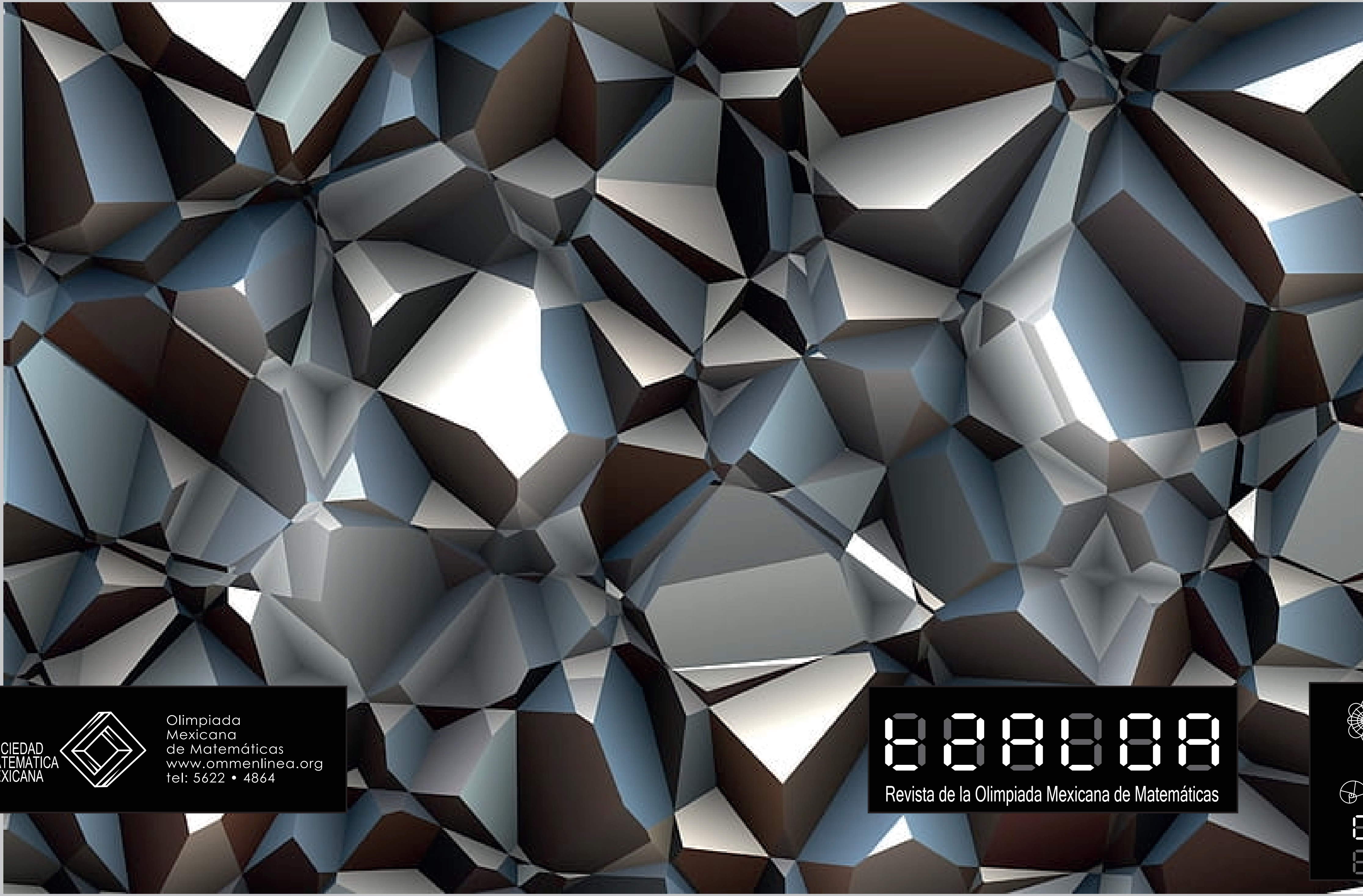


SOCIEDAD
MATEMATICA
MEXICANA

Olimpiada
Mexicana
de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Tzaloa

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

04
14

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 14, No. 4, noviembre 2022 - enero 2023, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: en trámite.

TZALOA

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2022, No. 4

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Noviembre de 2022

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2022, Número 4

El comité editorial de la revista *Tzaloa*, te da la bienvenida a su cuarto y último número del año 2022. Con este número ya son 56 números publicados de manera ininterrumpida en 14 años consecutivos desde su creación, en 2009. El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, aprovechamos la ocasión para agradecer y dar una afectuosa despedida a Enrique Treviño López, quien se integró a este comité a partir del No. 1 del año 2021.

[1] Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Valuación p-ádica*, de Denisse Escobar Parra y César Rodríguez Angón. En él, Denisse y César nos muestran algunas propiedades importantes de la valuación p-ádica y cómo utilizarlas en la resolución de problemas de teoría de números. Estamos seguros que este trabajo será de gran utilidad para todos los lectores.

De especial interés para todos, incluimos los problemas con soluciones del examen final estatal de la 36^a OMM así como los exámenes individual y por equipos del nivel II del Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2022 de forma virtual.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel elemental (Primaria) de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2022 (IIMC 2022), realizada de forma virtual, siendo Indonesia el país organizador. También incluimos los problemas con soluciones de la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas, realizada de forma presencial en el mes de julio de 2022 en Oslo, Noruega.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

36ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2003. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2022-2023 y, para el 1° de julio de 2023, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 36^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará del 6 al 11 de noviembre de 2022, en Oaxtepec, Morelos. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2022 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXV Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 64^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2023) y a la XXXVIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2023).

De entre los concursantes nacidos en 2006 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXV Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (junio de 2023).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2023.

Valuación p-ádica

Por Denisse A. Escobar Parra y César E. Rodríguez Angón

Una forma de obtener información cuando se trabaja con ecuaciones con enteros es la que se conoce como la valuación p-ádica. Aunque el nombre puede parecer extravagante, en realidad es algo que aparece desde los primeros problemas de teoría de números, por ejemplo al revisar la paridad de ambos lados en una igualdad con enteros. La valuación p-ádica no es otra cosa que calcular la máxima potencia de un primo p que divide a cierto número entero a. Se suele escribir $\nu_p(a) = m$ para indicar que $a = p^m \cdot b$, donde $\text{mcd}(p, b) = 1$. También se utiliza la notación $p^m || a$, que se lee: p^m divide exactamente al entero a. A manera de ejemplo, tenemos que $\nu_3(9) = 2$, $\nu_{13}(39) = 1$, $\nu_5(4625) = 3$ y $\nu_{37}(4625) = 1$.
Un ejemplo clásico del uso de la valuación p-ádica, en el que no se hace uso explícito de la definición, es la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional.

Ejemplo 1. *Demuestra que el número $\sqrt{2}$ no puede expresarse en la forma $\frac{a}{b}$ con a, b enteros y $b \neq 0$.*

Solución. Supongamos, por contradicción, que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, con a y b enteros positivos y primos relativos. Elevamos ambos lados de la igualdad al cuadrado y obtenemos que $2 = \frac{a^2}{b^2}$. Multiplicando esta igualdad por b^2, obtenemos que $b^2 \cdot 2 = a^2$. La contradicción llega básicamente por fijarnos en la máxima potencia de 2 que divide a cada lado de la igualdad, ya que los cuadrados son divisibles por una potencia par de 2, por lo que un lado es divisible por una potencia par de 2 y el otro lado por una potencia impar. Esto se puede ver de forma incluso más explícita ya que, al considerar que $\text{mcd}(a, b) = 1$, a lo más uno de ellos es par. Según la igualdad debería ser a, pero entonces al ser 2 un primo, se debería tener que 2^2 divide a a^2, pero en el lado izquierdo b es impar, por lo que el lado izquierdo de la igualdad solo es divisible por 2, pero no por 4, lo cual es una contradicción.

A continuación veremos algunos resultados importantes a cerca de la valuación p-ádica.

Teorema 1. *Sean a y b enteros positivos y sea p un número primo. Entonces,*

a) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.

b) Si $b \mid a$, *entonces* $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

c) $\nu_p(mcd(a,b)) = min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. *Análogamente sucede que* $\nu_p(mcm(a,b)) = max(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

d) $\nu_p(a+b) \geq min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. *Más aún, si* $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, *entonces* $\nu_p(a+b) = min(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

Demostración. a) Sean $a = p^{\alpha}a_1$ y $b = p^{\beta}b_1$, con $\mathrm{mcd}(a_1,p) = 1 = \mathrm{mcd}(b_1,p)$, esto es, $\nu_p(a) = \alpha$ y $\nu_p(b) = \beta$. Cuando multiplicamos ambos número obtenemos $ab = p^{\alpha+\beta}a_1b_1$. Por lo que, $\nu_p(ab) = \alpha + \beta = \nu_p(a) + \nu_p(b)$.

b) Sean $a = p^{\alpha}a_1$ y $b = p^{\beta}b_1$, con $\mathrm{mcd}(a_1,p) = 1$ y $\mathrm{mcd}(b_1,p) = 1$. Entonces, $\frac{a}{b} = \frac{p^{\alpha}a_1}{p^{\beta}b_1} = \frac{p^{\alpha-\beta}a_1}{b_1}$, lo cual implica que $\nu_p(\frac{a}{b}) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$.

c) Sean $a = p^{\alpha}a_1$ y $b = p^{\beta}b_1$, con $\mathrm{mcd}(a_1,p) = 1$ y $\mathrm{mcd}(b_1,p) = 1$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\alpha \leq \beta$. Entonces, $\min(\nu_p(a), \nu_p(b)) = \min(\alpha, \beta) = \alpha$. Por otro lado, por la forma en la que definimos α y β, tenemos que $p^{\alpha} \mid a$ y $p^{\alpha} \mid b$, pero $p^{\alpha+1} \nmid a$. Por lo tanto, el exponente de p en $\mathrm{mcd}(a,b)$ es α, es decir $\nu_p(\mathrm{mcd}(a,b)) = \alpha = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$. La demostración de $\nu_p(\mathrm{mcm}(a,b)) = \max(\nu_p(a), \nu_p(b))$ se hace de manera análoga.

d) Sean $a = p^{\alpha}a_1$ y $b = p^{\beta}b_1$, con $\mathrm{mcd}(a_1,p) = 1$ y $\mathrm{mcd}(b_1,p) = 1$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha \geq \beta$. Notemos que $a + b = p^{\alpha}a_1 + p^{\beta}b_1 = p^{\beta}(p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1)$, por lo que

$$\begin{aligned}\nu_p(a+b) &= \nu_p(p^{\beta}(p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1)) = \nu_p(p^{\beta}) + \nu_p(p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1)\\ &= \beta + \nu_p(p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1),\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\nu_p(a+b) \geq \min(\nu_p(a), \nu_p(b)) = \beta$. Además, si suponemos que $\alpha > \beta$, entonces $\alpha - \beta \geq 1$ y $p \mid p^{\alpha-\beta}a_1$ y, como $\mathrm{mcd}(b_1,p) = 1$, entonces $p \nmid p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1$ y, por lo tanto, $\nu_p(p^{\alpha-\beta}a_1 + b_1) = 0$. De lo anterior, si $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, entonces $\nu_p(a+b) = \min(\nu_p(a), \nu_p(b))$.

□

Con las pruebas del teorema anterior, podemos extender la definición de valuación p-ádica a los números racionales de la siguiente forma, si $r = \frac{a}{b}$, con a y b enteros, se define $\nu_p(r) = \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$. Siguiendo las ideas de la demostración del teorema anterior, se puede ver que la valuación p-ádica no depende de la representación de r como fracción. De igual forma, es fácil ver que las propiedades a) y d) del teorema 1 se cumplen para cualesquiera números racionales a y b.

Teorema 2. *Un número racional* $\frac{a}{b}$ *es entero si y solo si* $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$ *para todo número primo* p.

Demostración. Es claro que si $\frac{a}{b} = n$ es un entero, entonces $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(n) \geq 0$. Por otro lado, supongamos que $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$ para un primo arbitrario p. Notemos que podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$. Se tiene entonces que

$$0 \leq \nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$$

y, como $\operatorname{mcd}(a, b) = 1$, entonces a lo más uno de $\nu_p(a)$ o $\nu_p(b)$ es distinto de cero, pero la desigualdad de arriba solo se cumple si $\nu_p(a) \geq 0$ y $\nu_p(b) = 0$, porque como a y b son enteros, entonces $\nu_p(a) \geq 0$ y $\nu_p(b) \geq 0$. Como lo anterior sucede para cualquier primo p, podemos concluir que $b = \pm 1$ y, por lo tanto, $\frac{a}{b} = \pm a$ es un entero. $\square$

Teorema 3 (Legendre)**.** *Para cada entero positivo n y cada número primo p, tenemos que*

$$\nu_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Demostración. Consideremos un primo p que divide a $n!$. La cantidad de veces que hay un factor p entre los números del 1 al n, se puede contar como $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$, es decir, estamos contando todos los múltiplos de p. Luego debemos contar los múltiplos de p^2, ya que cada vez que los contamos en el parráfo anterior únicamente tomamos en cuenta uno de los factores p.
Siguiendo con este razonamiento, aunque ya hemos contado dos de los factores p de los números múltiplos de p^3, al contar cuántos múltiplos de p^3 hay entre 1 y n, estaremos contando un tercer factor p para dichos números. Los múltiplos de p^3 entre 1 y n son precisamente $\left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor$. Si repetimos este proceso hasta la k-ésima potencia de p tal que $p^k \leq n < p^{k+1}$, contaremos todos los factores p en $n!$
Cabe notar que si r es tal que $p^r > n$, entonces $\left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor = 0$. Por lo tanto, se tiene

$$\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor.$$

$\square$

Con este resultado en mente, revisitamos un problema elemental en la olimpiada de matemáticas.

Ejemplo 2. *Encuentra la cantidad de ceros en los que termina el número* 2022!

Solución. Notemos que la cantidad de ceros al final de un número depende de la cantidad de factores 10, sin embargo como hay mayor cantidad de factores 2 que factores 5 en un factorial, debemos calcular la valuación 5-ádica. Notemos que las primeras potencias de 5 son $5^1 = 5, 5^2 = 25, 5^3 = 125, 5^4 = 625$ y $5^5 = 3125 > 2022$. Entonces,

$$\begin{aligned}\nu_p(2022!) &= \sum_{k=1}^{4} \left\lfloor \frac{2022}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2022}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2022}{5^4} \right\rfloor \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 = 503.\end{aligned}$$

Por lo que la cantidad de ceros en los que termina el número 2022! es 503.

Ejemplo 3 (Olimpiada Austriaca de Matemáticas 2016, Problema 6)**.** *Sea a, b y c tres números enteros tales que $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}$ es un entero. Demuestra que cada uno de los números $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ y $\frac{bc}{a}$ es un entero.*

Solución. Como $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$ es un entero, tenemos que

$$\nu_p(abc)=\nu_p(a)+\nu_p(b)+\nu_p(c)\leq \nu_p((ab)^2+(ac)^2+(bc)^2)$$

para todo número primo p.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\nu_p(a)\geq\nu_p(b)\geq\nu_p(c)$. Entonces, $\nu_p(ab)=\nu_p(a)+\nu_p(b)\geq\nu_p(c)$, de donde $\nu_p\left(\frac{ab}{c}\right)\geq 0$. Análogamente, obtenemos que $\nu_p\left(\frac{ac}{b}\right)\geq 0$.
Supongamos que $\nu_p(a)>\nu_p(b)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\nu_p(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)&=\min(\nu_p(a^2b^2),\nu_p(a^2c^2),\nu_p(b^2c^2))=\nu_p(b^2c^2)\\&=2\nu_p(bc)=2(\nu_p(b)+\nu_p(c))\\&\geq\nu_p(a)+\nu_p(b)+\nu_p(c)=\nu_p(abc),\end{aligned}$$

lo cual implica que $\nu_p(b)+\nu_p(c)\geq\nu_p(a)$, por lo que $\nu_p\left(\frac{bc}{a}\right)\geq 0$. Como p es un primo arbitrario y, hemos probado que cada uno de $\nu_p\left(\frac{ab}{c}\right)$, $\nu_p\left(\frac{ac}{b}\right)$ y $\nu_p\left(\frac{bc}{a}\right)$ es mayor o igual que 0, entonces cada uno de $\frac{ab}{c}$, $\frac{ac}{b}$ y $\frac{bc}{a}$ es un número entero.

Ejemplo 4. *Encuentra todas las funciones $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ que cumplen las siguientes condiciones:*

1) $f(a)^2+f(b)^2=f(a+b)^2-2^{2011}f(ab)$ *para cualesquiera enteros positivos a y b.*

2) $f(2010)=2^{2010}\cdot 2010$.

Solución. Sustituyendo $a=b$ en la igualdad de la condición 1), obtenemos que

$$2f(a)^2=f(2a)^2-2^{2011}f(a^2). \tag{1}$$

Si $\nu_2(f(a))=k$ y $\nu_2(f(2a))=l$, entonces $\nu_2(2f(a)^2)=2k+1$ y $\nu_2(f(2a)^2)=2l$. En particular, $\nu_2(2f(a)^2)\neq\nu_2(f(2a)^2)$. Notemos que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación

$$2^{2011}f(a^2)=f(2a^2)-2f(a)^2, \tag{2}$$

lo cual implica que $2011\leq\nu_2\left(f(2a^2)-2f(a)^2\right)=\min\{2k+1,2l\}$. En particular, se tiene que $2k+1\geq 2011$, esto es, $k\geq 1005$. Dado que a es un entero positivo arbitrario, lo anterior demuestra que $\nu_2(c)\geq 1005$ para todo entero positivo c. Tomemos a tal que $\nu_2(a)=x\geq 1005$ es mínimo. Se tiene entonces que $\nu_2\left(2^{2011}f(a^2)\right)\geq 2011+x$ y, nuevamente, tomando la valuación 2-ádica en la ecuación (2), se tiene que

$$2011+x\leq\nu_2\left(2^{2011}f(a^2)\right)=\nu_2\left(f(2a)^2-2f(a)^2\right)=\min\{2x+1,2l\}.$$

De lo anterior podemos concluir que $2011 + x \leq 2x + 1$, lo que equivale a $x \geq 2010$.
Por lo tanto, hemos probado que $2^{2010} \mid f(n)$ para todo entero positivo n.
Si hacemos $b = 1$ en la ecuación 1) del problema y despejamos $f(a+1)^2$, obtenemos

$$f(a)^2 < f(a)^2 + f(1)^2 + 2^{2011} f(a) = f(a+1)^2,$$

de donde se sigue que la función es creciente, esto es, $f(a) < f(b)$ si y solo si $a < b$.
Con esto y, usando que $2^{2010} \mid f(n)$, podemos concluir que $2^{2010} \cdot n \leq f(n)$, pero la segunda condición del problema nos dice que $f(2010) = 2^{2010} \cdot 2010$, lo cual a la vez nos dice que $f(i) = 2^{2010} i$ para todo $1 \leq i \leq 2010$, ya que es la única forma de que se cumpla que $2^{2010} i \leq f(i) < 2^{2010}(i+1)$ para todo $1 \leq i \leq 2009$.
Finalmente, probaremos por inducción que $f(n) = 2^{2010} n$ para todo entero positivo n.
Tomemos como base $n = 1$ y supongamos que $f(i) = 2^{2010} i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.
Tomemos $a = 1$ y $b = n-1$ en la igualdad de la condición 1). De esta forma obtenemos

$$f(1)^2 + f(n-1)^2 = f(n)^2 - 2^{2011} f(n-1).$$

Despejando $f(n)^2$ y usando la hipótesis de inducción, tenemos

$$(2^{2010} \cdot 1)^2 + (2^{2010}(n-1))^2 + 2^{2011}(2^{2010}(n-1)) = f(n)^2.$$

Factorizando 2^{4020} y reagrupando, obtenemos que $2^{2010} n = f(n)$.
Finalmente, es fácil ver que dicha función cumple las condiciones del problema.

Ejemplo 5 (Olimpiada regional zona centro, México, 2019)**.** *Determina todos los enteros positivos m con la siguiente propiedad: Si d es un entero positivo menor o igual que m y no es coprimo con m, entonces existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$, todos ellos coprimos con m, tales que*

$$m + a_1 d + a_2 d^2 + \cdots + a_{2019} d^{2019}$$

es una potencia perfecta.

Solución. Supongamos que m cumple la propiedad. Como $\text{mcd}(d, m) \neq 1$, entonces existe un primo p que divide a ambos números d y m. Notemos que $\nu_p(a_i d^i) = \nu_p(d^i)$, porque $\text{mcd}(a_i, m) = 1$ y, por lo tanto, cada a_i es primo relativo con cualquier divisor de m. Más aún, $\nu_p(d^i) \leq \nu_p(d^j)$ si y solo si $0 < i \leq j$. Juntando las observaciones anteriores y usando la propiedad d) del Teorema 1, tenemos que

$$\nu_p\big(a_1 d + a_2 d^2 + \cdots + a_{2019} d^{2019}\big) = \nu_p(d).$$

Notemos que lo anterior implica que si $\nu_p(m) > \nu_p(d)$, entonces

$$\nu_p\big(m + a_1 d + a_2 d^2 + \cdots + a_{2019} d^{2019}\big) = \nu_p(d)$$

y, si $\nu_p(m) < \nu_p(d)$, entonces

$$\nu_p\big(m + a_1 d + a_2 d^2 + \cdots + a_{2019} d^{2019}\big) = \nu_p(m).$$

Como d puede ser cualquier entero que no sea primo relativo con m y $p \mid m$, podemos elegir $p = d$ y concluir que si $\nu_p(m) > 1$, entonces

$$\nu_p\big(m + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_{2019}p^{2019}\big) = \nu_p(p) = 1,$$

por lo que la suma $m + a_1p + a_2p^2 + \cdots + a_{2019}p^{2019}$ no podría ser una potencia perfecta. Es decir, hemos visto que si m tiene algún divisor primo p, tal que $p^2 \mid m$, entonces, eligiendo $d = p$, obtenemos un entero cuya valuación p-ádica es 1 y, por lo tanto, no puede ser una potencia perfecta. Con esto concluimos que si m cumple la propiedad buscada, entonces m es de la forma $m = p_1p_2 \cdots p_k$, donde los p_i's son primos distintos.
De lo anterior se sigue que si m no es primo, entonces es un producto de al menos dos primos p y q con $p < q$. De esta forma, tenemos que $p^2 < pq \leq m$. Tomando $d = p^2$ y usando el hecho de que $1 = \nu_p(m) < \nu_p(p^2)$, obtenemos que

$$\nu_p\big(m + a_1(p^2) + a_2(p^2)^2 + \cdots + a_{2019}(p^2)^{2019}\big) = \nu_p(m) = 1,$$

por lo que nuevamente el número obtenido no sería una potencia perfecta. Esto contradice el hecho de que m puede tener más de un factor primo.
Finalmente, mostraremos que si $m = p$, es primo, entonces cumple la propiedad buscada. Como el único número menor o igual a p que no es primo relativo con p es el mismo p, basta mostrar que para $d = p$ se pueden elegir las a_i's de forma que se cumpla la propiedad. Para ello tomaremos $a_i = p - 1$. De esta forma obtenemos que

$$\begin{aligned}
&p + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^{2019} \\
&= p + p^2 - p + p^3 - p^2 + \cdots + p^{2020} - p^{2019} \\
&= p^{2020},
\end{aligned}$$

que es una potencia perfecta, por lo que los valores de m que satisfacen la condición del problema son los números primos.

Ejemplo 6 (Examen selectivo de Perú para la EGMO, 2021)**.** *Determina todos los enteros positivos b para los cuales existe un entero positivo a con las siguientes propiedades:*

1) a no es un divisor de b,

2) a^a es un divisor de b^b.

Solución. Aunque es claro que la valuación p-ádica está involucrada, no siempre es lo más conveniente usar dicha notación, en particular, en este problema usaremos la notación usual para la descomposición canónica de un entero. Por un lado, si a y b cumplen las condiciones, entonces los primos que dividen a a también dividen a b. Sin embargo, para algún primo p tal que $p \mid a$ y $p \mid b$, se debe cumplir que $\nu_p(a) > \nu_p(b)$. Supongamos que $p^\alpha || a$ y que $p^\beta || b$. Más aún, sean $a = p^\alpha T$ y $b = p^\beta S$, con $\text{mcd}(T, p) = 1 = \text{mcd}(S, p)$. Si nos fijamos solamente en el primo p, las condiciones del problema se traducen en

1) $\alpha > \beta$,

2) $\alpha T p^{\alpha} \leq \beta S p^{\beta}$.

En particular, podemos notar que si para b existe un entero positivo a tal que $a \nmid b$ pero $a^a \mid b^b$, entonces se puede elegir una potencia de un primo, digamos p^{α}, en lugar de a, de tal forma que p^{α} y b cumplen las condiciones del problema. Ahora supongamos que $b = p^{\beta}S$ y $a = p^{\alpha}$ cumplen que $p^{\alpha} \nmid b$ y $(p^{\alpha})^{(p^{\alpha})} \mid b^b$. Como $\alpha \geq \beta + 1$, podemos cambiar α por $\beta + 1$ y los números $a = p^{\beta+1}$ y b siguen cumpliendo las condiciones.
Con lo anterior hemos probado que si para cierto entero positivo b existe un entero positivo a tal que $a \nmid b$ y $a^a \mid b^b$, entonces, para el mismo b, se puede elegir $a = p^{\beta+1}$, donde p es un primo tal que $p^{\beta} || b$.
Ahora notemos que dicho par cumple las condiciones si y solo si $(\beta+1)p^{\beta+1} \leq \beta p^{\beta} S$, lo cual sucede si y solo si $(\beta+1)p \leq \beta S$. En particular, si p es el menor divisor primo de b y S es el producto de al menos dos primos, entonces $S \geq 2p$ y $(\beta+1)p \leq 2\beta p \leq \beta S$.
Por lo tanto, hemos probado que si b es el producto de al menos tres números primos y al menos dos de ellos son distintos, entonces existe un entero a que satisface las condiciones.
Ahora notemos que si $b = p^{\beta}$, entonces no puede existir un número a que no divida a b pero que una de sus potencias sí divida a b^b, ya que los divisores de p^{β} son de la forma p^{α}, pero si $a = p^{\alpha}$ no divide a p^{β}, entonces $\alpha > \beta$, lo cual implica que $a > b$ y, por lo tanto, $a^a > b^a > b^b$.
Solo hace falta resolver el caso cuando $b = pq$, con p y q primos distintos. Como vimos anteriormente, si $p < q$, entonces $a = p^2$ debería cumplir que $a \nmid b$ pero $a^a \mid b^b$. Lo anterior es equivalente a $2p^2 \leq pq$, lo cual es cierto si y solo si $2p \leq q$.
Concluimos que los enteros que cumplen lo buscado son todos los enteros positivos que no son potencias de primos ni son de la forma pq con p y q primos tales que $p < q < 2p$.

Ejemplo 7 (Lista corta ELMO 2017, N3)**.** *Para cada entero $C > 1$ determina si existe una sucesión de enteros positivos distintos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tales que para todo $k \geq 1$, $a_{k+1}^k \mid C^k a_1 a_2 \cdots a_k$.*

Solución. Demostraremos que no existe tal sucesión. Supongamos, por contradicción, que hay una sucesión que cumple las condiciones del problema. Primero demostraremos por inducción que si $p \mid a_k$, entonces $p \mid Ca_1$. El resultado es claramente cierto para a_2, ya que $a_2^2 \mid Ca_1$. Ahora, supongamos que el resultado es cierto para todo $1 \leq i \leq k$. Si $p \mid a_{k+1}$, entonces $p \mid C^k a_1 a_2 \cdots a_k$, por lo que p divide a alguno de los a_i's, con $1 \leq i \leq k$, o p divide a C y el resultado se sigue de la hipótesis de inducción.
Con lo anterior podemos concluir que los a_i's tienen como factores primos solo a un número finito de primos, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_t$.
Sea p un número primo y sean $\nu_p(C) = c$, $x_i = \nu_p(a_i)$ para cada $i \geq 1$. La divisibilidad planteada se traduce en la siguiente desigualdad en la valuación p-ádica:

$$kx_{k+1} \leq kc + x_1 + \cdots + x_k.$$

Para cada entero $n \geq 2$, definimos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Demostraremos el siguiente lema.

Lema 1. $x_n \leq cH_{n-1} + x_1$ para cada entero $n \geq 2$.

Demostración. Primero notemos que cambiar x_i por $x_i - r$, no cambia la relación

$$kx_{k+1} \leq kc + x_1 + \cdots + x_k, \tag{3}$$

por lo que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_1 = 0$. Con esto en mente, usaremos inducción fuerte. El caso base $n = 2$ se sigue de la desigualdad (3): $x_2 \leq c + x_1 = cH_1 + x_1$. Ahora suponemos el resultado cierto para todo $1 \leq i \leq n-1$. Entonces,

$$\begin{aligned}(n-1)c + x_1 + \cdots + x_{n-1} &\leq (n-1)c + c\left(1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \cdots + \frac{1}{n-2}\right)\right) \\ &= c\left(1 + (n-2) + \frac{n-2}{1} + \frac{n-3}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2}\right) \\ &= c\left(\frac{n-1}{1} + \frac{n-1}{2} + \cdots + \frac{n-1}{n-2} + \frac{n-1}{n-1}\right) \\ &= c(n-1)H_{n-1}.\end{aligned}$$

□

Ahora fijemos N en la desigualdad $x_N \leq cH_N + x_1$ y sea $a = cH_N + x_1$. Tenemos entonces que $x_N \leq a$. Notemos que

$$H_{N+N} - H_N = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{N+N} < 1.$$

Con esto y la desigualdad del Lema 1, existen $N(k+1)$ términos de los x_i's menores o iguales que $a + ck$.
Ahora demostraremos el siguiente lema.

Lema 2. Para cualquier número d, existen números N y k tales que $d < \frac{N(k+1)}{a+ck}$.

Demostración. La desigualdad es equivalente a $da + dck < N(k+1)$. Si tomamos $N > dc$ y aumentamos k en 1, el lado izquierdo aumenta en dc, mientras que el lado derecho aumenta en N, por lo se obtiene la desigualdad para k suficientemente grande. □

El Lema 2 implica que el número $\frac{n}{cH_n+x_1}$ es arbitrariamente grande. Recordando que $x_i = \nu_p(a_i)$, lo anterior se traduce en que para un primo fijo p, se puede elegir una cantidad arbitrariamente grande de los a_i's tales que su valuación p-ádica es igual. Finalmente, recordando que existen solo t primos que dividen a los a_i's, por el principio de las casillas existen a_i y a_j tales que su valuación p-ádica es igual para todos los primos p, pero esto implica que $a_i = a_j$, lo cual es una contradicción.

Teorema 4 (Lifting the Exponent Lemma, LTE). *a) Sea p un primo impar que no divide a los enteros a y b. Si $p \mid a - b$ y n es un entero no negativo, entonces*

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n).$$

b) Sea p un primo impar que no divide a los enteros a y b. Si $p \mid a+b$ y n es un entero positivo impar, entonces

$$\nu_p(a^n + b^n) = \nu_p(a+b) + \nu_p(n).$$

c) Sean $p = 2$, n un entero par y a, b enteros tales que $p \nmid a$ y $p \nmid b$.

1) Si $4 \mid a-b$, entonces $\nu_2(a^n - b^n) = \nu_2(a-b) + \nu_2(n)$.

2) Si $4 \mid a+b$, entonces $\nu_2(a^n + b^n) = \nu_2(a+b) + \nu_2(n)$.

Demostración. a) Haremos inducción sobre $\nu_p(n)$. Primero haremos el caso en el que $\nu_p(n) = 0$. Notemos que $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$, por lo que

$$\begin{aligned}\nu_p(a^n - b^n) &= \nu_p((a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})) \\ &= \nu_p(a-b) + \nu_p(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}).\end{aligned}$$

Analicemos el segundo término módulo p. Como $a \equiv b \pmod{p}$, tenemos que $a^{n-k}b^{k-1} \equiv a^{n-1} \pmod{p}$, lo cual implica que

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1} \equiv na^{n-1} \pmod{p}.$$

Como a y n son primos relativos con p, concluimos que $\nu_p(na^{n-1}) = 0$ y, por lo tanto, $\nu_p(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}) = 0$, de donde se sigue que $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a-b) + \nu_p(n)$.

Ahora supongamos que $n = p$. Como $p \mid a-b$, se tiene entonces que $b = a + p^k b_1$, donde $\text{mcd}(b_1, p) = 1$ y, además, $\nu_p(a-b) = \nu_p(-p^k b_1) = k$. Usando el teorema del binomio de Newton, tenemos:

$$\begin{aligned}a^p - b^p &= a^p - (a + p^k b_1)^p \\ &= a^p - \binom{p}{0}a^p - \binom{p}{1}a^{p-1}p^k b_1 - \binom{p}{2}a^{p-2}p^{2k}b_1^2 - \cdots - \binom{p}{p}p^{pk}b_1^p \\ &= -pa^{p-1}p^k b_1 - \binom{p}{2}a^{p-2}p^{2k}b_1^2 - \cdots - \binom{p}{p}p^{pk}b_1^p.\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que

$$\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p\left(-pa^{p-1}p^k b_1 - \binom{p}{2}a^{p-2}p^{2k}b_1^2 - \cdots - \binom{p}{p}p^{pk}b_1^p\right).$$

Notemos que p^{2k+1} divide a todos los términos, excepto a $-pa^{p-1}p^k b_1$, por lo que

$$\begin{aligned}\nu_p(a^p - b^p) &= \nu_p\left(-pa^{p-1}p^k b_1 - \binom{p}{2}a^{p-2}p^{2k}b_1^2 - \cdots - \binom{p}{p}p^{pk}b_1^p\right) \\ &= \nu_p\left(pa^{p-1}p^k b_1\right) = \nu_p(p) + \nu_p(a^{p-1}) + \nu_p(p^k) + \nu_p(b_1) \\ &= \nu_p(p) + 0 + \nu_p(p^k) + 0 = \nu_p(p) + k \\ &= \nu_p(p) + \nu_p(a-b).\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que el resultado es cierto para $\nu_p(n) = m - 1$. Sea n tal que $\nu_p(n) = m$ y escribamos $n = p^m c$, con $\mathrm{mcd}(c, p) = 1$. Utilizando lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_p(a^n - b^n) &= \nu_p(a^{p^m c} - b^{p^m c}) = \nu_p\left((a^{p^{m-1}c})^p - (b^{p^{m-1}c})^p\right)\\ &= \nu_p(p) + \nu_p(a^{p^{m-1}c} - b^{p^{m-1}c}).\end{aligned}$$

Pero, por la hipótesis de inducción se tiene

$$\begin{aligned}\nu_p(p) + \nu_p(a^{p^{m-1}c} - b^{p^{m-1}c}) &= \nu_p(p) + \nu_p(p^{m-1}c) + \nu_p(a - b)\\ &= 1 + m - 1 + \nu_p(a - b)\\ &= m + \nu_p(a - b)\\ &= \nu_p(n) + \nu_p(a - b).\end{aligned}$$

b) La demostración es análoga a la anterior, usando ahora la factorización $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$, válida para n impar.

c) En los casos anteriores, supusimos que p es un primo impar. Notemos que en este caso, $p = 2$.

1) Al igual que en la prueba de la primera parte de este lema, si $\mathrm{mcd}(p, n) = 1$, entonces $\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b)$. Así, tomamos $n = 2^k m$ con $\mathrm{mcd}(m, 2) = 1$, por lo que $\nu_2(a^{(2^k)^m} - b^{(2^k)^m}) = \nu_2(a^{2^k} - b^{2^k})$.
Notemos que $a^{2^k} - b^{2^k} = (a^{2^{k-1}} + b^{2^{k-1}})(a^{2^{k-2}} + b^{2^{k-2}}) \cdots (a + b)(a - b)$ y, como $a - b \equiv 0 \pmod 4$, resulta que $a \equiv b \pmod 4$, lo cual implica que $a^{2^t} \equiv b^{2^t} \pmod 4$ y $a^{2^t} + b^{2^t} \equiv 2a^{2^t} \not\equiv 0 \pmod 4$, esta última congruencia se debe a que $2 \nmid a$. Esto implica que $\nu_2(a^{2^t} - b^{2^t}) = 1$ para todo t. Entonces,

$$\begin{aligned}\nu_p(a^{2^k} - b^{2^k}) &= \nu_p((a^{2^{k-1}} - b^{2^{k-1}})(a^{2^{k-2}} - b^{2^{k-2}}) \cdots (a - b)(a + b))\\ &= \nu_p(a^{2^{k-1}} - b^{2^{k-1}}) + \cdots + \nu_p(a - b) + \nu_p(a + b)\\ &= \nu_p(a - b) + k = \nu_p(a - b) + \nu_p(n).\end{aligned}$$

2) La demostración es análoga a la anterior.

$\square$

Ejemplo 8 (Lista Corta, Olimpiada de Matemáticas de los Balcanes 2017, N3)**.** *Demuestra que para todo entero positivo n, existe un entero m tal que $7^n \mid 3^m + 5^m - 1$.*

Solución. Demostraremos que para cada entero positivo n, el número $m = 7^{n-1}$ cumple. Utilicemos la segunda versión de LTE con $p = 7$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\nu_7(3^m + 4^m) &= \nu_7(3 + 4) + \nu_7(m) = \nu_7(3^{7^{n-1}} + 4^{7^{n-1}}) = \nu_7(3 + 4) + \nu_7(7^{n-1})\\ &= 1 + n - 1 = n.\end{aligned}$$

Notemos que esto implica que $3^{7^{n-1}} + 4^{7^{n-1}} \equiv 0 \pmod{7^n}$. Utilizando de nuevo la segunda versión de LTE con $p = 7$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\nu_7(5^m + 2^m) = \nu_7(5+2) + \nu_7(m) = \nu_7(5^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}}) &= \nu_7(5+2) + \nu_7(7^{n-1}) \\ &= 1 + n - 1 = n.\end{aligned}$$

Esto implica que $5^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} \equiv 0 \pmod{7^n}$. Sumando ambas congruencias obtenemos que $3^{7^{n-1}} + 4^{7^{n-1}} + 5^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} \equiv 0 \pmod{7^n}$, esto es, $3^{7^{n-1}} + 5^{7^{n-1}} \equiv -(4^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}}) \pmod{7^n}$, de donde obtenemos que

$$3^{7^{n-1}} + 5^{7^{n-1}} - 1 \equiv -(4^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} + 1) \pmod{7^n}.$$

Ahora, módulo 7 tenemos que $2^0 \equiv 1$, $2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 1$, etc. Como $7^{n-1} \equiv 1^{n-1} \equiv 1 \pmod 3$, tenemos que $2^{7^{n-1}} - 1 \equiv 1 \pmod 7$, lo cual implica que

$$\begin{aligned}4^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} + 1 &\equiv (4^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} + 1)(2^{7^{n-1}} - 1) \\ &\equiv 8^{7^{n-1}} + 4^{7^{n-1}} + 2^{7^{n-1}} - 4^{7^{n-1}} - 2^{7^{n-1}} - 1 \\ &\equiv 8^{7^{n-1}} - 1 \\ &\equiv 0 \pmod 7.\end{aligned}$$

Utilizando LTE con $p = 7$ una vez más obtenemos que

$$\nu_7(8^{7^{n-1}} - 1) = \nu_7(8-1) + \nu_7(7^{n-1}) = 1 + n - 1 = n.$$

Por lo que, $3^{7^{n-1}} + 5^{7^{n-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{7^n}$.

Ejemplo 9 (IMO 2019, Problema 2)**.** *Encuentra todos los pares (k, n) de enteros positivos tales que $k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1})$.*

Solución. Notemos que $\nu_2(2^n - 2^k) = k$, por lo que

$$\begin{aligned}&\nu_2((2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1})) \\ &= \nu_2(2^n - 1) + \nu_2(2^n - 2) + \cdots + \nu_2(2^n - 2^{n-1}) \\ &= 0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2}.\end{aligned}$$

Por el teorema de Legendre, tenemos que

$$\nu_2(k!) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^m} \right\rfloor \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k}{2^m} = k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < k.$$

Con esto concluimos que $k > \dfrac{(n-1)n}{2}$.
Ahora analizando $p = 3$, obtenemos que

$$\nu_3(2^n - 2^k) = \nu_3(2^k(2^{n-k} - 1)) = \nu_3(2^k) + \nu_3(2^{n-k} - 1) = \nu_3(2^{n-k} - 1).$$

Además, es fácil ver que $2^n \equiv 1 \pmod 3$ si n es par y $2^n \equiv 2 \pmod 3$ si n es impar. Luego, si $n-k$ es impar, $\nu_3(2^{n-k}-1) = 0$ y, si $n-k = 2t$ es par, podemos utilizar LTE para ver que $\nu_3(2^{n-k}-1) = \nu_3(2^{2t}-1) = \nu_3(4^t-1) = \nu_3(4-1)+\nu_3(t) = 1+\nu_3(t)$. Por lo que tomando la valuación 3-ádica de la multiplicación, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\nu_3((2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\cdots(2^n-2^{n-1}))\\
&= \nu_3(2^n-1) + \nu_3(2^n-2) + \cdots + \nu_3(2^n-2^{n-1})\\
&= \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 1 + \nu_3(t) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \nu_3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor!\right)\\
&= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{3^2} \right\rfloor + \cdots\\
&< \frac{n}{2} + \frac{n}{6} + \frac{n}{18} + \cdots\\
&= \frac{n}{2}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3n}{4}.
\end{aligned}$$

Además, sabemos que $\nu_3(k!) \geq \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor > \frac{k}{3} - 1$. Luego, $\frac{k}{3} - 1 < \nu_3(k!) < \frac{3n}{4} < n$, lo cual implica que $\frac{(n-1)n}{2} < k < 3n+3$. Así, $n(n-1) < 6(n+1)$, esto es,

$$n^2 - 7n - 6 < 0,$$

de donde se sigue que $n < 7$. Finalmente, revisando los casos donde $n \leq 6$, obtenemos que las únicas soluciones son $(1,1)$ y $(3,2)$.

Ejercicios

1) Considera el conjunto L que contiene a los enteros $1, 2, \ldots, n$, para algún entero positivo n. Sea 2^k la máxima potencia de 2 que pertenece a L. Prueba que 2^k no es divisor de ningún otro entero en L. Usa lo anterior para probar que la suma

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}.$$

no es un entero si $n > 1$.

2) Sea $p > 2013$ un primo. Sean a y b enteros positivos tales que $p \mid a+b$ pero $p^2 \nmid a+b$. Si $p^2 \mid a^{2013}+b^{2013}$, encuentra el número de enteros positivos $n \leq 2013$ tales que $p^n \mid a^{2013}+b^{2013}$.

3) (OMM 2005, Concurso Nacional, Problema 3) Determina todos los pares (a,b) de enteros diferentes de 0 para los cuales es posible encontrar un entero positivo x y un entero y de tal forma que x es primo relativo con b y en la siguiente lista hay una infinidad de enteros:

$$\frac{a+xy}{b}, \frac{a+xy^2}{b^2}, \frac{a+xy^3}{b^3}, \ldots, \frac{a+xy^n}{b^n}, \ldots$$

4) (Lista corta IMO 2015, N1) Determina todos los enteros positivos M tales que la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = M + \frac{1}{2}$ y
$$a_{k+1} = a_k \lfloor a_k \rfloor \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$
contiene al menos un entero.

5) (IMO 2018, Problema 5) Sean $a_1, a_2, \ldots$ una sucesión infinita de enteros positivos. Suponga que existe un entero $N > 1$ tal que, para cada $n \geq N$, el número
$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$
es un entero. Demuestra que existe un entero M tal que $a_m = a_{m+1}$ para todo $m \geq M$.

6) (EGMO 2022, Problema 2) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para cualesquiera enteros positivos a y b, se satisfacen las siguientes condiciones:
(1) $f(ab) = f(a)f(b)$, y
(2) al menos dos de los números $f(a)$, $f(b)$ y $f(a+b)$ son iguales.

7) (Olimpiada China de Matemáticas 2018, Problema 1) Sean n un entero positvo y A_n el conjunto de los primos p tales que existen enteros positivos a, b que satisfacen que $\frac{a+b}{p}$ y $\frac{a^n+b^n}{p^2}$ son ambos enteros coprimos con p. Si A_n es finito, $f(n)$ denota $|A_n|$.

   a) Prueba que A_n es finito si y solo si $n \neq 2$.

   b) Sean m, k enteros positovs impares y sea d su máximo común divisor. Demuestra que
$$f(d) \leq f(k) + f(m) - f(km) \leq 2f(d).$$

8) (APMO 2017, Problema 4) Llamamos a un número racional r poderoso si r puede expresarse en la forma $\frac{p^k}{q}$ para algunos enteros positivos p y q primos relativos y algún entero $k > 1$. Sean a, b, c números racionales positivos tales que $abc = 1$. Supón que existen enteros positivos x, y, z tales que $a^x + b^y + c^z$ es un entero. Prueba que a, b y c son poderosos.

9) (IMO 2022, Problema 5) Determina todas las ternas (a, b, p) de enteros positivos, con p primo, que satisfacen $a^p = b! + p$.

Bibliografía

1) I. Niven, H. S. Zuckerman, H. L. Montgomery. *An introduction to the Theory of Numbers*. 5th edition, John Wiley & Sons, 1991.

2) Justin Stevens. *Olympiad number theory through challenging problems*. https://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/olymp

3) M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2004.

Problemas de práctica

A continuación presentamos los 20 problemas de práctica seleccionados especialmente para este cuarto y último número del año 2022. Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista. Estamos seguros que conoces problemas interesantes que quieres compartir y por eso ponemos a tu disposición la dirección revistaomm@gmail.com, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Problema 1. Sea $ABCD$ un rectángulo tal que $AB = CD = 1$ y $BC = DA = 2$. Sea M el punto medio de AD. El punto P se encuentra del lado opuesto de MB respecto a A, de manera que el triángulo MBP es equilátero. Encuentra el valor del ángulo $\angle PCB$.

Problema 2. Encuentra todos los números reales x que sean solución de la ecuación

$$x + \frac{x}{1+2} + \frac{x}{1+2+3} + \frac{x}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{x}{1+2+3+\cdots+4043} = 4043.$$

Problema 3. Determina todos los enteros positivos n tales que el mayor entero que es menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ sea un número primo.

Problema 4. Sean a y b números reales positivos tales que $a > b$. Demuestra que

$$\sqrt{2}a^3 + \frac{3}{ab - b^2} \geq 10$$

y determina cuándo se da la igualdad.

Problema 5. Sean x, y, z números reales positivos tales que $x + y + z = 3$. Demuestra que al menos uno de los números $x(x + y - z)$, $y(y + z - x)$ o $z(z + x - y)$, es menor o igual que 1.

Problema 6. Determina todos los números primos p y q tales que $p^3 + 3q^3 - 32$ sea un número primo.

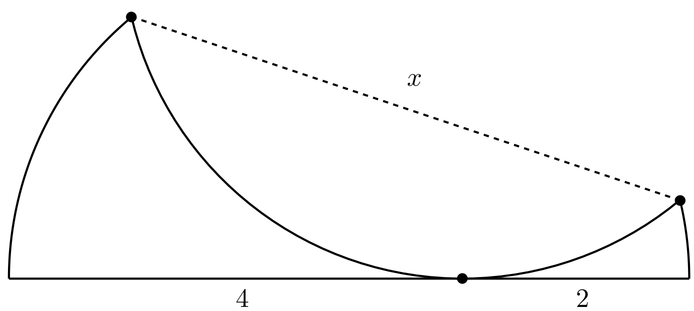
Problema 7. Usando un argumento combinatorio, demuestra que $n^3 = 3n^2 - 2n + 6\binom{n}{3}$ para todo entero positivo n.

Problema 8. En el triángulo ABC, las bisectrices AD, BE y CF se intersecan en I. Si $DI = 3$, $BD = 4$ y $BI = 5$, calcula el área del triángulo ABC.

Problema 9. Sean a, b y c números reales positivos tales que $a + b + c = 6$. Demuestra que

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq \frac{75}{4}.$$

Problema 10. La parte superior de una hoja de papel en forma de semicírculo se dobla hasta que, al tocar el diámetro, lo divide en un segmento de longitud 4 y un segmento de longitud 2, como se muestra en la figura. Determina la longitud x de la línea a través de la que se hizo el doblez.



Problema 11. Cada punto del plano se colorea con uno de tres colores. Demuestra que existe un triángulo con vértices del mismo color tal que es isósceles o sus ángulos internos están en progresión geométrica.

Problema 12. Determina todos los enteros positivos n tales que $|2^n + 5^n - 65|$ es un cuadrado perfecto.

Problema 13. Sean Γ_1 y Γ_2 dos circunferencias que se intersecan en los puntos P y Q. Sea M un punto en la recta PQ. Sean A y D puntos en Γ_1 tales que M, A y D son colineales. Sean B y C puntos en Γ_2 tales que M, B y C son colineales. Sea Y la intersección de AB con CD. Demuestra que $YA \cdot YB = YC \cdot YD$.

Problema 14. Sea d un entero positivo. Demuestra que alguno de los números $2d - 1$, $5d - 1$ o $13d - 1$ no es un cuadrado perfecto.

Problema 15. Determina todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que

$$\text{mcd}(a, 20) = b,\ \text{mcd}(b, 15) = c \text{ y } \text{mcd}(a, c) = 5.$$

Problema 16. Determina todos los números reales que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2, \\ \frac{x^2}{2-y} + \frac{y^2}{2-x} &= 2. \end{aligned}$$

Problema 17. Sean $a_1 < a_2 < \cdots < a_{21}$ enteros positivos tales que la suma de cualesquiera 11 números es mayor que la suma de los restantes 10 números. Determina el valor más pequeño que puede tener a_1.

Problema 18. En un paralelogramo $ABCD$, la bisectriz del ángulo en A interseca a BC en M y a la extensión de DC en N. Si O es el circuncentro del triángulo MCN, demuestra que $\angle OBC = \angle ODC$.

Problema 19. Sean n, m y k enteros positivos tales que $m \geq n$ y $1+2+\cdots+n = mk$. Demuestra que los números $1, 2, \ldots, n$ se pueden separar en k grupos donde la suma de los números en cada grupo es igual a m.

Problema 20. Determina todas las funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tales que

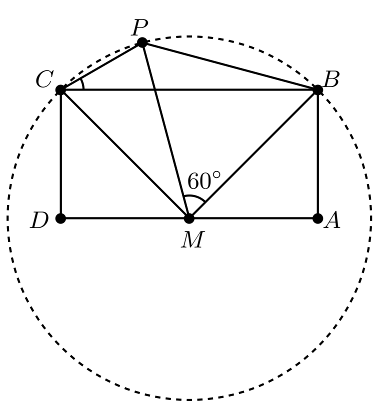
$$f(-f(x) - f(y)) = 1 - x - y$$

para cualesquiera números enteros x, y.

Soluciones a los problemas de práctica

En esta sección encontrarás las soluciones a los 20 problemas de práctica elegidos para este número de la revista. Antes de consultar estas soluciones, te recomendamos hacer tu propia solución a cada problema o, al menos, haberle dedicado un tiempo considerable a cada uno de ellos.
Es muy común en matemáticas que un problema tenga más de una solución. Las soluciones que presentamos no necesariamente son las mejores o las únicas. Aunque hayas resuelto un problema y estés muy seguro de que tu solución es correcta, te invitamos a consultar estas soluciones y discutirlas con tus compañeros. Si logras encontrar una solución diferente a las que aquí presentamos o tienes dudas de tus soluciones, te invitamos a compartirlas con nosotros a la dirección revistaomm@gmail.com.

Solución del problema 1. Como M es el punto medio de AD, tenemos por simetría, que $MB = MC$. Como el triángulo MBP es equilátero, tenemos que $MB = MP$. Esto implica que M es el circuncentro del triángulo BCP. Por lo tanto, $\angle PCB = \angle BMP/2 = 60^\circ/2 = 30^\circ$.



Solución del problema 2. Factorizando x y usando la fórmula de la suma de Gauss en cada denominador, podemos reescribir la ecuación como:

$$x\left(1+\frac{1}{\frac{2(2+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{3(3+1)}{2}}+\cdots+\frac{1}{\frac{4043(4043+1)}{2}}\right)=4043$$
$$2x\left(\frac{2}{1(1+1)}+\frac{1}{2(2+1)}+\frac{1}{3(3+1)}+\cdots+\frac{1}{4043(4043+1)}\right)=4043. \qquad (4)$$

Usando la relación $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ válida para todo $n>0$, la ecuación (4) se puede reescribir como:

$$2x\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4043}-\frac{1}{4044}\right)=4043,$$
$$2x\left(\frac{4044}{4044}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4043}-\frac{1}{4044}\right)=4043,$$
$$2x\left(\frac{4044}{4044}-\frac{1}{4044}\right)=4043,$$
$$2x\left(\frac{4043}{4044}\right)=4043.$$

Despejando x, obtenemos la única solución $x=\frac{1}{2}\cdot 4043\cdot\frac{4044}{4043}=2022$.

Solución del problema 3. Si $n=1$, el mayor entero que es menor o igual a $\frac{1}{3}$ es 0, el cual no es primo. Así que podemos asumir que $n>1$.
Se tienen tres casos:

a) n es de la forma $3k-1$. En este caso tenemos que $\frac{n^2}{3}=\frac{9k^2-6k+1}{3}$, por lo que el mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es $\frac{9k^2-6k}{3}=3k^2-2k=k(3k-2)$. De aquí solo es posible tomar $k=1$, en cuyo caso $k(3k-2)=1$ no es un número primo.

b) n es de la forma $3k$. En este caso, el mayor entero positivo menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es $\frac{9k^2}{3}=3k^2$, el cuál es primo solo cuando $k=1$, es decir, cuando $n=3$.

c) n es de la forma $3k+1$. En este caso tenemos que $\frac{n^2}{3}=\frac{9k^2+6k+1}{3}$, por lo que el mayor entero menor o igual que $\frac{n^2}{3}$ es $\frac{9k^2+6k}{3}=3k^2+2k=k(3k+2)$. Nuevamente, solo es posible tomar $k=1$, por lo que $k(3k+1)=5$, que es primo, por lo que $n=3(1)+1=4$.

Por lo tanto, las únicas soluciones son $n=3$ y $n=4$.

Solución del problema 4. Aplicando la desigualdad MA-MG a los números positivos b y $a-b$, tenemos que

$$ab-b^2=b(a-b)\leq\left(\frac{b+(a-b)}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4},$$

con la igualdad si y solo si $b = a - b$, esto es, $b = \frac{a}{2}$. La desigualdad anterior implica que $\dfrac{3}{ab-b^2} \geq \dfrac{12}{a^2}$.
Sumando $\sqrt{2}a^3$ en ambos lados de la desigualdad anterior y aplicando nuevamente la desigualdad MA-MG, obtenemos que

$$\sqrt{2}a^3 + \frac{3}{ab-b^2} \geq \sqrt{2}a^3 + \frac{12}{a^2} = \frac{a^3}{\sqrt{2}} + \frac{a^3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} + \frac{4}{a^2} \geq 5\left(\frac{4^3a^6}{2a^6}\right)^{1/5} = 10.$$

La igualdad en la segunda desigualdad se sostiene si y solo si $\frac{a^3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{a^2}$, esto es, cuando $a = \sqrt{2}$. Por lo tanto, todas las igualdades se sostienen cuando $a = \sqrt{2}$ y $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solución del problema 5. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \geq y$ y $x \geq z$. Entonces, $3x \geq x + y + z = 3$, esto es, $x \geq 1$. Demostraremos que $y(y + z - x) = y(3 - 2x) \leq 1$. Dividimos en dos casos.

a) $\frac{3}{2} \leq x < 3$. En este caso, tenemos que $3 \leq 2x < 6$, de donde $3 - 2x < 0$. Luego, $y(3 - 2x) < 0 < 1$.

b) $1 \leq x < \frac{3}{2}$. En este caso, tenemos que $2 \leq 2x < 3$, de donde $3 - 2x > 0$. Luego, $y(3-2x) \leq x(3-2x)$. Basta demostrar entonces que $x(3-2x) \leq 1$. Como $x \geq 1$, entonces $x - 1 \geq 0$ y $2x - 1 \geq 1$, así que $(2x-1)(x-1) = 2x^2 - 3x + 1 \geq 0$, lo cual es equivalente a $x(3 - 2x) \leq 1$, como queríamos.

Solución del problema 6. Si p y q son ambos primos impares, entonces $p^3 + 3q^3 - 32$ es par, por lo que si $p^3 + 3q^3 - 32$ es primo, entonces $p^3 + 3q^3 - 32 = 2$, esto es, $p^3 + 3q^3 = 34$. Como $p \geq 3$ y $q \geq 3$, resulta que $p^3 + 3p^3 \geq 108 > 34$. Por lo tanto, p y q no pueden ser ambos impares. Luego, $p = 2$ o $q = 2$.
Si $p = 2$, entonces $p^3 + 3q^3 - 32 = 3q^3 - 24 = 3(q^3 - 8)$. Pero esta última expresión es un número primo solo si $q^3 - 8 = 1$, que no tiene soluciones en los números enteros.
Si $q = 2$, tenemos que $p^3 + 3q^3 - 32 = p^3 - 8 = (p-1)(p^2 + 2p + 4)$. Luego, si $(p-2)(p^2 + 2p + 4)$ es primo, como $p^2 + 2p + 4 > p - 2$, entonces $p - 2 = 1$, esto es, $p = 3$. Como $3^3 + 3 \cdot 2^3 - 32 = 19$ es primo, concluimos que la única solución es $p = 3$ y $q = 2$.

Solución del problema 7. Hay n^3 ternas (a, b, c) de enteros tales que $1 \leq a, b, c \leq n$. Probaremos la igualdad contando estas ternas en tres casos:

- Caso 1: $a = b = c$. Existen n ternas.
- Caso 2: Dos valores iguales y uno diferente. Existen n formas de escoger los dos valores iguales y $n - 1$ formas de escoger el valor distinto. Como hay 3 formas de tener dos valores iguales y uno diferente, entonces hay $3n(n-1)$ ternas.
- Caso 3: Los tres valores diferentes. Basta contar el número de permutaciones de 3 objetos en n; es decir, hay

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 3!\binom{n}{3} = 6\binom{n}{3}$$

ternas.

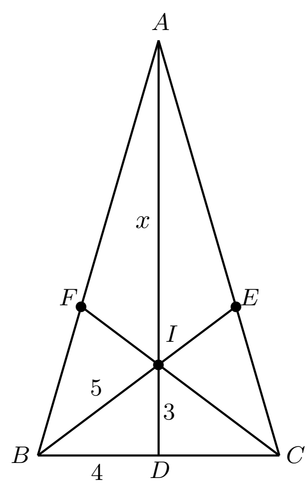
Sumando los resultados de los tres casos obtenemos que

$$n^3 = n + 3n(n-1) + 6\binom{n}{3} = 3n^2 - 2n + 6\binom{n}{3}.$$

Solución del problema 8. Como los lados del triángulo BDI forman una terna pitagórica, tenemos que $\angle BDI = 90°$. Sean $x = AI$, $y = AB$. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo BDA, tenemos que

$$(x+3)^2 + 16 = y^2. \tag{5}$$

Además, como BI es bisectriz del triángulo ABD, por el teorema de la bisectriz tenemos que $\frac{AB}{BD} = \frac{AI}{DI}$, esto es, $\frac{y}{4} = \frac{x}{3}$, por lo que $y = \frac{4}{3}x$. Sustituyendo en (5), obtenemos que $(x+3)^2 + 16 = \frac{16}{9}x^2$, esto es, $7x^2 - 54x - 225 = 0$. Como $7x^2 - 54x - 25 = (7x-75)(x+3)$ y x debe ser positivo, necesariamente $7x - 75 = 0$, de donde, $x = \frac{75}{7}$.



Por otra parte, como AI es bisectriz del ángulo $\angle BAC$ tenemos que $\angle BAD = \angle CAD$, por lo que los triángulos BDA y CDA son congruentes. Luego, D es punto medio de BC, así que $BC = 8$. Por lo tanto, el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2}(8)\left(3 + \frac{75}{7}\right) = \frac{384}{7}.$$

Solución del problema 9. Aplicando la desigualdad entre la media armónica y la media aritmética, tenemos que

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

lo cual implica que

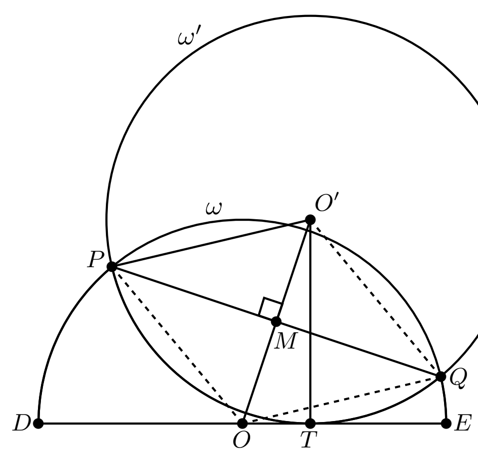
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{3}{2}.$$

Aplicando ahora la desigualdad entre la media cuadrática y la media aritmética, obtenemos que

$$\sqrt{\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2}{3}}\geq\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)}{3}\geq\frac{\frac{3}{2}+6}{3}=\frac{5}{2},$$

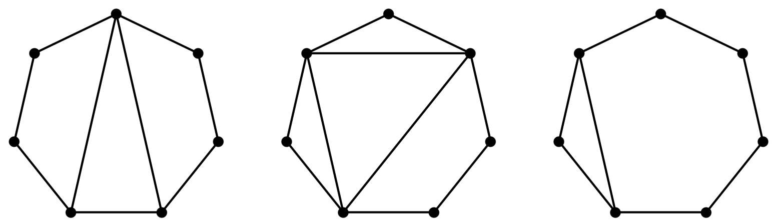
de donde se sigue el resultado.

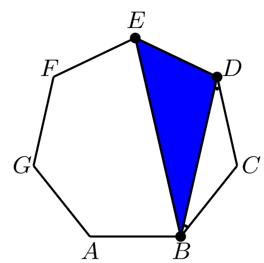
Solución del problema 10. Sea O el centro del semicírculo y sea T el punto de tangencia. Como el semicírculo ω tiene radio 3, entonces $OT=1$. Sea ω' el círculo que pasa por los puntos P, Q, T y sea O' el centro de ω'.



Como el segmento circular formado por P, Q y T es una reflexión de un segmento circular de ω, entonces el radio de ω' es 3. Más aún, $O'T=O'P=O'Q=3$, así que $O'POQ$ es un rombo y, por lo tanto, $O'O$ es mediatriz de PQ. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo $O'TO$, concluimos que $O'O=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. Luego, si M es el punto de intersección de PQ con $O'O$, entonces $OM=\frac{\sqrt{10}}{2}$.
Finalmente, por el teorema de Pitágoras en el triángulo OMP, obtenemos que $MP=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ y, como M es punto medio de PQ, concluimos que $x=\sqrt{26}$.

Solución del problema 11. Consideremos un heptágono regular con vértices A, B, C, D, E, F, G. Por el principio de las casillas, al menos tres vértices del heptágono deben tener el mismo color. Demostraremos que estos tres vértices satisfacen las condiciones del problema.
Existen cuatro maneras (salvo simetrías) de elegir tres vértices en un heptágono regular, ilustradas a continuación.





En los primeros tres casos, notemos que el triángulo formado es isósceles. Demostraremos que en el último caso los ángulos internos están en progresión geométrica.
Como la suma de ángulos internos, en radianes, de un heptágono es 5π, entonces $\angle BCD = \frac{5\pi}{7}$ y, como el triángulo BCD es isósceles, tenemos que $\angle CDB = \frac{\pi}{7}$, por lo que $\angle BDE = \frac{4\pi}{7}$. Luego, como CD y BE son paralelas, tenemos que $\angle BED + \angle BDC = \pi$; pero $\angle BDC = \frac{5\pi}{7}$, por lo que $\angle BED = \frac{2\pi}{7}$. Finalmente, como los ángulos $\angle BED$ y $\angle BDE$ son ángulos internos de un triángulo, entonces $\angle DBE = \pi - \frac{4\pi}{7} - \frac{2\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$, concluyendo así que los ángulos internos $\angle DBE$, $\angle BED$ y $\angle BDE$ están en progresión geométrica de razón 2.

Solución del problema 12. Es fácil ver que $2^n + 5^n - 65 > 0$ si $n \geq 3$, mientras que $2^n + 5^n - 65 < 0$ si $n = 1$ o 2. Entonces,

$$|2^n + 5^n - 65| = \begin{cases} 65 - 2^n - 5^n & \text{si } n = 1 \text{ o } 2, \\ \\ 2^n + 5^n - 65 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

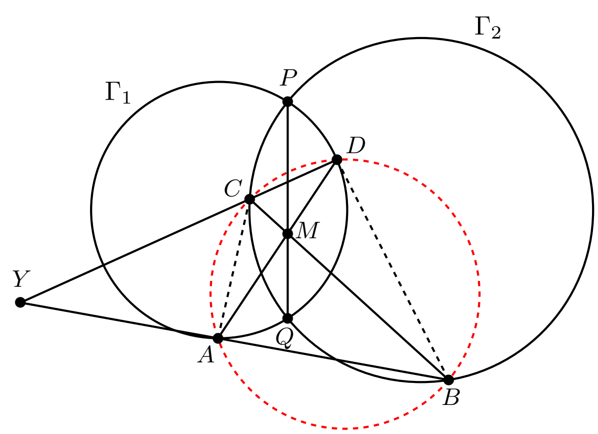
Si $n = 1$, entonces $65 - 2^1 - 5^1 = 58$ que no es un cuadrado perfecto. Si $n = 2$, entonces $65 - 2^2 - 5^2 = 36 = 6^2$.
Supongamos que $n \geq 3$. Como $5 \mid 5^n$ y $5 \mid 65$, entonces $2^n + 5^n - 65 \equiv 2^n \pmod{5}$. Luego, como todo entero n es de la forma $4k + r$, con $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, resulta que $2^n = (2^4)^k \cdot 2^r$. Pero $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$, así que $2^n \equiv 2^r \pmod{5}$. De aquí que:
Si $n \equiv 0 \pmod{4}$, entonces $2^n \equiv 1 \pmod{5}$.
Si $n \equiv 1 \pmod{4}$, entonces $2^n \equiv 2 \pmod{5}$.
Si $n \equiv 2 \pmod{4}$, entonces $2^n \equiv 4 \pmod{5}$.
Si $n \equiv 3 \pmod{4}$, entonces $2^n \equiv 3 \pmod{5}$.

Como todo cuadrado es congruente con 1 o 4 módulo 5, las posibilidades para n son: $n \equiv 0 \pmod 4$ o $n \equiv 2 \pmod 4$, lo cual implica que n es par, esto es, $n = 2m$ para algún entero positivo m. Como $n \geq 3$, entonces $m \geq 2$. Si $m = 2$, entonces $n = 4$ y $2^n + 5^n - 65 = 24^2$ y, si $m = 3$, entonces $n = 6$ y $2^n + 5^n - 65 = 5^6 - 1$, que no es un cuadrado perfecto. En el caso $m \geq 4$, como $5^n < 2^n + 5^n - 65$, entonces:

$$(5^m)^2 < 4^m + 25^m - 65 < 25^m + 4^m + 1 < 25^m + 2 \cdot 5^m + 1 = (5^m + 1)^2,$$

esto es, $2^n + 5^n - 65$ está entre dos cuadrados perfectos consecutivos, por lo que no puede ser un cuadrado perfecto.
Por lo tanto, las únicas soluciones son 2 y 4.

Solución del problema 13. Aplicando la potencia del punto X con la circunferencia Γ_1, tenemos que $MA \cdot MD = MP \cdot MQ$. Aplicando ahora la potencia del punto X con la circunferencia Γ_2, tenemos que $MP \cdot MQ = MB \cdot MC$.



Entonces, $MA \cdot MD = MB \cdot MC$ y, por consiguiente, el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Por lo tanto, aplicando la potencia del punto Y con la circunferencia circunscrita al cuadrilátero $ABCD$, obtenemos que $YA \cdot YB = YC \cdot YD$.

Solución del problema 14. Analizando los posibles residuos módulo 4, es fácil ver que todo cuadrado es congruente con 0 o 1.
Si $d \equiv 0 \pmod 4$ entonces $13d - 1 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$, así que $13d - 1$ no es un cuadrado.
Si $d \equiv 2 \pmod 4$ entonces $2d - 1 \equiv 2(2) - 1 \equiv 3 \pmod 4$, así que $2d - 1$ no es un cuadrado.
Si $d \equiv 3 \pmod 4$ entonces $13d - 1 \equiv 13(3) - 1 \equiv 2 \pmod 4$, así que $13d - 1$ no es un cuadrado.
Supongamos que $d \equiv 1 \pmod 4$, esto es, $d = 4k + 1$ para algún entero k. Analizando los posibles residuos módulo 16, es fácil ver que todo cuadrado es congruente con 0,

$1, 4$ o 9.
Si $k \equiv 0 \pmod 4$, entonces $d \equiv 1 \pmod{16}$ y $13d - 1 \equiv -1 \equiv 15 \pmod{16}$, así que $13d - 1$ no es un cuadrado.
Si $k \equiv 1 \pmod 4$, entonces $d \equiv 5 \pmod{16}$ y $5d - 1 \equiv 25 - 1 \equiv 8 \pmod{16}$, así que $5d - 1$ no es un cuadrado.
Si $k \equiv 2 \pmod 4$, entonces $d \equiv 9 \pmod{16}$ y $5d - 1 \equiv 45 - 1 \equiv 12 \pmod{16}$, así que $5d - 1$ no es un cuadrado.
Si $k \equiv 3 \pmod 4$, entonces $d \equiv 13 \pmod{16}$ y $13d - 1 \equiv 13^2 - 1 \equiv 8 \pmod{16}$, así que $13d - 1$ no es un cuadrado.

Solución del problema 15. De la primera igualdad tenemos que b debe dividir a 20; de la segunda igualdad, tenemos que c debe dividir a 15 y, de la tercera igualdad, tenemos que $5 \mid a$ y $5 \mid c$. La relación $5 \mid c$ implica que $c \geq 5$. Luego, los posibles valores de c son: 5 y 15. Como $\text{mcd}(b, 15) = c$, tenemos que $c \mid b$ y, como $b \mid 20$, la única opción posible para c es $c = 5$. Entonces, $\text{mcd}(b, 15) = 5$, por lo que b es múltiplo de 5. Los divisores positivos de 20 que son múltiplos de 5 son: 5, 10 y 20.
Si $b = 5$, entonces $a = 5k$. Luego, $5 = \text{mcd}(a, 20) = \text{mcd}(5k, 20) = 5\text{mcd}(k, 4)$, de donde se sigue que $\text{mcd}(k, 4) = 1$, esto es, k es impar. Por lo tanto, en este caso las ternas son de la forma $(5k, 5, 5)$ con k entero positivo impar.
Si $b = 10$, entonces $a = 10k$. Luego, $10 = \text{mcd}(a, 20) = \text{mcd}(10k, 20) = 10\text{mcd}(k, 2)$, de donde $\text{mcd}(k, 2) = 1$, esto es, k es impar. Por lo tanto, en este caso las ternas son de la forma $(10k, 10, 5)$ con k entero positivo impar.
Si $b = 20$, entonces $a = 20k$. Luego, $20 = \text{mcd}(a, 20) = \text{mcd}(20k, 20) = 20\text{mcd}(k, 1)$, de donde $\text{mcd}(k, 1) = 1$, esto es, k es cualquier número entero. Por lo tanto, en este caso las ternas son de la forma $(20k, 20, 5)$ con k entero positivo.

Solución del problema 16. De la segunda ecuación, obtenemos que

$$x^2(2 - x) + y^2(2 - y) = 2(2 - x)(2 - y),$$

esto es, $2(x^2 + y^2) - (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = 8 - 4(x + y) + 2xy$. Usando que $x^2 + y^2 = 2$, obtenemos que $4 - (x + y)(2 - xy) = 8 - 4(x + y) + 2xy$. Simplificando esta ecuación, obtenemos la ecuación equivalente $(x + y - 2)(2 + xy) = 0$, de donde $x + y = 2$ o $xy = -2$.

a) Si $x + y = 2$, entonces $y = 2 - x$. Sustituyendo en la primera ecuación del sistema, obtenemos que $x^2 + (2 - x)^2 = 2$, esto es, $(x - 1)^2 = 0$, de donde $x = 1$ y $y = 2 - x = 1$.

b) Si $xy = -2$, sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos que $x^2 + xy + y^2 = 0$, que es equivalente a la ecuación $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} = 0$. Como el cuadrado de todo número real es mayor o igual que cero, necesariamente $x + \frac{y}{2} = 0$ y $y = 0$, por lo que $x = y = 0$. Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación del sistema, obtenemos que $0 = 2$, lo cual es un absurdo.

Por lo tanto, la única solución del sistema de ecuaciones es $x = y = 1$.

Solución del problema 17. La condición del problema es equivalente a la condición

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} > a_{12} + \cdots + a_{21},$$

esto es, $a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11})$, lo cual implica que

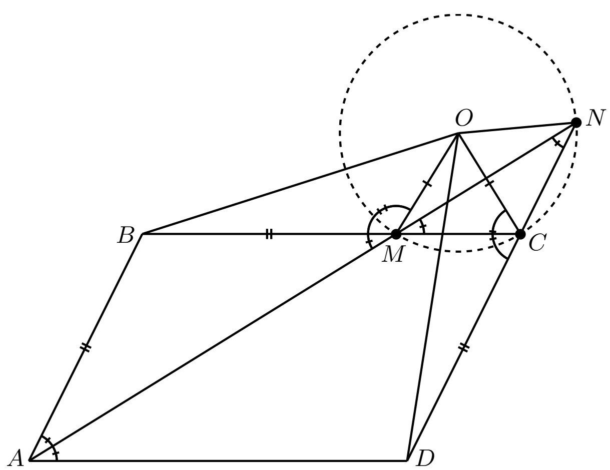
$$a_1 \geq 1 + (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11}).$$

Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned} a_{12} &\geq a_{11} + 1 \geq a_{10} + 2 \geq \cdots \geq a_2 + 10, \\ a_{13} &\geq a_{12} + 1 \geq a_{11} + 2 \geq \cdots \geq a_3 + 10, \\ &\vdots \\ a_{21} &\geq a_{20} + 1 \geq a_{19} + 2 \geq \cdots \geq a_{11} + 10, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $a_{12} - a_2 \geq 10,\ a_{13} - a_3 \geq 10,\ \ldots,\ a_{21} - a_{11} \geq 10$. Por lo tanto, $a_1 \geq 1 + 10(10) = 101$. Para concluir que el valor mínimo de a_1 es 101, consideremos la lista: $a_1 = 101, a_2 = 102, a_3 = 103, \ldots, a_{21} = 121$, la cual satisface la condición del problema.

Solución del problema 18. Como AD y BC son paralelas, así como también lo son AB y DC, tenemos que $\angle CMN = \angle DAM = \angle BAN = \angle CNM$, lo cual implica que $CM = CN$. Como $OM = ON = OC$, los triángulos OCM y OCN son congruentes por el criterio LLL. En consecuencia, $\angle OMC = \angle ONC = \angle OCN$ y, por lo tanto, $\angle OMB = \angle OCD$.



Ahora, como $\angle BMA = \angle DAM = \angle BAM$, tenemos que $BM = BA = CD$. Luego, los triángulos OMB y OCD son congruentes por el criterio LAL, de donde se sigue que $\angle OBM = \angle ODC$, esto es, $\angle OBC = \angle ODC$.

Solución del problema 19. Es claro que el resultado es cierto cuando $m = n$ y $m = n+1$, pues $1+2+\cdots+m = \frac{m(m+1)}{2}$. Demostraremos el resultado por inducción en n. El caso base $n = 1$ es trivialmente cierto. Supongamos que el resultado es cierto para cada $n < p$ y demostraremos que es cierto para $n = p$.
Caso 1: $m \geq 2p$. Aquí, tenemos que $k = \frac{p(p+1)}{2m} \leq \frac{p+1}{4}$. Luego, $p \geq 4k - 1$ y, por consiguiente, $p - 2k \geq 2k - 1 > 0$. También tenemos que $1+2+\cdots+(p-2k) = (1+2+\cdots+p) - [(p-2k+1)+\cdots+p] = km - k(2p-2k+1)$ es divisible por k. Como $p \geq 4k-1$, tenemos que

$$\frac{1+2+\cdots+(p-2k)}{p-2k} = \frac{p-2k+1}{2} \geq k,$$

esto es,

$$M = \frac{1+2+\cdots+(p-2k)}{k} \geq p - 2k.$$

Por la hipótesis de inducción, los números $1, 2, \ldots, p-2k$ se pueden separar en k grupos de tal manera que la suma de los números en cada grupo es igual a M. Ahora, los números $p-2k+1, p-2k+2, \ldots, p$ se pueden separar en k parejas donde cada pareja tiene suma igual a $2p-2k+1$. Agregando una pareja a cada uno de los grupos anteriores, obtenemos la partición deseada.
Caso 2: m es par y $p+1 < m < 2p$. Es similar al Caso 1.
Caso 3: m es impar y $p+1 < m < 2p$. Es similar al Caso 1.

Solución del problema 20. Sea f una función que satisface la condición del problema. Sustituyendo $y = 1$, tenemos que $f(-f(x) - f(1)) = -x$ para todo entero x. En particular, si $x = 1$, tenemos que $f(-2f(1)) = -1$. Sea n un número entero. Entonces, $f(-f(n) - f(1)) = -n$. Haciendo $x = -f(n) - f(1)$ y $y = -2f(1)$, obtenemos que

$$f(n+1) = 1 + (f(n) + f(1)) + 2f(1),$$

esto es, $f(n+1) = f(n) + 3f(1) + 1$.
Es fácil demostrar por inducción en n hacia adelante y hacia atrás comenzando en $n = 1$, que

$$f(n) = (3n-2)f(1) + n - 1 \tag{6}$$

para todo entero n.
Si $n = 0$, entonces $f(0) = -2f(1) - 1$. Por otro lado, haciendo $x = 0$ y $y = 1$, obtenemos que $f(-f(0) - f(1)) = 0$, esto es, $f(f(1)+1) = 0$. Sustituyendo $n = f(1) + 1$ en la relación (6), resulta que

$$f(f(1)+1) = (3(f(1)+1) - 2)f(1) + (f(1)+1) - 1,$$

esto es, $0 = (3(f(1)+1)-2)f(1) + (f(1)+1) - 1$. Simplificando, obtenemos que $f(1)(3f(1)+2) = 0$. Como $f(1)$ es un entero, la única opción posible es $f(1) = 0$. Por lo tanto, $f(n) = n - 1$. Finalmente, es fácil verificar que esta función satisface la ecuación funcional del problema, lo que significa que es la única solución.

Problemas de Entrenamiento

Problemas de Entrenamiento.
Año 2022 No. 4.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este tercer número de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: revistaomm@gmail.com y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea $ABCD$ un cuadrado y sea X un punto en el lado BC. Sea Y un punto en la recta CD tal que $BX = YD$ y D se encuentra entre C y Y. Demuestra que el punto medio de XY se encuentra sobre la diagonal BD.

Problema 2. Sea n un entero positivo y supongamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son enteros (no necesariamente distintos). Demuestra que existen índices $i_1, i_2, \ldots, i_r$ tales que n divide a la suma $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_r}$.

Problema 3. Zeus y Hades juegan a construir un número real α entre 0 y 1. En el turno n se decide un dígito entre 0 y 9 en la posición n después del punto decimal, con Zeus decidiendo en turnos impares y Hades decidiendo en turnos pares. Después de que todos los turnos se hayan jugado, se decide el ganador.
Zeus gana si α es racional, mientras que Hades gana si α es irracional. Determina si alguno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y, en caso de tenerla, quién la tiene.

Problema 4. Determina todas las parejas (n, m) de enteros positivos tales que

$$(n+1)^m - 1 = n!$$

Problema 5. Determina el número de triángulos de lados de longitudes números enteros tales que su perímetro es igual a su área.

Problema 6. Sofía tiene n naranjas y a cada una le escribe un número del 1 a n sin repetir. Si quiere guardarlas en cajas de manera tal que la suma de los números escritos en las naranjas sea la misma para cada caja, ¿cuál es el máximo número de cajas que Sofía puede usar?

Problema 7. Sea Ω el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano cartesiano que satisfacen la ecuación $x^3 + 3xy + y^3 = 1$.
Demuestra que existe un único subconjunto de Ω que consiste de tres puntos A, B y C los cuales forman un triángulo equilátero.

Problema 8. La sucesión infinita $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de enteros no necesariamente distintos tiene las siguientes propiedades: $0 \leq a_i \leq i$ para todo entero $i \geq 0$ y,

$$\binom{k}{a_0} + \binom{k}{a_1} + \cdots + \binom{k}{a_k} = 2^k$$

para todo entero $k \geq 0$.
Demuestra que cada entero $N \geq 0$ ocurre en esta sucesión, esto es, para cada entero $N \geq 0$, existe $i \geq 0$ tal que $a_i = N$.

Problema 9. Gabriel juega a un juego de máquina, que consiste en un tablero con tres números enteros acomodados en círculo. Repetidamente, Gabriel puede sumar 2 a un número y restar 1 al siguiente en sentido horario. De forma alterna, puede restar 2 a un número y sumar 1 al siguiente en sentido horario.
El juego tiene siete posiciones ganadoras. Estas consisten en la posición donde todos los números en el tablero son 0, y las seis posiciones donde dos de los números en el tablero son 0 y el número restante es 1 o -1.
Muestra que independientemente de la configuración inicial, Gabriel puede llegar a una posición ganadora y que esta es única.

Problema 10. Determina todos los enteros positivos n tales que

$$\frac{\sigma(n)}{\tau(n)} = \frac{n}{2},$$

donde $\sigma(n)$ denota a la suma de los divisores positivos de n y $\tau(n)$ denota al número de tales divisores.

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2022 No. 1.

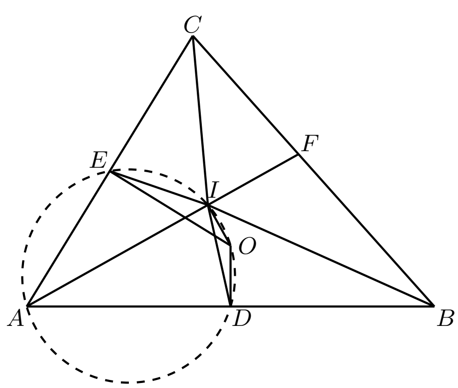
A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 1, año 2022. En esta ocasión, agradecemos a Germán Puga Castillo y a José Hernández Santiago, por haber enviado sus soluciones y, aprovechamos para invitar a todos los lectores a participar, enviándonos sus soluciones para que puedan salir publicadas en los números posteriores de la revista. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2022, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Sean O e I el circuncentro y el incentro del triángulo ABC, respectivamente. Si $AB \neq AC$, los puntos D y E son los puntos medios de AB y AC respectivamente y $2BC = AB + AC$. Demuestra que la recta OI y la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ son perpendiculares.

Solución. Como $BC = \frac{AB+AC}{2} = BD + CE$, entonces existe un punto F sobre el lado BC tal que $BF = BD$ y $CF = CE$. Dado que BI bisecta el ángulo $\angle FBD$, por el criterio LAL se tiene que los triángulos IBD e IBF son congruentes. En particular, $\angle BDI = \angle BFI$. Análogamente, $\angle CEI = \angle CFI$. Luego,

$$\begin{aligned}\angle ADI + \angle AEI &= (180^\circ - \angle BDI) + (180^\circ - \angle CEI)\\ &= 360^\circ - \angle BFI - \angle CFI = 180^\circ,\end{aligned}$$

de donde se tiene que los puntos A, D, I y E son concíclicos.



Como $\angle ODA = 90^\circ = \angle AEO$, entonces A, D, O y E son concíclicos y AO es el diámetro de la circunferencia que pasa por ellos. De lo anterior se sigue que I también pertenece a dicha circunferencia, por lo que $\angle AIO = 90^\circ$, como se quería.

Problema 2. Sea n un entero positivo fijo. Definimos a un *camaleón* como cualquier palabra de $3n$ letras, tales que cada una de las letras a, b y c aparece exactamente n

veces. Un *cambio* es un intercambio de posición de cualesquiera dos letras adyacentes en un camaleón. Prueba que para cualquier camaleón X, existe un camaleón Y que no puede ser alcanzado desde X usando menos de $\frac{3n^2}{2}$ cambios.

Solución. Primero, definimos una *inversión* en un camaleón X como un par de letras (no necesariamente adyacentes) que sea uno de los siguientes tipos:

- Un par (b, a) donde b está a la izquierda de a en el camaleón X.
- Un par (c, a) donde c está a la izquierda de a en el camaleón X.
- Un par (c, b) donde c está a la izquierda de b en el camaleón X.

Sea S el conjunto de todos los camaleones de longitud $3n$ y sea $f : S \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ la función tal que, para cada camaleón X en S, se tiene que $f(X)$ es la cantidad de inversiones en el camaleón X.
Nótese que si se lleva a cabo un cambio en el camaleón X, entonces el valor de $f(X)$ incrementa o disminuye exactamente en 1. En efecto, si $X = x_1x_2 \dots, x_{3n}$ y se lleva a cabo el cambio en las letras x_i y x_{i+1}, ambas letras seguirán estando a la derecha de las letras $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$, así como seguirán estando a la izquierda de las letras x_{i+2}, $x_{i+3}, \dots, x_{3n}$. Dependiendo de si la pareja (x_i, x_{i+1}) es una inversión o no, sucederá que el valor de $f(X)$ disminuirá o incrementará en 1, respectivamente. Esto significa que, si el camaleón Y puede ser alcanzado desde X en menos de $\frac{3n^2}{2}$ cambios, debe suceder que $|f(X) - f(Y)| < \frac{3n^2}{2}$.
Definimos los camaleones

$$M = \underbrace{aa\dots a}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}\underbrace{cc\dots c}_{n} \quad \text{y} \quad N = \underbrace{cc\dots c}_{n}\underbrace{bb\dots b}_{n}\underbrace{aa\dots a}_{n}.$$

Se puede ver que $f(M) = 0$ y que $f(N) = 3n^2$. Además, es fácil notar que, para cualquier camaleón X en S, se cumple que $0 \leq f(X) \leq 3n^2$. Luego, para cualquier camaleón X, existe $Y \in \{M, N\}$ tal que $|f(X) - f(Y)| \geq \frac{3n^2}{2}$. Por lo tanto, tal camaleón Y no podrá ser alcanzado desde X usando menos de $\frac{3n^2}{2}$ cambios.

Problema 3. Sea $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1. Demuestra que $A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot A_0A_3 \cdots A_0A_{n-1} = n$.

Solución de Germán Puga Castillo. Utilizaremos herramientas de números complejos. Consideremos un polígono regular de n lados circunscrito en la circunferencia unitaria, con un vértice en el 1. Sean $1 = r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ las n raíces complejas del polinomio $z^n - 1 = 0$. Es bien sabido que estas forman un polígono regular, por lo que podemos hacer corresponder a cada raíz r_j con el punto A_j del polígono para $j = 0, \dots, n-1$.
Para cada $j = 0, \dots, n-1$, la longitud del segmento A_0A_j es igual a $|r_0 - r_j| = |1 - r_j|$, por lo que basta demostrar que $|1 - r_1||1 - r_2| \cdots |1 - r_{n-1}| = n$. Más aún, demostraremos que $(1 - r_1)(1 - r_2) \cdots (1 - r_{n-1}) = n$. Consideremos los polinomios

$p(z) = (z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_{n-1})$ y $q(z) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$. Por ser los r_i's raíces del polinomio $z^n - 1$, tenemos que

$$z^n - 1 = (z - 1)(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_{n-1}).$$

Como $z^n - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1})$, tenemos que

$$(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$$

si $z \neq 1$, esto es, $p(z) = q(z)$ si $z \neq 1$. Luego, aplicando la continuidad de $p(z)$ y $q(z)$ en $z = 1$, obtenemos que $p(1) = q(1)$, esto es,

$$(1 - r_1)(1 - r_2)\cdots(1 - r_{n-1}) = 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{n-1} = n,$$

como queríamos. Finalmente, aplicando el módulo de cada lado de la igualdad y usando que el módulo de un producto es el producto de los módulos, se sigue el resultado.

Solución de José Hernández Santiago. Existen $\theta \in [0, 2\pi)$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tales que, para cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $A_k = z_0 + e^{i\theta}e^{2\pi i \frac{k}{n}}$. De esto se sigue que

$$A_0A_k = |e^{i\theta} - e^{i\theta}e^{2\pi i \frac{k}{n}}| = |1 - e^{2\pi i \frac{k}{n}}|,$$

para cada $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Por otro lado, dado que $1, e^{2\pi i \frac{1}{n}}, \ldots, e^{2\pi i \frac{n-1}{n}}$ son justamente las raíces del polinomio $x^n - 1$ y puesto que este polinomio se factoriza como $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$, entonces

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1 = \prod_{k=1}^{n-1}(x - e^{2\pi i \frac{k}{n}}).$$

Evaluando en $x = 1$ ambos lados de la igualdad anterior se tiene que

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2\pi i \frac{k}{n}}),$$

de lo cual se sigue que

$$n = \prod_{k=1}^{n-1}|1 - e^{2\pi i \frac{k}{n}}| = \prod_{k=1}^{n-1} A_0A_k = A_0A_1 \cdot A_0A_2 \cdot A_0A_3 \cdots A_0A_{n-1}.$$

Problema 4. Los lados de un triángulo están en progresión aritmética con diferencia $d \geq 0$. El área del triángulo es A. Determina los lados del triángulo en términos de A y d. En particular, encuentra los lados del triángulo cuando $d = 1$ y $A = 6$.

Solución. Sean a, b, c los lados del triángulo con $a < b < c$. Entonces, $a = b - d$ y $c = b + d$, con $0 \leq d < b$. Por la fórmula de Herón tenemos que

$$A^2 = S(S - a)(S - b)(S - c),$$

donde $S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$. Luego, $S = \frac{3b}{2}$, $S - a = \frac{b}{2} + d$, $S - b = \frac{b}{2}$ y $S - c = \frac{b}{2} - d$, lo cual implica que

$$A^2 = \frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right),$$

y, por lo tanto, $3(b^2)^2 - 12d^2b^2 - 16A^2 = 0$. Resolviendo esta ecuación cuadrática en b^2 tenemos que

$$b^2 = \frac{12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192A^2}}{6} = 2\left(d^2 \pm \sqrt{d^4 + \frac{4A^2}{3}}\right).$$

Como $b^2 > 0$, tenemos que tenemos que escoger el signo de más, por lo tanto

$$b = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4A^2}{3}}\right)}.$$

Entonces b está en términos de d y A. Como $a = b - d$ y $c = b + d$, tenemos a, b, c en términos de d y A.
En el caso $d = 1$ y $A = 6$, tenemos que

$$b = \sqrt{2\left(1^2 + \sqrt{1^4 + \frac{4(6)^2}{3}}\right)} = \sqrt{2\left(1 + \sqrt{49}\right)} = 4.$$

Luego, $a = 4 - 1 = 3$ y $c = 4 + 1 = 5$.

Problema 5. Sea X un conjunto con n elementos. Prueba que el número de parejas (A, B) tales que A y B son subconjuntos de X, A es subconjunto de B y $A \neq B$, es igual a $3^n - 2^n$.

Solución. Estas parejas se encuentran en correspondencia uno a uno con las tercias (A, B, C) de conjuntos disjuntos tales que $A \cup B \cup C = X$ y $B \neq \emptyset$, donde la correspondencia está dada por $(A, B) \mapsto (A, B - A, X - B)$. El número de estas tercias sin la condición $B \neq \emptyset$ es 3^n, pues para cada elemento de X, podemos libremente elegir en qué conjunto ponerlo. El número de estas tercias con la condición $B = \emptyset$ es 2^n, pues esta vez solo podemos colocar a los elementos de X en A o en C. Esto nos da una cuenta final de $3^n - 2^n$.

Problema 6. Sean $p_1, p_2, \ldots, p_m$, todos los números primos menores que 2^{2016}. Demuestra que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} < 15.$$

Solución. Primero se probará el siguiente lema.

Lema. Sea n un número natural par. Entonces

$$\sum_{n<p\leq n^2} \frac{1}{p} < \frac{3}{2},$$

donde la suma es sobre todos los primos en el intervalo $\left(n, n^2\right]$.
Demostración. Sean q_1, q_2, ..., q_ℓ todos los primos en el intervalo $\left(n, n^2\right]$. Entonces cada número en este intervalo es divisible por a lo mucho uno de los primos q_i pues $q_i \cdot q_j > n \cdot n = n^2$ para cualesquiera $i \neq j$. Sin embargo, la cantidad de múltiplos de q_i en el intervalo $\left(n, n^2\right]$ es

$$\left\lfloor \frac{n^2}{q_i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{q_i} \right\rfloor > \frac{n^2}{q_i} - 1 - \frac{n}{q_i} = \frac{n^2 - n}{q_i} - 1.$$

Como hay $n^2 - n$ números en dicho intervalo, se debe cumplir que

$$n^2 - n > \sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{n^2 - n}{q_i} - 1 \right) = -\ell + \sum_{i=1}^{\ell} \frac{n^2 - n}{q_i},$$

lo cual se puede reescribir como

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} < 1 + \frac{\ell}{n^2 - n}. \tag{7}$$

Nótese que $n \geq 2$ pues es par, por lo que todos los primos q_i son impares. Como la mitad de los enteros en el intervalo $\left(n, n^2\right]$ son pares y la otra mitad son impares (al ser n^2 par), se debe cumplir que $\ell \leq \frac{n^2-n}{2}$. Así, de (7) se sigue que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{q_i} < 1 + \frac{1}{n^2 - n} \left(\frac{n^2 - n}{2} \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

como se quería. □

Para el problema, obsérvese que $\frac{1}{5} + \frac{1}{13} = \frac{18}{65} < \frac{1}{3}$, por lo que

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq p\leq 16} \frac{1}{p} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13} \right) + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Luego, usando el lema anterior repetidas veces, concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq p\leq 2^{2016}} \frac{1}{p} &< \sum_{1\leq p\leq 2^{2048}} \frac{1}{p} = \sum_{1\leq p\leq 16} \frac{1}{p} + \sum_{k=2}^{10} \sum_{2^{2^k} \leq p\leq 2^{2^{k+1}}} \frac{1}{p} \\ &< \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{10} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + 9\left(\frac{3}{2}\right) = 15. \end{aligned}$$

Problema 7. Sean a, b, c y d, números enteros donde d no es múltiplo de 5. Supongamos que existe un entero m tal que $am^3 + bm^2 + cm + d$ es múltiplo de 5. Demuestra que existe un entero n tal que $dn^3 + cn^2 + bn + a$ es múltiplo de 5.

Solución. Tenemos que $am^2 + bm^2 + cm + d \equiv 0 \pmod 5$. Si $5 \mid m$, entonces $5 \mid d$, lo que es una contradicción. Luego, $5 \nmid m$ y, por lo tanto, existe un entero n tal que $mn \equiv 1 \pmod 5$. Entonces,

$$\begin{aligned} m^3(dn^3 + cn^2 + bn + a) &\equiv d(mn)^3 + cm(mn)^2 + bm^2(mn) + am^3 \pmod 5 \\ &\equiv d + cm + bm^2 + am^3 \equiv 0 \pmod 5. \end{aligned}$$

Como $m \not\equiv 0 \pmod 5$, concluimos que $dn^3 + cn^2 + bn + a \equiv 0 \pmod 5$.

Problema 8. Considera el polinomio cuadrático $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$.

a) Demuestra que existen números k, ℓ, m en términos de A, B, C, tales que

$$Q(x) = k\frac{x(x-1)}{2} + \ell x + m.$$

b) Demuestra que $Q(x)$ es un entero para todo entero x, si y solo si k, ℓ y m son números enteros.

Solución.

a) Notemos que $x^2 = x(x-1) + x$, esto es, $x^2 = 2\frac{x(x-1)}{2} + x$. Por lo tanto,

$$Q(x) = 2A\frac{x(x-1)}{2} + (A+B)x + C,$$

que es de la forma deseada con $k = 2A$, $\ell = A + B$ y $m = C$.

b) Supongamos que $Q(x)$ es entero para todo entero x, en particular $Q(0)$, $Q(1)$ y $Q(2)$ son enteros. Como $Q(0) = m$, tenemos que m es un entero. Ahora, $Q(1) = \ell + m$ y, como m y $Q(1)$ son enteros, entonces ℓ también es un entero. Finalmente, tenemos que $Q(2) = k + 2\ell + m$ y, como ℓ y m son enteros, entonces k también es un entero.
Ahora supongamos que k, ℓ y m son enteros. Sea x un entero. Queremos demostrar que $Q(x)$ es entero. Si x es impar, $x - 1$ es par y, por lo tanto, $(x-1)x/2$ es entero. De manera análoga, tenemos si x es par, entonces $x(x-1)/2$ es entero. Luego, $x(x-1)/2$ es entero para todo entero x. También tenemos que k, ℓ y m son enteros, lo cual implica que $Q(x) = k\frac{x(x-1)}{2} + \ell x + m$ es un número entero.

Problema 9. Decimos que un conjunto es *egoísta* si contiene a su cardinalidad. Decimos que un conjunto egoísta es *mínimo* si no contiene a ningún conjunto egoísta como subconjunto propio. Determina el número de subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Solución. Demostraremos por inducción en n, que el número de subconjuntos egoístas mínimos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ es igual al n-ésimo número de Fibonacci F_n. Recordemos que la sucesión de Fibonacci $\{F_n\}$ está definida como $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y, para $n \geq 3$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.
Es fácil ver que el único subconjunto egoísta mínimo del conjunto $\{1\}$ y del conjunto $\{1, 2\}$ es el conjunto $\{1\}$. Por lo tanto, el problema es cierto para $n = 1$ y $n = 2$. Supongamos que el problema es cierto para n y $n + 1$, donde $n \geq 1$. Ahora, los subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$ los podemos separar en aquellos que no contienen a $n + 2$ y en aquellos que sí contienen a $n + 2$. Los subconjuntos egoístas mínimos que no contienen a $n + 2$ son precisamente los subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$. A su vez, los subconjuntos egoístas mínimos que sí contienen a $n + 2$, están en correspondencia uno a uno con los subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, donde la correspondencia está dada como sigue: Si A es un subconjunto egoísta mínimo de $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$ y $n + 2 \in A$, restamos 1 a cada elemento de A distinto de $n + 2$ y quitamos al elemento $n + 2$ (observe que A no contiene al 1). Por lo tanto, aplicando la hipótesis de inducción, el número de subconjuntos egoístas mínimos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n + 2\}$ es igual a $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$, lo que completa la inducción y concluye la demostración.

Problema 10. Demuestra que para cada entero $k \geq 2$, existe una infinidad de enteros positivos que no pueden ser escritos como la suma de k potencias k-ésimas de números enteros positivos.

Solución. Sea $k \geq 2$ un número entero. Para cualquier entero positivo N, la proporción de enteros positivos menores o iguales que N que podemos expresar como la suma de k potencias k-ésimas de números enteros positivos, está acotada por la cantidad de formas de elegir k enteros positivos menores o iguales que $\sqrt[k]{N}$ dividida por N, la cual está dada por

$$\frac{1}{N}\binom{\lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor + k - 1}{k} = \frac{1}{N} \cdot \frac{(\lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor + k - 1)!}{k!(\lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor - 1)!} = \frac{1}{(\sqrt[k]{N})^k} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k}(\lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor + i - 1)}{k!}$$
$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{\lfloor \sqrt[k]{N} \rfloor + i - 1}{i\sqrt[k]{N}},$$

donde hemos usado el resultado conocido que establece que hay $\binom{n+k-1}{k}$ formas de elegir k objetos de n permitiendo repeticiones.
Para $N \geq 3^k$, todos los factores del producto son menores o iguales a 1 y el factor para $i = 2$ es menor o igual a $2/3$, por lo que al menos un tercio de los números no son representables como suma de k-ésimas potencias. Esto prueba que hay una infinidad de enteros positivos no representables como suma de k potencias k-ésimas de enteros positivos.

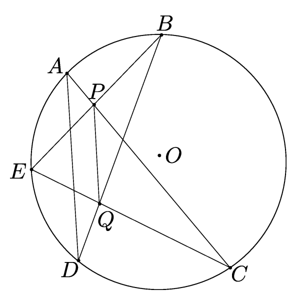
Examen Final Estatal de la 36^{a} OMM

A continuación presentamos los problemas y soluciones del examen final estatal de la 36^a OMM propuesto por el Comité Organizador. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Primer día

Problema 1. En una cuadrícula de $m \times n$ con $m \geq 3$ y $n \geq 3$, el número de cuadritos que tienen exactamente 3 cuadritos vecinos es igual al número de cuadritos que tienen exactamente 4 cuadritos vecinos. ¿Cuántos cuadritos tiene la cuadrícula? (Nota: Decimos que dos cuadritos de la cuadrícula son vecinos cuando comparten un lado).

Problema 2. En un círculo con centro O se encuentran cinco puntos A, B, C, D y E (ver la figura). Los segmentos AC y EB se intersecan en el punto P; lo segmentos BD y EC se intersecan en el punto Q. Además PQ es paralela a AD. Probar que EO es perpendicular a AD.

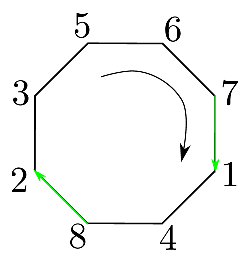


Problema 3. Determinar el mínimo número de colores necesarios para pintar las diagonales de un polígono regular de 2022 lados con la propiedad de que cuando dos

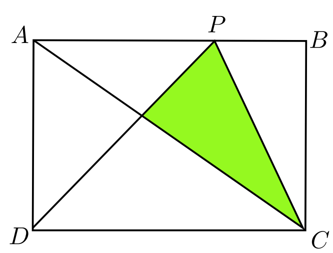
diagonales se intersequen en un punto interior del polígono, las dos diagonales tengan distinto color. (Nota: Llamamos diagonal de un polígono al segmento que une cualesquiera dos vértices del polígono y que no es un lado).

Segundo día

Problema 4. En un polígono regular de 8 lados se quieren numerar los vértices del 1 al 8 de tal forma que al moverse en las dirección de las manecillas del reloj los números vayan en orden creciente salvo en exactamente dos lugares. ¿De cuántas formas distintas puede hacerse esta numeración? En el esquema siguiente se muestra un acomodo posible.



Problema 5. En el rectángulo $ABCD$, P es un punto sobre el lado AB tal que $AP = 2PB$. Probar que el área del triángulo sombreado es la quinta parte del área del rectángulo.

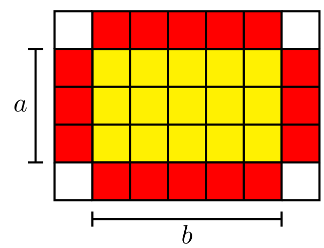


Problema 6. Sea n un número natural par. En una cuadrícula de $n \times n$ están alternados los números 1 y 0, como se muestra en la figura para $n = 4$. Una *operación* permitida consiste en escoger dos cuadros que compartan un lado y cambiar el número de cada uno de esos dos cuadros como sigue: Si hay 0, poner 1; si hay 1, poner 2 y, si hay 2, poner 0. Se quiere que los cuadros que tienen 1 originalmente, al final tengan 0 y viceversa. Encontrar para qué valores de n es posible lograrlo. Para esos n, determinar la mínima cantidad de operaciones necesarias para lograrlo.

1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1

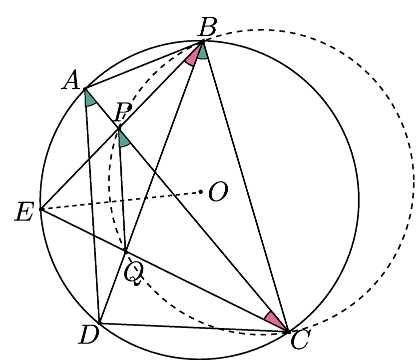
Soluciones del Examen Final Estatal de la 36^{a} OMM

Problema 1. Como $m \geq 3$ y $n \geq 3$, podemos escribir $m = a + 2$ y $n = b + 2$ con $a \geq 1$ y $b \geq 1$ y, sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \leq b$. Es fácil ver que el número de cuadritos que tienen 4 vecinos es ab y el número de cuadritos que tienen 3 vecinos es $2(a + b)$. Tenemos así que $ab = 2(a + b)$, de donde $(a - 2)(b - 2) = 4$.



Tenemos varios casos.
a) $a - 2 = 1$ y $b - 2 = 4$, de donde $a = 3$ y $b = 6$ y, el número de cuadritos es $5 \times 8 = 40$.
b) $a - 2 = 2 = b - 2$, de donde $a = b = 4$ y, el número de cuadritos es $6 \times 6 = 36$.
c) $a - 2 = -1$ y $b - 2 = -4$, de donde $a = 3$ y $b = -2$, que no puede ser.
d) $a - 2 = -2 = b - 2$, de donde $a = 0 = b$, que no es posible.

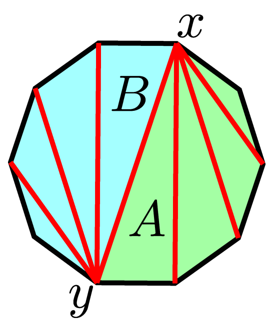
Problema 2. Como AD y PQ son pararalelas y el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, tenemos que $\angle QPC = \angle DAC = \angle DBC$. Luego, el cuadrilátero $PQCB$ también es cíclico. Entonces, $\angle ACE = \angle PCQ = \angle PBQ = \angle EBD$.



Esto implica que los arcos $\widehat{AE}$ y $\widehat{ED}$ del círculo con centro O que contiene a A, D y E, son iguales y, de aquí, OE es perpendicular a AD.

Problema 3. Todas las diagonales que unen puntos diametralmente opuestos del polígono se intersecan en el centro del polígono. (Como hay 1011 diagonales, se necesitan al menos 1011 colores).

Ahora veamos que 1011 colores son suficientes. Para cada pareja (x, y) de vértices diametralmente opuestos, pintemos la diagonal que los une con un color; esa diagonal divide al polígono en dos partes A y B. Pintemos con el mismo color a todas las diagonales que van de x a los vértices que quedaron en la parte A y también a todas las diagonales que van de y a los vértices de la parte B.
En la siguiente figura se muestra cómo colorear de manera semejante las diagonales de un polígono de 10 lados.

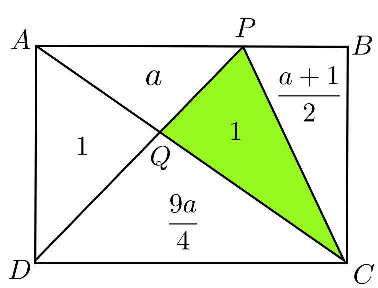


Problema 4. Notemos que hay 8 posibilidades de acomodar el número 1 y que, una vez puesto el 1, el número antes de él es mayor, por lo que debemos colocar los restantes números de manera que solo un par esté en orden decreciente. Basta escoger un subconjunto de $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, distinto de cada uno de los siguientes conjuntos

$$\emptyset, \{2\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \ldots, \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\},$$

para colocar sus elementos en orden después del 1 y luego colocar los números faltantes a continuación, también en orden. En el ejemplo del enunciado, el conjunto escogido es $\{4, 8\}$. La cantidad de estos conjuntos es $2^7 - 8 = 120$, así que la respuesta es $8 \times 120 = 960$.

Problema 5. Supongamos que el área del triángulo sombreado es 1. Sean x el área del rectángulo $ABCD$ y Q el punto de intersección de AC con DP. Dado un triángulo KLM, denotaremos su área por (KLM). Sea $a = (AQP)$. Tenemos que los triángulos AQP y CQD son semejantes en razón $2 : 3$, así que $(CQD) = \frac{9a}{4}$. Notamos que $(AQD) + \frac{9a}{4} = (ADC) = \frac{x}{2} = (DPC) = (PQC) + \frac{9a}{4} = 1 + \frac{9a}{4}$, de donde $(AQD) = 1$.
También tenemos que $(APC) = 2(PBC)$, puesto que $AP = 2PB$ y, por consiguiente, $(PBC) = \frac{a+1}{2}$.



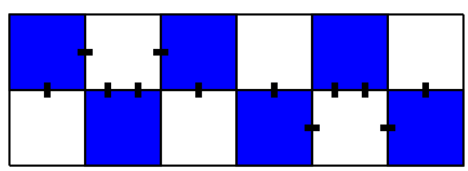
Ahora, $a + 1 + \frac{a+1}{2} = (ABC) = \frac{x}{2} = (DPC) = 1 + \frac{9a}{4}$. Resolviendo esta ecuación, obtenemos que $a = \frac{2}{3}$ y de aquí que

$$x = 2\left(1 + \frac{9 \cdot \frac{2}{3}}{4}\right) = 2\left(1 + \frac{3}{2}\right) = 5.$$

Problema 6. Supongamos que n es tal que sí es posible. Como n es par, entonces al principio hay $\frac{n^2}{2}$ cuadritos con 1 y $\frac{n^2}{2}$ cuadritos con 0. Pintemos de negro a los cuadritos que al principio tienen un 1 y de blanco a los que al principio tienen un 0. Sean N la suma de los cuadritos que están coloreados de negro y B la suma de los cuadritos que están coloreados de blanco. Entonces, al principio tenemos que $N - B = \frac{n^2}{2}$ y, al final, $N - B = -\frac{n^2}{2}$. Notemos que al escoger dos cuadritos vecinos, uno está coloreado de negro y el otro está coloreado de blanco y, como en cada movimiento se suma 1 en ambos cuadritos y se calculan sus residuos módulo 3, entonces su diferencia es invariante módulo 3; más aún, $N - B$ es invariante módulo 3. Esto implica que $\frac{n^2}{2} \equiv -\frac{n^2}{2} \pmod 3$, es decir, $n^2 \equiv 0 \pmod 3$, por lo que n es múltiplo de 3 y, al ser n par, es múltiplo de 6.

Veamos ahora que, en efecto, es posible para todos los n múltiplos de 6 y que el mínimo número de movimientos necesarios es n^2. Como $1 + 2 \equiv 0 \pmod 3$, cada cuadrito negro debe escogerse un número de veces que sea congruente con 2 módulo 3. Veamos que de hecho basta con elegir cada cuadrito negro 2 veces, es decir, que una solución es posible en $2\frac{n^2}{2} = n^2$ movimientos.

Dividiendo la cuadrícula en bloques de 2×6, en la figura se muestra una forma de efectuar las operaciones, donde cada línea gruesa representa una elección de parejas (nótese que el orden en el que se hagan las operaciones es irrelevante).



6^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 12 de junio de 2022 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 115 estudiantes de primaria y 145 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2023.
Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel II del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Takumi Higashida Martínez	Ciudad de México	Oro individual
Rodrigo Saldívar Mauricio	Zacatecas	Oro individual
Antonio Gutiérrez Meléndez	Coahuila	Oro individual
Ángel de la Cruz Martínez Almeida	Zacatecas	Oro individual
Dana Karen Medina González	Yucatán	Oro individual
Carlos Daniel Maya Rojas	Hidalgo	Oro individual
Yara Peimbert Pichardo	Ciudad de México	Oro por equipos
José Luis Romero Beristain	Ciudad de México	Oro por equipos

En la prueba por equipos en el Nivel II, la Ciudad de México obtuvo el primer lugar (con 227 puntos), el Estado de Jalisco obtuvo el segundo lugar (con 212 puntos) y el Estado de Coahuila obtuvo el tercer lugar (con 196 puntos).
Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel II fueron:
Primer lugar: Ciudad de México (con 465 puntos).
Segundo lugar: Zacatecas (con 453 puntos).
Tercer lugar: Coahuila (con 421 puntos).
A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel II del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB.

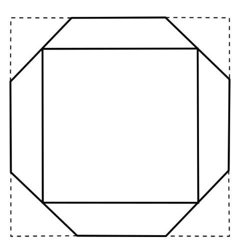
Prueba Individual, Nivel II

Parte A

1) ¿De cuántas formas se puede elegir, de entre los lados de un octágono regular, dos que sean perpendiculares entre sí?

2) Denisse sumó 5 números consecutivos. Zeus también sumó 5 números consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100. ¿Cuál es la diferencia entre el número más grande de los cinco que sumó Denisse menos el número más chico de los cinco que sumó Zeus?

3) A un cuadrado de madera se le han recortado sus esquinas, formando un octágono regular, como se muestra en la figura.



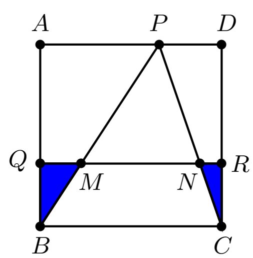
Después, se han unido los puntos medios de cuatro de los lados del octágono, formando un nuevo cuadrado. Si el área del nuevo cuadrado es 25, ¿cuál es el área del cuadrado original?

4) ¿Cuántos números de cuatro dígitos utilizan en su escritura al menos dos veces el número 7 y al menos una vez el número 5 después de dos números 7? Por ejemplo, los números 7375, 7575 y 7775 cumplen la condición, pero los números 7577 y 7573 no la cumplen.

5) Una rana está parada en el 0 de la recta numérica. Cada salto que da la rana se puede mover 3 unidades a la derecha o a la izquierda (por ejemplo, después del primer salto puede llegar al 3 o al -3). Después de n saltos llega por primera vez al 2022. Calcula la suma de todos los posibles valores de n, si la rana dio menos de 680 saltos.

6) ¿Cuántos números A de cuatro dígitos hay tales que un medio de A es divisible por 2, un tercio de A es divisible por 3 y un quinto de A es divisible por 5?

7) El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lado 12, P es un punto sobre AD, Q es un punto sobre AB tal que $AQ = 2QB$ y R es un punto sobre CD tal que $DR = 2RC$. BP y CP cortan a QR en los puntos M y N, respectivamente. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos QBM y RCN?



8) Aida escribió un entero positivo en cada lado de un cuadrado. Luego escribió en cada vértice la multiplicación de los números de los dos lados que concurren en dicho vértice. La suma de los números de los vértices es 15. ¿Cuál es la suma de los números escritos en los lados del cuadrado?

9) Sea ABC un triángulo equilátero. El punto D es tal que A es punto medio del segmento CD. El círculo con centro en B y radio BD corta a la recta BA en el punto E que cumple que A está dentro del segmento BE. Halla la medida de $\angle DEA$.

10) Xim tiene el número $\overline{i9m}$ y Eva tiene el número $\overline{15ve}$. El número de Xim es múltiplo de cada uno de los dígitos que usa el número de Eva y viceversa. Si ambos números son impares, ¿cuál es la resta del número de Eva menos el de Xim?

11) Sea $ABCD$ un rectángulo. Un punto E se coloca en la recta CD de tal manera que D quede entre E y C. Sea M el punto medio del segmento AC. Si se cumple

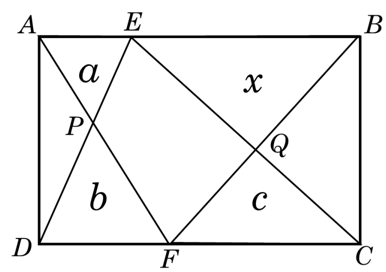
que $\angle DBC = 40^\circ$ y $\angle EAD = 10^\circ$, encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle EMB$.

12) El número de cuatro dígitos $\overline{8abc}$, está formado por 4 dígitos diferentes. Además, es múltiplo de 7, 8 y 9. Obtén el valor de $a + b - c$.

Parte B

13) ¿Cuántas parejas de enteros (n, m) con $n \geq 0$ y $m \geq 0$ cumplen que $2n + 3m = 2022$?

14) Se tiene un rectángulo $ABCD$ en el que se han marcado las áreas de cuatro de sus triángulos cuyas medidas son a, b, c y x. Demostrar que $x = b + c - a$.

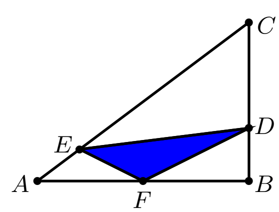


15) Para cada número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$, es decir, con a distinto de cero, denotemos por $P(\overline{abcd})$ al producto $(a + b)(a + c)(a + d)(b + c)(b + d)(c + d)$.
Por ejemplo, $P(2022) = (2 + 0)(2 + 2)(2 + 2)(0 + 2)(0 + 2)(2 + 2) = 512$ y $P(1234) = (1 + 2)(1 + 3)(1 + 4)(2 + 3)(2 + 4)(3 + 4)$.
¿Cuántos números $\overline{abcd}$ con algún 0 entre sus dígitos cumplen que $P(\overline{abcd})$ es una potencia de 2?

Prueba por Equipos, Nivel II

1) El promedio de cinco enteros distintos es 30. Si el menor de estos números es 7, ¿cuál es el mayor valor que puede tener cualquiera de ellos?

2) En el triángulo ABC, $\angle ABC = 90^\circ$ y los puntos D, E y F están sobre los lados CB, AC y AB, respectivamente, de tal forma que $AE = 1$, $EC = 4$, $CD = 2$, $DB = 1$ y $BF = 2$. Calcular el área del triángulo DEF.



3) Un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ se dice *pariente* si la diferencia entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es par. ¿Cuántos números parientes existen tales que sus dígitos están en orden estrictamente creciente?

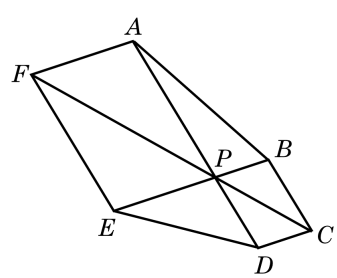
4) En algunos lugares se escribe la fecha de la forma $dd/mm/yy$, donde dd es el día, mm el mes y yy son los últimos dos dígitos del año. Una fecha es *homogénica* si el número de dos dígitos yy es igual al producto de los números dd y mm. Por ejemplo, la fecha $04/03/12$ es homogénica, ya que $4 \times 3 = 12$. ¿Cuántas fechas homogénicas hay en un siglo?
Notas:
   - Febrero tiene 28 días; enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días, y el resto tienen 30 días.
   - Se consideran años bisiestos a todos los múltiplos de 4, en los que febrero tiene 29 días.

5) ¿Cuántos números de 4 dígitos contienen al menos un 4 y al menos un 3?

6) En la oficina de César trabajan de lunes a viernes. Durante la pandemia han estado trabajando a distancia, pero ahora han decidido asistir a la oficina algunos días. Cada persona ha elegido 3 días para asistir; ninguna persona ha elegido asistir los mismos 3 días que otra; todos los días asistirá la misma cantidad de personas, excepto los miércoles que asistirá una menos; y al menos la mitad de las personas asistirá cada día. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de César (incluyéndole)?

7) El rectángulo $ABCD$ tiene área 2022 y lados de longitudes números enteros. Sea BC uno de los lados mayores del rectángulo. Las bisectrices de los ángulos $\angle ABC$ y $\angle BCD$ cortan al lado AD en dos puntos, dividiendo al segmento AD en tres segmentos. ¿Cuál es el valor máximo que puede tener el producto de las medidas de esos tres segmentos?
Nota: La bisectriz del ángulo $\angle ABC$ es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

8) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo tal que las diagonales AD, BE y CF se cortan en un punto P. Los cuadriláteros $APEF$ y $BPDC$ son ambos paralelogramos.



Si (XYZ) denota el área del triángulo XYZ, demuestra que

$$4 \cdot (APB) \cdot (DPE) = (APEF) \cdot (BPDC).$$

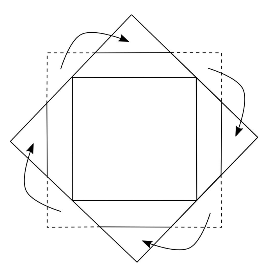
Soluciones de la Prueba Individual, Nivel II

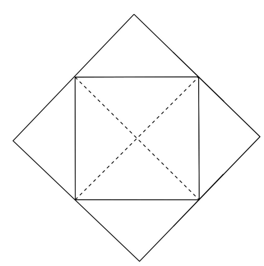
Parte A

1) La respuesta es 8. Si pintamos los lados del octágono de manera alternada de azul y rojo, es fácil ver que si dos lados son perpendiculares entonces están pintados del mismo color, por lo que nos concentraremos en los segmentos rojos. Hay 6 maneras de tomar dos de ellos y 2 de esas elecciones no son lados perpendiculares, por lo que hay 4 maneras de tomar dos lados rojos que sean perpendiculares. Igual para los lados azules, por lo que hay $2 \times 4 = 8$ parejas de lados perpendiculares en un octágono regular.

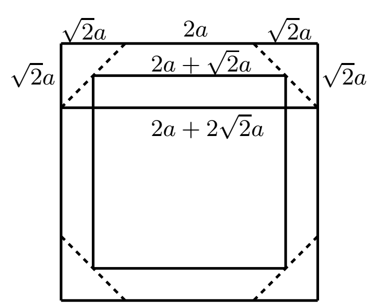
2) La respuesta es 24. Si a es el primer número que sumó Denisse y b es el primer número que sumó Zeus, entonces $(a+i)-(b+i) = a-b$ para cada entero $1 \leq i \leq 4$. Por lo tanto, la suma de los números de Denisse menos la suma de los números de Zeus es igual a $5(a-b)$. El problema nos dice que esto es igual a 100, entonces $a-b = 20$. Finalmente, la diferencia buscada es $(a+4)-b = (a-b)+4 = 24$.

3) La respuesta es 50. Coloquemos las esquinas recortadas junto a los otros lados del octágono para formar un cuadrado, como se muestra en la figura de la izquierda. Notemos que si trazamos las diagonales del cuadrado pequeño, la figura queda dividida en 8 triángulos iguales y el cuadrado pequeño está formado por 4 de ellos. Luego, el área del cuadrado grande es el doble del área del cuadrado pequeño.





Solución alternativa. Sea $2a$ la longitud de cada lado del octágono. Así, la hipotenusa de cada triángulo de las esquinas mide $2a$. Luego, los lados de dichas esquinas miden $\sqrt{2}a$. De esta manera, el lado del cuadrado original mide $2a + 2\sqrt{2}a$.



Ahora, cada lado del cuadrado nuevo puede verse como la recta media de un trapecio de bases $2a$ y $2a+2\sqrt{2}a$. Luego, la longitud del lado del cuadrado nuevo es el promedio de estas bases, esto es, $2a+\sqrt{2}a$. Entonces, el área del cuadrado original es $(2a+2\sqrt{2}a)^2 = 4a^2+8\sqrt{2}a^2+8a^2 = 12a^2+8\sqrt{2}a^2$ y el área del cuadrado nuevo es $(2a+\sqrt{2}a)^2 = 4a^2+4\sqrt{2}a^2+2a^2 = 6a^2+4\sqrt{2}a^2$. De aquí, es claro que el área del cuadrado original es el doble del área del cuadrado nuevo.

4) La respuesta es 36. Al ser de cuatro cifras y utilizar los dígitos 7, 7 y 5 debe haber un dígito extra d. Si $d \neq 5, 7$, puede ir en cualquiera de las cuatro posiciones: $d775, 7d75, 77d5, 775d$ y en cada posición tiene 8 opciones, salvo si se inicia con 0. En este caso hay $4\times 8-1 = 31$ números. Si $d=7$, los números son 7775 y 7757. Si $d=5$, los números son 5775, 7575 y 7755. En total son $31+2+3=36$ números.

5) La respuesta es 2028. La rana avanza 3 unidades en cada salto. La menor cantidad de saltos que ocupa para llegar al 2022 es $2022/3 = 674$. Notemos que si la rana puede llegar en n saltos al 2022, entonces también puede llegar en $n+2$ saltos, pues al inicio puede saltar al -3, luego volver al 0 y del 0 hacer n saltos para llegar al 2022. Por lo que n puede ser $674, 676, 678, \ldots$. Para que llegue en menos de 680 saltos, los únicos casos son 674, 676 y 678, cuya suma es igual a 2028.

6) La respuesta es 10. Dado que un medio de A es divisible por 2, A debe ser divisible por 2^2. Análogamente, A debe ser divisible por 3^2 y por 5^2. Luego, $A = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot k = 900\cdot k$ para algún entero k. Como $1000 \leq A \leq 9999$, tenemos que $2 \leq k \leq 11$, esto es, hay 10 números.

7) La respuesta es 8. Por el teorema de Tales, tenemos que $\frac{PN}{PC} = \frac{PM}{PB} = \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3}$ y $\frac{MN}{BC} = \frac{PM}{PB} = \frac{2}{3}$. De lo anterior se sigue que $QM+NR = \frac{QR}{3} = 4$. Además, $QB = RC = 4$, por lo que la suma buscada es igual a $\frac{(QM+NR)4}{2} = \frac{4\times 4}{2} = 8$.

8) La respuesta es 8. La suma de los números escritos en los vértices es 15, un número impar, por lo tanto, 1 o 3 de esos números deben ser impares. La única forma de conseguir esto es que los números escritos en los lados del cuadrados sean dos pares y dos impares y que los impares estén en lados adyacentes. De este modo, su producto produce un vértice impar y los tres vértices restantes son pares. Analicemos los posibles valores en los lados impares, siguiendo en orden creciente su producto:

   - $1 = 1\times 1$. Lo buscado se consigue colocando 2 y 4 en los otros dos lados: $1\times 1+1\times 2+2\times 4+4\times 1 = 15$.
   - $3 = 1\times 3$. Lo buscado se consigue colocando 2 y 2 en los otros dos lados: $1\times 3+3\times 2+2\times 2+2\times 1 = 15$.
   - $5 = 1\times 5$. A partir de aquí, lo buscado no se puede conseguir porque los otros dos números deben ser al menos 2 y con eso excedemos la suma.

   Entonces, solo hay dos posibles combinaciones de números para escribir en los lados del cuadrado y en ambas la suma de esos números es 8.

Solución alternativa. Sean a, b, c y d los números escritos en los lados del cuadrado, siguiendo el sentido horario. Entonces, la suma de los números escritos en los vértices es igual a $ab+bc+cd+da = 15$, que es equivalente a $(a+c)(b+d) = 15$. Por lo tanto, como $a+c > 1$, necesariamente $a+c = 3$ y $b+d = 5$, de donde $a+b+c+d = 3+5 = 8$.

9) La respuesta es $75°$. Sea F el punto simétrico de B respecto a la recta AC. Claramente ACF es un triángulo equilátero y los puntos B, C, F y D están sobre la circunferencia con centro en A. Como $\angle BAD = 120° = \angle FAD$ y $AB = AF = AD$, entonces BFD es equilátero. Considerando la circunferencia con centro en B y radio BD tenemos que el arco $\widehat{FE}$ corresponde al ángulo central $\angle FBE = 30°$. Si trazamos DF y usamos que $\angle EDF$ está inscrito en el arco $\widehat{EF}$, obtenemos que $\angle EDF = 15°$. Como $\angle DAE = 60°$ y $\angle CDF = 30°$, concluimos que $\angle DEA = 75°$.

10) La respuesta es 980. Como el número de Eva lleva un 5, el de Xim acaba en 0 o en 5 y, como es impar, entonces $m = 5$. Luego, el número de Eva también debe ser múltiplo de 5 y también $e = 5$. Como el de Xim lleva un 9, entonces $1+5+v+5$ es múltiplo de 9, esto es, debe ser 18 y $v = 7$. El único número de la forma $\overline{i95}$ que es múltiplo de 7 es el 595, por lo que $i = 5$. De esta manera, si Xim tiene el 595 y Eva el 1575, se cumplen las condiciones del problema y la resta buscada es 980.

11) La respuesta es $170°$. Tracemos la recta AC, la cual pasa por M. Notemos que $\angle EMB = \angle EMA + \angle AMB$. Como el ángulo $\angle AMB$ es exterior al triángulo isósceles BMC, tenemos que $\angle AMB = 80°$. Observemos que el triángulo AEC es isósceles. En efecto, el triángulo AED es rectángulo con un ángulo de $10°$, por lo que $\angle AEC = 80°$. Además, $\angle ACD = 50°$ al ser $ABCD$ un rectángulo. Concluimos que el triángulo AEC tiene dos ángulos de $50°$. Como M es el punto medio de BD, también lo es de AC, esto es, EM es mediana y, por lo tanto, altura del triángulo isoscéles AEC, así que $\angle EMA = 90°$. Como $\angle EMA = 90°$ y $\angle AMB = 80°$, concluimos que $\angle EMB = 170°$.

12) La respuesta es 2. Notemos que $\text{mcd}(7, 8, 9) = 1$, por lo que $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ divide a $8abc$. Los únicos múltiplos de 504 que inician con 8 son 8064 y 8568, pero 8568 tiene dígitos repetidos, por lo que 8064 es la única solución. Como $a = 0$, $b = 6$ y $c = 4$, concluimos que $a + b - c = 2$.

Parte B

13) Notemos que m debe ser par y que $2022 = 3 \times 674$. Además, para m par tal que $0 \leq 3m \leq 3 \times 674$, existe un único entero n tal que la pareja (n, m) cumple que $2n + 3m = 2022$. Por lo tanto, basta contar cuántos enteros pares m satisfacen que $0 \leq 3m \leq 3 \times 674$, esto es, $0 \leq m \leq 674$. Hay $\frac{674}{2} + 1 = 338$ enteros pares positivos menores o iguales que 674. Por lo que hay 338 elecciones para m y, como cada una de ellas determina a n, entonces hay 338 parejas (n, m) tales que $2n + 3m = 2022$.

14) Notemos que Área(AFB) = Área(CED) = $\frac{1}{2}$Área$(ABCD)$. Además, tenemos que

$$\text{Área}(AFB) = a + \text{Área}(EPFQ) + x,$$
$$\text{Área}(CED) = b + \text{Área}(EPFQ) + c.$$

Entonces, $a+$Área$(EPFQ)+x = b+$Área$(EPFQ)+c$, de donde $x = b+c-a$.

15) Observemos que reordenar los dígitos de $\overline{abcd}$ no altera el valor de $P(\overline{abcd})$. Supongamos que $\overline{abcd}$ cumple lo que queremos y que $d = 0$. Entonces,

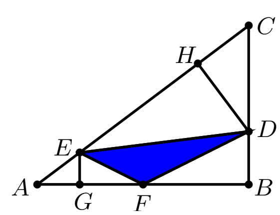
$$P(\overline{abcd}) = (a+b)(a+c)(a+0)(b+c)(b+0)(c+0) = abc(a+b)(a+c)(b+c).$$

Luego, a, b y c son potencias de 2. Notemos que $a+b$ también es potencia de 2 y, por lo anterior, es de la forma $2^\alpha + 2^\beta$. La única forma de que esto sea una potencia de 2 es que $\alpha = \beta$, lo cual implica que $a = b$. De manera análoga, obtenemos que $a = b = c$ y es fácil comprobar que los números 1110, 2220, 4440 y 8880, satisfacen el problema. Como cada uno de estos puede reordenarse de 3 formas distintas, la respuesta es $3 \times 4 = 12$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel II

1) La respuesta es 116. Si el promedio de m números es n, la suma de ellos es mn. Entonces, si el promedio de 5 números diferentes es 30, la suma de ellos es 150. Si representamos estos cinco números como a, b, c, d, e, donde $a < b < c < d < e$, tenemos que $a+b+c+d+e = 150$. Como el menor es 7, necesariamente $a = 7$, por lo que $b+c+d+e = 143$. Finalmente, el número e tiene el mayor valor posible cuando b, c y d son los números más pequeños. Esto se da cuando $b = 8$, $c = 9$ y $d = 10$. Por lo tanto, $e = 116$.

2) El triángulo ABC es rectángulo de lados 3, 4 y 5, donde $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Luego, $AF = AB - FB = 4 - 2 = 2$. Trazamos las alturas EG y DH de los triángulos AEF y EDC, respectivamente. Los triángulos EAG y CAB son semejantes, de donde $\frac{1}{EG} = \frac{AE}{EG} = \frac{AC}{CB} = \frac{5}{3}$. De aquí que $EG = \frac{3}{5}$.



Los triángulos CHD y CBA son semejantes también. Luego, $\frac{2}{DH} = \frac{DC}{DH} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}$ y, en consecuencia, $DH = \frac{8}{5}$.
Por lo tanto, el área del triángulo DEF es igual a

$$(ABC)-(FBD)-(AFE)-(CED) = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{3}{5} - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{8}{5} = \frac{6}{5}.$$

3) La respuesta es 66. Observemos que b y d deben tener la misma paridad y que $2 \leq b \leq 7$. Analicemos caso por caso:

   a) Si $b = 2$, entonces $a = 1$.
      - Si $d = 4$, podemos elegir a c de una manera ($c = 3$).
      - Si $d = 6$, podemos elegir a c de 3 maneras ($3 \leq c \leq 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de 5 maneras ($3 \leq c \leq 7$).

   b) Si $b = 3$, a puede tomar 2 valores ($1 \leq a \leq 2$).
      - Si $d = 5$, podemos elegir a c de una manera ($c = 4$).
      - Si $d = 7$, podemos elegir a c de 3 maneras ($4 \leq c \leq 6$).
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de 5 maneras ($4 \leq c \leq 8$).

   c) Si $b = 4$, a puede tomar 3 valores ($1 \leq a \leq 3$).
      - Si $d = 6$, podemos elegir a c de una manera ($c = 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de 3 maneras ($5 \leq c \leq 7$).

   d) Si $b = 5$, a puede tomar 4 valores ($1 \leq a \leq 4$).
      - Si $d = 7$, podemos elegir a c de una manera ($c = 6$).
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de 3 maneras ($6 \leq c \leq 8$).

   e) Si $b = 6$, a puede tomar 5 valores ($1 \leq a \leq 5$).
      - Si $d = 8$, podemos elegir a c de una manera ($c = 7$).

   f) Si $b = 7$, a puede tomar 6 valores ($1 \leq a \leq 6$)
      - Si $d = 9$, podemos elegir a c de una manera ($c = 8$).

   Por lo tanto, hay $1(1+3+5)+2(1+3+5)+3(1+3)+4(1+3)+5(1)+6(1) = 66$ números parientes.

   Solución alternativa. Para que $\overline{abcd}$ sea pariente, basta que b y d tengan la misma paridad. Notemos que para cada b, hay $b-1$ formas de elegir a a, pues $1 \leq a < b$. Como $b \equiv d \pmod 2$, tenemos que $d = b + 2k$ para algún $k \geq 1$. Como $d \leq 9$, tenemos que $b + 2k \leq 9$, de donde $k \leq \frac{9-b}{2}$. Como $b < c < d$, hay $2k - 1$ opciones para tomar a c y entonces para cada b hay

$$(b-1)\left(1+3+5+\cdots+\left\lfloor\frac{9-b}{2}\right\rfloor\right) = (b-1)\left\lfloor\frac{9-b}{2}\right\rfloor^2$$

   números posibles. Como $0 < a < b$ y $b \geq 2$, la respuesta es

$$\begin{aligned}&\sum_{b=2}^{9}(b-1)\left\lfloor\frac{9-b}{2}\right\rfloor^2\\ &= 1\times 3^2 + 2\times 3^2 + 3\times 2^2 + 4\times 2^2 + 5\times 1^2 + 6\times 1^2 + 7\times 0^2 + 8\times 0^2\\ &= 66.\end{aligned}$$

4) Para facilitar las cuentas, vamos a enfocarnos en los meses del año. Notemos que todas las fechas dd/mm de Enero, Febrero y Marzo tienen su correspondiente año tal que $dd \times mm = yy$, ya que el mayor producto posible es $31 \times 3 = 93$ y el año es un número entre 00 y 99. Como Enero tiene 31 días, Febrero tiene 28 días y Marzo tiene 31 días, entre estos tres meses tenemos 90 fechas homogénicas (observemos que el 29 de Febrero no es una fecha homogénica, ya que $29 \times 2 = 58$ y ningún año que termine en 58 puede ser bisiesto ya que 58 no es múltiplo de 4). Para ver cuántas fechas homogénicas tiene cada uno de los meses restantes, basta con dividir 99 entre el número del mes. Por ejemplo, Abril tiene 24 fechas homogénicas, desde el 01/04 hasta el 24/04 (el 25/04 no es homogénica ya que $25 \times 4 > 99$).
El quinto mes tiene $\lfloor 99/5 \rfloor = 19$ fechas homogénicas.
El sexto mes tiene $\lfloor 99/6 \rfloor = 16$ fechas homogénicas.
El séptimo mes tiene $\lfloor 99/7 \rfloor = 14$ fechas homogénicas.
El Octavo mes tiene $\lfloor 99/8 \rfloor = 12$ fechas homogénicas.
El noveno mes tiene $99/9 = 11$ fechas homogénicas.
El décimo mes tiene $\lfloor 99/10 \rfloor = 9$ fechas homogénicas.
El décimo primer mes tiene $99/11 = 9$ fechas homogénicas.
El décimo segundo mes tiene $\lfloor 99/12 \rfloor = 8$ fechas homogénicas.
En total hay $90+24+19+16+14+12+11+9+9+8 = 212$ fechas homogénicas en un siglo.

5) La respuesta es 920. Hay 6 formas de tener al menos un 4 y al menos un 3.
Con un 4 y un 3, donde al menos uno ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 64 = 384$ números.
Con un 4 y un 3, donde ninguno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 7 \times 8 = 336$ números.
Con dos 4's y un 3 o viceversa, donde uno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $18 \times 8 = 144$ números.
Con dos 4's y un 3 o viceversa, donde ninguno de ellos ocupa el lugar de las unidades de millar, tenemos $6 \times 7 = 42$ números.
Con dos 4's y dos 3's, hay 6 números.
Con tres 4's y un 3 o viceversa, hay 8 números.
En total hay $384 + 336 + 144 + 42 + 6 + 8 = 920$ números.

Solución alternativa. Como el primer dígito debe estar entre 1 y 9 y el resto entre 0 y 9, entonces hay un total de $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$ números de cuatro dígitos. Veamos ahora cuántos números de cuatro dígitos no tienen un 3. Como el primer dígito no puede ser 0 ni 3, entonces puede escogerse de 8 formas y cada uno de los dígitos restantes puede escogerse de 9 formas, por lo que hay $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3. De manera análoga obtenemos que hay 5832 números que no contienen un 4. Contemos ahora cuántos números de cuatro dígitos no tienen 3 ni 4. Como el primer dígito no puede ser 0, 3 o 4, entonces puede ser escogido de 7 formas y como los demás dígitos no pueden ser 3 ni 4, entonces cada uno de ellos puede ser escogido de 8 maneras, por lo que hay $7 \times 8 \times 8 \times 8 = 3584$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3 ni un 4. Finalmente, hay $5382 + 5382 - 3584 = 8080$ números de cuatro dígitos que no contienen un 3 o un 4. Por lo tanto, la respuesta es $9000 - 8080 = 920$.

6) Hay 10 posibles maneras de elegir 3 días de lunes a viernes, como se muestra en la siguiente tabla:

	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes
1	•	•	•		
2		•	•	•	
3			•	•	•
4	•	•		•	
5	•	•			•
6		•	•		•
7	•		•	•	
8	•			•	•
9		•		•	•
10	•		•		•

Así, el máximo número posible de personas es 10. Podemos contar el número de asistencias semanales multiplicando por 3 al número de personas, quedando como posibles números de asistencias semanales

$$3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.$$

Como cada día asiste la misma cantidad de personas, excepto el miércoles que asiste una menos, al número de asistencias semanales le faltaría 1 para ser múltiplo de 5. Luego, las únicas opciones posibles para el número de asistencias semanales son 9 y 24, que corresponden a 3 y 8 personas, respectivamente. Si el número de personas fuera 3, tendrían que asistir 2 personas cada día, excepto el miércoles que solo asistiría una, pero sabemos que al menos la mitad de las personas asistió cada día y eso no se cumpliría el miércoles. Por lo tanto, la única opción posible es que en la oficina de César haya 8 personas. Un posible horario se obtendría eliminando las líneas 1 y 3 de la tabla anterior.

7) La respuesta es 11700. La factorización en primos de 2022 es $2 \times 3 \times 337$, por lo que los rectángulos posibles tienen dimensiones: 6×337, 3×674, 2×1011 o 1×2022. Ahora, como las bisectrices de los ángulos de un rectángulo forman ángulos de $45°$, si P y Q son las intersecciones de las bisectrices de $\angle ABC$ y $\angle BCD$ con AD, entonces $AD = DP$ y $BC = CQ$. Si el lado menor del rectángulo es menor que la mitad del lado mayor, P estará más cerca de D y Q estará más cerca de C. Si llamamos a al lado menor y b al mayor, entonces el producto de las medidas de la partición es $a(b - 2a)a = a^2(b - 2a)$. A continuación analizamos los 4 casos.

a) Caso 6×337. La partición da como producto: $6^2 \times 325 = 11700$.

b) Caso 3×668. La partición da como producto: $3^2 \times 668 = 6012$.

c) Caso 2×1007. La partición da como producto: $2^2 \times 1007 = 4028$.

d) Caso 1×2020. La partición da como producto: $1^2 \times 2022 = 2022$.

Así, el valor máximo es 11700 para el caso de un rectángulo de 6×337.

8) Sean $a = (APF) = (PEF)$, $b = (BPC) = (PDC)$, $x = (APB)$ y $y = (DPE)$. Dado que DC, BE y AF son paralelas entre sí, tenemos que

$$\frac{b}{y} = \frac{(PBC)}{(PDE)} = \frac{PB}{PE} = \frac{(PAB)}{(PEF)} = \frac{x}{a},$$

de donde

$$(APB) \cdot (DPE) = xy = ab = \frac{(2a)(2b)}{4} = \frac{(APEF) \cdot (BPDC)}{4}.$$

Competencia Internacional de Matemáticas 2022 (Nivel Elemental)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2022 (IIMC 2022), se llevó a cabo de forma virtual del 30 de junio al 6 de julio de 2022 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de plata, 6 medallas de bronce y 5 menciones honoríficas, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y 3 medallas de bronce. En el Torneo Puzzle un participante de Primaria obtuvo una mención honorífica.

La prueba individual del nivel elemental, consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. La mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.

En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 5^a OMMEB realizada en el mes de junio de 2021 de forma virtual.

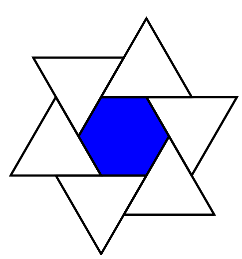
Los resultados individuales de los equipos de Primaria en la IIMC 2022 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Elisa María Villarreal Corona	Cd. de México	Bronce	A
Fernando Gael Martín Barajas	Cd. de México	M. H.	A
Álvaro Valdez Llanes	Jalisco		A
Derek Elías Ortiz	Zacatecas		A
Zariffe Yamel Céspedes Pelayo	Hidalgo	Bronce	B
Gonzalo Díaz Mercado	Morelos	M. H.	B
Isaac Azael Juárez Martínez	San Luis Potosí	M. H.	B
Christopher R. Rodríguez Moguel	Yucatán	M. H. (Puzzle)	B

En la prueba por equipos, los dos equipos de Primaria obtuvieron medalla de bronce. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo fueron: Carlos Jacob Rubio Barrios (líder del Equipo A), Denisse Alejandra Escobar Parra (colíder del Equipo A), César Guadarrama Uribe (líder del Equipo B) y María Guadalupe Russell Noriega (colíder del Equipo B).
A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel elemental (Primaria) de la IMC del año 2022.

Examen Individual, Nivel Elemental (Primaria)

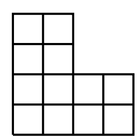
Problema 1. La figura está compuesta por seis triángulos equiláteros idénticos y un hexágono regular, de manera que la razón entre la longitud del lado del triángulo equilátero y la longitud del lado del hexágono regular es $2 : 1$. Si el área de la figura completa es 45 cm^2, ¿cuál es el área, en cm^2, del hexágono regular?



Problema 2. En una papelería, el costo por unidad, en dólares, de una libreta es un número entero. El costo de comprar nueve libretas idénticas es mayor a 1100 pero menor a 1200 dólares, mientras que el costo de comprar trece libretas idénticas es mayor a 1500 pero menor a 1600 dólares. ¿Cuál es el costo, en dólares, de una libreta?

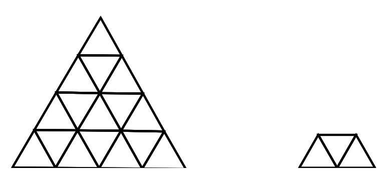
Problema 3. El promedio obtenido por una clase de 100 estudiantes en un examen es 79. Si el promedio obtenido por todas las niñas de la clase es 75, mientras que el promedio obtenido por los niños de la clase es el mismo que el número de niños en la clase, ¿cuántas niñas hay en la clase?

Problema 4. A continuación se muestra una figura "en forma de L" que está compuesta por cuadrados de 1×1 unidades. Kitty corta la figura a lo largo de las líneas de la cuadrícula para obtener dos piezas. Después, ella usa las piezas para formar un rectángulo de 2×6, donde se permite que las piezas sean rotadas o volteadas. ¿Cuál es la menor diferencia positiva entre las áreas, en unidades cuadradas, de las dos piezas?



Problema 5. Hay ocho volcanes grandes y seis volcanes pequeños en Indonesia. Los volcanes grandes hacen erupción cada tres años y los volcanes pequeños hacen erupción cada dos años. Si hubieron 30 erupciones en los últimos cinco años, ¿cuántos volcanes harán erupción este año?

Problema 6. La figura de la izquierda está hecha por cinco copias de la figura de la derecha, llamada *token*, y un triángulo unitario.



¿En cuántas posiciones podemos colocar el triángulo unitario sobre el tablero, de manera que el resto del tablero pueda ser completamente cubierto por los 5 tokens restantes? (Nota: Los tokens se pueden rotar y voltear).

Problema 7. En una competencia de Matemáticas, las puntuaciones de 10 estudiantes, los cuales son enteros positivos, se muestran en la tabla de abajo, excepto para la puntuación de Grace.

Alice	Bob	Carla	David	Eric	Freya	Grace	Helen	Ivory	Jordan
23	6	14	13	23	9	?	12	29	19

El comité recuerda que la diferencia entre el promedio de las seis puntuaciones más altas y el promedio de las seis puntuaciones más bajas es 12. ¿Cuál es la suma de todas las posibles puntuaciones obtenidas por Grace?

Problema 8. En el siguiente tablero de 3×3, algunas casillas fueron previamente llenadas con enteros positivos.

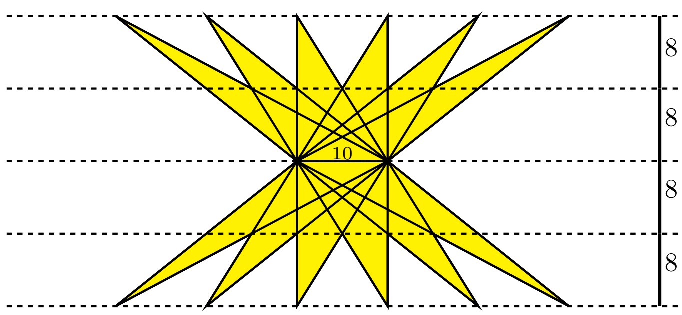
1	8	
		10
4		

Nuestra meta es escribir un entero positivo en cada una de las casillas vacías restantes de manera que se cumplan las siguientes dos condiciones:

- Todos los nueve números enteros escritos en el tablero son diferentes entre ellos.
- La suma de los cuatro enteros en cualquier cuadrado de 2×2 es siempre la misma.

Encuentra el menor valor posible de la suma de los nueve enteros en el tablero.

Problema 9. Hay cinco líneas punteadas paralelas horizontales y la distancia entre dos líneas punteadas adyacentes es 8 cm, como lo muestra la figura. Si la longitud del segmento de la línea punteada de en medio es 10 cm, ¿cuál es el área, en cm^2, de la región sombreada?



Problema 10. Sea $A = \dfrac{2021^{2022} + 2022^{2023} + 2023^{2024}}{2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023}}$.

¿Cuál es el mayor número entero que no excede a A?

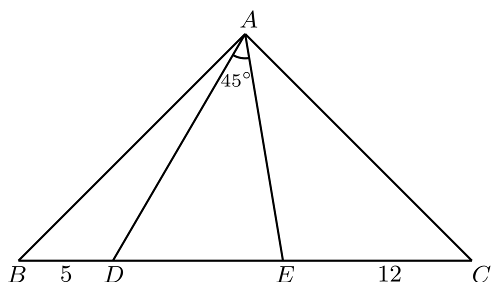
Problema 11. El Capitán Crook y cinco miembros de su equipo se sientan en una mesa redonda, compartiendo 99 monedas. Si al menos tres de los cinco miembros del equipo tienen más monedas que cada uno de sus dos vecinos, ¿cuál es el máximo número de monedas que puede tener el Capitán Crook?

Problema 12. Supongamos que $\overline{ABC}$, $\overline{DEF}$ y $\overline{GHI}$ son números de tres dígitos tales que

- $\overline{ABC} + \overline{DEF} + \overline{GHI} = 2022$,
- los nueve dígitos son distintos y,
- $\overline{ABC} < \overline{DEF} < \overline{GHI}$.

¿Cuál es el mayor valor posible de $\overline{ABC}$?

Problema 13. En la figura, ABC es un triángulo donde $AB = AC$ y $\angle BAC = 90°$. Los puntos D y E están sobre BC y satisfacen que $\angle DAE = 45°$. Si $BD = 5$ cm y $EC = 12$ cm, ¿cuál es el área, en cm^2, del triángulo ABC?

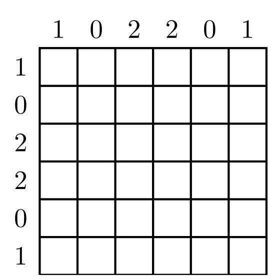


Problema 14. Queremos quitar algunos números del siguiente conjunto:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

de manera que el producto de los números restantes sea un múltiplo de cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 14, 15$. ¿A lo más, cuántos números podemos quitar?

Problema 15. Queremos colocar algunas estrellas en las casillas del tablero de 6×6 que se muestra abajo, de manera que el número escrito hasta arriba de cada columna sea igual a la cantidad total de estrellas en esa columna, mientras que el número escrito a la izquierda de cada fila sea igual a la cantidad total de estrellas en esa fila. ¿De cuántas maneras diferentes podemos colocar las estrellas? (Nota: Cada casilla puede tener a lo más una estrella).



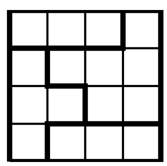
Examen por Equipos, Nivel Elemental (Primaria)

Problema 1. En la Víspera de Año Nuevo, un grupo de niños se reúnen para jugar un simple juego matemático. El primer niño escribe 2022 en un pizarrón. A partir del segundo niño, cada uno reemplaza el número escrito por el niño anterior por el producto de los dígitos de ese número más 12. ¿Qué número escribió el 59° niño?

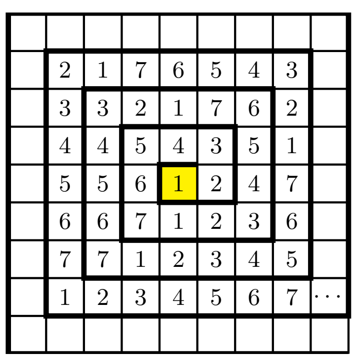
Problema 2. En cada casilla de la cuadrícula de abajo, escribe exactamente uno de los números 1, 2, 3 o 4 de manera que:

- En cada fila y columna, los cuatro números escritos son distintos y,
- para cada región resaltada en negrita, la suma o el producto de los números escritos es igual a 12.

Explica tu razonamiento.



Problema 3. Llena la cuadrícula infinita con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, $5, \ldots$ (los números del 1 al 7, repetidamente) de forma espiral en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando con la casilla sombreada, como se muestra en la figura. ¿Qué número está escrito en la casilla que está localizada en la posición 2022 al contar las casillas hacia abajo de la casilla sombreada?



Problema 4. Selecciona cualquier entero positivo n y escribe los enteros del 0 al n, inclusive, en algún orden y sin espacios.
¿Cuál es el mínimo valor de n para el cual la cadena resultante puede tener el mismo valor cuando se lee al derecho y al revés? ¿Cuál es la cadena resultante?

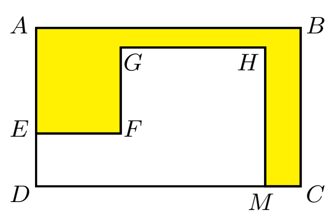
Problema 5. Un entero positivo de cuatro dígitos es llamado *bueno* si consiste de dos parejas de los mismos dígitos en algún orden pero no todos los cuatro dígitos son iguales. Por ejemplo, los números 2211, 2424 y 7007 son buenos, mientras que 5555 y 3111 no lo son. Encuentra la cantidad de enteros positivos de cuatro dígitos buenos que son divisibles por 7 o por 101, pero no son divisibles por ambos.

Problema 6. En un grupo de cinco personas, las edades de cuatro de ellos se conocen y son 21, 53, 19 y 60. Se sabe que el promedio de las edades de las cinco personas es un número impar. Si ordenamos las edades de las cinco personas en orden creciente, entonces la edad de en medio es un múltiplo de 3. Calcula la suma de todos los posibles valores para la edad faltante.

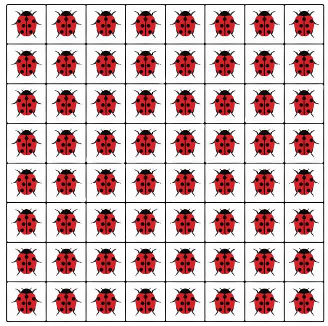
Problema 7. Cinco jugadores de ajedrez, Andy, Boris, Clark, Dick y Eric juegan un torneo, donde cualesquiera dos participantes juegan entre ellos exactamente una vez. Para cada juego, un jugador obtiene 2 puntos por una victoria, 1 punto por un empate y 0 puntos por una derrota. Al final del torneo, uno se da cuenta que: Boris empató todos sus juegos, Clark ganó exactamente dos juegos, Dick está por delante de Andy por 1 punto, Eric no está en el último lugar y perdió solamente con el único jugador que acumuló la menor cantidad de puntos. Si los puntajes totales son a, b, c, d, e, respectivamente, ¿cuál es el número de cinco dígitos $\overline{abcde}$?

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy						a
Boris						b
Clark						c
Dick						d
Eric						e

Problema 8. Una hoja de papel rectangular es cortada en dos piezas como se muestra en la figura, en donde una región es sombreada. Los ocho lados de la región sombreada tienen longitudes de 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm y 8 cm, en algún orden. ¿Cuáles son la máxima y mínima áreas posibles, en cm^2, de la región que no está sombreada?



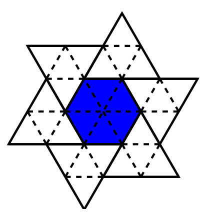
Problema 9. En un tablero de 8×8, cada casilla tiene un insecto. Después de que suena una campana, todos los insectos brincan a una casilla adyacente en la misma fila o la misma columna y no brincan afuera del tablero. Cada casilla puede estar vacía, tener uno o tener más de un insecto. ¿Cuál es el máximo número de casillas vacías que puede haber después de que suena la campana?



Problema 10. Arreglamos los siguientes números de cuatro dígitos: 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026 y 2027 en una fila, de manera que cualesquiera dos números adyacentes son primos relativos. Por ejemplo: 2027, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2021 es uno de esos arreglos. ¿Cuántos arreglos diferentes cumplen esta condición?

Soluciones del Examen Individual

Solución del Problema 1. La respuesta es 9. Cada triángulo equilátero de lado 2 cm, puede ser dividido en 4 triángulos equiláteros de lado 1 cm, como se muestra en la figura. De manera similar, el hexágono regular se puede dividir en 6 triángulos equiláteros de lado 1 cm.

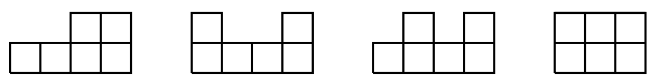


Entonces, la figura está compuesta por $6 \times 4 + 6 = 30$ triángulos equiláteros de lado 1 cm. Como el área de toda la figura es 45 cm^2, cada triángulo equilátero de lado 1 cm tiene área $\frac{45}{30} = 1.5$ cm^2. Por lo tanto, el área del hexágono es $1.5 \times 6 = 9$ cm^2.

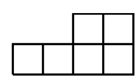
Solución del Problema 2. La respuesta es 123. Como nueve libretas idénticas cuestan más de 1100 y menos de 1200 dólares, una libreta cuesta más de $\frac{1100}{9} = 122\frac{2}{9}$ y menos de $\frac{1200}{9} = 133\frac{1}{3}$ dólares. Como trece libretas idénticas cuestan más de 1500 y menos de 1600 dólares, una libreta cuesta más de $\frac{1500}{13} = 115\frac{5}{13}$ y menos de $\frac{1600}{13} = 123\frac{1}{13}$ dólares. Combinando ambas condiciones, llegamos a que el costo de una libreta es mayor que $122\frac{2}{9}$ dólares y menor que $123\frac{1}{13}$ dólares. Como el costo de una libreta es un número entero, entonces el costo debe ser 123 dólares.

Solución del Problema 3. La respuesta es 20. Como la calificación promedio de todos los estudiantes es 79, la suma de las calificaciones de los 100 estudiantes es 7900. Si hay n niños en clase, su calificación promedio también es n por hipótesis y, la suma de las calificaciones de los niños, es igual a n^2. Como hay $100 - n$ niñas en la clase y su promedio es 75, la suma de las calificaciones de las niñas es igual a $75(100 - n)$. Entonces, tenemos que $n^2 + 75(100 - n) = 7900$, esto es, $(n - 80)(n + 5) = 0$, de donde $n = 80$ o $n = -5$. Como $n > 0$, la única opción es $n = 80$. Por lo tanto, el número de niñas en la clase es igual a $100 - 80 = 20$.

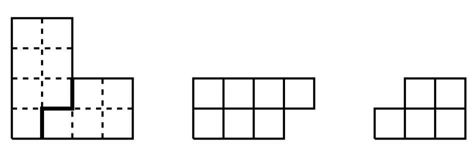
Solución del Problema 4. La respuesta es 2. Como hay 12 cuadrados de 1×1, la mínima diferencia posible entre las áreas de las dos piezas es 0, donde cada pieza tiene área 6. Para formar un rectángulo de 2×6, cada pieza tiene a lo más dos columnas. Hay cuatro posibles maneras de armar una pieza de área 6 dentro de un rectángulo de 2×6 (ignorando rotaciones y reflexiones). Tres de ellas salen de tomar los 4 cuadrados de 1×1 de la fila de abajo y 2 cuadrados de 1×1 en la fila de arriba. La cuarta manera es tomar un rectángulo de 2×3.



De estas cuatro maneras solo dos de ellas podrían usarse para construir el rectángulo de 2×6, ya sea usar dos rectángulos de 2×3 o usar dos piezas como la siguiente

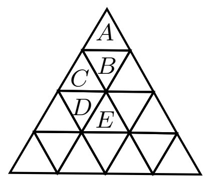


Sin embargo, estas dos piezas no se pueden obtener al mismo tiempo cortando la figura en forma de L en cualquier caso. Entonces, la diferencia mínima posible entre las áreas de las dos piezas es 2. A continuación mostramos cómo debe hacerse el corte, obteniendo una pieza de área 7 y una pieza de área 5. Observe que una pieza debe ser volteada.

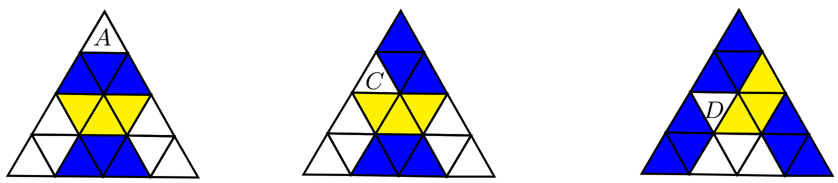


Solución del Problema 5. La respuesta es 4. Considera los últimos cinco años junto con el año actual (son 6 años en total). Como los volcanes grandes hacen erupción cada tres años, cada uno de los 8 volcanes grandes debe eruptar 2 veces en los últimos 6 años. Como los volcanes chicos hacen erupción cada dos años, cada uno de los 6 volcanes chicos debe eruptar 3 veces en los últimos 6 años. En total, son $8 \times 2 + 6 \times 3 = 34$ erupciones en los últimos 6 años. Como hubo 30 erupciones en los últimos 5 años, habrá $34 - 30 = 4$ erupciones en el año actual.

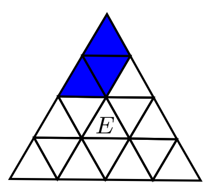
Solución del Problema 6. La respuesta es 12. Hay esencialmente 5 casos a considerar, los otros se pueden obtener con reflexiones o rotaciones. Consideremos la siguiente figura, donde hemos etiquetado a cinco triángulos correspondientes a cada caso.



Es fácil ver que, si al final tenemos un triángulo sin cubrir, este no puede ser B, ya que el triángulo A quedaría solo y no puede ser cubierto por un token.
Por otro lado, es posible que A, C y D queden sin cubrir, como se muestra a continuación.



Demostraremos que el triángulo E no puede ser el triángulo sin cubrir restante. En efecto, si fuera posible hay dos formas en que se puede colocar un token para cubrir el triángulo arriba de E. Como esas formas son simétricas, podemos asumir que el token se coloca como se muestra a continuación.



Entonces, solo hay una manera de cubrir el triángulo a la izquierda de E y, después de hacerlo, no es posible cubrir el triángulo de la esquina inferior izquierda.
Por lo tanto, hay 4 triángulos que no pueden quedar sin cubrir: el triángulo central y aquellos que se obtienen por rotación del triángulo B. Luego, hay $16 - 4 = 12$ triángulos que pueden dejarse descubiertos al poner 5 tokens.

Solución del Problema 7. La respuesta es 37. Sea x la puntuación de Grace. Sabemos que $x \geq 0$. La lista de las puntuaciones de todos los estudiantes, excepto Grace, en orden ascendente son: $6, 9, 12, 13, 14, 19, 23, 23, 29$. Notemos que las puntuaciones $14, 19, 23, 23, 29$ deben estar entre las seis puntuaciones más altas y, las puntuaciones $6, 9, 12, 13, 14$, deben estar entre las seis puntuaciones más bajas.
Caso 1: Supongamos que $x < 13$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{13 + 14 + 19 + 23 + 23 + 29}{6} - \frac{6 + 9 + 12 + 13 + 14 + x}{6} = 12,$$

que es equivalente a la ecuación $121 - 54 - x = 72$, de donde obtenemos la solución $x = -5$, lo que es una contradicción.
Caso 2: Supongamos que $13 \leq x \leq 19$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{x + 14 + 19 + 23 + 23 + 29}{6} - \frac{6 + 9 + 12 + 13 + 14 + x}{6} = 12,$$

que se reduce a la igualdad $54 = 72$, lo cual es un absurdo.
Caso 3: Supongamos que $x > 19$. Tenemos la ecuación,

$$\frac{x + 14 + 19 + 23 + 23 + 29}{6} - \frac{6 + 9 + 12 + 13 + 14 + 19}{6} = 12,$$

que es equivalente a la ecuación $108 + x - 73 = 72$, de donde obtenemos la solución $x = 37$.
Por lo tanto, la única puntuación posible de Grace es 37 y, en consecuencia, la suma de todas las posibles puntuaciones obtenidas por Graces es 37.

Solución del Problema 8. La respuesta es 51. Sean c y x los números que deben ir en el centro y en la esquina superior derecha del tablero, respectivamente. Notemos que la suma de los cuatro números en cualquier cuadrado de 2×2 debe ser $18 + c + x$.

1	8	x
	c	10
4		

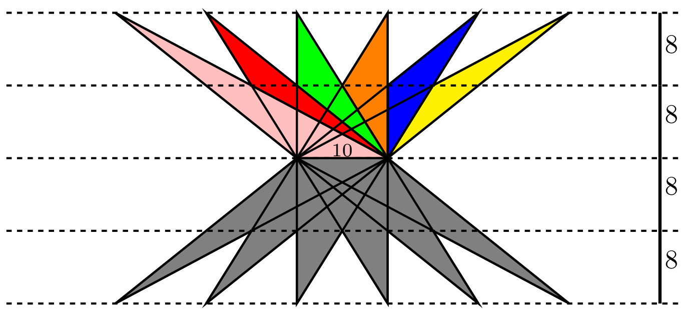
Entonces, en la casilla a la izquierda del centro debe estar el número $x + 9$. Luego, en la casilla debajo del centro debe ir el número 5 y en la esquina inferior derecha debe ir el número $x + 3$.

1	8	x
$x+9$	c	10
4	5	$x+3$

Como los números son positivos y distintos, entonces $c \geq 2$ y $x \geq 2$. Si $x = 2$, entonces el número $x + 3 = 5$ se repite. Luego, $x \geq 3$. Por lo tanto, la suma de los 9 enteros es $3x + c + 40$ y es al menos 51. Escogiendo $c = 2$ y $x = 3$, obtenemos 9 números distintos que suman 51.

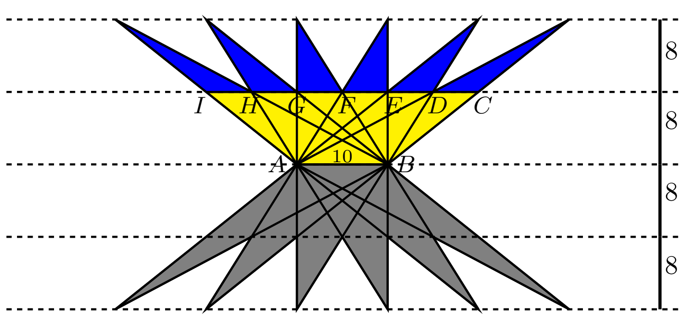
1	8	3
12	2	10
4	5	6

Solución del Problema 9. La respuesta es 560. Por la simetría de la figura, basta calcular la mitad superior del área sombreada. Dividamos a esa mitad en triángulos que no comparten área, cada uno de base 10 cm, como se muestra a continuación. Cada una de las áreas de los triángulos amarillo, azul, naranja, verde y rojo es igual a $10 \times 16/2 - 10 \times 8/2 = 40$ cm^2, mientras que el área del triángulo rosa es igual a $10 \times 16/2 = 80$ cm^2.



Luego, el área de la mitad superior es igual a la suma de las áreas de estos seis triángulos, esto es, $40 \times 5 + 80 = 280$ cm^2 y, por lo tanto, el área de toda la figura es igual a $2 \times 280 = 560$ cm^2.

Solución alternativa. Consideremos los puntos marcados en la siguiente figura. Como las 5 rectas horizontales son paralelas, tenemos que CD mide la mitad de AB, esto es, $CD = 5$ cm. De manera análoga, tenemos que $DE = EF = FG = GH = HI = 5$ cm. Entonces, el área total de los seis triángulos azules es igual a $\frac{5\times 8}{2} \times 6 = 120$ cm^2.



Por otro lado, la figura sombreada de color amarillo es un trapecio y su área es igual a $\frac{(AB+CI)\times 8}{2} = \frac{(10+5\times 6)8}{2} = 160$ cm^2. Por lo tanto, el área de la región azul y amarilla es igual a $120 + 160 = 280$ cm^2, la cual representa la mitad del área de toda la figura.

Solución del Problema 10. La respuesta es 2022. Tenemos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2021^{2022}+2022^{2023}+2023^{2024}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= \frac{2021(2021^{2021})+2022(2022^{2022})+2023(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= \frac{2021(2021^{2021})+2021(2022^{2022})+2021(2023^{2023})+2022^{2022}+2(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+\frac{2022^{2022}+2(2023^{2023})}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+\frac{2023^{2023}+2022^{2022}+2023^{2023}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}\\
&= 2021+1+\frac{2023^{2023}-2021^{2021}}{2021^{2021}+2022^{2022}+2023^{2023}}.
\end{aligned}$$

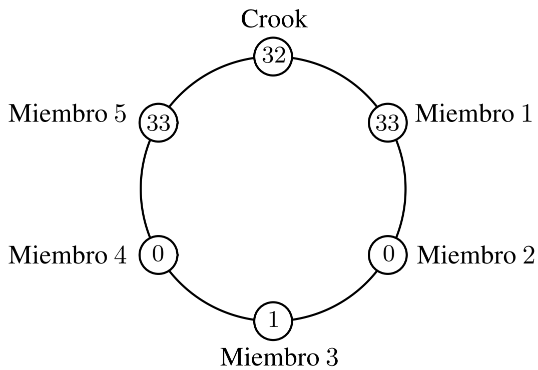
Como $0 < 2023^{2023} - 2021^{2021} < 2021^{2021} + 2022^{2022} + 2023^{2023}$, tenemos que $2022 < A < 2023$. Por lo tanto, el mayor entero que no excede a A es 2022.

Solución alternativa. Sean $a = 2021^{2021}$, $b = 2022^{2022}$ y $c = 2023^{2023}$. Tenemos que $a < b < c$ y

$$\begin{aligned}
A &= \frac{2021(2021^{2021})+2022b+2023c}{a+b+c} = 2021+\frac{b+2c}{a+b+c}\\
&= 2021+\frac{(a+b+c)+(c-a)}{a+b+c} = 2022+\frac{c-a}{a+b+c}.
\end{aligned}$$

Como $0 < c-a < a+b+c$, tenemos que $2022 < A < 2023$ y concluimos como en la primera solución.

Solución del Problema 11. La respuesta es 32. Numeremos a los miembros del 1 al 5 en orden cíclico. Tenemos que dos miembros en asientos adyacentes no pueden tener más monedas que cada uno de sus dos vecinos. Entonces, hay exactamente 3 miembros que tienen más monedas que cada uno de sus dos vecinos. Llamemos a esos miembros 1, 3 y 5. Podemos darle una moneda al Miembro 3, ninguna moneda a los Miembros 2 y 4, y 33 monedas a cada uno de los Miembros 1 y 5, dejando 32 monedas para el Capitán Crook. Si él consiguiera al menos 33 monedas, entonces cada uno de los Miembros 1 y 5, deben tener al menos 34 monedas. Pero esto no es posible ya que $33 + 2 \times 34 = 101 > 99$. Por lo tanto, el máximo número de monedas que puede tener el Capitán Crook es 32.



Solución del Problema 12. La respuesta es 597. Como $0 + 1 + 2 + \cdots + 9 = 45$, que es divisible por 9 y, $2022 = 9 \times 224 + 6$, el dígito que no aparece en ninguno de los números $\overline{ABC}$, $\overline{DEF}$ y $\overline{GHI}$, es el 3. Entonces, la suma de todos los dígitos desde A hasta I es $45 - 3 = 42$. Sean $X = A + D + G$, $Y = B + E + H$ y $Z = C + F + I$. Tenemos que $100X + 10Y + Z = 2022$ y $X + Y + Z = 42$. Notemos que $3 = 0 + 1 + 2 \leq X, Y, Z \leq 7 + 8 + 9 \leq 24$. Como la suma de los tres números de tres dígitos tiene dígito de las unidades igual a 2 (pues la suma es igual a 2022), el dígito de las unidades de Z debe ser igual a 2. Como $3 \leq Z \leq 24$, hay dos posibilidades: $Z = 12$ o $Z = 22$.
Si $Z = 12$, entonces $X + Y = 30$ y

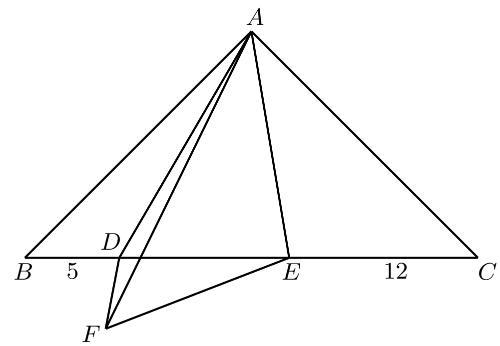
$$2022 = 100X + 10Y + Z = 100X + 10(30 - X) + 12 = 90X + 312,$$

de donde se sigue que $X = 19$ y $Y = 30 - X = 11$.
Si $Z = 22$, entonces $X + Y = 20$ y

$$2022 = 100X + 10(20 - X) + 22 = 90X + 222,$$

de donde se sigue que $X = 20$ y $Y = 20 - X = 0$, lo cual no puede ser ya que $Y \geq 3$. Por lo tanto, $Z = C + F + I = 12$, $Y = B + E + H = 11$ y $X = A + D + G = 19$. Como $A < D < G$, tenemos que $A \leq 5$, ya que en caso contrario, tendríamos que $A + D + G \geq 6 + 7 + 8 > 19$. Si $A = 5$, entonces $D = 6$ y $G = 8$. Como el dígito 8 ha sido usado en G, el valor más grande posible para $\overline{ABC}$ es 597. Para concluir que el valor máximo para $\overline{ABC}$ es 597, asignemos los dígitos restantes 0, 1, 2 y 4 a E, F, H y I, de tal manera que $7 + F + I = 12$ y $9 + E + H = 11$. Es fácil ver que podemos escoger $F = 1$, $I = 4$, $E = 0$ y $H = 2$, en cuyo caso obtenemos que $\overline{ABC} + \overline{DEF} + \overline{GHI} = 597 + 601 + 824 = 2022$.

Solución del Problema 13. La respuesta es 225. Tracemos el segmento AF de tal manera que $\angle FAE = \angle CAE$ y $AF = AC = AB$. Ahora tracemos los segmentos DF y EF.



Como $AE = AE$, $\angle FAE = \angle CAE$ y $AF = AC$, los triángulos FAE y CAE son congruentes por el criterio LAL. Entonces $EF = EC = 12$ cm, $\angle AFE = \angle ACE$ y $\angle AEF = \angle AEC$.

Por otro lado, tenemos que $\angle BAD + \angle EAC = \angle BAC - \angle DAE = 90° - 45° = 45°$, lo cual implica que $\angle BAD = 45° - \angle EAC = 45° - \angle EAF = \angle FAD$.

Ahora, como $AD = AD, \angle BAD = \angle FAD$ y $AF = AB$, los triángulos FAD y BAD son congruentes por el criterio LAL. Entonces, $DF = BD = 5$ cm y $\angle AFD = \angle ABD$. Luego, tenemos que

$$\angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = \angle ABD + \angle ACE = 180° - \angle BAC = 90°$$

y, por lo tanto, $DE^2 = DF^2 + EF^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$, esto es, $DE = 13$ cm. En consecuencia, $BC = BD + DE + EC = 5 + 13 + 12 = 30$ cm. Como $AB = AC$ y $\angle BAC = 90°$, tenemos que $AB^2 + AC^2 = BC^2$ y, por lo tanto, $AB^2 = \frac{BC^2}{2}$. Entonces, el área del triángulo ABC es igual a

$$\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AB^2}{2} = \frac{BC^2}{4} = \frac{900}{4} = 225 \text{ cm}^2.$$

Solución del Problema 14. La respuesta es 10. Si eliminamos los números 1, 2, 3, $4, \ldots, 10$, el producto de los restantes números es $11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$ y es fácil ver que este número es múltiplo de cada uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 15$. Demostraremos que no se pueden eliminar más de 10 números. Para esto, basta demostrar que no se pueden eliminar 11 números.

Si eliminamos 11 números, entonces nos quedan 4 números. Como el producto de los restantes números debe ser múltiplo de 11 y de 13, los números 11 y 13 deben ser parte de los 4 que no son eliminados. También debemos tener al menos un múltiplo de 7, ya sea 7 o 14. Entonces, el cuarto número debe ser múltiplo de 4 (para que el producto sea múltiplo de 8), múltiplo de 5 y múltiplo de 9, lo cual es imposible. Por lo tanto, a lo más podemos quitar 10 números.

Solución del Problema 15. La respuesta es 34. Consideremos el lugar donde está la estrella en la primera fila. Hay 4 posibles lugares. Por simetría, solo tenemos que considerar dos casos, el caso donde la estrella está en una esquina y el caso donde no está en una esquina.

Caso 1: Supongamos que la estrella está en una esquina. Sin pérdida de generalidad, supongamos que está en la columna 1.

	1	0	2	2	0	1
1	★	·	·	·	·	·
0	·	·	·	·	·	·
2	·	·			·	
2	·	·			·	
0	·	·	·	·	·	·
1	·	·			·	

Ahora consideremos las estrellas de las filas 3 y 4. Para cada una de estas filas, hay 3 maneras de poner 2 estrellas: en las columnas $\{3,4\}$, $\{3,6\}$ o $\{4,6\}$. Sin embargo, no todas estas $3 \times 3 = 9$ combinaciones son válidas, ya que la columna 6 solo puede tener una estrella. Restando las $2 \times 2 = 4$ combinaciones de las filas 3 y 4 que tienen estrellas en la columna 6, obtenemos $9 - 4 = 5$ combinaciones para poner las estrellas en las filas 3 y 4. Para cada una de estas 5 combinaciones, podemos poner una estrella en la última fila escogiendo la columna que no ha sido usada.

Caso 2: Supongamos que la estrella no está en una esquina. Sin pérdida de generalidad, la ponemos en la columna 3.

	1	0	2	2	0	1
1	·	·	★	·	·	·
0	·	·	·	·	·	·
2		·	·		·	
2		·	·		·	
0	·	·	·	·	·	·
1		·	·		·	

En este momento, las columnas $1, 3, 4, 6$ no están llenas. Consideremos las estrellas en la fila 3. Hay 6 maneras de poner 2 estrellas: en las columnas $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$, $\{3,4\}$, $\{3,6\}$ o $\{4,6\}$.
Subcaso 2a: Si escogemos las columnas $\{1,3\}$, $\{1,6\}$ o $\{3,6\}$, poniendo las estrellas nos lleva a que ambas columnas estarán llenas, dejando solo 2 columnas no llenas para poner estrellas en la fila 4. Por ejemplo, si ponemos las estrellas de la fila 3 en las columnas $\{1,3\}$, entonces las columnas 1 y 3 estarán llenas y deja solo una manera para poner las estrellas de la fila 4: en las columnas $\{4,6\}$. En este subcaso, hay 3 maneras de poner las estrellas en las filas 3 y 4.
Subcaso 2b: Si escogemos las columnas $\{1,4\}$, $\{3,4\}$ o $\{4,6\}$, al poner las estrellas solo se llena una columna (la columna 4 puede tener otra estrella), dejando 3 columnas no llenas para poner estrellas en la fila 4. Por ejemplo, si ponemos las estrellas de la fila 3 en las columnas $\{4,6\}$, entonces la columna 6 está llena, mientras que las columnas

1, 3 y 4 no lo están. Por lo tanto, hay 3 maneras de colocar las dos estrellas de la fila 4: en las columnas $\{1,3\}, \{1,4\}$ o $\{3,4\}$. En este subcaso hay $3 \times 3 = 9$ maneras de colocar las estrellas en las filas 3 y 4.
Para cada una de estas $3 + 9 = 12$ combinaciones, podemos poner una estrella en la última fila de la columna que no está llena.
Finalmente, por simetría, en total hay $2 \times (5 + 12) = 34$ maneras de colocar las estrellas.

Soluciones del Examen por Equipos

Solución del Problema 1. El segundo niño cambia 2022 a $2 \times 0 \times 2 \times 2 + 12 = 12$. El tercer niño cambia el 12 al $1 \times 2 + 12 = 14$. El cuarto niño cambia el 14 al $1 \times 4 + 12 = 16$. El quinto niño cambia el 16 al $1 \times 6 + 12 = 18$. El sexto niño cambia el 18 al $1 \times 8 + 12 = 20$. El séptimo niño cambia el 20 al $2 \times 0 + 12 = 12$. Entonces, la secuencia de números es cíclica de periodo 5, a partir del segundo niño: $12, 14, 16, 18, 20, 12, 14, 16, \ldots$ Como $58 = 11 \times 5 + 3$, el número escrito por el $59°$ niño, es el mismo que el número escrito por el cuarto niño, que es 16.

Solución del Problema 2. Llamemos a las regiones resaltadas en negrita, *jaulas*. Diremos que una jaula es *aditiva*, si la suma de sus números es igual a 12 y, diremos que es *multiplicativa*, si el producto de sus números es igual a 12. Como $1 + 2 + 3 + 4 < 12$, las dos jaulas de 3×1 deben ser multiplicativas. Demostraremos que las otras dos jaulas son aditivas. Nombremos a los números de las casillas de la cuadrícula como se muestra a continuación.

a_1	a_2	a_3	a_4
b_1	b_2	b_3	b_4
c_1	c_2	c_3	c_4
d_1	d_2	d_3	d_4

Como $a_1 \times a_2 \times a_3 = 12$, tenemos que $a_4 = \frac{1\times2\times3\times4}{a_1\times a_2\times a_3} = \frac{24}{12} = 2$. Análogamente, obtenemos que $d_1 = 2$. Ahora, la jaula que tiene 6 casillas, tiene tres números en la segunda fila, entonces su producto es al menos $1 \times 2 \times 3 = 6$ y tiene 2 elementos en la cuarta fila cuyo producto es al menos $1 \times 2 = 2$. Entonces, el producto de los 6 números en esta jaula es al menos $2 \times 6 \times 2 = 24 > 12$. Por lo tanto, la jaula de 6 casillas es aditiva. Para que la jaula de 4 casillas sea multiplicativa, requeriría que b_1, c_1, c_2 fueran $3, 2, 1$ para que su producto sea 6, pero entonces en la jaula de 6 casillas quedan los números $1, 2, 2, 3, 4$ y 4 cuya suma es mayor que 12. Por lo tanto, la jaula de 4 casillas también es aditiva. Como la primera y la última columnas (y la primera y última filas) ya tienen un 2, entonces hay dos posibilidades: que $b_3 = 2$ y $c_2 = 2$ o que $b_2 = 2$ y $c_3 = 2$. Si $b_3 = 2$ y $c_2 = 2$, entonces $b_1 + c_1 = 8$, lo cual implica que $b_1 = c_1 = 4$, que es imposible. Luego, $b_2 = 2$ y $c_3 = 2$. Como $b_1 + c_1 + c_2 = 10$, estos tres números tienen que ser 3, 3 y 4. Con esta información ya podemos completar la cuadrícula.

1	4	3	2
3	2	1	4
4	3	2	1
2	1	4	3

Solución del Problema 3. Reesribamos a los números de la cuadrícula infinita como $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$ de manera continua, es decir, escribimos a los enteros positivos. Observemos que los números en la dirección sureste comenzando con el 1 son: $1 = 1 \times 1$, $9 = 3 \times 3$, $25 = 5 \times 5$, $49 = 7 \times 7, \ldots$

	37	36	35	34	33	32	31	
	38	17	16	15	14	13	30	
	39	18	5	4	3	12	29	
	40	19	6	1	2	11	28	
	41	20	7	8	9	10	27	
	42	21	22	23	24	25	26	
	43	44	45	46	47	48	49	$\cdots$

También podemos observar lo siguiente:

- El número que está una casilla abajo del 1 es $3^2 - 1 = 8$.
- El número que está 2 casillas debajo del 1 es $5^2 - 2 = 23$.
- El número que está 3 casillas debajo del 1 es $7^2 - 3 = 46$.

En general, el número que está n casillas debajo del 1 es $(2n+1)^2 - n$. Así que el número que está 2022 casillas debajo del 1 es $4045^2 - 2022 = 16360003$. Por lo tanto, en la cuadrícula original la respuesta será el residuo de dividir al número 16360003 entre 7, el cual es fácil ver que es 2.

Solución del Problema 4. En la cadena resultante, a lo más un dígito puede aparecer un número impar de veces.

- Si $n \leq 9$, el 0 y el 1 aparecen exactamente una vez.
- Si $10 \leq n \leq 17$, el 8 y el 9 aparecen exactamente una vez.
- Si $n = 18$, el 9 aparece exactamente una vez, mientras que el 1 aparece exactamente once veces.
- Si $n = 19$, cada uno de $0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 aparece exactamente dos veces, mientras que el 1 aparece exactamente doce veces.

Por lo tanto, el valor mínimo de n es al menos 19. Podemos tener $n = 19$ con la cadena 9187165143121100112134156178 19, la cual está generada por los números 9, 18, 7, 16, 5, 14, 3, 12, 1, 10, 0, 11, 2, 13, 4, 15, 6, 17, 8 y 19.

Solución del Problema 5. Hay tres tipos de números buenos: $\overline{AABB}$, $\overline{ABAB}$ y $\overline{ABBA}$, donde $A \neq B$. Contemos en cada caso.

a) Números buenos de la forma $\overline{AABB}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{AABB} &= 10^3 \times A + 10^2 \times A + 10 \times B + B \\ &= A(10^3 + 10^2) + B(10 + 1) = 1100A + 11B = 11(100A + B) \\ &= 11 \times \overline{A0B}.\end{aligned}$$

Como $\overline{A0B} = 100A + B = 101A - A + B$ y $A \neq B$, tenemos que $\overline{A0B}$ no puede ser múltiplo de 101. Luego, el número $\overline{AABB}$ tampoco es múltiplo de 101 si $A \neq B$, lo que significa que tiene que ser divisible por 7. Hay 11 números de la forma $\overline{A0B}$, con $A \neq B$, que son múltiplos de 7: 105, 203, 301, 308, 406, 504, 602, 609, 700, 805 y 903. Cada uno de estos nos da un múltiplo de 7 de la forma $\overline{AABB}$, con $A \neq B$, que no es múltiplo de 101.

b) Números buenos de la forma $\overline{ABAB}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{ABAB} &= 10^3 \times A + 10^2 \times B + 10 \times A + B \\ &= (10^3 + 10)A + (10^2 + 1)B = 1010 \times A + 101 \times B = 101(10A + B) \\ &= 101 \times \overline{AB}\end{aligned}$$

es múltiplo de 101. Entonces tenemos que evitar los múltiplos de 7 y los casos donde $A = B$. Hay 90 números de dos dígitos, de los cuales 9 son de la forma $\overline{AA}$ y 13 son múltiplos de 7. Como el 77 está contado en ambos casos, tenemos $90 - 13 - 9 + 1 = 69$ números de la forma $\overline{AB}$ con $A \neq B$ que no son múltiplos de 7. Luego, hay 69 números de la forma $\overline{ABAB}$, con $A \neq B$, que son múltiplos de 101 pero no son múltiplos de 7.

c) Números buenos de la forma $\overline{ABBA}$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{ABBA} &= 10^3 \times A + 10^2 \times B + 10 \times B + A \\ &= (10^3 + 1)A + (10^2 + 10)B = 1001 \times A + 110 \times B \\ &= 11 \times (91 \times A + 10 \times B).\end{aligned}$$

Como $91 \times A + 10 \times B = 101 \times A + 10(B - A)$ y $A \neq B$, este número no puede ser múltiplo de 101. Luego, tiene que ser múltiplo de 7. Como $91 = 7 \times 13$ es múltiplo de 7, $10 \times B$ debe ser múltiplo de 7. Es fácil ver que $10 \times B$ es múltiplo de 7 solo cuando $B = 0$ o $B = 7$. Si $B = 0$, tenemos 9 números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ que son múltiplos de 7 (uno por cada dígito A del 1 al 9) y, si $B = 7$, tenemos 8 números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ que son múltiplos de 7 (uno por cada dígito A del 1 al 9 y distinto de 7). Luego, tenemos $9 + 8 = 17$ números de la forma $91 \times A + 10 \times B$ múltiplos de 7, con $A \neq B$ y, por lo tanto, hay 17 números de la forma $\overline{ABBA}$, con $A \neq B$, que no son múltiplos de 101 y son múltiplos de 7.

En total tenemos $11 + 69 + 17 = 97$ enteros que cumplen.

Solución del Problema 6. Sea a la quinta edad. Primero ordenamos de manera creciente las edades conocidas: 19, 21, 53, 60. Considerando la quinta edad tenemos los siguientes casos:

- Si $a \leq 21$, entonces la edad de en medio es 21 que es múltiplo de 3.
- Si $21 < a < 53$ y $3 \mid a$, entonces la edad de en medio es a.
- Si $a \geq 53$, entonces la edad de en medio es 53, que no es múltiplo de 3.

Por lo tanto, considerando las restricciones del problema, debemos tener que $a < 53$. Como el promedio de las cinco edades es un entero impar, tenemos que $19 + 21 + 53 + 60 + a = 5k$ para algún entero impar k. Luego, $a = 5k - 153 = 5(k - 31) + 2$, de donde a es un entero par (pues k es impar) y a deja residuo 2 al dividirse por 5. Por lo tanto, los valores posibles de a son: 2, 12, 22, 32, 42 y 52.
Ya tenemos que 2 y 12 son soluciones.
Si $a = 22$, 32, 42 o 52, entonces a es el número de en medio y, por lo tanto, $3 \mid a$, por lo que el único valor posible en este caso es $a = 42$.
Por lo tanto, la respuesta es $2 + 12 + 42 = 56$.

Solución del Problema 7. Notemos que se jugaron en total 20 puntos en el torneo.

- Como Boris empató todos sus juegos, Boris tuvo exactamente 4 puntos.
- Clark ganó exactamente dos juegos, así que su puntuación total es 5 o 6 puntos. Si Clark tuviera 6 puntos, entonces Andy, Dick y Eric conseguirían 10 puntos entre los tres, mientras que el jugador con menos puntos tendría al menos 3 (porque empató con Boris y le ganó a Eric), lo cual no puede ser ya que $10 < 3 + 4 + 4$ (notemos que el jugador en último lugar no empató con nadie). Por lo tanto, Clark obtuvo 5 puntos.
- Boris no puede ser último lugar porque de ser así, la suma de los puntos de los cinco jugadores sería mayor que 20, lo cual es imposible.
- Dado que Eric no es último lugar y que Dick está arriba de Andy por un punto, Andy debe ser el último lugar.
- Como Andy le ganó a Eric y empató con Boris, tiene al menos 3 puntos.
- Dick tiene al menos $3 + 1 = 4$ puntos. Ahora, sabemos que Eric tiene a lo más $20 - 5 - 4 - 4 - 3 = 4$ puntos y no es último lugar, lo que significa que Eric tiene exactamente 4 puntos. Luego, Andy tiene 3 puntos y Dick tiene 4 puntos.

En la siguiente tabla resumimos lo anterior.

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy		1	0	0	2	3
Boris	1		1	1	1	4
Clark	2	1				5
Dick	2	1				4
Eric	0	1				4

- En los juegos de Eric contra Clark y Eric contra Dick, Eric ganó un juego y empató otro. Pero Eric no puede empatar con Clark, porque entonces Clark no tendría dos victorias (su último juego sería empate para llegar a 5 puntos). Entonces, Eric le ganó a Clark y empató con Dick.

Con esta información ya podemos llenar la tabla y confirmar que $\overline{abcde} = 34544$.

	Andy	Boris	Clark	Dick	Eric	**Total**
Andy		1	0	0	2	3
Boris	1		1	1	1	4
Clark	2	1		2	0	5
Dick	2	1	0		1	4
Eric	0	1	2	1		4

Solución del Problema 8. Observemos que para $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $HM = 6$ cm, $GH = 5$ cm, $AE = 4$ cm, $FG = 3$ cm, $EF = 2$ cm y $MC = 1$ cm, el área de la región no sombreada es igual a 36 cm^2. Demostraremos que esta es el área máxima.
Sean $a = AE$, $b = EF$, $c = FG$, $d = GH$, $e = HM$ y $f = MC$. Entonces, el área no sombreada es

$$(AB - f) \times e - b \times c.$$

Para que esta área sea máxima, necesitamos que AB sea lo más grande posible. Si $AB \leq 6$ cm, entonces

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (6 - f)e - bc < (6 - f)e \leq (6 - 1)7 = 35 < 36 \text{ cm}^2,$$

ya que $e < BC \leq 8$ cm.
Luego, tenemos dos casos: $AB = 7$ cm o $AB = 8$ cm.
Si $AB = 7$ cm, entonces $BC = 8$ cm y $e \leq 6$ cm. Por lo tanto,

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (7 - 1) \times 6 - b \times c < 36 \text{ cm}^2.$$

Si $AB = 8$ cm, entonces $b + d + f = 8 = 5 + 2 + 1 = 4 + 3 + 1$. Como $BC > e > c$ y $BC > a$, debemos tener que $BC = 7$ cm. Entonces, $e \leq 6$ cm.
Si $f = 1$ cm, entonces uno de b o c es al menos 2 y el otro es al menos 3, lo cual implica que

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (8 - 1) \times 6 - b \times c \leq 42 - b \times c \leq 36 \text{ cm}^2.$$

Si $f \geq 2$ cm, entonces

$$(AB - f) \times e - b \times c \leq (8 - 2) \times 6 - b \times c < 36 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área máxima de la región no sombreada es 36 cm^2.
Ahora, si $AB = 8$ cm, $BC = 7$ cm, $AE = 6$ cm, $MC = 5$ cm, $HM = 4$ cm, $FG = 3$ cm, $EF = 2$ cm y $GH = 1$ cm, entonces el área no sombreada es igual a 6 cm^2. Demostraremos que esta es el área mínima.
El área de la región no sombreada es $DM \times DE + GH \times FG$. Para que esta área sea mínima, necesitamos que DM sea lo más pequeño posible.
Observemos que $DM = EF + GH \geq 1 + 2 = 3$ cm, $HM > GF$ y $DE = HM - GF \geq 1$ cm.
Si $DM = 3 = 1 + 2$ cm, entonces la longitud mínima de HM es 4 cm. Por lo tanto,

$$DM \times DE + GH \times FG \geq 3 \times 1 + 1 \times (4 - 1) = 6 \text{ cm}^2.$$

Si $DM = 4 = 1 + 3$ cm, entonces la longitud mínima de HM es 4 cm. Por lo tanto,

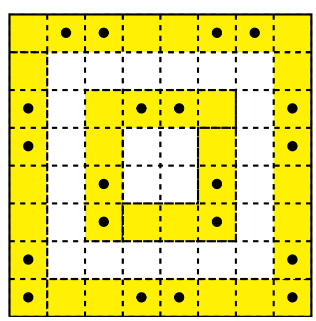
$$DM \times DE + GH \times FG \geq 4 \times 1 + 1 \times (4 - 1) = 7 > 6 \text{ cm}^2.$$

Si $DM \geq 5$ cm, entonces

$$DM \times DE + GH \times FG > 5 \times 1 + 1 \times 1 = 6 \text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área mínima de la región no sombreada es 6 cm^2.

Solución del Problema 9. En la siguiente figura, hemos pintado de color amarillo 28 casillas en la frontera del tablero y otras 12 casillas en el interior del tablero, formando dos anillos. En cada anillo, marcamos con puntos 2 casillas, luego saltamos 2 casillas y marcamos con puntos las siguientes 2 casillas y así sucesivamente.



A lo más, 2 insectos que comienzan en las casillas pintadas pueden terminar en la misma casilla. Por lo tanto, el número de casillas con insectos es al menos $\frac{28+12}{2} = 20$, de modo que a lo más $64 - 20 = 44$ casillas pueden estar sin insectos. Dado que cada insecto puede saltar hasta exactamente una casilla marcada con un punto, el número máximo de casillas sin insectos es 44.

Solución del Problema 10. Las factorizaciones de los números son: $2021 = 41 \times 43$, $2022 = 2 \times 3 \times 337$, $2023 = 7 \times 17^2$, $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$, $2025 = 5^2 \times 3^4$, $2026 = 2 \times 1013$ y 2027 es un número primo.

Como 2 es un factor común de los números pares, los números pares no pueden ser adyacentes. Además, no hay factores en común entre cualesquiera dos de los números 2021, 2023, 2025 y 2027, así que podemos permutar estos cuatro números impares. Hay $4! = 24$ maneras de permutarlos. En cada una de estas 24 permutaciones, hay cinco posiciones donde podemos colocar los otros 3 números, ya sea al inicio o al final de la permutación, o entre dos números permutados. En cada una de esas posiciones se puede poner a lo más un número par. Como el factor 3 es común en 2022 y 2025, hay 3 maneras de colocar el 2022 (evitando estar al lado del 2025). Ahora hay 6 posiciones, pero dos de ellas no pueden tener a un número par (pues serían adyacentes al 2022). Entonces hay 4 posiciones y podemos acomodar los dos números restantes de $4 \times 3 = 12$ maneras en esas posiciones.
Por lo tanto, en total hay $24 \times 3 \times 12 = 864$ arreglos distintos.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

63^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas

Del 6 al 16 de julio de 2022, se llevó a cabo la 63^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), de forma presencial, en Oslo, Noruega.

El equipo mexicano estuvo integrado por

- Omar Farid Astudillo Marbán (Guerrero).
- Leonardo Mikel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
- Ana Illanes Martínez de la Vega (Ciudad de México).
- Daniel Alejandro Ochoa Quintero (Tamaulipas).
- Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León).

Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Enrique Treviño López (jefe de la delegación) y Maximiliano Sánchez Garza (tutor). Como observador estuvo David Guadalupe Torres Flores.

Daniel y Omar obtuvieron medallas de plata; Ana, Mikel, Rogelio y Diego obtuvieron medallas de bronce. Como país, México ocupó el lugar número 23 de 105 países participantes y, tercer lugar, entre los países de iberoamérica.

A continuación presentamos los problemas de la 63^{a} Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. El Banco de Oslo emite dos tipos de monedas: de aluminio (denotadas por A) y de bronce (denotadas por B). Mariana tiene n monedas de aluminio y n monedas de bronce, colocadas en fila en un orden inicialmente arbitrario. Una *cadena* es una sucesión de monedas consecutivas todas del mismo tipo. Dado un entero positivo $k \leq 2n$, Mariana realiza repetidamente la siguiente operación: primero identifica la cadena más larga que contiene la k-ésima moneda desde la izquierda y después reubica todas las monedas de esa cadena al extremo izquierdo de la fila. Por ejemplo, si $n = 4$ y $k = 4$, el proceso que comienza con el orden inicial $AABBBABA$ será

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots$$

Hallar todas las parejas (n, k) con $1 \leq k \leq 2n$ tales que, cualquiera que sea el orden inicial, en algún momento durante el proceso las n monedas de la izquierda serán todas del mismo tipo. (Problema sugerido por Francia).

Problema 2. Sea $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Hallar todas las funciones $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tales que para cada $x \in \mathbb{R}^+$, existe exactamente un $y \in \mathbb{R}^+$ que satisface $xf(y) + yf(x) \leq 2$. (Problema sugerido por Países Bajos).

Problema 3. Sea k un entero positivo y sea S un conjunto finito de números primos impares. Demostrar que existe a lo sumo una manera (sin contar rotaciones y reflexiones) de colocar los elementos de S alrededor de una circunferencia de modo que cada producto de dos números que son vecinos sea de la forma $x^2 + x + k$ para algún entero positivo x. (Problema sugerido por Estados Unidos de América).

Problema 4. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo tal que $BC = DE$. Supongamos que existe un punto T en el interior de $ABCDE$ tal que $TB = TD$, $TC = TE$ y $\angle ABT = \angle TEA$. La recta AB corta a las rectas CD y TE en los puntos P y Q, respectivamente. Supongamos que los puntos P, B, A, Q aparecen sobre su recta en ese orden. La recta AE corta a las rectas CD y DT en los puntos R y S, respectivamente. Supongamos que los puntos R, E, A, S aparecen sobre su recta en ese orden. Demostrar que los puntos P, S, Q, R están en una misma circunferencia.
(Problema sugerido por Eslovaquia).

Problema 5. Hallar todas las ternas de enteros positivos (a, b, p) con p primo que satisfacen $a^p = b! + p$. (Problema sugerido por Bélgica).

Problema 6. Sea n un número entero positivo. Un *cuadrado nórdico* es un tablero $n \times n$ que contiene todos los números enteros del 1 al n^2 de modo que cada celda contiene exactamente un número. Dos celdas diferentes son adyacentes si comparten un mismo lado. Una celda que solamente es adyacente a celdas que contienen números mayores se llama un *valle*. Un *camino ascendente* es una sucesión de una o más celdas tales que:

(I) la primera celda de la sucesión es un valle,

(II) cada celda subsiguiente de la sucesión es adyacente a la celda anterior, y

(III) los números escritos en las celdas de la sucesión están en orden creciente.

Hallar, como función de n, el menor número total de caminos ascendentes en un cuadrado nórdico.

(Problema sugerido por Serbia).

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

63ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 63^a Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Leonardo Mikel Cervantes Mateos). Si $1 \leq k \leq n-1$, demostraremos que hay acomodos donde no quedan n monedas en la izquierda. En particular consideremos

$$\underbrace{AA\ldots A}_{k}\,B\,\underbrace{AA\ldots A}_{(n-k)}\underbrace{B\ldots B}_{(n-1)}.$$

Al aplicar la operación quedará todo en el mismo lugar porque la k-ésima moneda está en la primera cadena. Como $k < n$ entonces no están las n monedas de aluminio juntas. Si $k \geq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, también hay acomodos. En particular, consideremos

$$\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.$$

Entonces como $k \geq 2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, la k-ésima moneda estará en la última cadena. Entonces el proceso se ve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \to \underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \to\\
&\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \to \underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \to\\
&\qquad\qquad\underbrace{AA\ldots A}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{BB\ldots B}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\underbrace{AA\ldots A}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}\underbrace{BB\ldots B}_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \to \cdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto, nos quedan los casos $n \leq k \leq 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Demostraremos que para todos esos valores de k, eventualmente habrá n monedas del mismo color en las primeras n posiciones. Definamos *cadenón* como una cadena que no está contenida en otra cadena. Por ejemplo, $AAABBAABABBBBA$ es un acomodo con 7 cadenones. La estrategia es demostrar que el número de cadenones se reduce a que eventualmente sean exactamente dos cadenones y, por lo tanto, se tienen n monedas del mismo tipo al principio.

Lema 1. *Si el cadenón que contiene la k-ésima moneda no está en uno de los extremos, entonces el número de cadenones se reduce.*

Demostración. Si el cadenón C que contiene a la k-ésima moneda no está en los extremos, entonces los dos cadenones adyacentes, D y E, son del mismo tipo de moneda. Al mover el cadenón C al principio, se juntan D y E y el número de cadenones se redujo. □

Luego, para no llegar a 2 cadenones eventualmente, se tiene que tener una situación donde hay m cadenones y los cadenones se van rotando de la extrema derecha a la extrema izquierda cíclicamente (para no rotar, tendrían que quedarse fijos y para ello $k < n$, pero tenemos $k \geq n$). Entonces la k-ésima moneda siempre está en el cadenón del extremo derecho. Por lo tanto, todos los cadenones deben tener al menos $2n-k+1$ monedas. Como $n \leq k \leq 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tenemos que

$$2n - k + 1 \geq 2n - \left(2n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Pero entonces hay a lo más un cadenón de cada tipo ya que con dos cadenones del mismo tipo, tendríamos

$$n \geq 2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) > n.$$

Entonces hay a lo más dos cadenones y, por lo tanto, concluimos que las parejas que cumplen son todas las (n, k) que satisfacen $n \leq k \leq 2n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Solución del problema 2. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). Sea x un número real y tomemos el único número real y que satisface

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

Supongamos que $y \neq x$. Entonces $xf(x) + xf(x) > 2$ por la unicidad de y. Por lo tanto, $xf(x) > 1$. Ahora, notemos que si empezamos con y, entonces x es el único valor con el cual $yf(x) + xf(y) \leq 2$. Luego, $yf(y) + yf(y) > 2$ y, por consiguiente, $yf(y) > 1$.
Supongamos que $xf(x) = a$ y $yf(y) = b$. Entonces tenemos que

$$2 \geq xf(y) + yf(x) = \frac{x}{y}b + \frac{y}{x}a > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,$$

donde la última desigualdad es por MA-MG. Entonces tenemos una contradicción. Por lo tanto, $y = x$.

Entonces, $xf(x) \leq 1$. De allí tenemos que $f(x) \leq 1/x$. Además por la unicidad, tenemos que si $x \neq y$, $xf(y) + yf(x) > 2$.
Supongamos que existe un z tal que $f(z) < 1/z$. Entonces, existe un número real $e > 0$ tal que $f(z) = \frac{1}{z} - e$. Sea y un número en el intervalo $(0, z]$. Entonces,

$$yf(z) + zf(y) \leq \frac{y}{z} - ey + \frac{z}{y}.$$

Consideremos la función

$$P(y) = \frac{y}{z} - ey + \frac{z}{y},$$

para $y \in (0, z]$. La función es continua porque y/z, ey y z/y son continuas en el intervalo $(0, z]$. Como $P(z) = 2 - ez < 2$ y

$$\lim_{y \to 0^+} P(y) = \infty,$$

entonces por el teorema del valor intermedio existe un número $r \in (0, z)$ tal que $P(r) = 2$. Pero entonces

$$rf(z) + zf(r) \leq 2,$$

y, como $r \neq z$, tenemos que

$$rf(z) + zf(r) > 2.$$

Esto es imposible, por lo tanto $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.
Solo basta probar que la propiedad la cumple la función $f(x) = \frac{1}{x}$. Para x, y tenemos que

$$xf(y) + yf(x) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2,$$

por MA-GM. La igualdad solo se cumple si $x = y$, entonces para cada x, hay un único y, como queríamos probar.

Solución alternativa. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero). Otra manera de demostrar que $f(x) = \frac{1}{x}$ ya que tenemos que $f(x) \leq \frac{1}{x}$ es la siguiente:
Supongamos que existe un x tal que $f(x) < \frac{1}{x}$. Consideremos el polinomio cuadrático en la variable A:

$$P(A) = A^2 f(x) - 2A + x.$$

El discriminante de $P(A)$ es $4 - 4xf(x) > 0$. Por lo tanto, el polinomio tiene dos raíces distintas r_1 y r_2. Supongamos que $r_1 < r_2$. Podemos verificar que $r_1 > 0$ porque

$$r_1 = \frac{2 - \sqrt{4 - 4xf(x)}}{2x},$$

y $2 > \sqrt{4 - 4xf(x)}$ dado que $xf(x) > 0$ y entonces $4 - 4xf(x) < 4$.
Tomemos un $z \in (r_1, r_2)$. Como $P(A)$ es cuadrático con coeficiente principal positivo, entonces $P(z) < 0$. Ahora, tomemos $z \neq x$. Entonces,

$$xf(z) + zf(x) > 2.$$

Usando que $f(z) \leq \frac{1}{z}$, tenemos

$$\frac{1}{z} \geq f(z) > \frac{2 - zf(x)}{x}.$$

Luego,

$$x > 2z - z^2 f(x),$$

lo cual implica que

$$P(z) = z^2 f(x) - 2z + x > 0,$$

lo que es una contradicción. Por lo tanto, $f(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

Solución del problema 3. Demostraremos una versión más fuerte del enunciado, donde también consideramos la posibilidad de que el producto es de la forma $x^2 + x + k$ con $x = 0$. Llamamos a un par $\{p, q\}$ de primos con $p \neq q$ *especial* si $pq = x^2 + x + k$ para algún entero no negativo x. El siguiente lema es el punto importante del problema.

Lema.

a) Para cualquier primo r, existen a lo mucho dos primos menores que r que forman una pareja especial con r.

b) Si tales primos existen, digamos que son p y q, entonces $\{p, q\}$ es especial.

Demostración. Estamos interesados en los enteros $0 \leq x < r$ que satisfacen que

$$x^2 + x + k \equiv 0 \pmod{r}. \tag{8}$$

Como hay a lo mucho dos residuos módulo r que satisfacen la congruencia anterior, deben haber a lo mucho dos valores posibles de x. Esto prueba a).
Ahora supongamos que hay primos p, q con $p < q < r$ y enteros no negativos x, y tales que

$$\begin{aligned} x^2 + x + k &= pr, \\ y^2 + y + k &= qr. \end{aligned}$$

Como $p < q < r$, se puede ver que $0 \leq x < y \leq r - 1$. Los números x, y son dos soluciones a (8). De las fórmulas de Vieta, debe suceder que $x + y \equiv -1 \pmod{r}$, por lo que $x + y = r - 1$.
Sean $K = 4k - 1$, $X = 2x + 1$ y $Y = 2y + 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} 4pr &= X^2 + K, \\ 4qr &= Y^2 + K, \end{aligned}$$

con $X + Y = 2r$. Multiplicando estas últimas dos ecuaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} 16pqr^2 &= \left(X^2 + K\right)\left(Y^2 + K\right) = (XY - K)^2 + K(X + Y)^2 \\ &= (XY - K)^2 + 4Kr^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$4pq = \left(\frac{XY-K}{2r}\right)^2 + K.$$

El número $Z = \left|\frac{XY-K}{2r}\right|$ es racional y su cuadrado $Z^2 = 4pq - K$ es un entero, por lo que Z debe ser un entero. Por paridad, Z es impar y, por lo tanto,

$$pq = z^2 + z + k \quad \text{donde} \quad z = \frac{Z-1}{2},$$

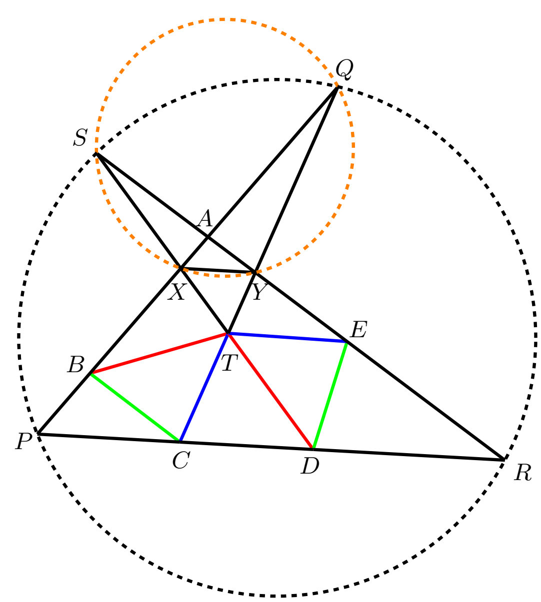
de donde se sigue que $\{p, q\}$ es especial. $\square$

Ahora terminamos el problema por inducción sobre $|S|$. Para $|S| \leq 3$ el resultado es claro. Ahora, supongamos que hemos probado el resultado para $|S| = n$ y consideremos $|S| = n + 1$. Sea r el primo más grande en S. El lema anterior nos dice que en cualquier ciclo válido de primos:

- los vecinos de r están determinados de forma única, y
- el quitar r del ciclo resulta en un ciclo válido más pequeño.

Se sigue que existe a lo mucho un ciclo válido, lo cual completa el paso inductivo.

Solución del problema 4. (Solución de Ana Illanes Martínez de la Vega). Sea X la intersección de DT con AB y sea Y la intersección de CT con AE. Como $TB = TD$, $TC = TE$ y $BC = DE$, los triángulos TBC y TDE son congruentes por el criterio LLL. Entonces, $\angle BTC = \angle DTE = \beta$.



Sea $\angle ABT = \angle TEA = \alpha$. Como $\angle BTC$ es un ángulo externo del triángulo BTQ, tenemos que $\angle BQT = \beta - \alpha$. Análogamente, $\angle EST = \angle ETD - \angle TES = \beta - \alpha$. Se sigue que $\angle XQY = \angle BQT = \angle TSE = \angle XSY$, por lo que el cuadrilátero $XYQS$ es cíclico. Cabe mencionar que, por el orden de los puntos en la figura, X y Y deben quedar entre T y S, y entre T y Q, respectivamente.
Como $XYQS$ es cíclico, tenemos que $\angle BXT = \angle SXA = \angle AYQ = \angle EYT$. Además, $\angle YET = \angle TBX$. Luego, los triángulos BXT y EYT son semejantes por el criterio AA. Entonces, $\frac{XT}{YT} = \frac{BT}{TE} = \frac{TD}{CT}$, esto es, $\frac{XT}{TD} = \frac{YT}{TC}$. Al ser X, T y D colineales en ese orden, así como Y, T y C lo son, por el teorema de Tales podemos concluir que XY es paralela a CD, es decir, que las rectas XY y PR son paralelas.
Ahora, tendremos que $AS \cdot AY = AQ \cdot AX$ pues $QSXY$ es cíclico. Por otro lado, al ser S, Y y R colineales, así como Q, X y P, del que XY y PR sean paralelas tenemos que $\frac{AR}{AY} = \frac{AP}{AX}$. Así,

$$AS \cdot AR = (AS \cdot AY) \cdot \frac{AR}{AY} = (AQ \cdot AX) \cdot \frac{AP}{AX} = AQ \cdot AP,$$

lo que implica que el cuadrilátero $QSPR$ es cíclico, como se quería.

Solución del problema 5. (Solución de Omar Farid Astudillo Marbán). Consideremos los siguientes tres casos: $b < p$, $b \geq 2p$ y $p \leq b < 2p$.
1) Supongamos que $b < p$. Si $a \leq b$, entonces $a \mid a^p - b! = p$, lo cual implica que $a = 1$, pues $a < p$ y p es primo. Esto claramente no es posible pues $1^p = 1 < p < b! + p$. Luego, no hay soluciones en este caso. Ahora, si $a > b$, entonces $b^p \geq b^b$ y $a \geq b + 1$. Luego, por el binomio de Newton, tenemos que

$$a^p \geq (b+1)^p > b^p + pb^{p-1} \geq b^b + p \geq b! + p,$$

lo cual implica que no hay soluciones en este caso.
2) Si $b \geq 2p$, entonces $p \cdot (2p) \mid b!$, por lo que $p^2 \mid b!$ Esto significa que $b! + p \equiv p \pmod{p^2}$, lo cual implica que $p \mid b! + p$ pero $p^2 \nmid b! + p$. Como $p \mid b! + p$, se sigue que $p \mid a$, lo cual implica que $p^2 \mid a^p$, esto es, $p^2 \mid b! + p$, lo que es una contradicción, por lo que en este caso no hay ternas.
3) Ahora, supongamos que $p \leq b < 2p$. De un análisis similar al anterior, podemos ver que $p \mid a$, por lo que $a = kp$ con $k \geq 1$ un entero. Si $k > b$, entonces $k \geq p$ y, por lo tanto, $a \geq p \cdot p = p^2$. Así, se tiene que

$$a^p \geq \left(p^2\right)^p = p^{2p} > p + p^{2p-1} \geq p + p\prod_{k=1}^{p-1} k(2p-k) = p + (2p-1)! \geq p + b!,$$

donde se usó la desigualdad MA-MG para ver que $k(2p-k) \leq \left(\frac{k+(2p-k)}{2}\right)^2 = p^2$. Lo anterior genera una contradicción, de donde se sigue que $k \leq b$. Así, sucede que $k \mid (pk)^p - b! = p$, lo cual significa que $k = 1$ o $k = p$. No puede suceder que $k = p$ por el argumento anterior, así que $k = 1$ y, por lo tanto, $a = p$.
Luego, la ecuación se puede reescribir como $b! = p^p - p = p\left(p^{p-1} - 1\right)$. Primero, si $p = 2$, obtenemos que $b! = 2$, por lo que $b = 2$ obteniendo así la terna $(2, 2, 2)$.

Si $p = 3$, tenemos $b! = 24$, por lo que $b = 4$, obteniendo así la terna $(3,4,3)$. Si $p = 5$, entonces $b! = 3120$, por lo que no hay solución para b en este caso. Luego, supondremos que $p \geq 7$. Nótese que $b! = p^p - p > p!$, lo cual indica que $b \geq p+1$. Por el lema de *lifting* para el primo 2, tenemos que

$$\nu_2\left(p\left(p^{p-1}-1\right)\right) = \nu_2\left(p^{p-1}-1\right) = 2\nu_2(p-1) + \nu_2(p+1) - 1.$$

Sin embargo, como $p+1 \geq 8$, tenemos que

$$\nu_2(b!) > \nu_2\left(\frac{p-1}{2} \cdot (p-1) \cdot (p+1)\right) = 2\nu_2(p-1) + \nu_2(p+1) - 1,$$

pues hay al menos cuatro números pares menores o iguales que $p+1$. Esto implica que $\nu_2(b!) > \nu_2\left(p\left(p^{p-1}-1\right)\right)$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto, las únicas soluciones de la ecuación son $(2,2,2)$ y $(3,4,3)$.

Solución del problema 6. (Solución de Daniel Alejandro Ochoa Quintero). Para $i = 1, 2, \ldots, n^2$, sea x_i la celda marcada con el número i y sea a_i el número de caminos ascendentes que terminan en x_i.
Primero, observamos que existe al menos un valle dentro de un cuadrado nórdico: la celda x_1 está etiquetada con un número menor al de todas sus celdas adyacentes y, por lo tanto, es necesariamente un valle. A continuación, probaremos el siguiente

Lema 2. *Para $i = 1, 2, \ldots, n^2$, se cumple que $a_i \geq 1$.*

Demostración. Demostraremos el lema por inducción fuerte en i. Para $i = 1$, la casilla con el número 1 por sí misma es un camino ascendente, pues es un valle. Supongamos que el lema se cumple para $i = 1, 2, \ldots m$, y consideremos entonces x_{m+1}. Si dicha casilla no es adyacente a ninguna casilla etiquetada con un número menor, entonces x_{m+1} es un valle y la sucesión que sólo contiene a dicha celda (x_{m+1}) es en sí misma un camino ascendente que termina en x_{m+1}.
En caso contrario, supongamos x_{m+1} es adjacente a x_j con $j < m+1$. Entonces, consideramos algún camino ascendente que termina en x_j, que necesariamente existe por nuestra hipótesis de inducción. A dicho camino podemos añadirle la casilla x_{m+1} al final para obtener un camino ascendente que termina en x_{m+1}. Por lo tanto, $a_{m+1} \geq 1$, como queríamos demostrar. □

Ahora, demostraremos un resultado un poco más fuerte.

Lema 3. *Para cada pareja de celdas vecinas (x_a, x_b) con $a < b$ existe un camino ascendente que termina en (x_a, x_b).*

Demostración. Consideremos alguno de los caminos ascendentes que termina en x_a que deben existir por el Lema 2. A dicho camino, podemos añadirle la celda x_b al final para obtener el camino deseado. □

Estamos ahora en posición para probar una cota inferior para el número de caminos ascendentes en un tablero nórdico. Notemos que por el Lema 3, para cada pareja de celdas adyacentes (x_a, x_b) con $a < b$ existe al menos un camino ascendente que termina en x_a, x_b. En un tablero de $n \times n$, existen $n(n-1)$ parejas de celdas adyacentes horizontalmente y $n(n-1)$ parejas de celdas adyacentes verticalmente. Cada una de estas parejas de celdas nos permite obtener un camino ascendente distinto. Finalmente, cada valle en sí mismo es un camino ascendente, y nos permite obtener otro camino ascendente distinto a los anteriores. Por lo tanto

$$\#\{\text{ Caminos Ascendentes }\} \geq n(n-1) + n(n-1) + \#\{\text{ Valles }\}.$$

Como existe al menos un valle en el tablero, se concluye que

$$\#\{\text{ Caminos Ascendentes }\} \geq 2n(n-1) + 1 = 2n^2 - 2n + 1. \tag{9}$$

Queremos ahora construir un cuadrado nórdico que alcanza este número de caminos ascendentes para cada valor de n. Antes de ello, realizaremos una serie de observaciones. Primero, notamos que si x_i no es un valle, entonces

$$a_i = \sum_{\substack{r<i \\ x_r \text{ adyacente a } x_i}} a_r.$$

La demostración de este hecho es nuevamente por inducción. Imaginemos que colocamos las etiquetas i en orden de menor a mayor. Es claro que el valor de a_i sólo depende de la posición de las celdas $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$, pues la colocación de etiquetas mayores a i no aumentará el número de caminos ascendentes terminados en x_i. Una vez colocadas las etiquetas $1, 2, \ldots i-1$, si x_i no es un valle, todo camino ascendente terminado en x_i provendrá de un camino ascendente terminado en alguna de las celdas adyacentes a x_i al que se le ha añadido dicha celda al final. Por tanto, cuando x_i no es un valle, el valor de a_i será igual a la suma del valor de los a_r de las celdas adyacentes que tienen una etiqueta menor.

Ahora bien, para obtener un cuadrado nórdico que alcance la igualdad en (9), cuando coloquemos la etiqueta i debe ocurrir que sea adyacente a exactamente una celda x_r con $a_r = 1$ y $r < i$, o bien que sólo sea adyacente a celdas x_r con $r < i$. De otro modo, la celda x_i será adyacente a al menos una celda x_j con $j > i$ y se cumplirá que $a_i > 1$, lo que ocasionará que exista más de un camino ascendente terminado en (x_i, x_j).

Como una última observación, notemos que es suficiente con que seleccionemos aquellas celdas que satisfacerán $a_i = 1$ bajo las siguientes condiciones: no puede haber dos celdas no seleccionadas adyacentes y no puede haber ciclos entre las celdas seleccionadas. Para colocar los números, simplemente iniciamos en algún punto de las celdas seleccionadas, y recorremos caminos ascendentes colocando los números en orden.

El caso $n = 1$ es trivial. A continuación se muestran ejemplos para $n = 2, 3, 4$ que ejemplifican estas ideas, y a la vez muestran que la igualdad en (9) es posible para estos casos. Algunas celdas fueron seleccionadas y marcadas con un punto. Después se etiquetó cada una con un valor de i, iniciando en alguna de ellas arbitrariamente, y etiquetando de manera creciente y consecutiva sobre cada camino sobre celdas marcadas, regresando a puntos seleccionados que quedaron sin etiquetar cuando es necesario. Por último, se llenan las celdas no seleccionadas, usando los números restantes, que son siempre mayores a los de las celdas marcadas.

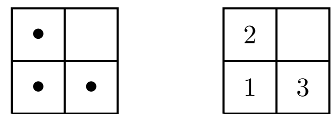


Figura 1: *Selección y llenado de casillas con* $a_i = 1$*, para* $n = 2$*.*

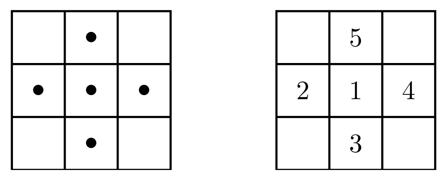


Figura 2: *Selección y llenado de casillas con* $a_i = 1$*, para* $n = 3$*.*

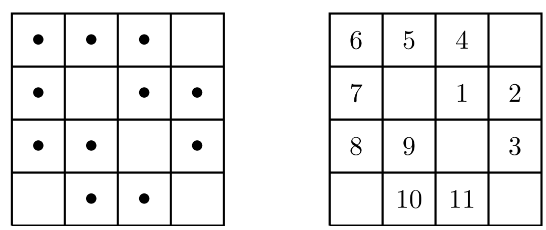


Figura 3: *Selección y llenado de casillas con* $a_i = 1$*, para* $n = 4$*.*

En las figuras, se omitió el paso final en el que se llenan las celdas que no fueron marcadas. Estas celdas pueden ser llenadas con los números restantes en cualquier orden.

Como hemos visto, basta elegir las celdas del tablero que satisfacerán $a_i = 1$ de manera que entre los caminos existentes en las celdas marcadas no existan ciclos, y que no existan dos celdas sin marcar adyacentes. Mostraremos de forma inductiva que siempre es posible elegir las casillas marcadas de forma que satisfagan estas hipótesis. Nuestra inducción mostrará que si existe un acomodo para $n = k$, entonces existe un acomodo para $n = k + 2$. Los casos $n = 3$ y $n = 4$ previamente mostrados servirán como nuestras hipótesis de inducción.

Iniciando con un acomodo que funciona para un tablero de $n \times n$, añadimos una fila y una columna en cada lado para obtener un tablero de $(n+2) \times (n+2)$. A continuación, numeramos las celdas marcadas sobre cada lado del perímetro del cuadrado de $n \times n$, siempre en el sentido de las manecillas del reloj. La siguiente figura muestra un ejemplo de este proceso.

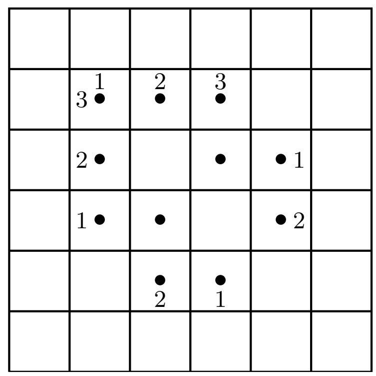


Figura 4: *Numeración de las celdas marcadas sobre el perímetro del tablero para $n = 4$, a fin de construir el tablero para $n = 6$.*

A continuación marcamos los cuadrados adyacentes a aquellos numerados con un número impar.

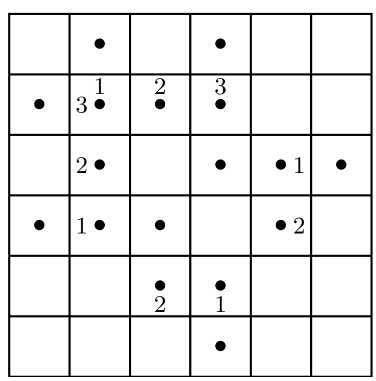


Figura 5: *Marcado de las celdas adyacentes a cuadrados marcados y etiquetados con un número impar.*

Hecho el proceso anterior, se añadirán algunas marcas adicionales para garantizar que no queden dos celdas sin marcar adyacentes. En caso que exista una celda sin marcar sobre el perímetro que se encuentra en medio de dos celdas marcadas, alguna de dichas celdas estará etiquetada con un número impar. Podemos entonces marcar la celda en la nueva fila o columna, pues quedará adyacente a exactamente una celda marcada.

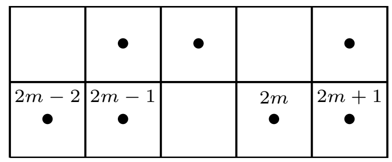


Figura 6: *Si existe alguna celda sin marcar en el interior del perímetro, podemos marcar la celda adyacente en la fila o columna nueva sin provocar ningún problema.*

Por último, queda por explicar cómo marcaremos los cuadros cercanos a las esquinas. Hay dos posibilidades: si la esquina del tablero original está marcada o si no lo está. Cuando lo está, dicha esquina está numerada con 1 en alguno de los dos lados en los que se encuentra, así que hay dos casos: si el otro número es par o impar. Cuando la esquina no está marcada, sus cuadrados adyacentes están marcados por la hipótesis de inducción, y al menos uno de ellos está numerado con 1, por lo que nuevamente hay dos casos, si el otro número es par o impar.
El ejemplo del paso inductivo de $n = 4$ a $n = 6$ muestra tres de estos cuatro posibles casos y podemos ver en él cómo completarlos de manera general (ver Figura 7).

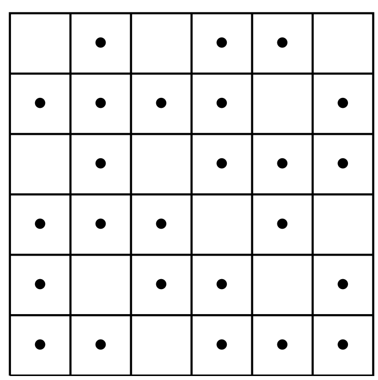


Figura 7: *Marcado de las esquinas ejemplificado con el paso inductivo de* $n = 4$ *a* $n = 6$.

El único caso restante es cuando una esquina está marcada y con numeraciones de distinta paridad, que se ilustra en la Figura 8.

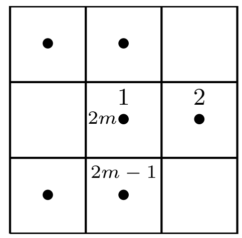


Figura 8: *Cuando una esquina del tablero anterior está marcada y con numeraciones de distinta paridad. Podemos simplemente marcar la esquina correspondiente del nuevo tablero.*

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ (mod m).*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $c \equiv d$ (mod m), entonces $a \equiv d$ (mod m).*
2. *Si $a \equiv c$ (mod m) y $b \equiv d$ (mod m), entonces $ab \equiv cd$ (mod m).*
3. *Si $a \equiv c$ (mod m), entonces $a^n \equiv c^n$ (mod m) para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ (mod m), entonces $a \equiv c$ (mod $\frac{m}{(b,m)}$) donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p).*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k+1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones)**.** *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio)**.** *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica)**.** *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo)**.** *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA)**.** *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos)**.** *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA)**.** *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*

2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*

3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*

2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez