 = \pi/7$, ya que los puntos $P_1, \ldots, P_8$ están igualmente espaciados. Luego, por la ley de los cosenos, tenemos que $(P_7P_8)^2 = 2 - 2\cos(\pi/7)$ ya que $OP_8 = OP_7 = 1$ al ser radios. Análogamente, en el triángulo P_8OP_6 obtenemos que $\angle P_8OP_6 = 2\pi/7$, así que $(P_6P_8)^2 = 2 - 2\cos(2\pi/7)$. Repitiendo este procedimiento hasta llegar al triángulo P_8OP_2, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&(P_1P_8)^2 + (P_2P_8)^2 + \cdots + (P_7P_8)^2 \\
&= 2^2 + 2 - 2\cos(6\pi/7) + 2 - 2\cos(5\pi/7) + \cdots + 2 - 2\cos(\pi/7) \\
&= 16 - 2(\cos(6\pi/7) + \cos(5\pi/7) + \cdots + \cos(\pi/7)).
\end{aligned}$$

Como $6\pi/7 = \pi - \pi/7$, resulta que $\cos(6\pi/7) = -\cos(\pi/7)$. Análogamente, tenemos que $\cos(5\pi/7) = -\cos(2\pi/7)$ y $\cos(4\pi/7) = -\cos(3\pi/7)$, por lo que

$$(P_1P_8)^2 + (P_2P_8)^2 + \cdots + (P_7P_8)^2 = 16 - 2(0) = 16.$$

Solución del problema 11. Denotemos con S a la suma que queremos calcular. Observemos que

$$S = \sum_{n=1}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2}}. \tag{55}$$

Usando la factorización $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, obtenemos que

$$a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}.$$

Si hacemos $a = \sqrt[3]{n}$ y $b = \sqrt[3]{n+1}$, obtenemos que $ab = \sqrt[3]{n(n+1)}$ y

$$\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2} = a^2 + ab + b^2.$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{(n+1)^2} &= \frac{(\sqrt[3]{n})^3 - (\sqrt[3]{n+1})^3}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}} = \frac{n-(n+1)}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}.\end{aligned}$$

Sustituyendo en (55), obtenemos que:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{7} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)\\ &= (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{1}) + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}) + (\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}) + \cdots + (\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{7})\\ &= -\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{8} = -1 + 2 = 1.\end{aligned}$$

Solución del problema 12. Como $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$, basta probar que

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \equiv 0 \text{ (mod } n).$$

Como $a \equiv b$ (mod n), tenemos que $a^k \equiv b^k$ (mod n) para todo entero $k \geq 0$. Luego, $a^{n-1-k}a^k \equiv a^{n-1-k}b^k$ (mod n) para todo entero $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, esto es, $a^{n-1} \equiv a^{n-1-k}b^k$ (mod n) para todo entero $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \equiv \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1} \equiv 0 \text{ (mod } n).$$

Solución del problema 13. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_{10}$ las longitudes de los palitos ordenadas de menor a mayor, esto es, $p_i \leq p_j$ para $i < j$, donde $p_1 = p_2 = 1$ y $p_{10} = 50$.

Supongamos, por contradicción, que no es posible formar triángulos. Aplicando la desigualdad del triángulo, tenemos que $2 = 1 + 1 = p_1 + p_2 \leq p_3$. Análogamente, $p_2 + p_3 \leq p_4$ y, como $p_3 \geq 2$, tenemos que $p_4 \geq 3$. Como $p_3 + p_4 \leq p_5$, entonces $p_5 \geq 5$ y, $p_4 + p_5 \leq p_6$, implica que $p_6 \geq 8$.
Asumiendo que p_n toma el mínimo valor posible, tenemos que $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ para $n \geq 3$, por lo que las longitudes mínimas, en cm, de los 10 palitos son 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 y 55. Así que $p_{10} \geq 55$, lo que es una contradicción.

Solución del problema 14. Aplicando la desigualdad del triángulo en ABX, tenemos que $|AX - BX| \leq 1$ y, por lo tanto, $AX - BX \in \{-1, 0, 1\}$. Si este valor es ± 1, tenemos que X está en AB. De otra forma, X está en la mediatriz de AB. De manera análoga, X o está en BC o está en su mediatriz.
Como AB es paralela a la mediatriz de BC y viceversa, obtenemos dos posibles ubicaciones para el punto X: el circuncentro del triángulo ABC, o el punto B. Descartamos el circuncentro por ser el punto medio de AC, el cual tiene longitud $\sqrt{2}$. Por lo tanto, la única ubicación posible para X es la intersección de AB y BC, esto es, el punto B.

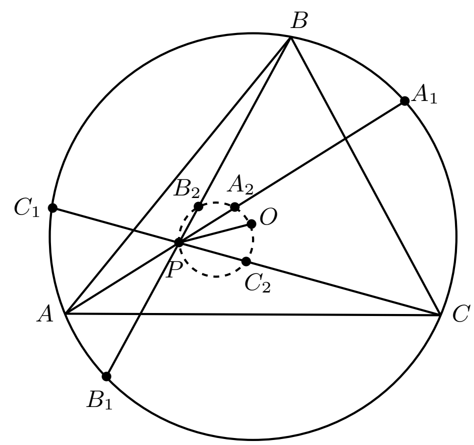
Solución del problema 15. Demostraremos que la hidra tiene una cantidad finita de cabezas. De aquí se sigue el problema de inmediato, pues una vez que Hércules corte esta cantidad de cabezas, la hidra estará muerta.
Supongamos, por contradicción, que la hidra tiene una cantidad infinita de cabezas. Inductivamente construiremos una sucesion infinita de cabezas, tal que cada una es hija de la anterior y tiene una cantidad infinita de descendientes. La primera cabeza en esta sucesión es la cabeza inicial. Repetidamente, consideramos la última cabeza en la sucesión, la cual tiene una cantidad infinita de descendientes por hipótesis. Como esta cabeza solo tiene una cantidad finita de hijos, alguno de estos tiene una cantidad infinita de descendientes y podemos elegirla como la siguiente cabeza en la sucesión. La existencia de esta sucesión es un absurdo, pues supusimos que no había una sucesión infinita de cabezas tal que cada una es hija de la anterior.

Solución del problema 16. Demostraremos que $m \star n = mn$ para cualesquiera enteros no negativos m y n, por inducción fuerte en $m + n$. Si $m = 0$ o $n = 0$, no hay nada que hacer. Supongamos que $m \neq 0$, $n \neq 0$ y que para cualesquiera $m', n' \in \mathbb{N}$ con $m' + n' < m + n$, se tiene que $m' \star n' = m'n'$. En particular, $m \star n$ es el menor valor en $\mathbb{N}$ que excede al entero

$$m'n + mn' - m'n' = mn - (m - m')(n - n')$$

para cualesquiera $m', n' \in \mathbb{N}$ con $m' < m$ y $n' < n$. Este valor es siempre menor que mn y, como $mn - (m - (m-1))(n - (n-1)) = mn - 1$, deducimos que $m \star n = mn$, concluyendo la inducción.
En particular, tenemos que $2022 \star 2022 = 2022^2$.

Solución del problema 17. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Como A_2 es el punto medio de la cuerda AA_1, tenemos que OA_2 y AA_1 son perpendiculares. Luego, $\angle OA_2P = 90°$ y, por consiguiente, A_2 está sobre la circunferencia de diámetro OP.



De manera análoga, obtenemos que B_2 y C_2 están sobre la circunferencia de diámetro OP. Esto significa que los puntos A_2, B_2, C_2 y P están todos sobre una misma circunferencia.

Solución del problema 18. Es claro que $a > 1$, $b > 1$ y $c > 1$. Como mcd$(a-1, a) = 1$ y $a - 1$ divide al producto $a(b + 1)$, necesariamente $a - 1$ debe dividir a $b + 1$. De manera análoga, obtenemos que $b - 1$ divide a $c + 1$ y $c - 1$ divide a $a + 1$. Luego, existen enteros positivos α, β y γ tales que $b + 1 = \alpha(a + 1)$, $c + 1 = \beta(b - 1)$ y $a + 1 = \gamma(c - 1)$. Consideremos los siguientes casos.

a) Si $\alpha \geq 2$, $\beta \geq 2$ y $\gamma \geq 2$, entonces $a - 1 \leq \frac{b+1}{2}$, $b - 1 \leq \frac{c+1}{2}$ y $c - 1 \leq \frac{a+1}{2}$, lo cual implica que $a + b + c \leq 9$. Luego, por la desigualdad MA-MG, obtenemos que $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3 \leq (9/3)^3 = 27$.

b) Supongamos que alguno de α, β o γ es 1. Sin pérdida de generalidad, sea $\alpha = 1$. Entonces, $b + 1 = a - 1$, esto es, $b = a - 2$. Luego, $b - 1 = a - 3$ divide a $c + 1$ y $c - 1$ divide a $a + 1$. Tenemos tres casos.

- Si $a - 3 \neq c + 1$ y $c - 1 \neq a + 1$, entonces $a - 3 \leq \frac{c+1}{2}$ y $c - 1 \leq \frac{a+1}{2}$, lo cual implica que $a + c \leq 10$. Como $c \geq 2$ (pues $c > 1$ es un entero), necesariamente $a \leq 8$ y, por consiguiente, $b = a - 2 \leq 6$. Aplicando la desigualdad MA-MG, obtenemos que $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3 \leq (\frac{10+6}{3})^3 < 6^3 = 216$.
- Si $a - 3 = c + 1$, entonces $c = a - 4$. Luego, $c - 1 = a - 5$ divide a $a + 1$. De aquí que $a - 5$ divide a $a + 1 - (a - 5) = 6$, de donde se sigue que los valores posibles de a son: 6, 7, 8 y 11. Basta maximizar a para maximizar el producto abc. Con $a = 11$, obtenemos que $c = 7$ y $b = a - 2 = 9$. Luego, tenemos la terna $(a, b, c) = (11, 9, 7)$ la cual cumple las condiciones del problema y, el valor máximo del producto abc, es $11(9)(7) = 693$.
- Si $c - 1 = a + 1$, entonces $c = a + 2$. Luego, $b - 1 = (a - 2) - 1 = a - 3$ divide a $c + 1 = a + 3$ y, por lo tanto, $a - 3$ divide a $(a + 3) - (a - 3) = 6$. Se sigue que los valores posibles de a son: 4, 5, 6 y 9. Como en el caso anterior, basta

maximizar a para maximizar el producto abc. Con $a = 9$, obtenemos que $c = 11$ y $b = a - 2 = 7$. Luego, en este caso el valor máximo del producto abc es $9(7)(11) = 693$.

En conclusión, la respuesta es 693.

Solución del problema 19. Sea p un número primo mayor que 5 y sea $f(p) = p^4 - 1 = (p-1)(p+1)(p^2+1)$. Observemos que $f(7) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ y $f(11) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 61$. Demostraremos que el máximo común divisor de $f(7)$ y $f(11)$, igual a $2^4 \cdot 3 \cdot 5$, es el máximo común divisor de todos los números de la forma $p^4 - 1$.
Como p es impar, tenemos que p^2+1 es par. Como $p-1$ y $p+1$ son pares consecutivos, uno de ellos es divisible por 4. Luego, $f(p)$ es divisible por 2^4.
Como p es un primo mayor que 5, tenemos que $p \equiv 1$ o $2 \pmod 3$.

- Si $p \equiv 1 \pmod 3$, entonces 3 es divisor de $p - 1$.
- Si $p \equiv 2 \pmod 3$, entonces 3 es divisor de $p + 1$.

Luego, $f(p)$ es divisible por 3.
Como p es un primo mayor que 5, por el teorema pequeño de Fermat, tenemos que $p^4 \equiv 1 \pmod 5$, esto es, $f(p)$ es múltiplo de 5.
Por lo tanto, el máximo común divisor buscado es $2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$.

Solución del problema 20. Demostraremos que Antonio eventualmente se comerá la mitad del pastel. Sea ABC el triángulo que representa al pastel y sea K su área. Existe una constante M tal que cualquier segmento contenido en el triángulo ABC tiene longitud a lo más M (puede demostrarse que $M = 2R$ donde R es el circunradio del triángulo ABC). Si en algún momento, la forma del pastel de Antonio es un triángulo DEF tal que alguno de sus lados EF mide a lo más K/M, entonces

$$\text{Área}(DEF) \leq \frac{DE \cdot EF}{2} \leq \frac{M \cdot K/M}{2} = \frac{K}{2},$$

lo cual implica que Antonio ya se comió la mitad del pastel.
De otra forma, la máxima razón entre dos lados del pastel de Antonio será siempre menor a $N = \frac{M^2}{K}$. En particular, cada vez que el pastel ABC se corte por una bisectriz AD, con D en BC, la razón entre las áreas de los triángulos ABD y ACD es

$$\frac{\text{Área}(ABD)}{\text{Área}(ACD)} = \frac{AB \cdot AD \operatorname{sen}(\theta)}{AC \cdot AD \operatorname{sen}(\theta)} = \frac{AB}{AC} < N,$$

donde $\theta = \angle BAC/2$. En particular, el área del pastel disminuirá por un factor de al menos $\frac{N}{N+1}$. Por lo tanto, tras $\lceil \log_{(N+1)/N}(2) \rceil$ cortes, Antonio se habrá comido al menos la mitad del pastel.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2022 No. 3.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este tercer número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: `revistaomm@gmail.com` y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea $n \geq 3$ un número entero. Se quiere llenar una canasta con n pelotas de tres colores: azul, rojo y verde, de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones:

a) Hay al menos dos pelotas azules.

b) Hay al menos una pelota roja.

c) Hay un número par de pelotas verdes.

¿De cuántas maneras se puede llenar la canasta si no importa el orden de las pelotas en la canasta?

Problema 2. Decimos que una pareja de números enteros (m, n) es *invertible* si existen enteros x, y tales que $mx - ny = 1$ y $my + nx = 0$. Encuentra todas las parejas invertibles de números enteros.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con incentro I, con $BC > AB$. Si M es el punto medio de AC y N es el punto medio del arco $\widehat{AC}$ que contiene a B, demuestra que $\angle IMA = \angle INB$.

Problema 4. Sean x, y y z números reales no negativos tales que $x + y + z = 1$. Determina el valor máximo del producto

$$(x + 3y + 5z)\left(x + \frac{y}{3} + \frac{z}{5}\right).$$

Problema 5. Sydney la ardilla se encuentra en el origen $(0, 0)$ del plano. Ella puede moverse reflejando su posición sobre una recta formada por dos puntos con coordenadas enteras, siempre y cuando su reflexión caiga en otro punto con coordenadas enteras. ¿Puede Sydney llegar al punto $(2021, 2022)$?

Problema 6. Determina todos los enteros positivos a, b y c, que son solución de la ecuación

$$a!b! = a! + b! + c!$$

Problema 7. En una cuadrícula de $n \times n$, se pintan algunos cuadritos de negro. Una coloración se dice *confusa* si, al tener el cuadrito en la fila i y columna j coloreado de negro, entonces el cuadrito en la fila j y columna j está coloreado de negro. ¿Cuántas coloraciones confusas hay para cada entero positivo n?

Problema 8. Sean a y b enteros positivos tales que $2a^2 - 1 = b^{15}$. Demuestra que si $a > 1$, entonces a es múltiplo de 5.

Problema 9. Demuestra que no existen dos sucesiones acotadas de números reales $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ con la siguiente propiedad: para cualesquiera enteros positivos m y n, con $m > n$,

$$|a_m - a_n| > \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{o} \quad |b_m - b_n| > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(Nota: una sucesión de números reales $x_1, x_2, \ldots$ está *acotada* si existe un número $N > 0$ tal que $|x_i| \leq N$ para todo entero $i \geq 1$).

Problema 10. Encuentra todos los números reales a, b y c del intervalo $(0, 1]$ tales que

$$\text{mín}\left\{\sqrt{\frac{ab+1}{abc}}, \sqrt{\frac{bc+1}{abc}}, \sqrt{\frac{ac+1}{abc}}\right\} = \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}}.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2021 No. 4.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 4, año 2021. En esta ocasión, agradecemos a Titu Zvonaru y a José Hernández Santiago, por haber enviado sus soluciones y, aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar, enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2022, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Determina si existe una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de números reales positivos que satisface las siguientes dos condiciones:

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2$ para todo entero positivo n.

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2008$ para todo entero positivo n.

Solución. Demostraremos que no existe tal sucesión. Para probarlo, demostraremos que la condición 1) implica que

$$\sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}.$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la media armónica tenemos que

$$\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i\right)\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i}\right) \geq 2^{2k}$$

para cualquier entero $k \geq 0$.
Aplicando la condición 1) con $n = 2^{k+1}$, tenemos que

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} a_i < \sum_{i=1}^{2^{k+1}} a_i \leq 2^{2k+2}.$$

Luego,

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{1}{4}$$

y, por consiguiente,

$$\sum_{i=2}^{2^n} \frac{1}{a_i} > \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{a_i} > \frac{n}{4}.$$

Problema 2. Encuentra todas las ternas de enteros no negativos (x, y, z) con $x \leq y$ tales que $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$.

Solución de Titu Zvonaru. Si $z = 0$, entonces $x^2 + y^2 = 80$, de donde se obtiene la solución $(x, y, z) = (4, 8, 0)$.
Supongamos que $z > 0$. Como $2016 = 7 \cdot 288$, deducimos que $x^2 + y^2$ es divisible por 7. Como los residuos cuadráticos módulo 7 son 0, 1, 2 y 4, es fácil que ver que x y y son divisibles por 7. Haciendo $x = 7a$ y $y = 7b$, la ecuación es equivalente a $49a^2 + 49b^2 = 3 \cdot 7^z \cdot 288^z + 77$, esto es,

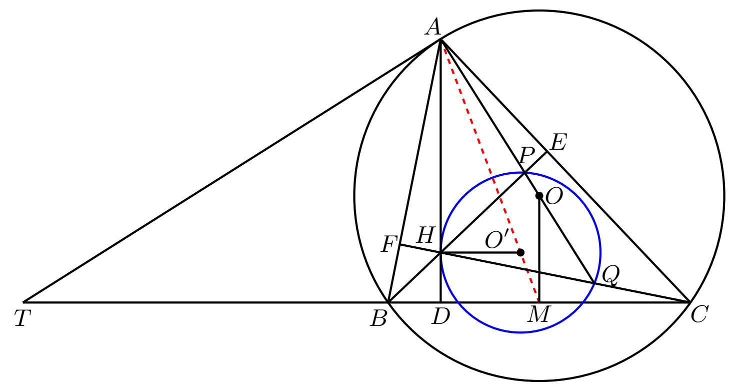
$$7a^2 + 7b^2 = 3 \cdot 7^{z-1} \cdot 288^z + 11. \tag{56}$$

Si $z > 1$, entonces el lado derecho de (56) no es múltiplo de 7 (pues es congruente con 4 módulo 7). Se sigue que $z = 1$ y la ecuación a resolver es $7a^2 + 7b^2 = 875$, que es equivalente a $a^2 + b^2 = 125$, cuyas soluciones (a, b) son $(2, 11)$ y $(5, 10)$, así que las ternas (x, y, z) en este caso son $(14, 77, 1)$ y $(35, 70, 1)$.

Solución de José Hernández Santiago. Para cada entero positivo n denotemos con $\nu_7(n)$ al exponente de 7 en la factorización canónica del número n.
Notemos que $3 \cdot 2016^z + 77 = 7(3 \cdot 288^z \cdot 7^{z-1} + 11)$. Si $z \geq 2$, en vista de que $7 \nmid (3 \cdot 288^z \cdot 7^{z-1} + 11)$, se sigue que $\nu_7(3 \cdot 2016^z + 77) = 1$. Luego, si la igualdad $x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77$ se cumple para algún entero $z \geq 2$, entonces 7 es un divisor de $x^2 + y^2$. Como 7 divide a $x^2 + y^2$ si y solo si $7 \mid x$ y $7 \mid y$, tenemos que $2 \leq \nu_7(x^2 + y^2) = \nu_7(3 \cdot 2016^z + 77) = 1$, lo que es un absurdo.
Por lo tanto, $z = 0$ o $z = 1$. Si $z = 0$, entonces $(x, y, z) = (4, 8, 0)$. Si $z = 1$, entonces las ternas (x, y, z) son $(14, 77, 1)$ y $(35, 70, 1)$.

Problema 3. Sean O y H el circuncentro y el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, respectivamente. Se eligen puntos P y Q sobre la recta AO de tal forma que BP es perpendicular a AC y CQ es perpendicular a AB. Demuestra que el circuncentro del triángulo PQH está sobre una de las medianas del triángulo ABC.

Solución. Sea O' el circuncentro del triángulo HPQ y sea M el punto medio de BC. Demostraremos que O' está sobre la mediana AM. Sean D, E y F los pies de alturas desde A, B y C sobre BC, CA y AB, respectivamente. Como AH y AO son isogonales, tenemos que $\angle PQH = \angle AQH = 90° - \angle FAQ = 90° - \angle HAC = \angle ACB$. De forma similar, podemos ver que $\angle HPQ = \angle ABC$. Esto significa que los triángulos ABC y HPQ son semejantes. Más aún, como el cuadrilátero $HECD$ es cíclico, tenemos que $\angle AHP = \angle AHE = \angle BCA = \angle HQP$, lo que implica que AH es tangente al circuncírculo del triángulo HPQ en H. Luego, si T es el punto de intersección de BC con la tangente al circuncírculo del triángulo ABC que pasa por A, se tiene que T y A son puntos correspondientes en la semejanza entre los triángulos ABC y HPQ. Como O y O' también son puntos correspondientes bajo esta misma semejanza, se sigue que los triángulos AHO' y TAO también son semejantes.



Por otro lado, es fácil ver que el cuadrilátero $TAOM$ es cíclico (pues OM es perpendicular a TM y OA es perpendicular a AT por construcción). Así, $\angle TOA = \angle TMA = \angle DMA$. Además, $\angle MDA = 90° = \angle TAO$. Se sigue que los triángulos TAO y ADM son semejantes y, por lo tanto, también son semejantes los triángulos AHO' y ADM. Como O' y M se encuentran en el mismo semiplano respecto a la recta AD, de la semejanza anterior concluimos que A, O' y M son colineales, como se quería.

Problema 4. Determina todos los enteros $s \geq 4$ para los cuales existen enteros positivos a, b, c y d, tales que $s = a + b + c + d$ y s divide a $abc + abd + acd + bcd$.

Solución. Si $s \geq 4$ no es primo, podemos escribir $s = xy$ con $x \geq 2$, $y \geq 2$ y tomar $(a, b, c, d) = (1, x - 1, y - 1, (x - 1)(y - 1))$, lo cual funciona porque entonces

$$abc + abd + acd + bcd = xy(x - 1)(y - 1).$$

Afirmación. $(a + b)(a + c)(b + c)$ es múltiplo de s.
Demostración. Como $d \equiv -(a + b + c) \pmod{s}$, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\equiv abc - (a + b + c)(ab + bc + ac) \pmod{s} \\ &\equiv -(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc) \pmod{s} \\ &\equiv -(a + b)(a + c)(b + c) \pmod{s}. \quad \square \end{aligned}$$

Si s es primo, entonces por la afirmación anterior s debe dividir a alguno de $a+b$, $a+c$ o $b + c$, lo cual es una contradicción, pues estos números son menores que s.
Por lo tanto, los números que satisfacen el problema son los números $s \geq 4$ que no son primos.

Problema 5. Cuarenta y un torres son puestas en un tablero de ajedrez de 10×10. Demuestra que hay cinco torres que no se atacan entre sí. (Dos torres se atacan si ambas están en la misma fila o en la misma columna).

Solución. Por el principio de las casillas, hay una fila f_1 con al menos 5 torres. Ignorando las torres en la fila f_1 quedan al menos 31 torres (las 41 torres menos las posibles

10 torres en la fila) y 9 filas. Por el principio de las casillas, hay una fila f_2 con al menos 4 torres. Ignorando las torres en las filas f_1 y f_2 quedan al menos 21 torres en 8 filas. Por el principio de las casillas, hay una fila f_3 con al menos 3 torres. Ignorando las torres en las filas f_1, f_2 y f_3, quedan al menos 11 torres en 7 filas. Por el principio de las casillas, hay una fila f_4 con al menos 2 torres. Ignorando las torres en f_1, f_2, f_3 y f_4, queda al menos una torre, entonces hay una fila f_5 con al menos una torre.
Tomamos una torre de f_5, como en f_4 hay al menos dos torres, entonces hay alguna torre que no está en la misma columna, escojamos esa torre. Como en f_3 hay al menos tres torres, entonces hay alguna torre que no está en la misma columna que la que escogimos de f_5 y la que escogimos de f_4, escojamos esa torre. Como en f_2 hay al menos 4 torres, de la misma manera que antes, hay alguna torre que no está en las columnas escogidas por f_5, f_4 y f_3. Finalmente, como f_1 tiene al menos 5 torres entonces tiene al menos una torre que no está en ninguna de las columnas escogidas. Por lo tanto, esas 5 torres que escogimos (una de cada una de las filas f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) no se atacan entre sí.

Problema 6. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo. Demuestra que

$$2 < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{6}.$$

Solución de Titu Zvonaru. De la desigualdad MA-MG tenemos que:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot \frac{b+c}{a}}} \geq \frac{2}{1+\frac{b+c}{a}} = \frac{2a}{a+b+c}, \tag{57}$$

con la igualdad si y solo si $1 = \frac{b+c}{a}$. Pero por la desigualdad del triángulo, $a < b + c$, así que la desigualdad (57) es estricta. Se sigue entonces que:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2.$$

Por otra parte, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \leq \sqrt{3\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)} \tag{58}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $c \geq a$ y $c \geq b$. Entonces, $\frac{a}{b+c} \leq \frac{a}{b+a}$ y $\frac{b}{c+a} \leq \frac{b}{b+a}$. Además, por la desigualdad del triángulo, $c < a + b$, así que $\frac{c}{a+b} < 1$. Sumando las desigualdades anteriores y usando (58) obtenemos que

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} < \sqrt{3\left(\frac{a}{b+a} + \frac{b}{b+a} + 1\right)} = \sqrt{6}.$$

Problema 7. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ enteros que satisfacen

$$a_{n+5} + a_n > a_{n+2} + a_{n+3}$$

para cada entero $1 \leq n \leq 2016$.
Determina el menor valor posible de la diferencia entre el mayor y el menor número de la lista $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$.

Solución. Escribamos la desigualdad como $a_{n+5} - a_{n+2} \geq a_{n+3} - a_n + 1$, de donde podemos demostrar inductivamente que $a_{n+2k+3} - a_{n+2k} \geq a_{n+3} - a_n + k$. Reacomodamos de nuevo, ahora como $a_{n+2k+3} - a_{n+3} \geq a_{n+2k} - a_n + k$, de donde podemos demostrar inductivamente que $a_{n+2k+3m} - a_{n+2k} - a_{n+3m} + a_n \geq km$. Para $n = 1, k = 506, m = 336$ esto nos dice que $a_{2021} - a_{1013} - a_{1009} + a_1 \geq 506 \cdot 336$ lo cual implica que alguna de las diferencias $a_{2021} - a_{1013}$ o $a_1 - a_{1009}$ es mayor o igual que $\frac{506 \cdot 336}{2} = 85008$.
Ahora proporcionamos una construcción donde esta es la mayor diferencia entre dos de los números de nuestra construcción. Un cálculo sencillo muestra que la sucesión definida por $A_n = \frac{(n-1011)^2}{12}$ satisface que $A_{n+5} + A_n - A_{n+2} - A_{n+3} = 1$, por lo que se cumple la condición de la desigualdad. Buscaremos ahora modificar esta sucesión de tal forma que sus términos sean números enteros.
Consideremos una sucesión donde

$$\ldots, c_{-3} = -3, c_{-2} = 4, c_{-1} = 1, c_0 = 0, c_1 = 1, c_2 = 4, \ldots$$

y extendámosla de forma periódica hacia ambos lados (con periodo 6). Uno puede verificar fácilmente que esta sucesión satisface $c_{n+5} + c_n = c_{n+2} + c_{n+3}$. Ahora definamos la sucesión modificada $a_n = \frac{(n-1011)^2 - c_{n-1011}}{12}$. Como $c_{n+5} + c_n = c_{n+2} + c_{n+3}$, se sigue cumpliendo que $a_{n+5} + a_n - a_{n+2} - a_{n+3} = 1$. Además podemos observar que $a_{1009} = a_{1010} = a_{1011} = a_{1012} = a_{1013} = 0$. Para otra k se tiene que $|k - 1011| \geq 3$ y así $a_k = \frac{(k-1011)^2 - c_{n-1011}}{12} \geq \frac{3^2-4}{12} > 0$, por lo que todos los términos son no negativos y, además, podemos mostrar con inducción que son enteros por la condición $a_{n+5} + a_n - a_{n+2} - a_{n+3} = 1$. Ahora, los términos más grandes de esta sucesión son $a_1 = a_{2021} = \frac{1010^2-4}{12} = \frac{1012 \cdot 1008}{12} = 85008$. Se sigue que la máxima diferencia es 85008.

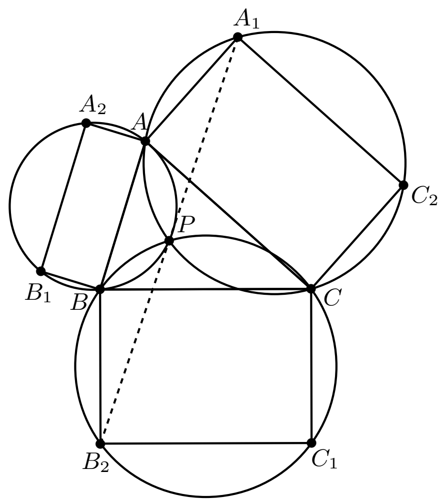
Problema 8. Se construyen los rectángulos BCC_1B_2, CAA_1C_2 y ABB_1A_2 en el exterior del triángulo ABC. Si $\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180°$, demuestra que las rectas B_1C_2, C_1A_2 y A_1B_2 son concurrentes.

Solución. Demostraremos que

a) Los circuncírculos de BCC_1B_2, CAA_1C_2 y ABB_1A_2 concurren en un punto P.

b) Los puntos A_1, P y B_2 son colineales. Análogamente, lo son B_1, P, C_2 y también lo son C_1, P, A_2.

a) Sea $P \neq A$ el segundo punto de intersección de los circuncírculos de CAA_1C_2 y ABB_1A_2. Mostraremos que P también está en el circuncírculo de BCC_1B_2.



Tenemos que $\angle APC = 180^\circ - \angle CA_1A$ y $\angle BPA = 180^\circ - \angle AB_1B$. Luego, $\angle CPB = 360^\circ - \angle APC - \angle BPA = \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180^\circ - \angle BC_1C$, como queríamos.
b) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\angle A_1PB_2 &= \angle A_1PA + \angle APB + \angle BPB_2 \\
&= \angle A_1CA + (180^\circ - \angle AB_1B) + \angle BC_1B_2 \\
&= (90^\circ - \angle CA_1A) + (180^\circ - \angle AB_1B) + (90^\circ - \angle BC_1C) \\
&= 360^\circ - (\angle CA_1A + \angle AB_1B + \angle BC_1C) \\
&= 180^\circ.
\end{aligned}$$

Cálculos similares prueban las otras dos colinealidades.
La segunda afirmación muestra que P es el punto de concurrencia deseado.

Problema 9. Para cada entero positivo n, demuestra que existe un entero de n dígitos cuyo cuadrado termina en los mismos n dígitos.

Solución. Si $n = 1$, el resultado es evidentemente cierto. Supongamos que $n > 1$. Queremos encontrar un número x de n dígitos tal que $x^2 \equiv x \pmod{10^n}$, esto es, $x(x-1) \equiv 0 \pmod{10^n}$. Como x y $x-1$ son primos relativos, hay dos posibilidades para x, las cuales son

$$x \equiv 0 \pmod{2^n}, \quad x \equiv 1 \pmod{5^n}, \tag{59}$$

o

$$x \equiv 1 \pmod{2^n}, \quad x \equiv 0 \pmod{5^n}. \tag{60}$$

Por el teorema chino del residuo, cada uno de los sistemas de congruencias (59) y (60), tiene solución. Sean x_1 una solución de (59) y x_2 una solución de (60). Entonces, tenemos que

$$x_1 + x_2 \equiv 0 + 1 \equiv 1 \pmod{2^n},$$

y

$$x_1 + x_2 \equiv 1 + 0 \equiv 1 \pmod{5^n}.$$

Por lo tanto, $x_1 + x_2 \equiv 1 \pmod{10^n}$. Tomando $1 < x_1 < 10^n$ y $1 < x_2 < 10^n$, resulta que $2 < x_1 + x_2 < 2 \cdot 10^n$, de donde obtenemos que $x_1 + x_2 = 10^n + 1$. Entonces, alguno de x_1 o x_2 es al menos $\frac{10^n+1}{2}$. Como $10^n > \frac{10^n+1}{2} > 10^{n-1}$ para $n \geq 1$, alguno de x_1 o x_2 es un número de n dígitos.

Problema 10. Betal marca 2021 puntos en el plano entre los cuales no hay 3 colineales y dibuja todos los segmentos de recta entre cualesquiera dos de estos puntos. A continuación escoge 1011 de estos segmentos y marca sus puntos medios. Finalmente, escoge un segmento cuyo punto medio no ha sido marcado y reta a Vikram a construir su punto medio utilizando solo una regla. ¿Podrá Vikram completar este reto siempre? Nota: La regla es de longitud infinita, sin marcas y sirve únicamente para trazar la recta entre cualesquiera dos puntos.

Solución. Comenzamos probando el siguiente resultado conocido.
Lema. Sean A, B, C tres puntos no colineales en el plano; luego, dado ya sea el punto medio de BC o la recta paralela a BC por A, podemos construir el otro únicamente con la ayuda de una regla.
Demostración. Sean ℓ una recta cualquiera por A y exterior al triángulo ABC, A' un punto cualquiera en ℓ de distinto lado de AC que B, P la intersección de $A'B$ y AC, K la intersección de AB y $A'C$ y, M la intersección de KP y BC. Por el teorema de Ceva en el triángulo KBC con punto interior P, tenemos que

$$\frac{KA}{AB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CA'}{A'K} = 1.$$

Luego, M es el punto medio de BC si y solo si $\frac{BM}{MC} = 1$, si y solo si $\frac{KA}{AB} \cdot \frac{CA'}{A'K} = 1$, si y solo si $\frac{KA}{AB} = \frac{KA'}{A'C}$, si y solo si AA' es paralela a BC.
Ahora, si queremos construir el punto medio de BC a partir de la recta paralela a BC por A, simplemente llamamos ℓ a esta recta, marcamos cualquier punto P en el segmento AC, luego la intersección A' de BP y ℓ, la intersección K de AB y $A'C$, y la intersección M de KP y BC. Por el párrafo anterior, M es el punto medio de BC.
De forma inversa, si queremos construir la recta paralela a BC por A a partir del punto medio de BC, llamemos M a este punto, marquemos cualquier punto P en el segmento AC, luego la intersección K de AB y PM, y finalmente la intersección A' de BP y KC. Por el primer párrafo, AA' es paralela a BC. $\square$

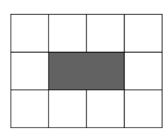
Volviendo al problema, como nos dan 1011 segmentos, tenemos $2 \cdot 1011 > 2021$ extremos, así que dos de los segmentos dados tienen un extremo en común. Por lo tanto, tenemos un triángulo XYZ y nos dan los puntos medios de XY y XZ. Ahora mostramos que podemos construir el punto medio de cualquier segmento PQ en el plano (donde P y Q no están en los lados de XYZ). En efecto, con el lema anterior, tracemos la recta por P paralela a XY y la recta por Q paralela a XZ. Estas rectas se cortan en un punto R, pues son respectivamente paralelas a dos rectas secantes. Ahora, $XY \parallel RP$, así que podemos construir el punto medio de RP. Análogamente, podemos construir el punto medio de RQ. La recta por estos puntos medios debe ser paralela a PQ y, de nuevo por el lema anterior, podemos construir el punto medio de PQ, que es lo que queríamos lograr. Se sigue que Vikram siempre puede lograr su objetivo.

Examen Semifinal Estatal de la 36^{a} OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen semifinal estatal de la 36^a OMM propuesto por el Comité Organizador. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

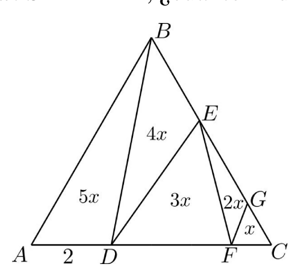
Primer día

Problema 1. En los cuadritos de la siguiente figura se deben distribuir los números enteros del 1 al 10 de tal forma que sean iguales las sumas de los números en cada columna y en cada renglón. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener esa suma?



Problema 2. El producto de tres números enteros distintos es 6336. Si el mayor es igual a 12 veces el menor, ¿cuáles son los tres números?

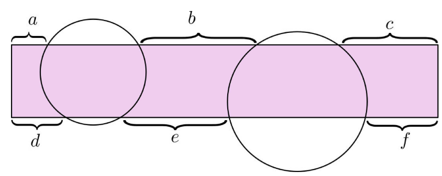
Problema 3. El triángulo equilátero ABC está partido como se muestra en la figura. El área de GFC es x, el área de EFG es $2x$, el área de EDF es $3x$, el área de BED es $4x$ y el área de BAD es $5x$. Si $AD = 2$, ¿cuánto mide EG?



Segundo día

Problema 4. En un encuentro de basquetbol del equipo A contra el equipo B, el auditorio tiene asientos acomodados en un arreglo rectangular. En cada una de las filas se encuentran sentados 11 espectadores que apoyan al equipo A. En cada columna hay 14 espectadores que le van al equipo B. Quedaron vacíos 17 asientos. ¿Cuántos asientos puede tener el auditorio?

Problema 5. Dos círculos cortan un rectángulo y los segmentos fuera de los círculos miden a, b, c, d, e, f, como se muestra. Probar que $a + e + c = d + b + f$.



Problema 6. La sucesión $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \ldots$ contiene todas las potencias de 3 y todos los números que se pueden escribir como suma de dos o más potencias distintas de 3. Notamos que $820 = 3^6 + 3^4 + 3^2 + 1$, así que 820 es un término de esta sucesión. ¿En qué lugar de la sucesión se encuentra el número 820?

Soluciones del Examen Semifinal Estatal de la 36ª OMM

Problema 1. Supongamos que los números ya están acomodados con la máxima suma S y que E es la suma de los números en las esquinas. Sumando los números de las dos columnas y de los dos renglones, obtenemos que

$$4S = (1 + 2 + \cdots + 10) + E = 55 + E.$$

Como $E \leq 7 + 8 + 9 + 10 = 34$, resulta que $4S \leq 89$, de donde $S \leq 22$, ya que S es un número entero. Veamos que hay una solución con $S = 22$. Supongamos que los números son a, b, c, d, x, y, r, s, t, u como se muestra en la figura.

a	r	s	b
x			y
c	t	u	d

Tenemos que $a+r+s+b = c+t+u+d = 22$, así que $(a+r+s+b)+(c+t+u+d) = 44$, pero $a+b+c+d = E = 33$, de donde $r+s+t+u = 44-33 = 11$. La única posibilidad es $\{r, s, t, u\} = \{1, 2, 3, 5\}$. Análogamente, $x + y = 11$, así que $\{x, y\} = \{4, 7\}$. Una posible solución se indica a continuación.

6	1	5	10
7			4
9	3	2	8

Problema 2. Tenemos que $6336 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 11$. Supongamos que los números son $a < b < c$. Entonces, $6336 = a \cdot b \cdot 12a$, de donde $2^4 \cdot 3 \cdot 11 = \frac{6336}{12} = a^2 b$. Por otro lado, a no puede tener factor 3 ni 11 puesto que 6336 no tiene factor 3^3 ni 11^2. Entonces, $a = 2^2 = 4$, $b = 3 \cdot 11 = 33$ y $c = 48$.

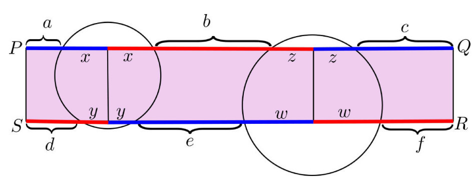
Problema 3. Los triángulos ABD y DBC tienen la misma altura en B y, como $4x + 3x + 2x + x = 10x$, el área del triángulo ABD es la mitad del área del triángulo BDC, de donde $DC = 4$ y así, cada lado del triángulo mide $2 + 4 = 6$. Escribamos $d = GC$. Los triángulos FCG y FGE tienen la misma altura desde F y, usando un argumento análogo al anterior, obtenemos que $EG = 2GC = 2d$.
También los triángulos BDE y EDC tienen la misma altura desde D y, otra vez, $\frac{BE}{EC} = \frac{4x}{x+2x+3x} = \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$, de donde $BE = \frac{2}{3}$, $EC = \frac{2}{3}$ y $3d = 2d$. Así, $6 = BC = BE + EG + GC = 2d + 2d + d = 5d$, de donde $d = \frac{6}{5}$ y $EG = 2d = \frac{12}{5}$.

Problema 4. Sean f el número de filas y c el número de columnas. Entonces, el número total de asientos es $fc = 11f + 14c + 17$. De aquí tenemos que $(f - 14)(c - 11) = 171$. Como $f - 14$ y $c - 11$ son enteros positivos y $171 = 3^2 \cdot 19$, las posibilidades para $(f - 14, c - 11)$ son $(1, 171)$, $(3, 57)$, $(9, 19)$, $(19, 9)$, $(57, 3)$, $(171, 1)$, así que las posibilidades para (f, c) son $(15, 182)$, $(17, 68)$, $(23, 30)$, $(33, 20)$, $(71, 14)$ y $(185, 12)$ y, las posibilidades para fc, son 2730, 1156, 690, 660, 994 y 2220.

Problema 5. Por el centro de cada círculo tracemos paralelas al lado menor del rectángulo. Sean x, y, z y w las mitades de las longitudes de las cuerdas, como se indica en la figura. Entonces, $x + b + z = y + e + w$, de donde

$$(a + x) + (y + e + w) + (z + c) = (d + y) + (x + b + z) + (w + f).$$

Cancelando x, y, z y w, obtenemos que $a + e + c = d + b + f$.



Problema 6. Los números de la sucesión son los que se pueden escribir en la forma

$$a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n,$$

con los $a_i \in \{0, 1\}$ no todos 0. Para n fijo, hay $2^n - 1$ expresiones de este tipo. Además, todas son distintas. En efecto, si A y B son dos expresiones de este tipo, digamos

$$A = a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n,$$
$$B = b_0 + 3b_1 + 3^2 b_2 + \cdots + 3^n b_n,$$

(con, posiblemente, a_n o $b_n = 0$) y r es el mayor entero tal que $a_r \neq b_r$, entonces, sin pérdida de generalidad $a_r = 0$ y $b_r = 1$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} B - A &= (b_0 + 3b_1 + 3^2 b_2 + \cdots + 3^r b_r) - (a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^{r-1} a_{r-1}) \\ &\geq (b_0 + 3b_1 + 3^2 b_2 + \cdots + 3^r) - (3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{r-1}) \\ &\geq 3^r - \frac{3^r - 1}{2} = \frac{2 \cdot 3^r - 3^r + 1}{2} = \frac{3^r + 1}{2} > 0, \end{aligned}$$

de donde $B > A$.
Ahora, como hay $2^n - 1$ expresiones de la forma $a_0 + 3a_1 + 3^2 a_2 + \cdots + 3^n a_n$, con $a_i \in \{0, 1\}$ no todos 0, tenemos que en la posición 2^n se encuentra el número 3^n, así que para $n = 6$, $2^n - 1 = 63$ y el número 820 se encuentra en la posición $2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 64 + 16 + 4 + 1 = 85$.

1^{a} Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas Concurso Nacional (Virtual)

La Comisión de Igualdad, Diversidad y Prevención de la Violencia de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas organizó, del 31 de enero al 6 de febrero de 2022, el Primer Concurso Nacional Femenil de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas en formato virtual.

Los exámenes se llevaron a cabo los días 1, 2 y 3 de febrero. Se aplicaron dos exámenes individuales y un examen por equipos. La competencia se dividió en dos niveles:

- Nivel I: Tercero de secundaria y primer año de bachillerato.
- Nivel II: Últimos dos años de bachillerato.

Participaron 25 estados de la República Mexicana, con un total de 145 concursantes, 25 líderes y 70 personas en rol de tutoras. Para el examen por equipos cada delegación participó con dos equipos de 3 alumnas cada uno, en niveles diferentes.

Cabe destacar la participación mayoritaria de mujeres en las labores académicas de esta olimpiada. Por ejemplo, de las 41 personas que integraron el tribunal de evaluación, 35 fueron mujeres que se relacionan con las matemáticas en sus estudios o su profesión. En la elaboración de los exámenes colaboraron 9 académicas provenientes de distintas regiones del país (de un total de 11 personas).

Esta olimpiada surge como un esfuerzo temporal que ayude al balance de género dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y que deje de realizarse una vez que se logre este objetivo.

A continuación listamos los nombres de las alumnas ganadoras de medalla de oro en la prueba individual en ambos niveles de la competencia. Las ganadoras de medalla de oro en el Nivel I, integran la preselección nacional para la Olimpiada Femenil Panamericana de Matemáticas (PAGMO).

Nivel I

Nombre	**Estado**
Constanza Huerta Carvajal	Ciudad de México
Lucero Díaz Ortega	Nuevo León
Camila Campos Juárez	Sinaloa
Ana Camila Cuevas González	Tamaulipas
Alejandra Muñoz Espin	Morelos
María Fernanda López Tuyub	Yucatán
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos
Rosa Victoria Cantú Rodríguez	Ciudad de México

Nivel II

Nombre	**Estado**
María Fernanda Montoya López	Sinaloa
Sandra Gabriela García Barraza	Sonora
Marcela Aguirre Valdez	Sinaloa
Diana Laura Garza De la Riva	Coahuila
Cynthia Naely López Estrada	Guanajuato
Megan Ixchel Monroy Rodríguez	Hidalgo
Andrea Escalona Contreras	Morelos
Alexandra Valdepeñas Ramírez	Coahuila

En la prueba por equipos, el equipo ganador de medalla de oro lo obtuvo un equipo de la Ciudad de México, el cual estuvo integrado por: Rosa Victoria Cantú Rodríguez, Constanza Huerta Carvajal y Marlen Alva García.

Al valorar el desempeño general por estados, el primer lugar lo obtuvo el Estado de Morelos, el segundo lugar la Ciudad de México y el tercer lugar el Estado de Sinaloa.

A continuación presentamos los problemas y soluciones del Concurso Nacional de la 1^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas (Virtual). La prueba individual en cada nivel consta de dos exámenes con 3 problemas cada uno, para resolver en dos sesiones de 4.5 horas cada una. El examen por equipos consta también de 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas.

Prueba Individual

Primer día

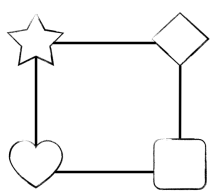
Problema 1. (Nivel I) Sean $ABCD$ un cuadrilátero, E el punto medio del lado BC, y F el punto medio del lado AD. El segmento AC interseca al segmento BF en M y al segmento DE en N. Si además se sabe que el cuadrilátero $MENF$ es paralelogramo, demuestra que $ABCD$ también es un paralelogramo.

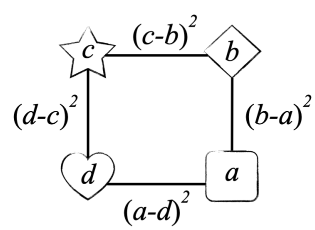
Solución. Dado que $MENF$ es un paralelogramo, tenemos que FM y NE son paralelas, así como también lo son FB y DE. Esto implica que los triángulos CNE y CMB son semejantes, así como también los triángulos AMF y AND. Entonces, por razón de semejanza, tenemos que $\frac{DN}{FM} = \frac{AD}{AF} = 2$ y $\frac{MB}{NE} = \frac{BC}{CE} = 2$. Ya que $MENF$ es un paralelogramo, los segmentos MF y EN tienen la misma longitud. Luego,

$$\begin{aligned} FB = FM + MB &= FM + 2 \cdot NE \\ &= NE + 2 \cdot FM = NE + ND = DE. \end{aligned}$$

Como FB y DE son paralelas y $FB = DE$, tenemos que $FBED$ es un paralelogramo y, por consiguiente, sus lados opuestos BE y FD son paralelos y de igual longitud. Por lo tanto, BC y AD son paralelas y, usando que $BC = 2 \cdot BE = 2 \cdot FD = AD$, concluimos.

Problema 2. (Niveles I y II) En el entrenamiento de un estado, la entrenadora les propone un juego. La entrenadora escribe en el pizarrón cuatro números reales en orden de menor a mayor: $a < b < c < d$. Cada olímpica dibuja en su cuaderno la figura de la izquierda y acomoda los números dentro de las formas de las esquinas, de la manera que ella quiera, poniendo un número en cada una. Una vez acomodados, sobre cada segmento escribe el cuadrado de la diferencia de los números en sus extremos. Después, suma los 4 números obtenidos.





Por ejemplo, si Vania los acomoda como en la figura de la derecha, entonces el resultado le quedaría

$$(c-b)^2 + (b-a)^2 + (a-d)^2 + (d-c)^2.$$

Ganan las olímpicas que obtienen el menor resultado. ¿De qué maneras pueden acomodar los números para ganar? Da todas las soluciones.

Solución. El problema es equivalente a encontrar las permutaciones de los valores a, b, c, d que, al asignarse a las variables p, q, r, s, minimizan el valor de la expresión

$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}&(p-q)^2+(q-r)^2+(r-s)^2+(s-p)^2\\ &=2(p^2+q^2+r^2+s^2-(pq+qr+rs+sp))\\ &=2(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(p+r)(q+s).\end{aligned}$$

Entonces, basta maximizar el producto $(p+r)(q+s)$. Para cualquier permutación p, q, r, s, tenemos que $(p+r)(q+s)\in\{(a+b)(c+d),(a+c)(b+d),(a+d)(b+c)\}$. Es fácil ver que

$$(a+b)(c+d)<(a+c)(b+d) \iff ac+bd<ab+cd \iff (b-c)(a-d)>0.$$

Además,

$$(a+c)(b+d)<(a+d)(b+c) \iff ad+bc<ac+bd \iff (c-d)(a-b)>0.$$

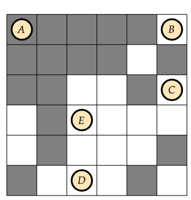
Por lo tanto, el valor máximo posible de $(p+r)(q+s)$ es $(a+d)(b+c)$. Para alcanzar este valor, debemos tener que $\{p,r\}=\{a,d\}$ o $\{p,r\}=\{b,c\}$. Por lo tanto, las permutaciones (p,q,r,s) que satisfacen lo buscado son: (a,b,d,c), (a,c,d,b), (b,a,c,d), (b,d,c,a), (c,d,b,a), (c,a,b,d), (d,b,a,c) y (d,c,a,b).

Problema 3. (Niveles I y II) Se van a colorear todas las casillas de un tablero de 2022×2022 de blanco o negro. En varias de estas casillas se van a colocar fichas, a lo más una por casilla. Decimos que dos fichas *se atacan mutuamente*, cuando se cumplen estas dos condiciones:

a) Hay un camino de cuadritos que une las casillas en donde fueron colocadas las fichas. Este camino puede tener dirección horizontal, vertical, o diagonal.

b) Todas las casillas en este camino, incluyendo las casillas donde están las fichas, son del mismo color.

Por ejemplo, la siguiente figura muestra un ejemplo pequeño de una posible coloración de un tablero de 6×6, con fichas A, B, C, D, y E colocadas. Los pares de fichas que se atacan mutuamente son (D,E), (C,D), y (B,E).



¿Cuál es el máximo valor de k tal que es posible colorear el tablero y colocar k fichas sin que ningún par de ellas se ataquen mutuamente?

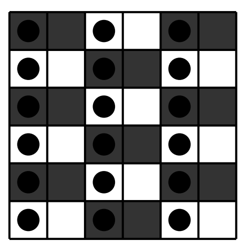
Solución. Observemos que en un tablero de 2×2 es imposible que haya más de 2 fichas pues, de haber 3, por el principio de las casillas habrá dos del mismo color y estas siempre se atacarán. El tablero de 2022×2022 se puede dividir en $\left(\frac{2022}{2}\right)^2 = \frac{2022^2}{4}$ subtableros de dimensiones 2×2. Como en cada uno de estos subtableros puede haber a lo mucho 2 fichas, obtenemos esta cota superior:

$$\#\text{fichas colocadas} \leq \frac{2022^2}{2}.$$

Probemos que esta cantidad es alcanzable. Para esto, coloreemos el tablero de 2022×2022 de la siguiente manera:

- Numeramos las filas del 1 al 2022 de arriba a abajo.
- En cada fila impar se colorean de izquierda a derecha 2 casillas negras seguidas de 2 casillas blancas de forma alternada.
- En las filas pares se colorean de izquierda a derecha 2 casillas blancas seguidas de 2 casillas negras de forma alternada.
- Se colocan fichas en cada casilla de las columnas impares.

La siguiente figura ilustra la coloración de las casillas y posición de las fichas en las primeras 6 filas y columnas (los círculos negros representan fichas).



Observemos que no hay dos fichas que se ataquen. En efecto, un ataque vertical no es posible porque para toda ficha, las casillas que están inmediatamente arriba o abajo son de diferente color que la casilla donde está colocada. Un ataque horizontal tampoco es posible porque para cualesquiera fichas en la misma fila, el camino de casillas que las une contiene casillas tanto blancas como negras. Una observación análoga es suficiente para argumentar que un ataque diagonal tampoco es posible. Por lo tanto, esta construcción cumple todas las condiciones deseadas. En total, el número de fichas en este acomodo es

$$\#(\text{columnas impares}) \cdot 2022 = \frac{2022}{2} \cdot 2022.$$

Problema 4. (Nivel II) Sea k un entero positivo y sea m un entero impar. Prueba que existe un entero positivo n tal que $n^n - m$ es divisible por 2^k.

Solución. La prueba la haremos por inducción en k. Para $k = 1$ se puede tomar $n = 1$. Ahora, para algún $k \geq 1$, supongamos que existe un entero positivo n_0 tal que 2^k divide a $n_0^{n_0} - m$. Es claro que n_0 es impar.

Si 2^{k+1} divide a $n_0^{n_0} - m$, no hay nada más qué hacer. Así, supongamos que 2^{k+1} no divide a $n_0^{n_0} - m$. Entonces existe u entero impar tal que $n_0^{n_0} - m = u \cdot 2^k$. Además, por el teorema de Euler, para cualquier impar a tenemos que $a^{2^k} \equiv 1 \pmod{2^{k+1}}$. Tomando $n = n_0 + 2^k$, tenemos que

$$\begin{aligned} n^n - m &\equiv \left(n_0 + 2^k\right)^{n_0 + 2^k} - m \equiv \left(n_0 + 2^k\right)^{n_0} \left(n_0 + 2^k\right)^{2^k} - m \\ &\equiv \left(n_0 + 2^k\right)^{n_0} - m \pmod{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Módulo 2^{k+1} tenemos que

$$\left(n_0 + 2^k\right)^{n_0} = \sum_{\ell=0}^{n_0} \binom{n_0}{\ell} n_0^{n_0 - \ell} \left(2^k\right)^{\ell} \equiv n_0^{n_0} + \binom{n_0}{1} n_0^{n_0 - 1} 2^k \equiv n_0^{n_0} + n_0^{n_0} 2^k$$

y, por lo tanto,

$$n^n - m \equiv n_0^{n_0} + n_0^{n_0} 2^k - m \equiv \left(n_0^{n_0} - m\right) + n_0^{n_0} 2^k \equiv u \cdot 2^k + n_0^{n_0} 2^k \equiv \left(u + n_0^{n_0}\right) 2^k.$$

Tanto u como n_0 son impares, por lo que $u + n_0^{n_0}$ es par. Esto significa que $\left(u + n_0^{n_0}\right) 2^k$ es divisible por 2^{k+1}, es decir, que $n^n - m$ es divisible por 2^{k+1}, lo cual concluye la inducción.

Segundo día

Problema 5. (Nivel I) Un biólogo encontró un estanque con ranas. A la hora de clasificarlas por su masa notó lo siguiente: *Las 50 ranas más livianas representaban el* $30\,\%$ *de la masa total de todas las ranas del estanque, mientras que las 44 ranas más pesadas representaban el* $27\,\%$ *de la masa total.* Por cosas del destino las ranas escaparon y el biólogo sólo cuenta con la anterior información. ¿Cuántas ranas había en el estanque?

Solución. Sean M_1 el conjunto de las 50 ranas más livianas, M_2 el conjunto de las 44 ranas más pesadas, m_1 el promedio de las masas de las ranas en M_1, m_2 el promedio de las masas de las ranas en M_2 y k la suma total de las masas de las ranas. Además, sea N el conjunto de las ranas restantes que no están en M_1 ni en M_2, y sea n el número de ranas en este último conjunto.
Observemos que para cada rana en N, su masa es mayor que m_1 pero es menor que m_2. Esto significa que la suma total de las masas de las ranas en N es mayor que nm_1 pero menor que nm_2. Como la suma de las masas en N representa $(100-30-27)\,\% = 43\,\%$ del total, obtenemos que

$$nm_1 < 0.43k < nm_2. \tag{61}$$

Sin embargo, de la información dada en el problema, sabemos que $m_1 = \frac{0.30k}{50}$ y que $m_2 = \frac{0.27k}{44}$. Sustituyendo en (61), resulta que

$$n\left(\frac{0.30k}{50}\right) < 0.43k < n\left(\frac{0.27k}{44}\right),$$

de donde $70.07 < n < 71.6$. De aquí se concluye que $n = 71$ y, por lo tanto, la cantidad de ranas que había en el estanque es igual a $71 + 50 + 44 = 165$.

Problema 6. (Niveles I y II) Sean a y b enteros positivos tales que

$$\frac{5a^4 + a^2}{b^4 + 3b^2 + 4}$$

es un número entero. Demuestra que a **no** es un número primo.

Solución. Con el fin de llegar a una contradicción, supongamos que a es primo. Si $a = 2$, entonces $b^4 + 3b^2 + 4$ divide a 84, ya que el denominador de una fracción de valor entero tiene que dividir al numerador. Sin embargo, ningún valor de b va a hacer esto posible:

- Si $b = 1$, $b^4 + 3b^2 + 4 = 8$, el cual no divide a 84.
- Si $b = 2$, $b^4 + 3b^2 + 4 = 32$, el cual no divide a 84.
- Si $b \geq 3$, $b^4 + 3b^2 + 4 > 81 + 27 + 4 > 84$, por lo que $b^4 + 3b^2 + 4$ no puede dividir a 84.

Por lo tanto, $a \neq 2$, esto es, a es impar.
Ahora, por un lado $5a^4 + a^2 = a^2\left(5a^2 + 1\right)$ y $5a^2 + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$, entonces $5a^4 + a^2$ es divisible por 2 pero no por 4. Por otro lado, siempre se tiene que $b^4 + 3b^2 = b^2\left(b^2 + 3\right)$ es divisible por 4, pues $4 \mid b^2$ si b es par y $4 \mid b^2 + 3$ si b es impar, por lo que $b^4 + 3b^2 + 4$ es divisible por 4. Por lo tanto, $b^4 + 3b^2 + 4$ no puede dividir a $5a^4 + a^2$, que es la contradicción buscada. Concluimos que a no puede ser un número primo.

Problema 7. (Niveles I y II) Sea $ABCD$ un paralelogramo (que no sea rectángulo) y sea Γ la circunferencia que pasa por A, B, D. Sean E y F las intersecciones de BC y DC con Γ respectivamente ($E \neq B$, $F \neq D$). Tenemos que los puntos P y Q son las intersecciones de ED con BA y de FB con DA, respectivamente. Si las rectas PQ y CA se intersecan en R, muestra que $\frac{PR}{RQ} = (\frac{BC}{CD})^2$.

Solución. Observemos que los triángulos PAD y QAB son ambos isósceles, por los paralelismos $AB \| DF$ y $AD \| BE$, que implican que $ABFD$ y $ADEB$ son trapecios cíclicos y, por lo tanto, son trapecios isósceles. Más aún, $\angle PAD = \angle QAB$, por lo que estos dos triángulos isósceles son semejantes, por lo que

$$\frac{PA}{QA} = \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{CD}.$$

Luego, tenemos las siguientes relaciones

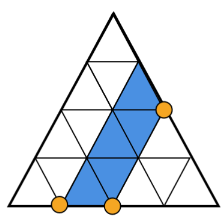
$$\frac{PR}{RQ} = \frac{PR}{RA} \cdot \frac{RA}{RQ} = \frac{\operatorname{sen} \angle PAR}{\operatorname{sen} \angle APR} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle RQA}{\operatorname{sen} \angle RAQ} = \frac{\operatorname{sen} \angle PAR}{\operatorname{sen} \angle RAQ} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle RQA}{\operatorname{sen} \angle APR},$$

donde hemos usado la ley de senos en los triángulos PRA y QRA. Ahora, $\angle PAR = \angle BAC$ y $\angle RAQ = \angle DAC = \angle ACB$ (esto último porque $AD \| BC$). También podemos reescribir $\angle RQA = \angle PQA$ y $\angle APR = \angle APQ$. Entonces, usando la ley de senos en los triángulos ABC y PAQ, así como la semejanza de los triángulos PAD y QBA, obtenemos que

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{\operatorname{sen}\angle BAC}{\operatorname{sen}\angle ACB} \cdot \frac{\operatorname{sen}\angle PQA}{\operatorname{sen}\angle APQ} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{PA}{QA} = \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AD}{AB} = \frac{BC}{CD} \cdot \frac{BC}{CD},$$

donde la última igualdad se sigue de que $AB = CD$ y $AD = BC$ en el paralelogramo $ABCD$. De aquí se sigue el resultado.

Problema 8. (Nivel II) Sea n un entero positivo. Considera un tablero en forma de triángulo equilátero, con lados de longitud n, dividido en triangulitos equiláteros de lado 1. Algunos de los $1+2+\cdots+(n+1)$ vértices de los triangulitos equiláteros en los que se divide el tablero se han marcado. Se cumple que para todo entero $k \geq 1$, ningún trapecio con lados cuyas longitudes son $1, k, 1, k+1$ y con vértices en el tablero tiene todos sus vértices marcados. Además, ningún triangulito equilátero de lado 1 tiene sus tres vértices marcados. ¿Cuál es la mayor cantidad de vértices que se pudieron haber marcado?
Nota: En la figura se muestra un ejemplo de un tablero cuando $n = 4$ y un ejemplo de uno de los trapecios mencionados, con tres de sus vértices marcados y con $k = 2$.



Solución. A lo largo de la solución, llamaremos *triangulitos* a los triángulos equiláteros de lado 1. Observemos que los puntos se encuentran en tres tipos de hileras que contienen $1, 2, \ldots, n+1$ puntos, respectivamente, en cada una de estas divisiones: las filas, que son horizontales, y las diagonales, de las cuales hay de dos tipos.

Observación 1. A cada punto marcado que no se encuentra en la última fila le podemos asignar un punto adyacente no marcado en la fila de abajo, de tal forma que a puntos distintos le asignamos puntos distintos.

Demostración 1. Llamemos *bueno* a un conjunto de puntos consecutivos en la misma fila, si están todos marcados, y llamemos *excelente* a un conjunto bueno que no está contenido en ningún otro conjunto bueno. El conjunto de todos los puntos marcados en el tablero puede ser partido en conjuntos excelentes, cada punto perteneciendo exactamente a uno de estos.
Sea S cualquier conjunto excelente de puntos que no están en la última fila, y sea

$m = |S|$. Consideremos los $m-1$ triangulitos formados por 2 de estos puntos, y cuya punta se encuentra en la fila de abajo. Entonces, por la condición del problema, estas $m-1$ puntas no están marcadas. Sean I y D los puntos más a la izquierda y derecha de S, respectivamente, P el punto hacia abajo y a la izquierda de I, y Q el punto hacia abajo y a la derecha de D. Entonces alguno entre P y Q no está marcado (de lo contrario, la condición del problema no se cumpliría para el trapecio $PIDQ$), supongamos sin pérdida de generalidad que Q. Entonces a cada uno de los puntos en S le asignamos el punto hacia abajo y a la derecha. Estos puntos son todos diferentes. Además, a ninguno de estos puntos se le asignó el mismo par que a algún punto fuera de S, pues los puntos inmediatamente a la izquierda y derecha de S, si es que los hay, deben estar sin marcar por nuestra elección de S. Esto demuestra nuestra afirmación. $\square$

Demostración 2. Basta mostrar la afirmación para cualquier conjunto de puntos marcados en la misma fila, ya que dos puntos en distintas filas, no comparten puntos adyacentes en una misma fila de abajo. Hacemos inducción con respecto a la longitud ℓ de la fila. Si $\ell = 1$ y el punto P de la fila está marcado, entonces el triangulito formado por P y sus dos adyacentes de abajo debe tener al menos un punto no marcado. Este puede ser el punto asignado a P.
Si $\ell > 1$ y el primer punto P de la fila no está marcado, la asignación se puede realizar por la hipótesis de inducción en los $\ell - 1$ puntos restantes de la fila. Si P está marcado y el primer punto Q de la siguiente fila no, entonces le asignamos Q a P y podemos usar la hipótesis de inducción con los $\ell - 1$ puntos restantes de la fila. Si P y Q están marcados, la condición del problema implica que para todo punto marcado en la fila (incluido P), su punto adyacente inferior derecho no está marcado, pues de otra forma habría un trapecio con sus cuatro vértices sobre puntos marcados. De esta observación extraemos una asignación válida y concluimos. $\square$

Ahora mostramos que entre dos filas consecutivas con m y $m+1$ puntos, respectivamente, hay a lo más $m+1$ puntos marcados. En efecto, supongamos que en la fila con m puntos hay $r \leq m$ puntos marcados. Entonces los r pares de estos puntos en la fila de abajo no están marcados. Se sigue que hay a lo más $r + (m+1-r) = m+1$ puntos marcados, como queríamos. Esto demuestra que hay a lo más

$$(n+1) + (n-1) + \cdots + \left(n + 1 - 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right)$$

puntos marcados. Esto se alcanza con la sigiente configuración: *marcamos todos los puntos en las filas horizontales con* $n+1$, $n-1$, $\ldots$, $n+1-2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ *puntos*. En esta configuración, el total de puntos marcados es igual a

$$\begin{cases} 1 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+2)^2}{4} & \text{si } n \text{ es par.} \\ 2 + 4 + \cdots + (n+1) = 2\left(1 + 2 + \cdots + \frac{n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+3)}{4} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Finalmente, mostramos que estas configuraciones son válidas. En efecto, para cualquier trapecio de lados 1, k, 1, $k+1$, los lados de longitud 1 no pueden ser paralelos. Por lo tanto, al menos uno de estos lados no es horizontal, por lo que debe tener sus extremos en filas horizontales consecutivas. Se sigue que exactamente uno de estos extremos no fue marcado, y se cumple la condición del problema.

Prueba por Equipos, Niveles I y II

Problema 1. Encuentra todos los conjuntos finitos y no vacíos S de enteros positivos que satisfacen la siguiente propiedad: *para toda pareja $i, j \in S$ no necesariamente distintos, se cumple que:* $\frac{i+j}{mcd(i,j)} \in S$.

Solución. Primero notamos que $2 \in S$, lo cual implica que S no es vacío. Luego, hay algún $i \in S$ y, por la condición,

$$\frac{i+i}{\text{mcd}(i,i)} = \frac{i+i}{i} = 2 \in S.$$

Demostraremos que en S no hay enteros impares. Supongamos, por contradicción, que existe un $i \in S$ impar. Como $2, i \in S$, tenemos que

$$\frac{i+2}{\text{mcd}(i,2)} = \frac{i+2}{1} = i+2 \in S.$$

Como $i+2$ es impar, podemos iterar este razonamiento con $i+2, 2 \in S$, obteniendo así una infinidad de elementos en S: $\{i, i+2, i+4, \ldots\} \subset S$, lo que contradice que S es un conjunto finito. Por lo tanto, en S no hay enteros impares.
Ahora, el conjunto $\{2\} = S$ cumple las condiciones que buscamos. Además, es el único, pues de lo contrario, existiría algún $2n \in S$, con $n > 1$. Tomemos tal elemento de forma que n sea lo menor posible. Entonces,

$$\frac{2n+2}{\text{mcd}(2n,2)} = \frac{2n+2}{2} = n+1 \in S.$$

Como $2 < n+1 < 2n$, hay un elemento en S mayor que 2, pero menor que el mínimo $2n > 2$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, el único conjunto que satisface la condición del problema es $\{2\}$.

Solución alternativa. Al igual que en la primera solución, vemos que $2 \in S$ y que para todo $i \in S$, debe ser el caso que $i \equiv 0 \equiv 2 \mod 2)$. Entonces, los elementos de S módulo 4 deben todos ser congruentes con 0 o 2. Si tuviéramos algún elemento $i \equiv 0 \pmod 4$, entonces, como consecuencia de que $i, 2 \in S$, tenemos que

$$\frac{i+2}{\text{mcd}(i,2)} = \frac{i+2}{2} \in S.$$

Como $i+2 \equiv 2 \pmod 4$, resulta que $(i+2)/2$ es impar, contradiciendo la observación anterior (ya que sabemos que S no contiene números impares). Luego, si $i \in S$, tenemos que $i \equiv 2 \pmod 4$.
Vamos a probar, con inducción fuerte, que para todo entero $k \geq 1$, si $i \in S$, entonces $i \equiv 2 \pmod{2^k}$.

- *Caso base:* Ya mostramos esto para $k = 1, 2$: si $i \in S$, entonces $i \equiv 2 \pmod 2$ y, además, $i \equiv 2 \pmod 4$.

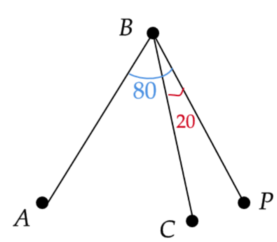
- *Hipótesis de inducción:* Para todo $1 \leq k \leq m$, si $i \in S$, entonces $i \equiv 2 \pmod{2^k}$.

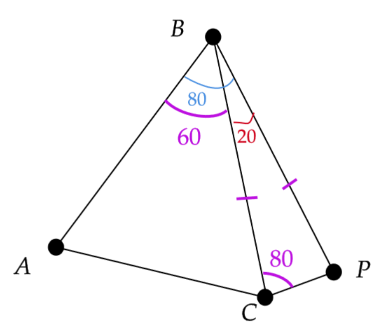
Necesitamos ver que $i \equiv 2 \pmod{2^{m+1}}$. Para esto, consideremos a los elementos de S módulo 2^{m+1}. Como consecuencia de la hipótesis de inducción, los únicos residuos módulo 2^{k+1} que puede tener un elemento $i \in S$, son 2 y 2^k+2. Además, si tuviésemos $i \in S$ tal que $i \equiv 2^k + 2 \pmod{2^{k+1}}$, entonces $\frac{i+2}{2} \in S$. Sin embargo, como 2^{k+1} divide a $i - 2^k - 2 = (i + 2) - (2^k + 4)$, tenemos que 2^k divide a $\frac{i+2}{2} - (2^{k-1} + 2)$, esto es, $\frac{i+2}{2} \equiv 2^{k-1} + 2 \pmod{2^k}$, lo que es una contradicción, ya que $\frac{i+2}{2} \in S$ y la hipótesis de inducción, implican que $\frac{i+2}{2} \equiv 2 \pmod{2^k}$. Por lo tanto, todo $i \in S$ satisface que $i \equiv 2 \pmod{2^{k+1}}$.
A partir de esta inducción, deducimos que el único elemento que puede estar en S es 2, por lo que $S = \{2\}$ es la única solución. Esto es porque $i \in S$ implica que $i \equiv 2 \pmod{2^k}$ para todo entero $k \geq 1$, esto es, 2^k divide a $i - 2$ para todo entero $k \geq 1$, lo cual sucede si $i - 2 = 0$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo isósceles tal que $AB = BC$. Se define el punto P tal que $\angle ABP = 80°$, $\angle CBP = 20°$ y $AC = BP$. Halla todos los posible valores de $\angle BCP$.

Solución. Tenemos dos configuraciones posibles con respecto al punto P. En cada una de estas dos posibilidades encontramos un valor posible para el ángulo $\angle BCP$.

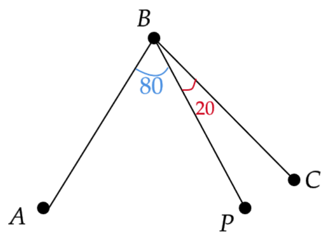
1) El punto P se encuentra fuera del ángulo formado por los rayos BA y BC.

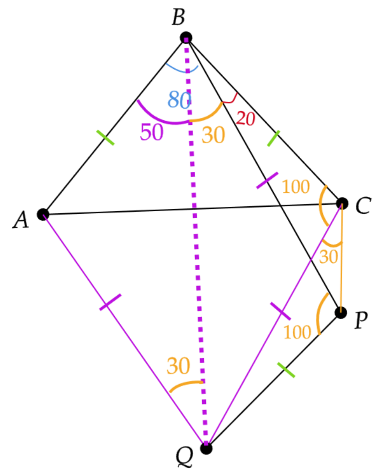




Notemos que $BA = BC$ y $\angle ABC = 60°$. Por lo tanto, el triángulo ABC es equilátero y $BP = AC = BA = BC$. Como el triángulo CBP es isósceles y $\angle CBP = 20°$, tenemos que $\angle BCP = \angle BPC = (180° - 20°)/2 = 80°$.

2) El punto P se encuentra dentro del ángulo formado por los rayos BA y BC.





Entonces, podemos hacer el siguiente trazo auxiliar: trazamos el punto Q tal que el triángulo ACQ sea equilátero y tal que el punto Q y el punto B se encuentren en semiplanos opuestos formados por la recta que pasa por A y C. Tenemos entonces que $AB = BC$ y $AC = AQ = QC = BP$. Por lo tanto, BQ es mediatriz de AC. Luego, $\angle ABQ = (80^\circ + 20^\circ)/2 = 50^\circ$ y $\angle AQB = \angle AQC/2 = 30^\circ$, de donde $\angle QBP = 80^\circ - \angle ABQ = 30^\circ$. De la igualdad $\angle AQB = \angle QBP$ obtenemos el paralelismo $AQ \| BP$. Más aún, sabemos que $AQ = BP$, por lo que $AQPB$ es un paralelogramo. Entonces, $AB = QP$ y, por el criterio LLL, los triángulos QBC y BQP son congruentes. Por lo tanto, tenemos que $\angle QCB = \angle QPB = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$ y, ya que estos dos ángulos son iguales, tenemos que el cuadrilátero $BQPC$ es cíclico. De aquí obtenemos que $QCP = \angle QBP = 30^\circ$, de donde se sigue que $\angle BCP = \angle BCQ + \angle QCP = 130^\circ$.

Problema 3. Un conjunto S consta de 16 puntos del plano con coordenadas enteras. Se forman 8 parejas de puntos con estos 16 puntos, de tal forma que se cumple lo siguiente: *para cualquier punto A y cualquiera de los 7 pares de puntos (B, C) en donde no está A, se cumple que A está a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de B o de C*. Demuestra que cualesquiera 2 puntos están a distancia a lo más $3\sqrt{5}$.

Solución. Para cada punto A de S, considerando las siete parejas de puntos en las que no está A, vemos que A está a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de 7 puntos, uno por pareja. Denotemos por S_A a ese conjunto de 7 puntos a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de A.
Sean $A, B \in S$ dos puntos cualesquiera. Veremos que están a distancia a lo más $3\sqrt{5}$. Si $B \in S_A$ o $A \in S_B$ ya acabamos, ya que su distancia sería a lo más $\sqrt{5}$. Así que supongamos que ese no es el caso.
Ahora, si existe $C \in S_A \cap S_B$, entonces tanto A como B están a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de C, por lo que la distancia entre ellos es a lo más $2\sqrt{5}$. Por lo tanto, supongamos que $S_A \cap S_B$ es vacío. Dado que S tiene 16 puntos, tenemos que $S_A \cup S_B \cup \{A\} \cup \{B\} = S$. Ahora supongamos que existen $C \in S_A$ y $D \in S_B$ tales que su distancia es a lo más

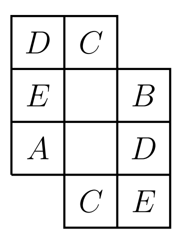
$\sqrt{5}$. Esto implica que la distancia entre A y B es a lo más $3\sqrt{5}$ y de nuevo terminamos. Entonces tenemos que los puntos de S_A y los puntos de S_B están todos a distancia mayor que $\sqrt{5}$ unos de los otros. Así, si $C \in S_A$, entonces los puntos de S_C deben de coincidir con los de S_A, ya que de no ser así, S_C tendría algún punto de S_B ya que $S_A \cup S_B \cup \{A\} \cup \{B\} = S$.
En otras palabras, los conjuntos $S_A \cup \{A\}$ y $S_B \cup \{B\}$ son conjuntos de 8 puntos que cumplen que todos sus puntos se encuentran a distancia a lo más $\sqrt{5}$ unos de los otros.
Vamos a probar que la máxima cantidad de puntos con coordenadas enteras tales que cualesquiera 2 de ellos están a distancia a lo más $\sqrt{5}$ es 7.
Sea X un conjunto de puntos tal que cualesquiera dos de ellos están a distancia a lo más $\sqrt{5}$. Consideremos los siguientes casos.

1) La distancia más grande entre dos puntos en X es 1. Es fácil ver que X tiene a lo más 2 puntos.

2) La distancia más grande entre dos puntos en X es $\sqrt{2}$. Si tomamos A y B en X con distancia $\sqrt{2}$, es fácil ver que las posiciones a distancia $\sqrt{2}$ o menos de ambos se intersecan en un cuadrado de 2×2, es decir, que a lo más hay 4 puntos en X.

3) La distancia más grande en X es 2. Sean A y B puntos en X a distancia 2 entre sí. Las posiciones a distancia 2 o menos de A forman un rombo centrado en A formado por un cuadrado de 3×3 centrado en A con 4 *picos* saliendo de los puntos medios de cada lado del cuadrado y B se encuentra en uno de estos picos. Las posiciones a distancia a lo más 2 de B, también forman un rombo centrado en B, así que estas posiciones se intersecan en una cruz formada por una fila de 1×3 atravesada por el medio por una columna de 3×1. Esta intersección tiene 5 posiciones, así que X tiene a lo mucho 5 puntos.

4) La distancia más grande en X es $\sqrt{5}$. Sean A y B puntos a distancia $\sqrt{5}$. La intersección de las posiciones a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de A y las posiciones a distancia a lo más $\sqrt{5}$ de B es así:



de donde podemos ver que a lo más tenemos una posición de las marcadas con C, una de las marcadas con D y una de las marcadas con E, así que X tiene a lo mucho 7 puntos.

6ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 12 de junio de 2022 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 115 estudiantes de primaria y 145 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2023.

Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos, así como los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB son los siguientes.

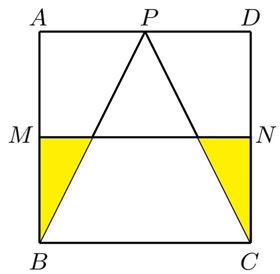
Nombre	**Estado**	**Medalla**
Elisa María Villarreal Corona	Ciudad de México	Oro individual
Kathya Anette Puig Nolasco	Veracruz	Oro individual
Andrea María Torres Martínez	San Luis Potosí	Oro individual
Samuel Ramírez Venegas	Jalisco	Oro individual
Fernando Gael Martín Barajas	Ciudad de México	Oro individual
Ignacio Ostos Aponte	Nuevo León	Oro individual
Axel Ahtziri Ibáñez Chávez	Zacatecas	Oro individual
Danna Andrade García	Coahuila	Oro por equipos
Emmanuel López Terrones	Coahuila	Oro por equipos
Niza Daniela Sierra Jasso	Coahila	Oro por equipos
María Jaqueline Nava Morales	Hidalgo	Plata
Renata Isabella Pérez Lara	Hidalgo	Plata
Ivanna Corina Márquez Macías	Hidalgo	Plata
Josué Francisco De la Fuente Jiménez	Nuevo León	Plata
Alethia Yobely Cepeda Obregón	San Luis Potosí	Plata
José Andrés Martínez Salazar	San Luis Potosí	Plata
Sebastián Preciado Molina	Sonora	Plata
Rogelio Tadeo Guarneros Mata	Tamaulipas	Plata
Juan Carlos Barragán Domínguez	Veracruz	Plata
José Antonio Bernal Massa	Yucatán	Plata
Dereck Orlando Romo Rodríguez	Zacatecas	Plata
Iker Medina Ortega	Zacatecas	Plata

En la prueba por equipos en el Nivel I, el Estado de Coahuila obtuvo el primer lugar (con 190 puntos), la Ciudad de México obtuvo el segundo lugar (con 180 puntos) y el Estado de Chiapas obtuvo el tercer lugar (con 145 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel I fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 285 puntos).
Segundo lugar: Coahuila (con 245 puntos).
Tercer lugar: Zacatecas (con 231 puntos).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel I del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel I

1) El cuadrado $ABCD$ que se muestra en la figura tiene lado 8 y se tiene que M, N y P son los puntos medios de los lados AB, CD y DA, respectivamente. ¿Cuánto vale el área sombreada?



2) ¿Cuántos números primos, de dos dígitos, pueden escribirse como la suma de dos números primos?

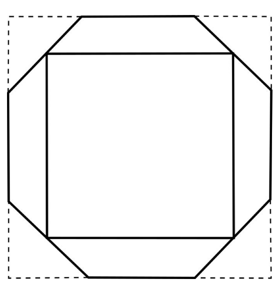
3) Denisse sumó 5 números enteros consecutivos. Zeus también sumó 5 números enteros consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100, ¿cuánto se obtiene al restar el número más grande de los cinco que sumó Zeus del número más grande de los cinco que sumó Denisse?

4) Con el dinero que tiene, Marda podría comprar 5 tacos y le sobrarían 7 pesos, pero si quisiera comprar 8 tacos le faltarían 44 pesos. ¿Cuánto dinero tiene Marda?

5) Carlos va a ahorrar dinero de la siguiente manera. El primer día ahorrará $\$10$, el segundo $\$11$, el tercero $\$12$, y así sucesivamente. Considerando que inicialmente no tiene dinero ahorrado, ¿cuántos pesos tendrá ahorrados al finalizar el día número 17?

6) Ana, Andrea, Cynthia y Vicky se sientan en ese orden alrededor de una mesa redonda de un restaurante. El restaurante tiene tres platillos distintos de desayuno. Ellas quieren ordenar cada una un platillo, de tal forma que cada dos de ellas que estén sentadas juntas obtengan platillos distintos. ¿De cuántas formas pueden ordenar?

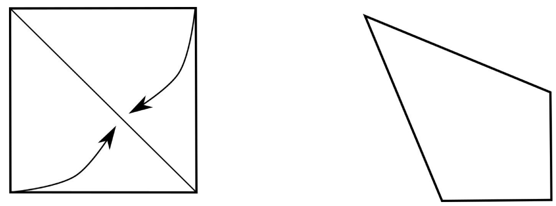
7) A un cuadrado de papel se le han recortado sus esquinas, formando un octágono regular, como se muestra en la figura.



Después, se han unido los puntos medios de cuatro de los lados del octágono, formando un nuevo cuadrado. Si el área del nuevo cuadrado es 25 cm^2, ¿cuántos centímetros cuadrados es el área del cuadrado original?

8) ¿Cuántas parejas de lados perpendiculares hay en un octágono regular?

9) Zara toma un trozo cuadrado de papel y dobla dos de sus lados sobre la diagonal, como se muestra, para obtener un cuadrilátero. ¿Cuántos grados mide el mayor ángulo del cuadrilátero?



10) ¿Cuántos números de cuatro dígitos utilizan en su escritura exactamente dos veces el número 7 y al menos un 5 más a la derecha que los dos números 7? *Nota:* Algunos ejemplos de números que cumplen la propiedad son 7375, 5775, 7752 y 7705.

11) Sam tiene doce tarjetas. Tres de las tarjetas tienen el número 6, dos de las tarjetas tienen el número 7, tres llevan el número 8 y cuatro tienen anotado el número 9. Las colocó en una fila. Se sabe que una con el número 7 quedó en uno de los extremos de la fila y una con el número 8 quedó en el extremo opuesto. Además, las tarjetas con el número 8 quedaron juntas y también las tarjetas con el número 9 quedaron juntas. Si la décima tarjeta contando desde la izquierda tiene el número 6, ¿qué número tiene la tarjeta en la sexta posición (contando desde la izquierda)?

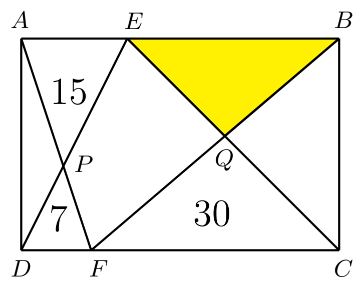
12) Una rana estaba parada en el 0 de la recta numérica. Cada salto que dio la rana fue de 3 unidades a la derecha o 3 unidades a la izquierda (por ejemplo, después de haber dado 4 saltos podría haber estado en el número 6 si hubiera brincado del 0 al -3, luego al 0, luego al 3 y luego al 6). ¿Cuál es el máximo número de saltos que pudo haber dado la rana si al final quedó en el número 45 y se sabe que no dio más de 30 saltos?

13) Carlos y Diego practicaron su puntería con el arco. Lanzaron flechas por turnos de forma alternada, primero Carlos y luego Diego. De cada 3 turnos consecutivos de Carlos, él acertó al blanco exactamente 2 veces. De cada 6 turnos consecutivos de Diego, él acertó al blanco exactamente 4 veces. Tanto Carlos como Diego hicieron 25 lanzamientos. Carlos acertó en sus primeros 2 lanzamientos y Diego acertó en sus primeros 4 lanzamientos. ¿Para cuántos de los 25 turnos sucede que, al final del turno, Carlos y Diego han acertado en total la misma cantidad de lanzamientos?

14) Rocío tiene el número $\overline{a9b}$ (es decir, tiene el número cuya cifra de unidades es b, cuya cifra de decenas es 9 y cuya cifra de centenas es a). Eva tiene el número $\overline{15cd}$. El número de Rocío es múltiplo de cada uno de los dígitos que usa el número de

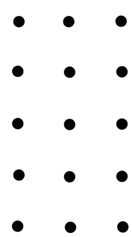
Eva y viceversa. Si ambos números son impares, ¿qué número se obtiene al restar el número de Eva del número de Rocío?

15) Se tiene un rectángulo $ABCD$, E es un punto sobre AB y F es un punto sobre CD. Además ED y AF se intersecan en P; también EC y BF se intersecan en Q. Si el área del triángulo DPF es 7, el área del triángulo FQC es 30 y el área del triángulo APE es 15, ¿cuánto vale el área de EQB?

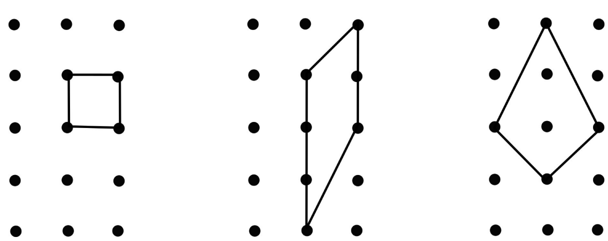


Prueba por Equipos, Nivel I

1) En la figura se muestran los vértices de una cuadrícula de 4×2, es decir cinco hileras horizontales de 3 puntos cada una. ¿Cuántos cuadriláteros pueden formarse si sus cuatro vértices se escogen dentro de los puntos de la figura?



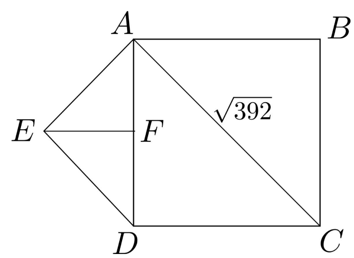
Nota: En la siguiente figura se muestran tres ejemplos de cuadriláteros que se pueden formar.



2) Sofía, Luis y José son 3 hermanos. Sus edades son números enteros. Si se suman las edades de Luis y José se obtiene $2/3$ de la edad de su mamá. Por otro lado, si se

suman las edades de Sofía y Luis, se obtiene $3/4$ de la edad de su papá. Al sumar las edades de la mamá y del papá se obtiene 90. Si Sofía es 8 años mayor que José y José es 4 años menor que Luis, ¿cuál es la edad de José?

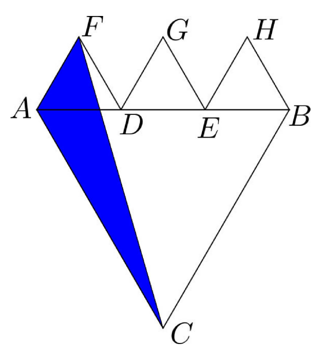
3) En la siguiente figura, $ABCD$ es un cuadrado cuya diagonal AC mide $\sqrt{392}$. El punto E es tal que los ángulos $\angle EAD$ y $\angle EDA$ miden $45°$; F es un punto sobre AD tal que EF es perpendicular a AD, ¿cuál es la longitud de EF?



4) Un cierto planeta tarda 101 días en dar la vuelta alrededor de su sol, es decir, su año dura 101 días. Todos los meses en ese planeta tienen 11, 12, 13 o 14 días. Si hay al menos un mes con cada una de estas opciones, ¿cuántos meses tiene su año?

5) El promedio, de cinco enteros distintos es 30. Si el menor de esos números es 7, ¿cuál es el mayor valor que puede tener el mayor?

6) En la siguiente figura, ABC es un triángulo equilatero de área 45, D y E son puntos sobre AB. Los triángulos AFD, DGE y EHB son triángulos equiláteros iguales. ¿Cuánto vale el área del triángulo AFC?

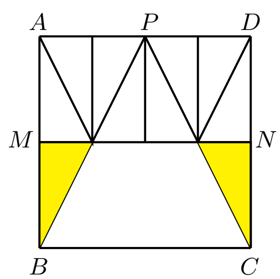


7) En algunos lugares se escribe la fecha de la forma $dd/mm/yy$, donde dd es el día, mm es el mes y aa son los últimos dos dígitos del año. Digamos que una fecha es *homogénica* si el número de dos dígitos aa es igual al producto de los números dd y mm. Por ejemplo, la fecha $04/07/28$ es homogénica, ya que $4 \times 7 = 28$. ¿Cuántas fechas homogénicas tales que $mm \geq 7$ hay en un siglo?

8) En la oficina de César se trabaja de lunes a viernes. Durante la pandemia han estado trabajando a distancia, pero ahora han decidido asistir a la oficina algunos días. Cada persona ha elegido 3 días para asistir; ninguna persona ha elegido asistir los mismos 3 días que otra; todos los días asistirá la misma cantidad de personas, excepto los miércoles que asistirá una menos; y al menos la mitad de las personas asistirá cada día. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de César (incluyéndole)?

Soluciones de la Prueba Individual, Nivel I

1) La respuesta es 8. Al ser M, N y P puntos medios, tenemos que $AMND$ y $MBDC$ son rectángulos. Además, el rectángulo $AMND$ puede dividirse en 8 triángulos congruentes a los sombreados, como se muestra en la siguiente figura.



Entonces se puede concluir que el área sombreada es una octava parte del área del cuadrado, esto es, $\frac{64}{8} = 8$.

2) La respuesta es 6. Sabemos que el único número primo par es el 2. Como queremos que la suma de dos números primos sea un número primo, uno de los primos de la suma debe ser el 2 (en caso contrario, estaríamos sumando dos números primos impares y eso nos daría un número par mayor que 2 y, por lo tanto, no sería primo). Entonces hay que revisar qué números primos de dos dígitos al sumarles 2 se obtiene un número primo. Los números primos de dos dígitos son:

$$11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

Entonces, los primos que satisfacen el problema son $11, 17, 29, 41, 59$ y 71.

3) La respuesta es 20. Como los números son consecutivos, la diferencia del más grande de Denisse con el más grande de Zeus es igual a la diferencia de sus primeros números y también a la diferencia de sus segundos, de sus terceros o de sus cuartos. Al ser 5 números de cada uno, esa diferencia es $\frac{100}{5} = 20$. Por ejemplo, los números de Denisse podrían haber sido $21, 22, 23, 24, 25$ y los de Zeus $1, 2, 3, 4, 5$.

Solución alternativa. Supongamos que los números de Denisse son a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ y los de Zeus son $b, b+1, b+2, b+3, b+4$.
Entonces, $(5a+10)-(5b+10) = 100$, de donde $(a+4)-(b+4) = a-b = \frac{100}{5} = 20$.

4) La respuesta es 92. Pensemos que Marda compra los 8 tacos de uno en uno. Al pagar los primeros 5 tacos, le sobran 7 pesos y, si tuviera 44 pesos más, podría pagar los otros 3 tacos. Entonces vemos que cada taco cuesta $\frac{7+44}{3} = 17$ pesos y Marda tiene $5 \times 17 + 7 = 92$ pesos.

   Solución alternativa. Supongamos que cada taco cuesta x pesos. Entonces, tenemos que $8x - 44 = 5x + 7$, de donde $3x = 44 + 7 = 51$ y así $x = 17$. Por lo tanto, Marda tiene $5 \times 17 + 7 = 92$ pesos.

5) La respuesta es 306. Al finalizar el día 17, Carlos tendrá ahorrado

$$10 + (10 + 1) + (10 + 2) + \cdots + (10 + 16) = 10 \cdot 17 + (1 + 2 + \cdots + 16)$$

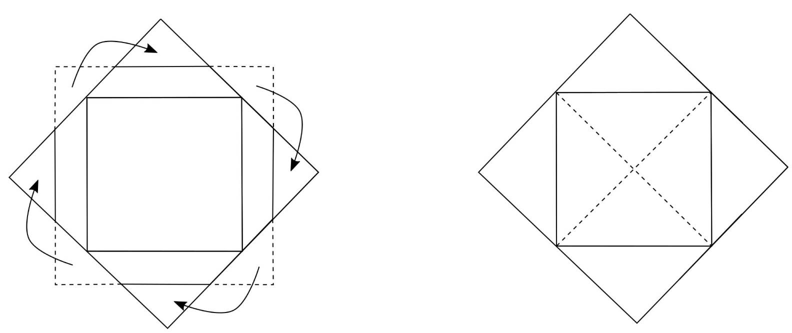
   pesos. Ahora, usando la fórmula de Gauss, tenemos que

$$1 + 2 + \cdots + 16 = \frac{16 \cdot 17}{2} = 8 \cdot 17.$$

   Combinando, tenemos que la respuesta es $18 \cdot 17 = 306$ pesos.

6) La respuesta es 18. Si Ana y Cynthia escogen el mismo platillo (hay 3 posibilidades), entonces cada una de Andrea y Vicky puede escoger cualquiera de los otros 2 platillos, así que en este caso hay $3 \times 2 \times 2 = 12$ posibilidades. Si Ana y Cynthia escogen distinto platillo (hay $3 \times 2 = 6$ posiblidades para hacer esto), entonces Andrea y Vicky tendrán que escoger el platillo restante. En total, el número de formas en que pueden ordenar es $12 + 6 = 18$.

7) La respuesta es 50. Coloquemos las esquinas recortadas junto a los otros lados del octágono para formar un cuadrado, como se muestra en la figura de la izquierda. Notemos que si trazamos las diagonales del cuadrado pequeño, la figura queda dividida en 8 triángulos iguales y el cuadrado pequeño está formado por 4 de ellos. Luego, el área del cuadrado grande es el doble del área del cuadrado pequeño.



   Solución alternativa. Sea $2a$ la longitud de cada lado del octágono. Así, la hipotenusa de cada triángulo de las esquinas es $2a$. Luego, los lados de dichas esquinas miden $\sqrt{2}a$. De esta manera, el lado del cuadrado original mide $2 + 2\sqrt{2}a$.
   Ahora, cada lado del cuadrado nuevo puede verse como la recta media de un trapecio de bases $2a$ y $2a + 2\sqrt{2}a$. Luego, la longitud del lado del cuadrado nuevo es el

promedio de estas bases, esto es, $2a+\sqrt{2}a$. Entonces, el área del cuadrado original es $(2a+2\sqrt{2}a)^2=4a^2+8\sqrt{2}a^2+8a^2=12a^2+8\sqrt{2}a^2$ y el área del cuadrado nuevo es $(2a+\sqrt{2}a)^2=4a^2+4\sqrt{2}a^2+2a^2=6a^2+4\sqrt{2}a^2$. De aquí, es claro que el área del cuadrado original es el doble del área del cuadrado nuevo.

8) La respuesta es 8. Si pintamos los lados del octágono de manera alternada de azul y rojo, es fácil ver que si dos lados son perpendiculares entonces están pintados del mismo color, por lo que nos concentraremos en los segmentos rojos. Hay 6 maneras de tomar dos de ellos y 2 de esas elecciones no son lados perpendiculares, por lo que hay 4 maneras de tomar dos lados rojos que sean perpendiculares. Igual para los lados azules, por lo que hay $2\times 4=8$ parejas de lados perpendiculares en un octágono regular.

9) La respuesta es $112.5°$. El cuadrilátero tiene un ángulo recto. El ángulo opuesto al ángulo recto mide $45°$ pues es la mitad de un ángulo interno del cuadrado. Si llamamos a a los otros dos ángulos iguales del cuadrilátero, tenemos que $90°+45°+2a=360°$ de donde $a=112.5°$es el ángulo mayor del cuadrilátero.

10) La respuesta es 34. Al ser de cuatro cifras y utilizar los dígitos 7, 7 y 5, debe haber un dígito extra d. Si $d\neq 5$, entonces 7 puede ir en cualquiera de las cuatro posiciones: $d775$, $7d75$, $77d5$ o $775d$ y, en cada posición, tiene 8 opciones, salvo si se inicia con 0. En este caso hay $4\times 8-1=31$ números. Si $d=5$ los números son 5775, 7575 y 7755. En total son $31+3=34$ números.

11) La respuesta es 9. Por los primeros datos tenemos dos opciones para ubicar a algunas de las tarjetas:

$$7,-,-,-,-,-,-,-,-,8,8,8$$

$$8,8,8,-,-,-,-,-,-,-,-,7$$

Como la décima tarjeta tiene el número 6, la primera opción indicada arriba es imposible (pues en la décima posición está un 8). Entonces, la opción correcta es

$$8,8,8,-,-,-,-,-,-,6,-,7$$

Falta ubicar las 4 tarjetas con el número 9, que sabemos que deben ir juntas, así que solo pueden quedar en las posiciones $(4,5,6,7)$, $(5,6,7,8)$, $(6,7,8,9)$. En cualquier caso, la sexta tarjeta desde la izquierda lleva el número 9.

12) La respuesta es 29. Como la rana avanza 3 unidades en cada salto, la menor cantidad de saltos que necesita para llegar al 45 es $\frac{45}{3}=15$. Podemos ver que si la rana puede llegar en n saltos al 45, entonces también puede llegar en $n+2$ saltos, pues al inicio puede saltar al -3, luego volver al 0 y del 0 hacer n saltos para llegar al 45. Como la rana inicia en el número 0 que es par, al moverse una cantidad impar de unidades llega a un número impar, luego a un número par y así sucesivamente, por lo que por paridad la rana debe llegar al 45 en una cantidad impar de saltos, esto es, n es impar. Como la rana no dio más de 30 saltos, los valores posibles de n son 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 y 29, de donde 29 es el máximo.

13) La respuesta es 17. Por las condiciones del problema, es fácil ver que Carlos acierta todas las flechas excepto las que son múltiplos de 3, mientras que Diego acierta todas las flechas excepto las flechas 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23 y 24. Hasta el lanzamiento 18, Carlos acierta 12 flechas y Diego también. Como en el lanzamiento 18 ninguno de los dos acierta, al final del lanzamiento 17 han acertado la misma cantidad de flechas. Como Diego no acierta las flechas 23 y 24 pero Carlos sí acierta la flecha 23, concluimos que la respuesta es 17.

14) La respuesta es 980. Como el número de Eva lleva un 5, el de Rocío acaba en 0 o 5, pero es impar así que $b = 5$. De aquí que el número de Eva también debe ser múltiplo de 5 y así $d = 5$. Como el número de Rocío lleva un 9, entonces $1 + 5 + c + 5$ es múltiplo de 9 y, al ser c un dígito, la única posibilidad es que $c = 7$ (la suma es 18). El único número de la forma $\overline{a95}$ que es múltiplo de 7 es el 595 por lo que $a = 5$. De esta manera, si Rocío tiene el número 595 y Eva tiene el 1575 se cumplen las condiciones del problema y la respuesta es $1575 - 595 = 980$.

15) La respuesta es 22. Observemos que los triángulos DEC y AFB tienen la misma área (igual a la mitad del área del rectángulo $ABCD$). Como ambos triángulos tienen en común al cuadrilátero $EPFQ$, tenemos que el área del triángulo EQB es igual a $7 + 30 - 15 = 22$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel I

1) Primero, notemos que, sin importar cómo se elijan los cuatro vértices del cuadrilátero, habrá tres maneras de formar el cuadrilátero. En efecto, si la envolvente convexa de los puntos es un cuadrilátero, entonces los tres cuadriláteros serían el de la envolvente convexa y los dos autointersectantes donde los dos pares de lados opuestos en el cuadrilátero de la envolvente convexa son las diagonales. En cambio, si la envolvente convexa de los puntos es un triángulo, el otro punto debe estar en el interior del triángulo (no contamos cuadriláteros con lados que estén sobre una misma recta). Habrá tres formas de formar el cuadrilátero en este caso, que son justamente las $\binom{3}{2} = 3$ maneras de elegir los puntos que serán los extremos de los lados que inciden en el punto interno del triángulo. Así, en cualquier caso donde contemos la manera de elegir puntos, habrá que multiplicar por 3 el resultado.

   Ahora, separamos en dos casos dependiendo de cuántas columnas de puntos de la cuadrícula tienen vértices del cuadrilátero, donde el caso en el que todos los vértices están sobre una misma columna no cuenta. El primer caso es que el cuadrilátero se forme con puntos de solo 2 de las hileras verticales. Para escoger las dos hileras hay 3 posibilidades (las dos de la izquierda, las dos de la derecha o las dos de los extremos). Hay que escoger dos puntos de cada una de esas dos hileras verticales, pues de haber tres en una misma hilera vertical se formaría un cuadrilátero con lados que estén en una misma recta. Si numeramos los puntos de una de las hileras: 1, 2, 3, 4, 5, las posibilidades de elección de las parejas son las siguientes 10:

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}.$$

Entonces en este caso hay $3 \times 10 \times 10 = 900$ formas de elegir los vértices del cuadrilátero.

La otra posibilidad es que de una de las hileras verticales se escojan dos puntos (30 posibilidades pues hay 3 hileras y en la escogida hay 10 posibilidades); de las otras dos hileras hay que escoger un punto ($5 \times 5 = 25$ posibilidades). Entonces en este caso las posibilidades para escoger puntos son $30 \times 25 = 750$. Sin embargo, debemos de quitar los casos en los que tres de estos puntos son colineales, en cuyo caso los tres puntos están sobre hileras verticales diferentes. Nótese que esto equivale a contar la cantidad de formas de elegir un punto de cada hilera vertical de forma que estos sean colineales, y luego multiplicar eso por 12 que es la cantidad de formas de elegir el cuarto punto. Para hacer este conteo, hay tres casos: que los puntos estén en la misma hilera horizontal, que estén en hileras horizontales consecutivas y que estén en las hileras horizontales 1, 3 y 5. Para el primer caso, hay 5 maneras de elegir los puntos. Para el segundo hay 3 formas de elegir las hileras y 2 formas de elegir los puntos habiendo elegido las filas, dando un total de $3 \times 2 = 6$ formas. Luego, para el último caso, solo hay 2 formas de elegir los puntos. Esto da un total de $5 + 6 + 2 = 13$ formas de elegir los tres puntos colineales, por lo que hay $13 \times 12 = 156$ maneras de elegir cuatro puntos con tres de ellos colineales y en diferentes hileras verticales.

Por lo tanto, en total hay $3 \times (300 + 750 - 156) = 2682$ cuadriláteros con sus cuatro vértices en la cuadrícula.

2) Como la suma de las edades de Luis y José es $\frac{2}{3}$ de la edad de su mamá, que es un número entero, entonces esa suma debe ser par (pues para obtener la suma, hay que dividir entre 3 la edad de la mamá y multiplicar por 2); pero Luis le lleva a José 4 años, así que ambas edades son números pares. Por la misma razón, también la edad de Sofía es un número par. Un razonamiento similar nos dice que la suma de las edades de Luis y Sofía debe ser un múltiplo de 3 (por ser $\frac{3}{4}$ de la edad del papá). Intentamos con distintas edades. Si, por ejemplo, las edades son 10, 14 y 18, entonces $14 + 18 = 22$ no es múltiplo de 3. Si las edades son 12, 16 y 20 entonces todas las condiciones se cumplen, siendo la edad de la mamá $\frac{3\times(12+16)}{2} = 42$ y la edad del papá $\frac{4\times(16+20)}{3} = 48$.

3) Supongamos que cada lado del cuadrado mide a. Entonces, por el teorema de Pitágoras, tenemos que $a^2 + a^2 = 392$, de donde $a^2 = 196$, de manera que $a = \sqrt{196} = 14$. Por simetría, F es punto medio de AD y AEF es un triángulo isósceles con $EF = AF$. Luego, EF mide $\frac{14}{2} = 7$.

4) Como hay al menos 11 días en un mes, el número de meses no puede ser mayor de 9, pues $11 \times 10 = 110 > 101$. Como cada mes tiene a lo más 14 días, el número de meses no puede ser menor de 8 porque $14 \times 7 = 98 < 101$. Esto significa que el año tiene 8 o 9 meses.
Si fueran 9 meses, el número mínimo de días en el año sería igual a $14 + 13 + 12 + 6 \times 11 = 105 > 101$, lo cual no puede ser. Entonces, el número de meses en un año es 8 y una posibilidad es que haya 3 meses de 14 días, un mes de 13 días, 2 meses de 12 días y 2 meses de 11 días: $3 \times 14 + 13 + 2 \times 12 + 2 \times 11 = 101$.

5) Para que el promedio de los cinco números sea 30, su suma debe ser $5 \times 30 = 150$. Para encontrar el mayor valor posible del número más grande, los otros cuatro deben ser lo menor posible. Como el menor es 7, lo menos que pueden ser los primeros 4 números es $7, 8, 9$ y 10. El mayor en este caso es $150 - (7 + 8 + 9 + 10) = 150 - 34 = 116$.

6) El lado de cada triángulo equilátero pequeño es la tercera parte del lado del triángulo equilátero grande, así que el área del triángulo equilátero grande es 9 veces el área de cada triángulo equilátero pequeño, de donde cada triángulo equilátero pequeño tiene área 5.
Trazamos los segmentos FH y HC. Vemos que el pentágono $AFHBC$ queda dividido en tres triángulos: AFC, FHC y HBC, y que los triángulos AFC y HBC tienen la misma área.
La base FH del triángulo FHC mide el doble que la base de un triángulo equilátero pequeño, y la altura GC mide 4 veces la altura de un triángulo equilátero pequeño, por lo que su área es 8 veces la de un triángulo equilátero pequeño. Así, el área del triángulo FHC es 40.
Es fácil ver que el área del pentágono $AFHBC$ equivale a la de 14 triángulos equiláteros pequeños, esto es, su área es 70. Como el área del triángulo FHC es 40, el área del triángulo AFC es $\frac{70-40}{2} = 15$.

7) Para ver cuántas fechas homogénicas tiene cada uno de los meses (a partir del mes 07), basta dividir 99 entre el número del mes y buscar el mayor entero menor o igual que ese cociente.
Como $14 \leq 99/7 < 15$, tenemos que el séptimo mes tiene 14 fechas homogénicas. Análogamente, el octavo mes tiene 12 fechas homogénicas, el noveno mes tiene 11, el décimo mes tiene 9, noviembre tiene 9 y diciembre tiene 8. El total es $14 + 12 + 11 + 9 + 9 + 8 = 63$.

8) Hay 10 posibles maneras de elegir 3 días de lunes a viernes, como se muestra en la siguiente tabla:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
1	•	•	•		
2		•	•	•	
3			•	•	•
4	•	•		•	
5	•	•			•
6		•	•		•
7	•		•	•	
8	•			•	•
9		•		•	•
10	•		•		•

Así, el máximo número posible de personas es 10. Podemos contar el número de asistencias semanales multiplicando por 3 al número de personas, quedando como posibles números de asistencias semanales

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.$$

Como cada día asiste la misma cantidad de personas, excepto el miércoles que asiste una menos, al número de asistencias semanales le faltaría 1 para ser múltiplo de 5. Luego, las únicas opciones posibles para el número de asistencias semanales son 9 y 24, que corresponden a 3 y 8 personas, respectivamente. Si el número de personas fuera 3, tendrían que asistir 2 personas cada día, excepto el miércoles que solo asistiría una, pero sabemos que al menos la mitad de las personas asistió cada día y eso no se cumpliría el miércoles. Por lo tanto, la única opción posible es que en la oficina de César haya 8 personas. Un posible horario se obtendría eliminando las líneas 1 y 3 de la tabla anterior.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Desde 1990, México ha participado en la Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico (APMO, por sus siglas en inglés). Este concurso, a diferencia de las demás olimpiadas internacionales en las que México participa, es bajo la modalidad por correspondencia.

El 14 de marzo de 2022 se aplicó a distancia, el examen de la XXXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico a los participantes en el entrenamiento nacional de la OMM del proceso 2022. También presentaron el examen las ganadoras del Primer Concurso Nacional Femenil de la OMM. Con base en los resultados de los concursantes, se enviaron los exámenes con las mejores diez calificaciones a los organizadores de la APMO. En esta ocasión, el país organizador fue Indonesia.

En esta competencia, México obtuvo un total de 7 medallas distribuidas de la siguiente manera: 3 de plata y 4 de bronce. Además, se obtuvieron 3 menciones honoríficas. En total, México obtuvo 154 puntos quedando en el lugar número 14 de 35 países participantes.

A continuación hacemos mención de los 10 alumnos que nos representaron en esta competencia y sus resultados.

- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas): Medalla de plata.
- Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México): Medalla de plata.
- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero): Medalla de plata.
- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México): Medalla de bronce.

- Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León): Medalla de bronce.
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León): Medalla de bronce.
- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes): Medalla de bronce.
- Carlos Fernando Amador Martínez Quintero (Ciudad de México): Mención honorífica.
- Luis Eduardo Martínez Aguirre (Nevo León): Mención honorífica.
- María Fernanda López Tuyub (Yucatán): Mención honorífica.

Finalmente, presentamos los 5 problemas de la XXXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico. Los alumnos tuvieron 4 horas para resolverlos.

Problema 1. Encuentra todas las parejas (a, b) de enteros positivos tales que a^3 es un múltiplo de b^2 y $b - 1$ es un múltiplo de $a - 1$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo rectángulo con $\angle B = 90°$. Sea D un punto sobre la recta CB tal que B está entre D y C. Sea E el punto medio de AD y sea F el segundo punto de intersección del circuncírculo del triángulo ACD y el circuncírculo del triángulo BDE. Muestra que cuando D se mueve, la recta EF pasa por un punto fijo.

Problema 3. Encuentra todos los enteros positivos $k < 202$ para los cuales existe un entero positivo n tal que

$$\left\{\frac{n}{202}\right\} + \left\{\frac{2n}{202}\right\} + \cdots + \left\{\frac{kn}{202}\right\} = \frac{k}{2},$$

donde $\{x\}$ denota la parte fraccionaria de x.
Nota: La parte fraccionaria de un número real x es el número real k con $0 \leq k < 1$ tal que $x - k$ es un entero.

Problema 4. Sean n y k enteros positivos. Cathy está jugando el siguiente juego. Hay n canicas y k cajas, con las canicas etiquetadas del 1 al n. Inicialmente, todas las canicas están dentro de una misma caja. En cada movimiento, Cathy escoge una caja y entonces mueve la canica con la menor etiqueta, digamos i, ya sea a una caja vacía o a la caja que contiene la canica con la etiqueta $i+1$. Cathy gana el juego si en algún momento existe una caja conteniendo solo la canica con la etiqueta n. Determina todas las parejas de enteros (n, k) tales que Cathy puede ganar este juego.

Problema 5. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Encuentra el valor mínimo de $(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)$ y determina todos los valores de (a, b, c, d) tales que ese mínimo se alcanza.

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXIV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico.

Solución del problema 1. (Solución de Luis Eduardo Martínez Aguirre). Primero, como $b^2 \mid a^3$, entonces $b^2 \leq a^3$. Además, como $a-1 \mid b-1$, existe un entero no negativo r tal que $b-1 = r(a-1)$. Primero supongamos que $r > 0$. Sea p un número primo y sea $\alpha = \nu_p(b)$, donde $\nu_p(m)$ es la máxima potencia de p que divide a m (es decir, $p^{\nu_p(m)}$ divide a m pero $p^{\nu_p(m)+1}$ no). Luego $p^{2\alpha} \mid b^2$, por lo que $p^{2\alpha} \mid a^3$. Si $\beta = \nu_p(a)$, entonces $p^{2\alpha} \mid p^{3\beta}$, es decir, $2\alpha \leq 3\beta$ y, por tanto, $\left\lceil \frac{2}{3}\alpha \right\rceil \leq \beta$ pues β es un entero positivo.
Sea $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con p_i primos y $\alpha_i > 0$ para toda i. Luego, para $1 \leq i \leq k$, se tiene que $b - 1 \equiv -1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ y $a - 1 \equiv -1 \pmod{p_i^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha \right\rceil}}$. Además, $\alpha_i \geq \left\lceil \frac{2}{3}\alpha_i \right\rceil$, por lo que $b-1 = r(a-1)$ implica que $b - 1 \equiv r(a-1) \pmod{p_i^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_i \right\rceil}}$, es decir, $-1 \equiv r(-1)$ y, por lo tanto, $r \equiv 1$ en ese mismo módulo. Luego, por el teorema chino del residuo, debe suceder que $r \equiv 1 \pmod{p_1^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_1 \right\rceil} \cdots p_k^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_k \right\rceil}}$. De aquí se separa en tres casos.

1) Si $r = 1$, entonces $b - 1 = a - 1$, es decir, $a = b$, de donde claramente se tiene que $b^2 \mid a^3$. Así, todas las parejas (a, a) con a un entero positivo cumplen.

2) Supóngase que $r > 1$. Entonces $r \geq 1 + p_1^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_1 \right\rceil} \cdots p_k^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_k \right\rceil}$. Además, como $\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_i \right\rceil \geq \frac{2}{3}\alpha_i$, entonces $p_1^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_1 \right\rceil} \cdots p_k^{\left\lceil \frac{2}{3}\alpha_k \right\rceil} \geq b^{\frac{2}{3}}$ y, por lo tanto, $r \geq 1 + b^{\frac{2}{3}}$. Luego,

$$b - 1 = r(a-1) \geq \left(1 + b^{\frac{2}{3}}\right)(a-1) = ab^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} + a - 1,$$

por lo que

$$a \leq \frac{b + b^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} + 1}.$$

Tomando $c = b^{\frac{1}{3}} > 0$, la desigualdad anterior se convierte en

$$a \geq \frac{c^3 + c^2}{c^2 + 1} = \frac{c^2(c+1)}{c^2+1}.$$

Se sigue que

$$\left(\frac{c^2(c+1)}{c^2+1}\right)^3 \geq a^3 \geq b^2 = c^6,$$

es decir, $\left(\frac{c+1}{c^2+1}\right)^3 \geq 1$, lo cual claramente implica que $1 \geq c$. Entonces $1 \geq c^3 = b$, por lo que $b = 1$ y, por lo tanto, $a = 1$ o $r = 0$, pero ninguno de los dos casos cumplen con los supuestos $r > 1$ (en el primero se obtendría $r = 1$). Así, en este caso no hay soluciones.

3) Finalmente, si $r = 0$, entonces $b - 1 = 0$, es decir, $b = 1$. Es claro que $1^2 \mid a^3$ para cualquier a, por lo que todas las parejas $(a, 1)$ con a un entero positivo satisfacen las condiciones.

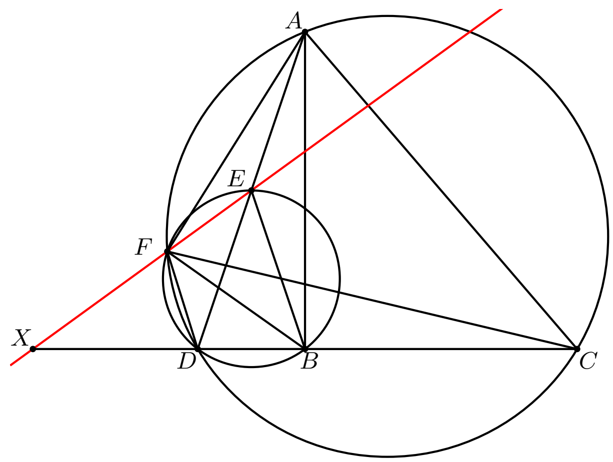
Por lo tanto, las parejas (a, b) que cumplen son las de la forma (a, a) y $(a, 1)$ con a un entero positivo.

Solución alternativa. Es fácil ver que las parejas (a, a) y $(a, 1)$, con a entero positivo, satisfacen el problema. Demostraremos que estas son las únicas soluciones.
Caso 1: $b < a$. Como $b-1$ es múltiplo de $a-1$, tenemos que $a-1 \leq b-1$ si $b-1 > 0$, esto es, $a \leq b$ si $b-1 > 0$. Luego, en este caso no es posible que $b-1$ sea positivo. Así, $b - 1 = 0$, esto es, $b = 1$. Así, obtenemos el segundo conjunto de soluciones descrito anteriormente.
Caso 2: $b \geq a$. Como el entero positivo a^3 es múltiplo de b^2, existe un entero positivo c tal que $a^3 = b^2c$. Observemos que $a \equiv b \equiv 1 \pmod{a-1}$. Entonces, tenemos que

$$1 \equiv a^3 = b^2c \equiv c \pmod{a-1}.$$

Si $c < a$, entonces debemos tener que $c = 1$, lo cual implica que $a^3 = b^2$. Luego, existe un entero positivo d tal que $a = d^2$ y $b = d^3$. Entonces, $d^2 - 1 = a - 1$ divide a $d^3 - 1 = b - 1$. Esto implica que $d + 1$ divide a $d(d+1) + 1$, lo cual es imposible.
Si $c \geq a$, entonces $b^2c \geq b^2a \geq a^3 = b^2c$ y, por consiguiente, $b^2c = b^2a = a^3$, de donde obtenemos que $a = c = b$. Así, obtenemos el primer conjunto de soluciones descrito al inicio.

Solución del problema 2. (Solución de Carlos Fernando Amador Martínez Quintero). Demostraremos que el punto fijo es el reflejado de C respecto a B. Sea X la intersección de BC y EF.



Sean $\theta = \angle FAD = \angle FCD$ (pues $FACD$ es cíclico), $\alpha = \angle DAB$ y $\beta = \angle BAC$. Como el triángulo DBA es rectángulo y E es punto medio de la hipotenusa, entonces E es circuncentro del triángulo DBA y, entonces, $\angle DEB = 2\angle DAB = 2\alpha$. Como $DFEB$ es cíclico, $\angle DFB = \angle DEB = 2\alpha$ y, como el triángulo DEB es isósceles, $\angle EDB = \angle EBD = 90^\circ - \alpha$. También, como $FEBD$ es cíclico, $\angle XFD = \angle EBD = 90^\circ - \alpha$. Finalmente, como $FACD$ es cíclico, $\angle DFC = \angle DAC = \alpha + \beta$, por lo que $\angle BFC = (\alpha + \beta) - 2\alpha = \beta - \alpha$.

Por otro lado, como $FEBD$ es cíclico, $\angle DFE = 180^\circ - \angle EBD = 90^\circ + \alpha$ y, como $FACD$ es cíclico, $\angle DFA = 180^\circ - \angle ACD = 90^\circ + \beta$, por lo que $\angle AFE = \angle DFA - \angle DFE = \beta - \alpha$.

Nótese que $\angle XFC = \angle XFD + \angle DFC = 90^\circ + \beta = \angle DFA$ y $\angle FCX = \angle FAD = \theta$, por lo que los triángulos XFC y DFA son semejantes (por el criterio AA). Se puede ver que FE es la F-mediana del triángulo DFA con $\angle DFE = 90^\circ + \alpha$ y que $\angle XFB = 90^\circ + \alpha = \angle DFE$. Entonces, como los triángulos XFC y DFA son semejantes, debe suceder que FB es la F-mediana del triángulo XFC, por lo que B debe ser el punto medio de XC, es decir, X es el reflejado de C respecto a B. Este punto X no depende de la posición de D, por lo que es el punto buscado.

Solución alternativa. Usaremos geometría analítica. Pongamos al segmento BC sobre el eje positivo de las x, a BA sobre el eje positivo de las y y a B en el origen. Sean $A = (0, a)$, $B = (0, 0)$, $C = (c, 0)$ y $D = (-d, 0)$ donde a, c y d son positivos. Entonces, $E = (-\frac{d}{2}, \frac{a}{2})$. La ecuación general de un círculo es

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + h = 0. \tag{62}$$

Sustituyendo las coordenadas de los puntos A, D, C en la ecuación (62) y resolviendo para f, g y h, obtenemos que la ecuación del circuncírculo del triángulo ADC es

$$x^2 + y^2 + (d - c)x + \left(\frac{cd}{a} - a\right) y - cd = 0. \tag{63}$$

De manera análoga, la ecuación del circuncírculo del triángulo BDE es

$$x^2 + y^2 + dx + \left(\frac{d^2}{2a} - \frac{a}{2}\right) y = 0. \tag{64}$$

Si a la ecuación (64) le restamos la ecuación (63), obtenemos la ecuación de la recta DF y obtenemos

$$cx + \frac{a^2 + d^2 - 2cd}{2a} y + cd = 0. \tag{65}$$

Resolviendo ahora el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones (64) y (65), obtenemos que

$$F = \left(\frac{c(d^2 - a^2 - 2cd)}{a^2 + (d - 2c)^2}, \frac{2ac(c - d)}{a^2 + (d - 2c)^2}\right)$$

y la otra solución $D = (-d, 0)$.
De aquí, obtenemos la ecuación de la recta EF, la cual es $ax + (d - 2c)y + ac = 0$. Esta recta pasa por el punto $P = (-c, 0)$ el cual es independiente de d.

Solución del problema 3. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero). Por definición de la parte fraccionaria, se tiene que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$, donde $\lfloor x \rfloor$ es el mayor entero menor o igual que x. Así,

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} &= \left\{\frac{n}{202}\right\} + \left\{\frac{2n}{202}\right\} + \cdots + \left\{\frac{kn}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{ni}{202} - \left\lfloor \frac{ni}{202} \right\rfloor\right) \\ &= \frac{n}{202} \sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{ni}{202} \right\rfloor = \frac{nk(k+1)}{404} - \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{ni}{202} \right\rfloor, \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$\frac{nk(k+1)}{202} = k + 2 \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{ni}{202} \right\rfloor.$$

El lado derecho de la última igualdad es entero, por lo que el lado izquierdo también debe ser entero. Como $202 = 2 \cdot 101$ y 101 es primo, entonces $101 | nk(k+1)$. De aquí se separa en dos casos.

Primero, supongamos que 101 no divide a $k(k+1)$. Entonces $101 | n$, por lo que $n = 101\ell$ con ℓ un entero positivo. Así, se desea que

$$\frac{k}{2} = \sum_{i=1}^{k} \left\{\frac{ni}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{k} \left\{\frac{\ell i}{2}\right\}.$$

Sin embargo, si a es un entero, es fácil ver que $\left\{\frac{a}{2}\right\}$ es igual a 0 o $\frac{1}{2}$ dependiendo de si a es par o impar, respectivamente. Por lo tanto,

$$\frac{k}{2} = \sum_{i=1}^{k} \left\{\frac{\ell i}{2}\right\} \leq \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} = \frac{k}{2}$$

pues cada sumando es menor o igual a $\frac{1}{2}$. De aquí se sigue que $\left\{\frac{\ell i}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ para todo entero positivo $1 \leq i \leq k$. Nótese que si $i = 2$, entonces $\left\{\frac{\ell i}{2}\right\} = 0$, por lo que si $k \geq 2$ no se alcanza la igualdad. Si $k = 1$ tomamos $n = 101$, de donde tenemos que $\left\{\frac{101}{202}\right\} = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, en este caso se obtiene que únicamente $k = 1$ cumple.

Ahora, asumamos que $101|k(k+1)$. Como $k < 202$, entonces $k \leq 201$ y $k+1 \leq 202$. Si $101|k$, la única opción es $k = 101$ y si $101|k+1$, las únicas opciones son $k+1 = 101$ y $k+1 = 202$, por lo que $k = 100$ o $k = 201$. Así, las únicas posibilidades para k son 100, 101 y 201. Analizamos cada posible valor.

Primero, sea $k = 100$. Tomamos $n = 2$. Así

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{ni}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{100}\left\{\frac{2i}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{100}\left\{\frac{i}{101}\right\}.$$

Es fácil ver que $\left\{\frac{i}{101}\right\} = \frac{i}{101}$ para $1 \leq i \leq 100$. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{ni}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{100}\frac{i}{101} = \frac{1}{101}\sum_{i=1}^{100} i = \frac{1}{101}\left(\frac{100\cdot 101}{2}\right) = \frac{100}{2} = \frac{k}{2},$$

de donde se sigue que $k = 100$ cumple lo deseado.

Sea $k = 101$. Tomamos $n = 51$. Así,

$$\sum_{i=1}^{k}\left\{\frac{ni}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{101}\left\{\frac{51i}{202}\right\}.$$

Primero, nótese que $\left\{\frac{51\cdot 101}{202}\right\} = \left\{\frac{51}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. Además, se puede ver que si $1 \leq i \leq 100$, entonces $0 < \left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} < 2$ y

$$\begin{aligned}\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} &= \frac{51i + 51(101-i)}{202} - \left\lfloor\frac{51i}{202}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{51(101-i)}{202}\right\rfloor \\ &= \frac{51}{2} - \left\lfloor\frac{51i}{202}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{51(101-i)}{202}\right\rfloor,\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Como ambas partes fraccionarias son menores que 1, se puede ver que si $\left\{\frac{51i}{202}\right\} < \frac{1}{2}$, entonces $\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} = \frac{1}{2}$, mientras que si $\left\{\frac{51i}{202}\right\} > \frac{1}{2}$, entonces $\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} = \frac{3}{2}$. Así, basta con analizar los valores de la expresión $\left\{\frac{51i}{202}\right\}$ para $1 \leq i \leq 50$. Analizamos estos valores dependiendo de la congruencia de i módulo 4.
Si $i = 4\ell + 1$ con $0 \leq \ell \leq 12$, entonces

$$\left\{\frac{51(4\ell+1)}{202}\right\} = \left\{\frac{204\ell + 51}{202}\right\} = \left\{\frac{2\ell + 51}{202}\right\} < \frac{1}{2}$$

para $0 \leq \ell \leq 12$ pues $0 < 2\ell + 51 < 101$.
Si $i = 4\ell + 2$ con $0 \leq \ell \leq 12$, entonces

$$\left\{\frac{51(4\ell+2)}{202}\right\} = \left\{\frac{204\ell+102}{202}\right\} = \left\{\frac{2\ell+102}{202}\right\} > \frac{1}{2}$$

para $0 \leq \ell \leq 12$ pues $101 < 2\ell + 102 < 202$.
Si $i = 4\ell + 3$ con $0 \leq \ell \leq 11$, entonces

$$\left\{\frac{51(4\ell+3)}{202}\right\} = \left\{\frac{204\ell+153}{202}\right\} = \left\{\frac{2\ell+153}{202}\right\} > \frac{1}{2}$$

para $0 \leq \ell \leq 11$ pues $101 < 2\ell + 153 < 202$.
Si $i = 4\ell$ con $1 \leq \ell \leq 12$, entonces

$$\left\{\frac{51(4\ell)}{202}\right\} = \left\{\frac{204\ell}{202}\right\} = \left\{\frac{2\ell}{202}\right\} < \frac{1}{2}$$

para $1 \leq \ell \leq 12$ pues $0 < 2\ell < 101$.
Del análisis anterior, para $1 \leq i \leq 50$ se tiene que $\left\{\frac{51i}{202}\right\} < \frac{1}{2}$ si $i \equiv 0, 1 \pmod 4$ y $\left\{\frac{51i}{202}\right\} > \frac{1}{2}$ si $i \equiv 2, 3 \pmod 4$. Nótese que hay 25 valores de i que satisfacen las condiciones en cada caso. Por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{101} \left\{\frac{51i}{202}\right\} &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{50} \left(\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 50 \\ i \equiv 0,1 \pmod 4}} \left(\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 50 \\ i \equiv 2,3 \pmod 4}} \left(\left\{\frac{51i}{202}\right\} + \left\{\frac{51(101-i)}{202}\right\} \right) \\
&= \frac{1}{2} + 25\left(\frac{1}{2}\right) + 25\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{101}{2},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $k = 101$ también cumple.

Por último, sea $k = 201$. Tomando $n = 1$ y notando que $\left\{\frac{i}{202}\right\} = \frac{i}{202}$ para $1 \leq i \leq 201$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \left\{\frac{ni}{202}\right\} = \sum_{i=1}^{201} \left\{\frac{i}{202}\right\} = \frac{1}{202} \sum_{i=1}^{201} i = \frac{1}{202}\left(\frac{201 \cdot 202}{2}\right) = \frac{201}{2},$$

de donde se concluye que $k = 201$ cumple.

Por lo tanto, los únicos valores de k que cumplen son 1, 100, 101 y 201.

Solución del problema 4. Demostraremos que Cathy puede ganar si y solo si $n \leq 2^{k-1}$. Primero notemos que cada caja no vacía siempre contiene una secuencia consecutiva de canicas etiquetadas. Esto se debe a que Cathy siempre está quitando o colocando la canica con la etiqueta más pequeña en una caja. Como consecuencia, cada movimiento hecho es reversible. Observemos también que si se gana con n canicas, entonces se gana con menos de n.

Ahora demostraremos por inducción que Cathy puede ganar si $n = 2^{k-1}$. El caso base $n = k = 1$ es trivial. Supongamos que se puede ganar con m cajas y 2^{m-1} canicas. Consideremos el caso de $m+1$ cajas y 2^m canicas. Cathy puede primero realizar una sucesión de movimientos de tal manera que solo las canicas $2^{m-1}, \ldots, 2^m$ queden en la caja inicial, mientras mantiene una caja, digamos B, vacía. Ahora, mueve la canica 2^{m-1} a la caja B y luego invierte todos los movimientos iniciales considerando a B como la caja inicial. Al final de esto, tendremos las canicas $2^{m-1}+1, \ldots, 2^m$ en la caja inicial, las canicas $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$ en la caja B y $m-1$ cajas vacías. Repitiendo la secuencia original de movimientos sobre las canicas $2^{m-1}+1, \ldots, 2^m$, usando las m cajas que no son la caja B, podemos alcanzar un estado donde solo la canica 2^m permanece en la caja inicial. Por lo tanto, Cathy puede ganar si $n \leq 2^{k-1}$.

Ahora demostraremos por inducción que Cathy pierde si $n = 2^{k-1}+1$. El caso base $n = 2$ y $k = 1$ es trivial. Supongamos que es imposible ganar con m cajas y $2^{m-1}+1$ canicas. Supongamos, por contradicción que es posible ganar con $m+1$ cajas y 2^m+1 canicas. En una secuencia ganadora de movimientos, consideremos la última vez que una canica $2^{m-1}+1$ deja la caja inicial y llamemos X a este movimiento. Después de X no puede haber un momento en que las canicas $1, \ldots, 2^{m-1}+1$ estén todas en la misma caja. En caso contrario, invirtiendo estos movimientos después de X y quitando las canicas mayores que $2^{m-1}+1$, obtenemos una secuencia ganadora de movimientos para $2^{m-1}+1$ canicas y m cajas (ya que la caja inicial original no se ha usado aquí), lo que contradice la hipótesis de inducción. Por lo tanto, comenzando desde X, la canica 1 nunca estará en la misma caja que cualquier canica mayor o igual que $2^{m-1}+1$.

Ahora quitemos las canicas $2, \ldots, 2^{m-1}$ y consideremos los movimientos ganadores comenzando desde X. La canica 1 solo se movería desde una caja vacía a otra, mientras bloquea otras canicas para que no entren en su caja. Por lo tanto, tenemos una secuencia de movimientos para $2^{m-1}+1$ canicas, mientras solo se puedan usar m cajas. Esto contradice la hipótesis de inducción y, por consiguiente, no es posible ganar si $n \geq 2^{k-1}+1$.

Solución del problema 5. El valor mínimo buscado es $-\frac{1}{8}$. Hay ocho casos donde se alcanza el mínimo. El primero es

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Haciendo un cambio cíclico a las entradas de la cuarteta anterior, obtenemos tres cuartetas más. Más aún, volteando el signo $((a,b,c,d) \to (-a,-b,-c,-d))$ a las cuatro entradas en cada una de las cuatro cuartetas, obtenemos cuatro cuartetas más.

Como la expresión que queremos minimizar es cíclica, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $a = \max\{a, b, c, d\}$. Sea

$$S(a, b, c, d) = (a - b)(b - c)(c - d)(d - a).$$

Observemos que la cuarteta (a, b, c, d) que dimos antes satisface que $S(a, b, c, d) = -\frac{1}{8}$. Por lo tanto, para demostrar que $S(a, b, c, d) \geq -\frac{1}{8}$, basta considerar el caso donde $S(a, b, c, d) < 0$. Para esto consideraremos los siguientes dos casos.

Caso 1: *Exactamente uno de los números* $a - b$, $b - c$, $c - d$ *o* $d - a$ *es negativo.* Como $a = \max\{a, b, c, d\}$, debemos tener que $d - a < 0$. Esto implica que $a > b > c > d$ y ahora $S(a, b, c, d) = -(a - b)(b - c)(c - d)(a - d)$. Sean $y = a - b$, $x = b - c$ y $w = c - d$ para algunos números reales positivos w, x, y. Sustituyendo en la condición $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, obtenemos que

$$(d + w + x + y)^2 + (d + w + x)^2 + (d + w)^2 + d^2 - 1 = 0 \qquad (66)$$

y queremos demostrar que $wxy(w+x+y) \leq \frac{1}{8}$. Consideremos la expresión (66) como una ecuación cuadrática en d:

$$4d^2 + d(6w + 4x + 2y) + ((w + x + y)^2 + (w + x)^2 + w^2 - 1) = 0.$$

Como d es un número real, el discriminante de esta ecuación debe ser no negativo, esto es, debemos tener que

$$\begin{aligned} 4 &\geq 4((w + x + y)^2 + (w + x)^2 + w^2) - (3w + 2x + y)^2 \\ &= (3w^2 + 2wy + 3y^2) + 4x(w + x + y) \\ &\geq 8wy + 4x(w + x + y) \\ &= 4(x(w + x + y) + 2wy). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad MA-MG tenemos que

$$wxy(w + x + y) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x(w + x + y) + 2wy}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{8}.$$

Esto demuestra que $S(a, b, c, d) \geq -\frac{1}{8}$ para cualesquiera números reales a, b, c, d con $a > b > c > d$. La igualdad se sostiene si y solo si $w = y$, $x(w + x + y) = 2wy$ y $wxy(w + x + y) = \frac{1}{8}$. Resolviendo estas ecuaciones, resulta que $w^4 = \frac{1}{16}$ y, por consiguiente, $w = \frac{1}{2}$ ya que $w > 0$. Resolviendo para x, obtenemos la ecuación $x(x + 1) = \frac{1}{2}$ cuya única solución positiva es $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sustituyendo los valores $w = y = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ en la ecuación cuadrática en d y resolviendo para d, obtenemos la única solución $d = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ que da lugar a la cuarteta

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Luego, el mínimo se alcanza en esta cuarteta y en sus permutaciones cíclicas.

Caso 2: *Exactamente tres de los números $a-b$, $b-c$, $c-d$ o $d-a$ son negativos.* Como $a = \max\{a,b,c,d\}$, necesariamente $a-b$ debe ser positivo. Luego, debemos tener que $b < c < d < a$. Observemos que

$$S(a,b,c,d) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a) = (a-d)(d-c)(c-b)(b-a) = S(a,d,c,b).$$

Luego, por el Caso 1, $S(a,d,c,b) \geq -\frac{1}{8}$, lo cual implica que $S(a,b,c,d) \geq -\frac{1}{8}$, con la igualdad si y solo si

$$(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\ \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4},\ -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

y sus permutaciones cíclicas.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b \pmod{m}$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces $a \equiv d \pmod{m}$.*
2. *Si $a \equiv c \pmod{m}$ y $b \equiv d \pmod{m}$, entonces $ab \equiv cd \pmod{m}$.*
3. *Si $a \equiv c \pmod{m}$, entonces $a^n \equiv c^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc \pmod{m}$, entonces $a \equiv c \pmod{\frac{m}{(b,m)}}$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez