ISSN 2954-4971

Tzaloa

Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

01

15

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Olimpiada Mexicana de Matemáticas
www.ommenlinea.org
tel: 5622 • 4864

Información Legal

TZALOA REVISTA DE LA OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMÁTICAS, Año 15, No. 1, febrero - abril 2023, es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana, A.C., Vicente Beristaín 165-B, Ampliación Asturias, Delegación Cuauhtémoc, C.P. 06890, Ciudad de México, México. Tel. 55-5849-6709, smm@smm.org.mx, http://www.smm.org.mx, www.ommenlinea.org. Editor responsable: Carlos Jacob Rubio Barrios. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo 04-2022-101718033000-102, ISSN: 2954-4971, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor.

TZALOA
Revista de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Año 2023, No. 1

Comité de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas
Cubículo 201
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
Circuito Interior s/n
Ciudad Universitaria
Coyoacán C.P. 04510
Ciudad de México
Teléfono: (55) 56-22-48-64
www.ommenlinea.org

Editor en Jefe: Carlos Jacob Rubio Barrios
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Yucatán
Anillo Periférico Norte, Tablaje 13615
C.P. 97203, Mérida, Yucatán

Febrero de 2023

Contenido

Presentación

Tzaloa[1], la revista oficial de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM), es una publicación trimestral editada por la Sociedad Matemática Mexicana (SMM). Los artículos, problemas, soluciones, exámenes y demás información que en ella encontrarás, fueron seleccionados con el fin de apoyar a profesores y estudiantes de nivel básico y nivel medio superior, que cada año se preparan para participar en los distintos concursos de matemáticas que se realizan dentro y fuera de nuestro país.

Además de ello, Tzaloa es una publicación de interés para un público más amplio. Aunque está concebida para satisfacer las necesidades de la comunidad olímpica, su columna vertebral es la resolución de problemas, por lo que también resulta de gran valor para todo aquel que guste de hacer matemáticas. El enfoque centrado en los razonamientos, el contenido expuesto con rigor pero sin formalismos innecesarios o excesivos, así como su tendencia al uso de matemática simple y elegante, son algunas de las características que hacen del material expuesto un recurso valioso para profesores, estudiantes, aficionados y hasta profesionales de las matemáticas.

Tzaloa, Año 2023, Número 1

Tzaloa recibe el año con optimismo e inicia su decimoquinto año de publicaciones trimestrales ininterrumpidas. El principal interés de quienes elaboramos la revista Tzaloa, ha sido y seguirá siendo tener una publicación verdaderamente útil, buscando siempre proveer al lector de material e información que puede no ser fácil encontrar en otros medios. La consistencia de su publicación en el contexto nacional, es un ejemplo de la gran generosidad de muchos profesores y estudiantes que con su trabajo comprometido contribuyen al proyecto. Así, aprovechamos la ocasión para dar una afectuosa bienvenida a Denisse Alejandra Escobar Parra y a Pablo Alhui Valeriano Quiroz, quienes se integran al Comité Editorial a partir de este número.

Pasando al contenido, destaca el artículo *Todos sabemos multiplicar, ¿verdad que sí?*, de nuestro amigo César Octavio Pérez Carrizales. En él, César nos muestra un tipo de

[1]Vocablo náhuatl cuyo significado en Español es *aprender*.

problemas de olimpiada de matemáticas, para trabajar con niños de Primaria, donde solo se requiere conocer el algoritmo de la multiplicación y, sin embargo, resultan retadores. Estamos seguros que esta aportación será de gran utilidad para todos los lectores, principalmente para los más pequeños.

De especial interés para todos, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel III del Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB) que se realizó en el mes de junio de 2022 de forma virtual.

En el ámbito internacional, incluimos los problemas con soluciones de los exámenes individual y por equipos del nivel Secundaria de la Competencia Internacional de Matemáticas del año 2022 (IIMC 2022), realizada de forma virtual, siendo Indonesia el país organizador. También incluimos los problemas con soluciones de la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, realizada de forma presencial en el mes de septiembre de 2022 en Bogotá, Colombia. En el mes de octubre de 2022, se llevaron a cabo la 9^a Olimpiada Iraní de Geometría (IGO, por sus siglas en inglés) y la 2^a Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (PAGMO, por sus siglas en inglés). De la primera, presentamos los problemas de cada uno de los tres niveles de la competencia y, de la segunda, presentamos los problemas con sus respectivas soluciones. En todas las competencias internacionales, incluimos los resultados de los equipos mexicanos que participaron en cada una de ellas.

Como en cada número, hemos puesto todo nuestro entusiasmo en la integración de las diferentes secciones que conforman la revista. Todos los problemas, soluciones, exámenes y demás contenidos han sido escogidos, revisados y preparados especialmente pensando en el lector.

México y las Olimpiadas de Matemáticas

Desde sus inicios la Sociedad Matemática Mexicana ha venido impulsando vigorosamente los trabajos de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM). Este programa solo es posible gracias a la participación de miles de jóvenes estudiantes y a la entusiasta colaboración de muchos profesores quienes, de manera espontánea y altruista, han dedicado sus esfuerzos a mejorar la enseñanza y elevar la cultura matemática de nuestro país. Motivados por el movimento olímpico, en escuelas ubicadas a lo largo de todo el territorio nacional, se han desarrollado innumerables talleres de resolución de problemas, donde estudiantes y profesores trabajan con el único afán de incrementar sus capacidades para el razonamiento, el análisis y la creatividad matemática.

En el ámbito internacional, mediante la destacada participación de las delegaciones mexicanas en diversos concursos, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas ha contribuido a elevar el prestigio de la matemática nacional. Pero, más importante aún ha sido la contribución que el movimiento olímpico ha tenido para el desarrollo científico del país. En muchos casos, la detección temprana de jóvenes con talento matemático excepcional ha permitido brindarles una formación adecuada para desarrollar al máximo todo su potencial. Asimismo, la participación en los concursos olímpicos ha definido las vocaciones de muchos otros estudiantes. Universidades de todo el país se han visto beneficiadas con el ingreso de jóvenes ex-olímpicos, mismos que cuentan con una sólida formación matemática y muchos de los cuales han permanecido en ellas para dedicar su vida profesional a la docencia y la investigación.

37ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas

El programa anual de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas se desarrolla en 3 etapas:

- Concursos Estatales.
- Concurso Nacional.
- Entrenamiento, selección y participación de las delgaciones nacionales que representan a México en concursos internacionales.

En la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas podrán participar los estudiantes de México nacidos después del 1° de agosto de 2004. Los concursantes deberán estar inscritos en una institución preuniversitaria durante el primer semestre del ciclo escolar 2023-2024 y, para el 1° de julio de 2024, no deberán haber iniciado estudios universitarios. Para mayor información puedes consultar la página:

http://www.ommenlinea.org.

Para la primera etapa, los participantes deberán inscribirse directamente con el Comité Estatal correspondiente.

El Concurso Nacional de la 37^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas se realizará en la segunda semana de noviembre de 2023. A los primeros lugares de este certamen se les invitará a la etapa de entrenamiento y selección que se realizará durante aproximadamente diez días de cada seis semanas a partir de diciembre de 2023 y hasta la fecha de celebración del concurso internacional correspondiente.

Los alumnos que continúen en los entrenamientos nacionales en el mes de marzo, presentarán el examen de la XXXVI Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

Con base en el desempeño de los participantes durante ese periodo, se elegirá a los integrantes de las delegaciones mexicanas que asistirán a la 65^a Olimpiada Internacional de Matemáticas (julio de 2024) y a la XXXIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (septiembre de 2024).

De entre los concursantes nacidos en 2007 o después y premiados en el Concurso Nacional se seleccionará la delegación que representará a México en la XXVI Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (2024).

De entre las mujeres participantes se seleccionará a la delegación que representará a México en la XIII Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas (EGMO) a celebrarse en el mes de abril de 2024.

7ª Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica

En el año 2023, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Séptima Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Podrán participar los alumnos de Primaria y Secundaria, de acuerdo a los siguientes niveles.

Nivel I. Estudiantes de quinto y sexto año de primaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 13 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel II. Estudiantes de primero y segundo año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

Nivel III. Estudiantes de tercer año de secundaria o una institución equivalente. Los estudiantes no deben haber cumplido 16 años al 1 de agosto de 2023.

La participación en la competencia es a través de los comités estatales de la OMMEB.

El concurso nacional de la 7^a OMMEB se realizará del 21 al 24 de septiembre de 2023, de forma virtual. Cada Estado participante lo puede hacer con a lo más un equipo en cada categoría. Cada equipo estará integrado por un máximo de 4 personas: un líder y 3 estudiantes (una misma persona puede ser líder de más de un equipo).

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual para el nivel I constará de 15 problemas a responder en 90 minutos, mientras que para los niveles II y III, constará de dos partes. La parte A consistirá de 12 problemas en la cual solo la respuesta es requerida. La parte B consistirá de 3 problemas y las soluciones tendrán que ir acompañadas de argumentos o explicaciones que sustenten la respuesta. La prueba por equipos en los tres niveles, consistirá de 8 problemas a resolver en 60 minutos.

Los ganadores de los distintos niveles se preseleccionarán para recibir entrenamiento y presentar exámenes selectivos para conformar a los equipos que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), que se celebrará en el verano de 2024.

2ª Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas

En el año 2023, la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) organiza la Segunda Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas. En el Concurso Nacional, cada Estado podrá participar con una delegación integrada por un líder, a lo más 4 tutoras o tutores, a lo más 3 concursantes de Nivel 1 y a lo más 3 concursantes de Nivel 2.

Nivel 1. Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en primer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 18 años al 1 de agosto de 2022.

Nivel 2. Las concursantes de este nivel deben estar inscritas a lo más en tercer año de bachillerato al momento del concurso y no haber cumplido 20 años al 1 de agosto de 2022. Adicionalmente, no deben haber participado 2 veces anteriores en el Nivel 2 del Concurso Nacional Femenil, ni haber sido 2 veces parte del equipo mexicano en la Olimpiada Europea Femenil de Matemáticas.

Habrá dos tipos de exámenes: individual y por equipos. La prueba individual en cada nivel consta de dos exámenes con 3 problemas cada uno, para resolver en dos sesiones de 4.5 horas cada una. El examen por equipos consta también de 3 problemas para resolver en un máximo de 4.5 horas. Los exámenes se llevarán a cabo en las sedes estatales de la OMM.

El Concurso Nacional de la 2^a Olimpiada Mexicana Femenil de Matemáticas, iniciará el 28 de mayo de 2023. El formato (virtual, presencial, semi-virtual o híbrido) aún no está decidido. Se dará a conocer más tarde en el mes de abril.

En caso de que haya fondos suficientes, a las concursantes con los 8 mejores puntajes de la prueba individual del Nivel 1, se les integrará a los entrenamientos nacionales de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas a partir de junio de 2023. En caso de que se organice alguna olimpiada femenil en la que participe México, diferente a la EGMO, de entre las ganadoras de este Concurso Nacional se elegirá a las que conformarán la delegación, con base en su desempeño académico. El Comité Organizador de la OMM apoyará en la búsqueda de recursos para asistir a dicha(s) olimpiada(s).

Este concurso surge como un esfuerzo temporal que ayude al balance de género dentro de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) y que deje de realizarse una vez que se logre este objetivo. El desarrollo de un concurso nacional de matemáticas para chicas, puede enriquecer las olimpiadas de matemáticas de la siguiente manera:

- Fomentar la participación de chicas en concursos de matemáticas en cada Estado con el fin de tener más participación de chicas en los concursos nacionales de la OMM.
- Buscar que cada Estado haga énfasis en la participación de las chicas en sus concursos y les brinde un espacio de colaboración y confianza en el que puedan desarrollar sus habilidades matemáticas en un entorno de resolución de problemas.
- Establecer redes entre las concursantes de diferentes Estados, con el fin de que se conozcan, se apoyen e inspiren unas a otras.
- Promover que, tanto las chicas que están terminando el bachillerato como las entrenadoras, sean modelos a seguir para las más jóvenes.
- Tener una competencia nacional con un fuerte factor colaborativo.

Como parte de los puntos anteriores, se incluye un componente colaborativo para este concurso, en complementariedad al componente individual habitual en el Concurso

Nacional de la OMM. Se ha observado cómo los formatos de trabajo en equipo en concursos nacionales e internacionales, propician distintas dinámicas sociales y distintos aprendizajes. Por ejemplo, proponen un balance entre el aprendizaje de las matemáticas con el fin de poder beneficiar a un colectivo y, el dominio de las matemáticas, con el fin del beneficio propio. Adoptar ambos formatos no solo visibiliza la importancia de tener los dos enfoques, sino que también brinda a las participantes herramientas sociales muy valiosas para una vida profesional futura.

Todos sabemos multiplicar, ¿verdad que sí?

Por César Octavio Pérez Carrizales

Cuenta una leyenda que existió una época en la que no había olimpiadas de matemáticas de primaria ni de secundaria. En ese entonces solo existía la OMM, no era tan conocida y era difícil enterarse que existía. Quienes vivimos esa época, solíamos enterarnos en nuestro último año de prepa y lo normal era que participáramos solo un año. Sentíamos gran envidia (de la buena) de los participantes que tenían la suerte de conocer la existencia de la Olimpiada desde un poco más jóvenes y podían participar en ella durante dos años. ¡Dos años! Participar dos años en la olimpiada de matemáticas era algo poco común, eso te daba otro año para prepararte y seguir participando. En ese entonces, todos habríamos deseado tener una oportunidad así.

Pero de repente empezaron a surgir pequeños brotes de trabajo con alumnos de secundaria y comenzaron a aparecer olimpiadas, primero estatales y después nacionales, para niveles más básicos. Esto trajo cambios, el primero es que los alumnos podrían prepararse durante más tiempo, lo cual era muy bueno, pero también ocurrió que los chicos de secundaria tenían características diferentes a los participantes de preparatoria y los entrenadores no sabíamos cómo trabajar con ellos.

Una diferencia que muy pronto fue evidente, es que la mayoría de los chicos de inicios de secundaria aún no sabían álgebra, así que fue necesario repensar qué tipo de problemas eran adecuados para empezar el entrenamiento y en qué forma se debían explicar las soluciones. Las formas de solución que se les ocurrían a los estudiantes, muchas veces eran diferentes a las que los entrenadores esperábamos. En lo personal para mi fue muy enriquecedor este cambio, ya que las ideas de los alumnos me brindaban muchas estrategias de explicación que al ser aplicadas con otros alumnos, incluso de preparatoria, enriquecían mucho el trabajo.

Después llegaron las olimpiadas de primaria y nuevamente hubo que repensar qué era lo que se podía entrenar y de qué manera.

Actualmente se está empezando a trabajar con chicos de tercero de primaria, incluso

se están haciendo propuestas para trabajar con chicos más pequeños. Esto trae nuevos retos ya que en tercer año de Primaria, en el programa escolar, apenas están aprendiendo a dividir y a desarrollar el concepto de fracciones. Entonces, ¿qué podemos trabajar con estos chicos? ¿qué problemas requieren conocimientos básicos y además tienen su grado de reto?
A continuación mostraremos algunos problemas que solo requieren saber el algoritmo de la multiplicación y, a pesar de eso, resultan retadores.

Problema 1. (EIMC, 2004). *Encuentra el menor número natural que al ser multiplicado por* 123 *da como resultado un producto que termina en* 2004*.*

Si los estudiantes son muy jóvenes, tal vez no sepan qué es un número natural. Recordemos que en tercer grado de primaria es cuando se enfrentan por primera vez a los números fraccionarios y decimales. Convendrá motivarlos a hacer preguntas sobre términos desconocidos.
Una recomendación que puede ser útil para los alumnos muy jóvenes, es que hagan una multiplicación cualquiera, usando los primeros números que se les ocurran. Esta multiplicación les ayuda a recordar el acomodo que se da a los números que se obtienen al realizar el algoritmo y será una referencia que les facilitará llevar control del proceso de solución.
Comenzaremos escribiendo una multiplicación "fantasma", a la que le faltan algunos de los términos. Al acomodar los números dados por el problema, tendremos un acomodo como el siguiente.

$$\begin{array}{rr} & 1\,2\,3 \\ \times & \dots b\,a \\ \hline & 4 \\ & \uparrow \\ \hline & \dots 2\,0\,0\,4 \end{array}$$

Podemos ver que el número que va directamente en la posición señalada por la flecha roja en la multiplicación anterior, es el 4 y, el único dígito que multiplicado por 3 termina en 4, es el 8. Entonces, $a = 8$ y al efectuar la multiplicación vemos que en el primer renglón debe ir el número 984.

$$\begin{array}{rr} & 1\,2\,3 \\ \times & \dots b\,8 \\ \hline & 9\,8\,4 \\ & \\ \hline & \dots 2\,0\,0\,4 \end{array}$$

Ahora, en la siguiente multiplicación, en la posición señalada con la flecha roja debe ir un número que sumado con 8 termine en 0 y la única opción es el 2.

$$\begin{array}{rr}
 & 1\,2\,3 \\
\times & \ldots\,b\,8 \\
\hline
 & 9\,8\,4 \\
 & 2 \\
\hline
 & \ldots 2\,0\,0\,4
\end{array}$$

Como el único dígito que multiplicado por 3 termina en 2 es el 4, al efectuar la multiplicación podemos ver que el número en ese renglón es 492.

$$\begin{array}{rr}
 & 1\,2\,3 \\
\times & \ldots\,4\,8 \\
\hline
 & 9\,8\,4 \\
 & 4\,9\,2 \\
\hline
 & \ldots 2\,0\,0\,4
\end{array}$$

Para obtener un 0 en el resultado, el número en la posición señalada con la flecha roja en la siguiente multiplicación, debe ser 1 (no olvidemos que hay un acarreo de la suma de los números de la columna anterior).

$$\begin{array}{rr}
 & 1\,2\,3 \\
\times & \boxed{}\,4\,8 \\
\hline
 & 9\,8\,4 \\
 & 4\,9\,2 \\
 & 1 \\
\hline
 & \ldots 2\,0\,0\,4
\end{array}$$

Como el único dígito que al multiplicar por 3 da un resultado que termina en 1 es el 7, al efectuar la multiplicación podemos ver que el número que va en el tercer reglón es 861.

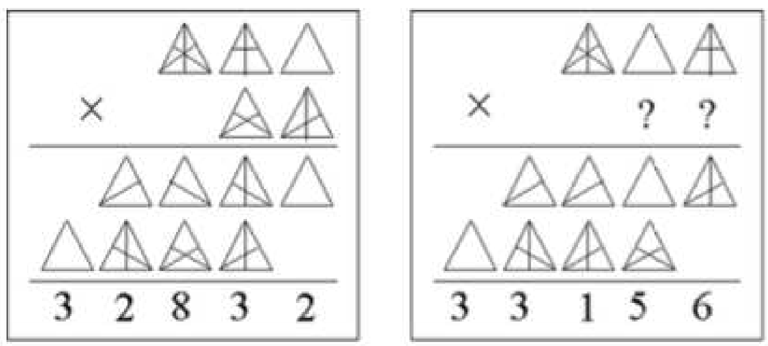
$$\begin{array}{rr}
 & 1\,2\,3 \\
\times & \ldots 7\,4\,8 \\
\hline
 & 9\,8\,4 \\
 & 4\,9\,2 \\
 & 8\,6\,1 \\
\hline
 & \ldots 2\,0\,0\,4
\end{array}$$

Al comprobar la suma, podemos ver que obtenemos el 2004 que necesitamos en el resultado de la multiplicación.

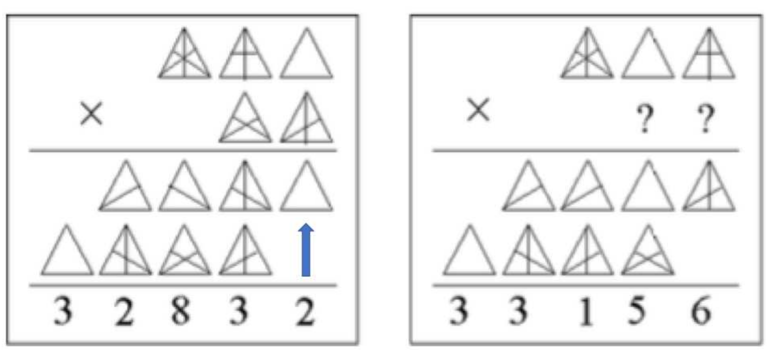
$$\begin{array}{rr}
 & 123 \\
\times & 748 \\
\hline
 & 984 \\
 & 492 \\
 & 861 \\
\hline
 & 92004
\end{array}$$

Por lo tanto, el menor número natural que multiplicado por 123 da como resultado un número que termina en 2004, es el 748.

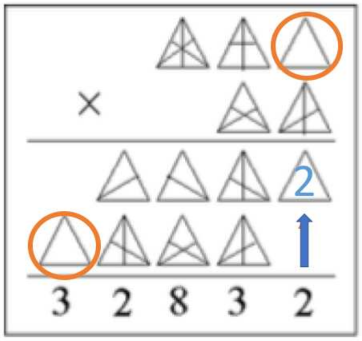
Problema 2. (EMIC, 2005). *Los diferentes símbolos triangulares representan dígitos diferentes del* 1 *al* 9*. Los símbolos iguales representan los mismos dígitos en ambos ejemplos. Encuentra el número de dos dígitos representado por* ??

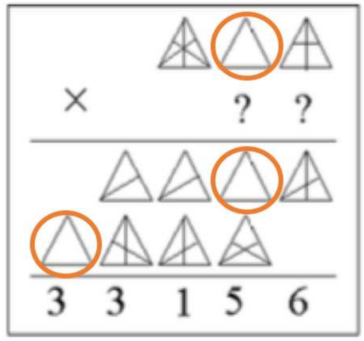


El primer paso para resolver este problema es identificar las terminaciones de las multiplicaciones. El dígito que debe ir en la posición señalada con la flecha azul es el 2.

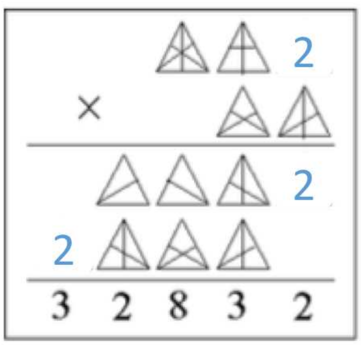


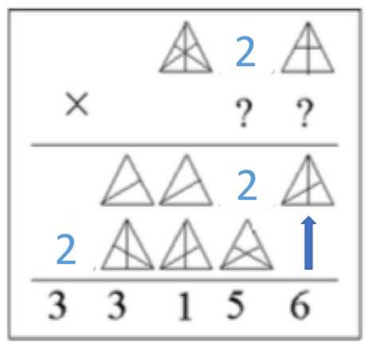
Así que todos los símbolos como este deben ser sustituidos por un 2.



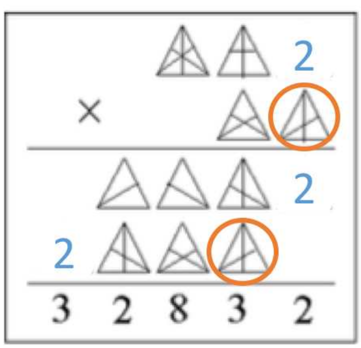


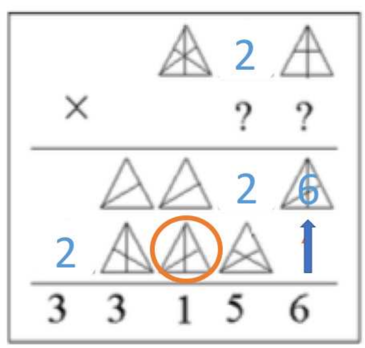
Ahora observamos que el dígito señalado con la flecha azul en la multiplicación de la derecha, debe ser un 6.



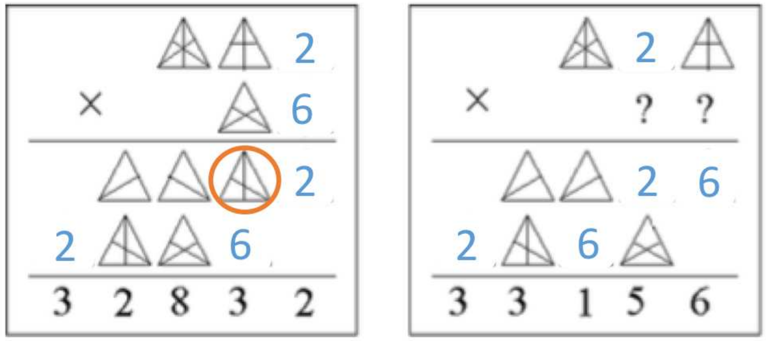


Así que todos los símbolos que tengan esta forma deben sustituirse por un 6.

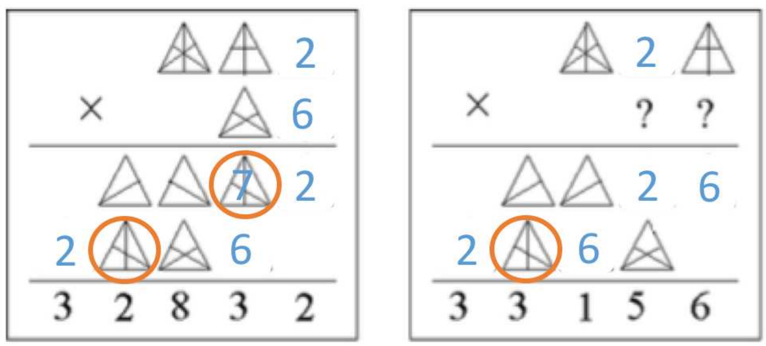




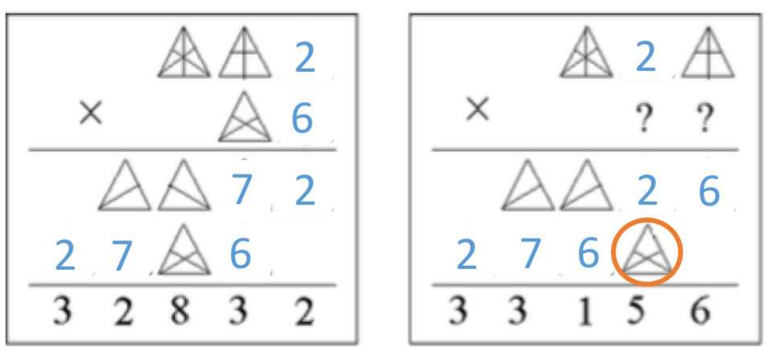
Para obtener el 3 del resultado, necesitamos escribir un 7 en la posición marcada en la multiplicación de la izquierda, como se muestra a continuación.



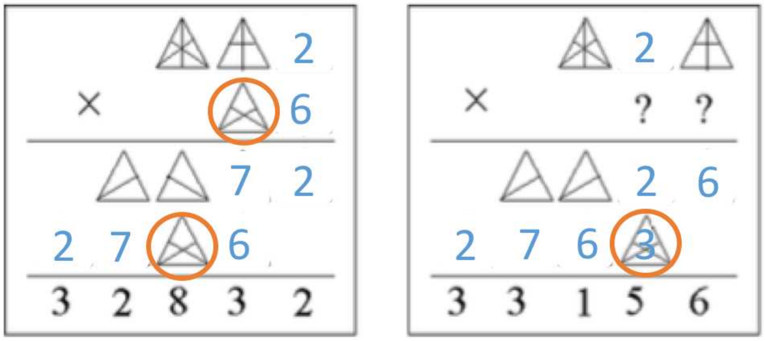
Así que todos los símbolos iguales a este deben sustituirse por un 7.



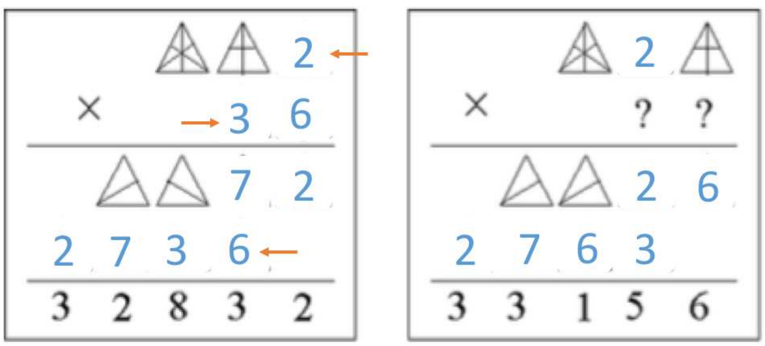
Para obtener el 5 del resultado, necesitamos en la posición marcada un dígito 3.



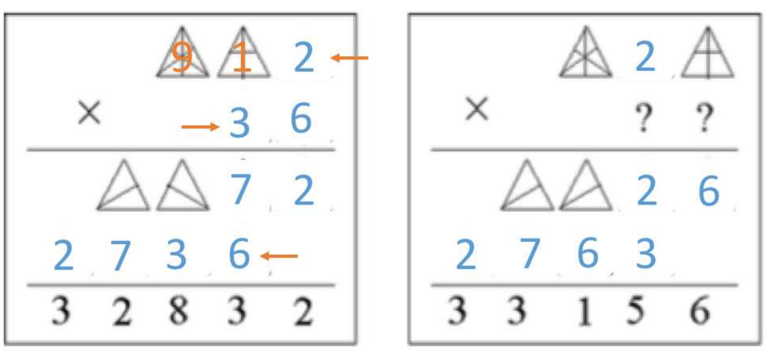
A continuación, sustituimos todos los símbolos iguales por un 3.



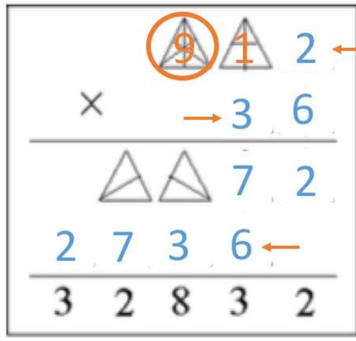
Hasta ahora tenemos suficientes números para obtener el valor del multiplicando de la primera operación, ya que queremos que 3 multiplicado por el primer renglón, produzca como resultado 2736.

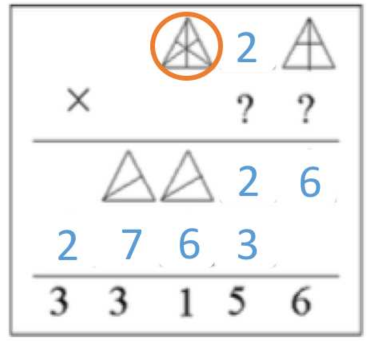


Ya sea que hagamos la multiplicación por 3, o dividamos 2736 entre 3, obtenemos que el multiplicando de la primera multiplicación debe ser 912.

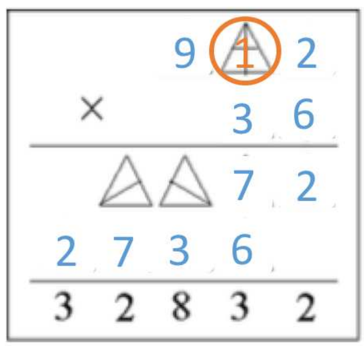


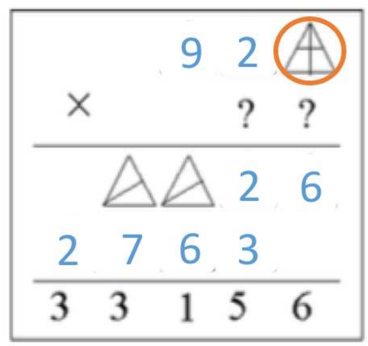
Entonces, todos los símbolos iguales al señalado en un círculo en ambas multiplicaciones, deben ser sustituidos por 9.



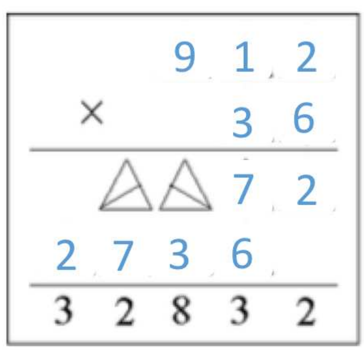


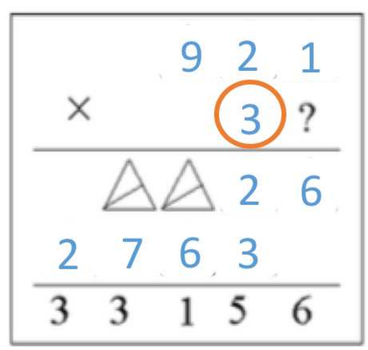
Análogamente, todos los símbolos como los señalados a continuación en ambas multiplicaciones deben ser sustituidos por el dígito 1.



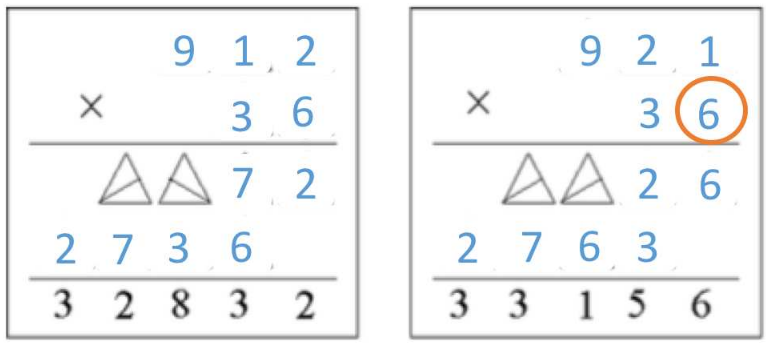


Trabajando en la multiplicación de la derecha, podemos ver que para obtener el 3 del segundo renglón, necesitamos que el signo de interrogación de la izquierda sea un 3.





Finalmente, para obtener el dígito 6 del primer renglón necesitamos que el signo de interrogación de la derecha sea un 6.



Por lo tanto, la respuesta es 36.

Problema 3. (Revista Mathematics Teacher). *Encuentra dos números enteros positivos que no contengan ceros y que multiplicados den* 1000000000.

Aunque este problema puede resolverse mediante exponentes, vamos a centrarnos en conocimientos accesibles a estudiantes de primaria. A continuación, expondremos dos estrategias de solución.

Una estrategia es pensar el problema en pequeño, relajar algunas de las condiciones del problema para poder explorar más fácilmente y darnos una idea de cómo podemos proceder con él.

Por ejemplo, busquemos dos números que no contengan ceros y que al multiplicarse den como resultado 10. Es fácil encontrar la multiplicación 2×5.

Esto aún está lejos de la respuesta, así que busquemos dos números que multiplicados den 100 y que no contengan ceros. Un poco de exploración nos llevará a la multiplicación 4×25.

Podemos seguir haciendo esta pregunta para obtener resultados más grandes y después de tener algunos casos particulares podemos darnos cuenta que surge una secuencia entre los números.

$$\begin{gathered} 2 \times 5 = 10, \\ 4 \times 25 = 100, \\ 8 \times 125 = 1000. \end{gathered}$$

Observemos que en los números del lado izquierdo de cada igualdad, el primer factor se obtiene multiplicando el primer factor del producto del renglón anterior por 2, mientras que el segundo factor se obtiene de multiplicar el segundo factor del producto del renglón anterior por 5.

Si continuamos con esta idea, obtenemos la siguiente tabla.

$$\begin{aligned}
2 \times 5 &= 10,\\
4 \times 25 &= 100,\\
8 \times 125 &= 1000,\\
16 \times 625 &= 10000,\\
32 \times 3125 &= 100000,\\
64 \times 15625 &= 1000000,\\
128 \times 78125 &= 10000000,\\
256 \times 390625 &= 100000000,\\
512 \times 1953125 &= 1000000000.
\end{aligned}$$

A partir del último renglón podemos ver que la respuesta es 512×1953125.

Otra estrategia accesible para estudiantes de primaria es obtener números que den un producto constante.
Por ejemplo, el producto 1×1000000000 da como resultado 1000000000, pero el segundo factor contiene ceros.
Para que la multiplicación se mantenga constante, podemos duplicar uno de los factores y multiplicarlo por la mitad del otro factor, así obtenemos el resultado 2×500000000.
Si continuamos de esta manera, sacando siempre la mitad de un factor y duplicando el otro, obtenemos la siguiente secuencia de números.

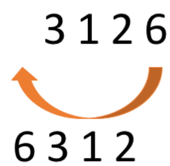
$$\begin{aligned}
1 &\times 1000000000,\\
2 &\times 500000000,\\
4 &\times 250000000,\\
8 &\times 125000000,\\
16 &\times 62500000,\\
32 &\times 31250000,\\
64 &\times 15625000,\\
128 &\times 7812500,\\
256 &\times 3906250,\\
512 &\times 1953125.
\end{aligned}$$

Obteniendo nuevamente el resultado de 512×1953125.

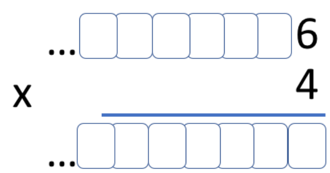
Problema 4. *Encuentra el mínimo número natural cuyo último dígito (de izquierda a derecha) es* 6*, tal que si movemos el* 6 *del final a la posición inicial, el número obtenido es el cuádruple del número original. Por ejemplo, si el número inicial es* 16*, al mover el* 6 *del final al inicio, obtenemos el número* 61.

Vale la pena recordar de nuevo, que los alumnos de primaria probablemente no sepan lo que es un número natural.

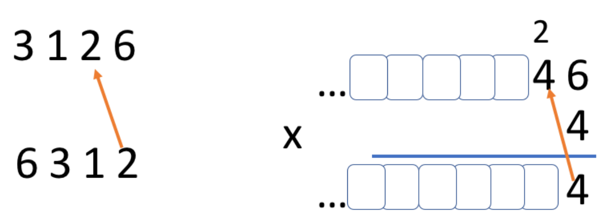
Por otro lado, aunque el enunciado del problema ya incluye un ejemplo, es probable que para que los alumnos entienden el problema, se tenga que construir otro ejemplo con números más grandes.
Por ejemplo, consideremos el número 3126. Al mover el 6 al inicio del número, obtenemos el número 6312.



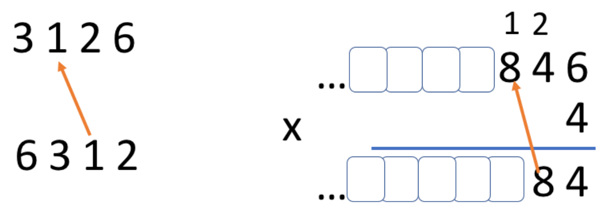
Entonces, construyamos nuevamente una multiplicación "fantasma" en la que faltan varios términos. Sabemos que el número original debe terminar en 6 y que al multiplicarlo por 4 debemos obtener el nuevo número.



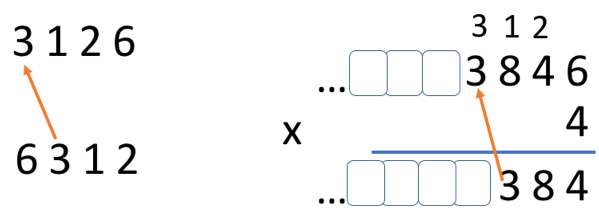
Como $6 \times 4 = 24$, sabemos que el resultado de la multiplicación debe terminar en 4. Para no cometer errores nos conviene escribir el 2 que acarreamos a las decenas (en primaria, los estudiantes dicen: "como 4 por 6 es 24, tenemos 4 y llevamos 2".
Para continuar con la multiplicación, nos conviene analizar nuevamente el ejemplo: Al mover el 6 del final al inicio del número, el 2 se recorrió un lugar. Lo mismo debe ocurrir con el 4 de nuestra multiplicación, el cuál debe aparecer en la penúltima posición del número original.



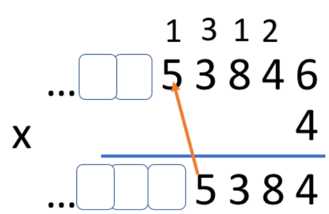
Continuando con la multiplicación, podemos ver que 4×4 es 16, más los 2 que "llevábamos" de la operación anterior, obtenemos como resultado 18.
Nuevamente analizamos el ejemplo para ver cómo se mueven los dígitos y nos daremos cuenta que el 8 debe estar en la antepenúltima posición.



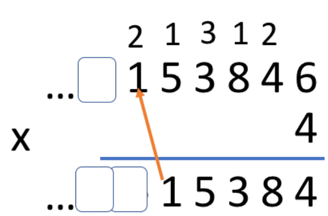
Siguiendo este procedimiento podemos ver que 4×8 es 32, más el 1 que llevábamos da 33, así que tenemos 3 y llevamos 3.



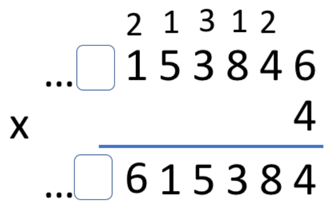
Continuando con la multiplicación, tenemos que 4×3 es 12, más los 3 que llevábamos, obtenemos 15, así que tenemos 5 y llevamos 1.



Ahora, 4×5 es 20, más el 1 que llevábamos, obtenemos 21, así que tenemos 1 y llevamos 2.



Finalmente, tenemos que 4×1 es 4, más 2 que llevábamos, obtenemos 6 y, como no hay acarreo, hemos logrado un número que comienza con 6.



Por lo tanto, el número más pequeño que cumple con las condiciones del problema es el 153846.

Problema 5. *¿Cuál es el resultado de la operación* $999999999^2 - 1$*?*

Alguien con experiencia, de inmediato pensará en usar notación desarrollada, diferencia de cuadrados y otras técnicas que pueden estar fuera del alcance de estudiantes de primaria. Algunas personas pensarán que el manejo de números cuadrados también puede estar fuera de su alcance, pero los concursos nacionales de este nivel requieren que los participantes conozcan el concepto de números cuadrados y cúbicos.
Una forma de resolver el problema es realizar la multiplicación del número 999999999 por él mismo y restar 1. De esta manera podemos obtener el resultado. Sin embargo, es muy común que los estudiantes cometan errores al efectuar la multiplicación con esta forma de solución.
Pero veamos una segunda forma de solución, usando la estrategia "piensa en pequeño". Para ello exploremos la forma que tiene el resultado de multiplicar números que solo tengan dígitos 9 y obtendremos los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} 9^2 &= 81, \\ 99^2 &= 9801, \\ 999^2 &= 998001. \end{aligned}$$

Podemos observar un patrón y desde aquí podemos adiviniar cuál será el resultado de elevar 9999 al cuadrado:

$$9999^2 = 99980001.$$

Siguiendo este patrón aparente podemos darnos cuenta que un número formado por nueve dígitos 9 elevado al cuadrado, dará un resultado formado por ocho dígitos 9, un dígito 8, ocho dígitos 0 y un dígito 1:

$$999999999^2 = 999999998000000001.$$

Al realizar la resta, el número terminará con nueve ceros obteniendo el siguiente resultado:

$$999999999^2 - 1 = 999999998000000000.$$

Puede argumentarse que este resultado es solamente una suposición, no hay una justificación rigurosa. Pero es importante desarrollar en estudiantes de primaria la habilidad de construir casos particulares que les permitan explorar el problema. Una vez desarrollada esta habilidad, podemos discutir con ellos la necesidad de una demostración. Además de que en los exámenes de “solo respuesta” de concursos nacionales e internacionales, este tipo de habilidad les permitirá llegar a la respuesta correcta muy rápido. Con alumnos que tengan algo más de experiencia, podemos analizar soluciones que involucren el uso de binomios al cuadrado, notación desarrollada o diferencia de cuadrados.

Problema 6. *Asignamos diferentes valores enteros a letras diferentes y multiplicamos los valores de estas letras para obtener el valor de las palabras. Por ejemplo, si $F = 5$, $O = 3$ y $X = 2$, entonces $FOX = 30$.*
Si sabemos que $TEEN = 52$, $TILT = 77$ y $TALL = 363$, ¿Cuánto vale $TATTLE$?

Comencemos con la palabra $TILT$: El número 77 solo puede obtenerse de la multiplicación 11×7. Entonces, la letra T no puede tener ninguno de estos valores, ya que aparece dos veces. De aquí obtenemos que $T = 1$.
Como sabemos que $T \times E \times E \times N = 52$, un poco de exploración nos llevará a qué 52 es igual a $13 \times 2 \times 2$. La E no puede ser 13, ya que este número solo aparece una vez en la multiplicación y, como ya sabemos que $T = 1$, solo queda que $N = 13$. Por lo tanto, $E = 2$.
Ahora, como $T \times A \times L \times L = 363$ y, además es fácil ver que $363 = 3 \times 121$ y $121 = 11 \times 11$, tenemos que la letra repetida, la L debe valer 11 y la letra A debe valer 3.
Regresando a la palabra $TILT$, podemos ver que la única opción para la letra I es $I = 7$.
Así que para encontrar el resultado de la palabra $TATTLE$, necesitamos efectuar la multiplicación $1 \times 3 \times 1 \times 1 \times 11 \times 2$, lo cual nos da como resultado 66.

Problema 7. (IWYMIC, 1999). *Cuando un número de 6 dígitos se multiplica por 2, 3, 4, 5 y 6 respectivamente, cada uno de los productos sigue siendo un número de seis dígitos, con los mismos seis dígitos que el número original, pero en diferente orden. Encuentra el número original.*

Este problema amedrenta al inicio, ya que parece no haber información suficiente. Pero básicamente, la estrategia que se requiere para resolverlo, es acotar.
Para organizar las ideas conviene hacer una tabla. En ella acomodaremos los seis números obtenidos de cada multiplicación, incluyendo al número original.

$\times\mathbf{1}$						
$\times\mathbf{2}$						
$\times\mathbf{3}$						
$\times\mathbf{4}$						
$\times\mathbf{5}$						
$\times\mathbf{6}$						

Podemos ver que si multiplicamos el número 200000 por 6, obtenemos 1200000, que es un número de 7 dígitos, lo que contradice que el número resultante debe tener 6 dígitos. Así que el número original debe ser menor que 200000 y, por lo tanto, debe comenzar con 1.

Un poco de exploración nos permite darnos cuenta que al multiplicar un número que comienza con 1 por 2, 3, 4, 5 y 6, el dígito del inicio cambiará y, en cada multiplicación aumenta, por lo que los seis dígitos son diferentes y ninguno puede ser igual a cero.

La quinta fila de nuestra tabla, la multiplicación por 5, tendrá como terminación 0 o 5, pero como todos los números deben tener los mismos dígitos, el cero queda descartado. Así que otro de los dígitos del número original debe ser 5.

$\times\mathbf{1}$	1					
$\times\mathbf{2}$						
$\times\mathbf{3}$						
$\times\mathbf{4}$						
$\times\mathbf{5}$						5
$\times\mathbf{6}$						

De esta misma multiplicación, podemos deducir que el último dígito del número original debe ser impar y no puede ser igual a 1, ya que habría dígitos repetidos. Además, el número original no puede terminar en 5 ya que el ser multiplicado por 2 terminaría en 0, lo cual habíamos dicho que no podía ocurrir. Entonces, las únicas terminaciones posibles para el número original son 3, 7 o 9.

Al checar las tablas de multiplicar del 3, 7 y 9 (hasta el 6), podemos ver que solo la del 7 incluye la terminación 1. Por lo que el primer número debe terminar con el dígito 7 y la tabla de multiplicar del 7 nos da las terminaciones de nuestra tabla.

$\times\mathbf{1}$	1					7
$\times\mathbf{2}$						4
$\times\mathbf{3}$						1
$\times\mathbf{4}$						8
$\times\mathbf{5}$						5
$\times\mathbf{6}$						2

Como habíamos comentado, al realizar las multiplicaciones el dígito del inicio aumenta en cada caso, entonces al acomodar los 6 dígitos del final de nuestra tabla en orden ascendente, obtenemos los dígitos de la primera columna de nuestra tabla, quedando de la siguiente manera.

$\times\mathbf{1}$	1					7
$\times\mathbf{2}$	2					4
$\times\mathbf{3}$	4					1
$\times\mathbf{4}$	5					8
$\times\mathbf{5}$	7					5
$\times\mathbf{6}$	8					2

Ahora acotemos. Si el número original tuviera como sus dos primeros dígitos al 1 y al 5, al multiplicar por 6 obtendríamos un número que comienza con 9, lo cual es descartado por el acomodo que ya tenemos en la tabla.

Si el número original comenzara con 13, al multiplicar por 6 no tendríamos el 8 del inicio, menos aún si nuestro número comienza con 12. Ya que multiplicar por un número que comienza con 12 no nos alcanza para obtener el 8 y, multiplicar por un número que comienza con 15 se pasa del resultado deseado, el número original debe comenzar con 14.
Si el número original empezara con los dígitos 145, al multiplicarlo por 2 obtendríamos un número que comienza con 29, pero 9 no es uno de los posibles dígitos del número original. Así que la única opción que nos queda es que el número original comience con 142.
Esto nos deja solo dos posibilidades para el número original: 142857 y 142587.
Al multiplicar 142587×3 obtenemos 427761, que tiene dígitos repetidos, por lo que la única respuesta posible es 142857.

Unas palabras finales

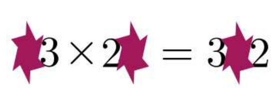
Es importante tener en cuenta que, aunque para alguien con experiencia, estos problemas pueden parecer muy básicos. Si estamos trabajando con chicos de primaria, principalmente de primaria baja, estos problemas tienen un grado de dificultad bastante alto. Se recomienda que una secuencia de problemas para chicos de primaria que apenas comienzan su participación en olimpiadas, debe comenzar verificando si en realidad los alumnos conocen el algoritmo de la multiplicación y tienen pericia con él.
Los problemas mostrados anterioremente, aunque solo requieren del algoritmo de la multiplicación, son de concursos nacionales e internacionales, por lo que no son problemas sencillos. Es necesario trabajar previamente con los alumnos problemas de menor dificultad. A continuación dejamos al lector una serie de problemas relacionados, de un nivel de dificultad más básico, que pueden ser usados en entrenamientos escolares, por ejemplo, para preparar alumnos para una primera etapa estatal o para un concurso nacional.

Ejercicios

1) ¿Cuál es el dígito marcado con $*$ en la siguiente multiplicación?

$$\begin{array}{cccc} & 5 & 3 & 6 \\ & & \times & * \\ \hline 3 & * & 5 & 2 \end{array}$$

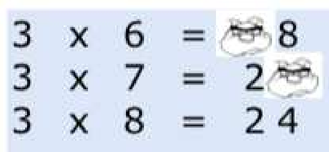
2) Mónica multiplicó correctamente dos números de dos dígitos en una hoja de papel. Luego puso unas calcomanías encima de tres dígitos como se muestra en la figura. ¿Cuál es la suma de los tres dígitos que quedaron tapados?



3) En la figura se muestra una multiplicación y cada asterisco representa un dígito (posiblemente distintos entre sí). ¿A qué es igual la suma de los dígitos del resultado de la multiplicación?

$$\begin{array}{cccccc} & & & * & * & * \\ & & \times & 1 & * & * \\ \hline & & 2 & 2 & * & * \\ + & & 9 & 0 & * & \\ & * & * & 2 & & \\ \hline & 5 & 6 & * & * & * \end{array}$$

4) Martha ha hecho un bonito póster con las tablas de multiplicar del 2 al 9, desde $2 \times 1 = 2$ hasta $9 \times 10 = 90$. En cuanto se ha despistado, ha llegado Comenúmeros y se ha comido absolutamente todos los unos que había en el póster. ¿Cuántos unos se ha comido el bribón?



5) En la figura de la izquierda se muestra un ejemplo de una tabla de multiplicación. La información que contiene es simplemente que $5\times 4 = 20$, $7\times 4 = 28$, $5\times 3 = 15$ y $7 \times 3 = 21$.
En la figura de la derecha se muestra otra tabla de multiplicación en la que se borraron algunos números. ¿Qué número va en lugar de A?

×	**4**	**3**
5	20	15
7	28	21

×		
	35	63
	30	A

6) El producto de tres dígitos a, b y c es igual al número de dos dígitos bc y, el producto de los dígitos b y c, es igual a c. ¿Cuánto vale a si $c = 2$?

7) Tony realiza la multiplicación $2023\times 2025\times 2025\times 2026\times 2027$. ¿Cuál es el dígito de las unidades del resultado de dicha operación?

8) Si multiplicas el número de 6 dígitos $abcde4$ por 4, obtienes como resultado el número de 6 dígitos $4abcde$. Si cada letra representa un dígito distinto, calcula el valor de la suma $a + b + c + d + e$.

9) ¿Cuántos números de tres dígitos cumplen que cuando multiplicas sus dígitos el resultado es 24?

10) En la multiplicación $BEST \times 99 = BEE551$, cada letra representa un dígito diferente de 0. Determina el valor del dígito B.

11) Goraspita piensa tres números, multiplica cada uno de ellos por sí mismo y después al mayor de esos productos le resta la suma de los otros dos productos. Por ejemplo, con los números 8, 10, 3, obtiene: $10 \times 10 - (8 \times 8 + 3 \times 3) = 27$.
Goraspita se pone muy contento cuando el resultado de la cuenta da cero. Para hoy se ha propuesto ver qué pasa con las siguientes cuatro ternas de números: $(3, 4, 5)$, $(13, 10, 12)$, $(12, 13, 5)$, $(9, 12, 15)$. ¿Con cuántas de estas ternas obtendrá cero?

12) Los números enteros del 1 al 9 se escriben en los cuadros de la siguiente cuadrícula, uno en cada cuadro sin repetir. Los números que están a la derecha de cada fila son el producto de los dígitos escritos en la fila. Los números que están abajo de cada columna son el producto de los dígitos escritos en la columna. Encuentra el valor de la suma de los números escritos en los cuadros de las esquinas de la cuadrícula.

			15
			64
			378
14	144	180	

Las siguientes fuentes bibliográficas resultan muy útiles para obtener problemas para estudiantes de Primaria. La primera es de la Olimpiada Canguro Matemático Mexicano, comenzando con el nivel escolar. Estos problemas resultan muy útiles para los talleres que se llevan a cabo en escuelas, cuya función es preparar alumnos para un concurso estatal. La segunda es de la Olimpiada Matemática Argentina, los problemas del nivel Nandú. Estos exámenes cuentan con varias etapas y cada etapa tiene tres niveles de dificultad. Estos problemas ayudan mucho en la etapa de preparación para un concurso nacional. Por último, la tercera es de la EMIC (Elementary Mathematics International Competition), para alumnos con mucha experiencia. Contiene problemas que son adecuados para preparar a chicos para concursos internacionales.

Bibliografía

1) Examen Canguro Matemático Mexicano, Nivel Escolar.
https://www.ommenlinea.org/actividades/concursos/canguro-matematico/

2) Olimpiada Matemática Argentina, nivel Nandú.
https://www.oma.org.ar/enunciados/index.htm

3) Elementary Mathematics International Competition (EMIC).
https://chiuchang.org/imc/en/

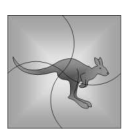
Problemas de práctica

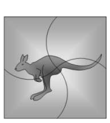
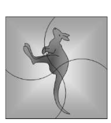
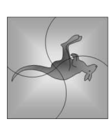
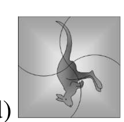
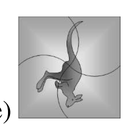
A continuación presentamos los exámenes de invitación a la OMM 2022. En esta ocasión, hubo 4 niveles: Escolar (hasta quinto grado de primaria), Benjamín (hasta primer año de secundaria), Cadete (hasta primer año de bachillerato) y Estudiante (a partir de segundo año de bachillerato). Aprovechamos para invitarte a que contribuyas a enriquecer esta sección de la revista y por eso ponemos a tu disposición la dirección revistaomm@gmail.com, donde con gusto recibiremos tus propuestas.

Examen de invitación, Nivel Escolar

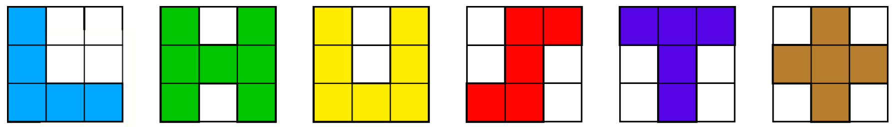
Problema 1. Lucy tiene las 5 tarjetas que se muestran. Solo se ve un lado de las tarjetas y se sabe que las que tienen una flor en un lado, por atrás tienen un perro y viceversa. Las que tienen un gato en una cara, por detrás tienen tienen un árbol y viceversa. ¿Cuántas flores en total tienen las tarjetas de Lucy?

Problema 2. ¿Cuál de los dibujos se puede rotar de manera que coincida con la figura que se muestra?

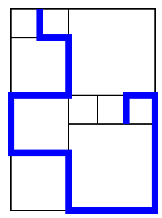


(a)  (b)  (c)  (d)  (e) 

Problema 3. María dibuja figuras en un papel cuadrado como se muestra. ¿Cuántas de las figuras no tienen el mismo perímetro que la hoja de papel?

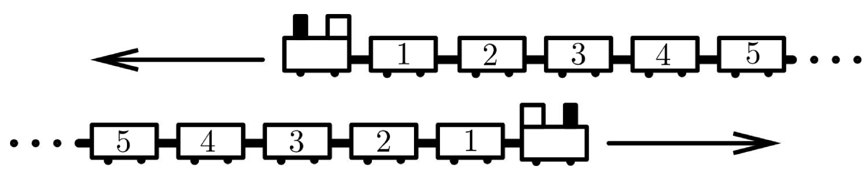


Problema 4. El rectángulo de la figura está dividido en cuadrados de tres tamaños diferentes. Si el lado del más pequeño mide 20 cm, ¿cuántos centímetros mide la línea gruesa?

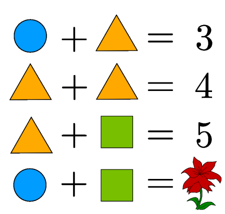


Problema 5. Marcela tiene 20 pesos. Cada una de sus cuatro hermanas tiene 10 pesos. ¿Cuántos pesos tiene que darle Marcela a cada una de sus hermanas para que todas tengan la misma cantidad?

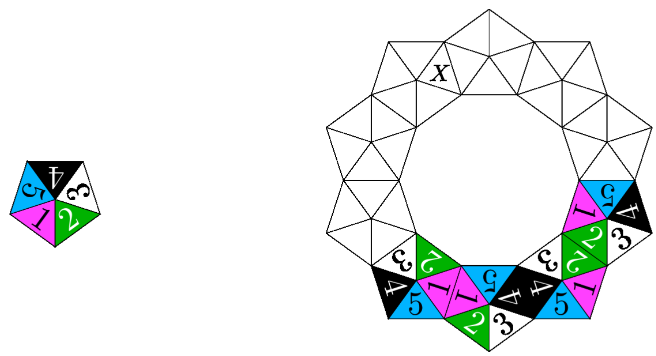
Problema 6. Dos trenes idénticos, cada uno con 31 vagones, viajan en direcciones opuestas. Cuando los vagones con número 19 de cada uno de los dos trenes están uno frente al otro, ¿qué vagón del segundo tren está enfrente del que lleva el número 12 en el primero?



Problema 7. ¿Cuál es el número cubierto por la flor?

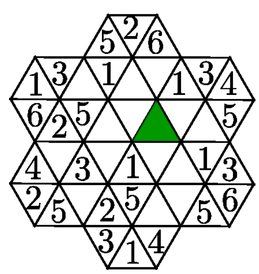


Problema 8. Con fichas en forma de pentágono (todas idénticas) como la que se muestra a la izquierda, se quiere formar la corona que se muestra a la derecha, de manera que al pegar dos pentágonos, las caras adyacentes tengan el mismo número. Ya se han colocado 4 fichas. ¿Qué número queda en la casilla marcada con X?



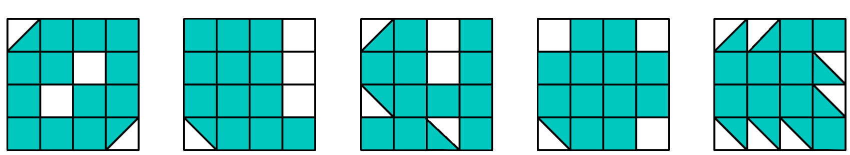
Problema 9. La suma de 5 números enteros consecutivos es 40. ¿Cuánto vale la suma del menor con el mayor?

Problema 10. En los triángulos de la figura deben escribirse los números $1, 2, 3, 4, 5$ y 6, de tal manera que cada 6 triángulos que formen un hexágono tengan número distinto (nótese que algunos triángulos pertenecen a varios hexágonos). Algunos de los números ya se escribieron. ¿Qué número debe ir en el triángulo sombreado?



Examen de invitación, Nivel Benjamín

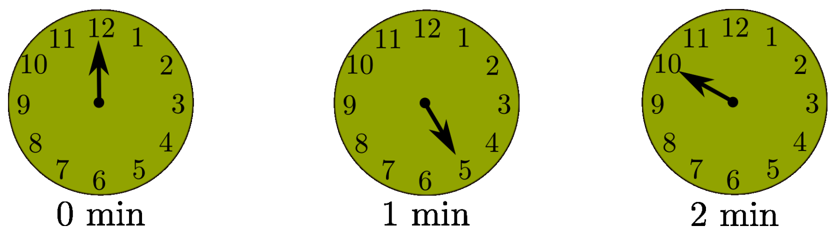
Problema 1. ¿Cuál de las siguientes figuras tiene la mayor área sombreada?



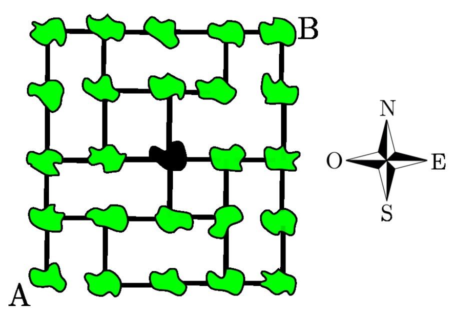
(a) (b) (c) (d) (e)

Problema 2. En una caja hay pelotas de 5 colores diferentes: 2 rojas, 3 azules, 10 blancas, 4 verdes y 3 amarillas. José toma pelotas de la caja, de una por una, con los ojos vendados. Las pelotas no se regresan a la caja. ¿Cuál es la menor cantidad de pelotas que José debe sacar para asegurar que ya hay dos pelotas del mismo color afuera?

Problema 3. El reloj que se muestra tiene solo una manecilla y trabaja de manera extraña, pues cada minuto salta 5 números. Empieza a las 12, un minuto después marca 5 y después de dos minutos marca 10. ¿Cuántos minutos le tomará volver a marcar 12?

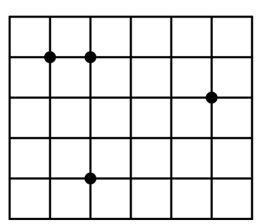


Problema 4. La figura muestra un mapa de islas y cómo están conectadas por puentes. El cartero tiene que visitar cada isla exactamente una vez. Empieza en la isla marcada con A y debe terminar en la isla marcada con B. Ya llegó a la isla negra en el centro del mapa. ¿Cómo debe moverse en su siguiente paso?

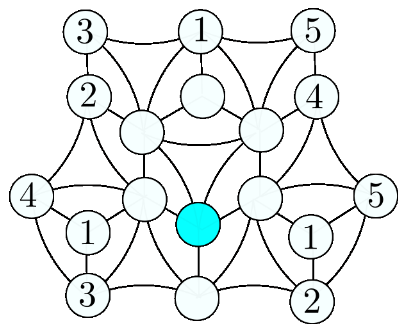


(a) Hacia el Norte(b) Hacia el Sur(c) Hacia el Este(d) Hacia el Oeste(e) No es posible

Problema 5. La cuadrícula está formada por cuadritos de lado 1 cm. En ella se marcaron 4 puntos. ¿Cuál es el área más pequeña que puede tener un triángulo que tenga por vértices a 3 de los puntos marcados?

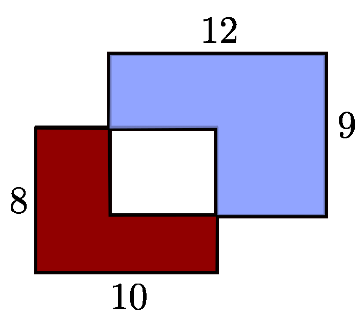


Problema 6. Se quiere poner en cada uno de los circulitos de la figura, cualquiera de los números $1, 2, 3, 4$ o 5, de manera que circulitos que estén unidos mediante una línea tengan distinto número. Ya se han puesto algunos. ¿Qué número debe ir en el circulito sombreado?

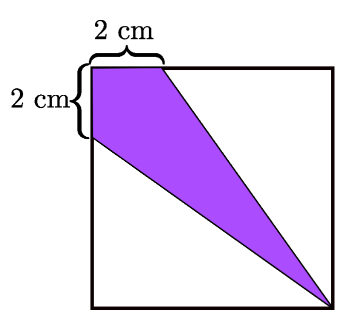


Problema 7. En una carrera participaron 1001 personas. El número de personas a las que Juana les ganó, es el triple del número de personas que le ganaron a Juana. ¿En qué lugar clasificó Juana?

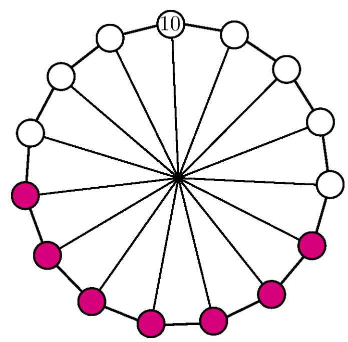
Problema 8. Dos rectángulos de 8×10 y 9×12 se traslapan como muestra la figura. Si el área sombreada más obscura mide 47, ¿cuánto mide el área sombreada más clara?



Problema 9. El lado del cuadrado que se muestra mide 6 cm. ¿Qué fracción del cuadrado está sombreada?

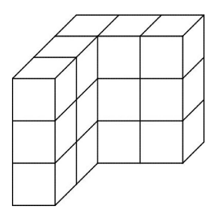


Problema 10. En una rueda hay 15 números. Solo el número 10 es visible. La suma de cualesquiera 7 números consecutivos en la rueda es la misma. ¿Exactamente cuántos de los números $75, 216, 365$ y 2020 pueden ser la suma de los 15 números?



Examen de invitación, Nivel Cadete

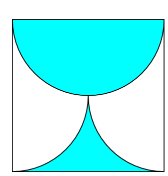
Problema 1. Raymundo construyó un cubo de 3×3 usando cubos de 1×1. Fue a jugar y, cuando regresó, se dio cuenta que su hermanito Jaime había tomado algunos cubos dejando la estructura que se muestra. ¿Cuántos cubos tomó su hermanito?



Problema 2. En total, durante los últimos tres partidos, un equipo de futbol anotó 3 goles y recibió 1 gol. Si sabemos que ganó un juego, empató otro y perdió otro, ¿cuál fue el resultado del partido que ganó?

(a) 3 : 0 (b) 1 : 0 (c) 2 : 1 (d) 3 : 1 (e) 2 : 0

Problema 3. Dentro de un cuadrado de lado 2 se trazaron semicírculos (con 3 de los lados como diámetros) y se sombreó como muestra la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



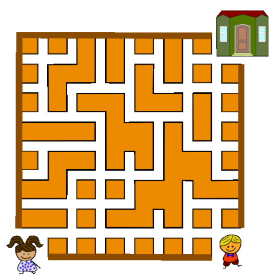
Problema 4. Notamos que $2022 = 2222 - 200$, es decir, 2022 es la diferencia entre un número de 4 cifras, $\overline{aaaa}$, y un número de 3 cifras, $\overline{abb}$, donde $a = 2$ y $b = 0$. De todos los números que se forman así, se toma el mayor y el menor. ¿Cuál es la suma de esos dos números?

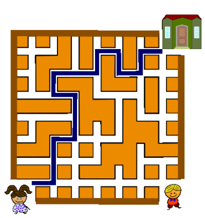
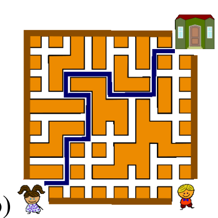
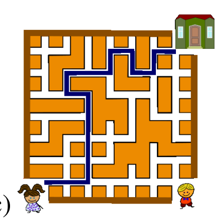
Problema 5. Un rectángulo se partió en tres rectángulos. Uno tiene lados de longitudes 7 y 11; otro tiene lados de longitudes 4 y 8. ¿Cuál es la mayor área que puede tener el otro rectángulo?

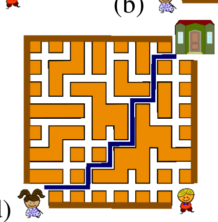
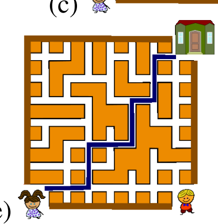
Problema 6. En cada cuadrito de la cuadrícula que se muestra se debe poner un número de manera que las sumas de cada renglón y de cada columna sean todas el mismo número. ¿Qué debe escribirse en la casilla sombreada?

1		6	3
	2		8
	7		4
		7	

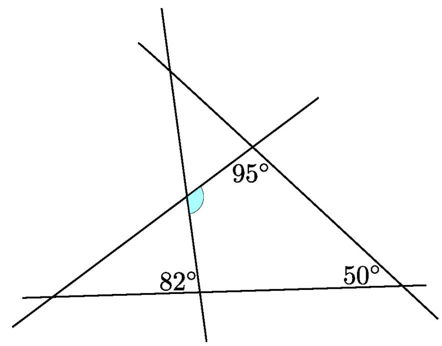
Problema 7. Susi y Leo fueron a la escuela. Susi fue por la mañana y le platicó a Leo por teléfono el recorrido que había hecho. Leo fue por la tarde y resultó que no pasó por ningún lugar por el que había pasado Susi. ¿Cuál es el camino que pudo haber seguido Susi?



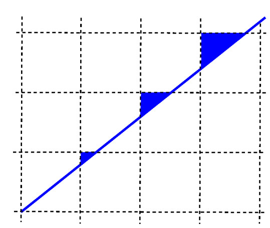
(a) 
(b) 
(c) 

(d) 
(e) 

Problema 8. En la figura se han marcado algunos ángulos que se forman entre 4 líneas rectas. ¿Cuántos grados mide el ángulo sombreado?

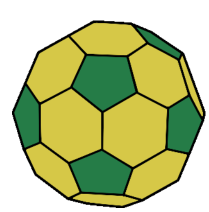


Problema 9. En una cuadrícula está dibujada una línea recta y están sombreados los triángulos que se forman con las líneas de la cuadrícula, como se muestra. ¿Cuál de las siguientes puede ser la razón entre las áreas de los triángulos?



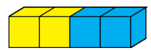
(a) $1:2:3$ (b) $1:2:4$ (c) $1:3:9$ (d) $1:4:8$ (e) Ninguna de las anteriores

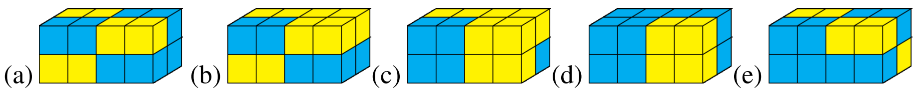
Problema 10. Una pelota de futbol está formada de piezas verdes y amarillas. Las piezas verdes son pentágonos regulares y las piezas amarillas son hexágonos regulares. Cada pentágono está rodeado por 5 hexágonos y cada hexágono está rodeado por 3 pentágonos y 3 hexágonos. La pelota tiene 12 pentágonos verdes. ¿Cuántos hexágonos amarillos tiene?



Examen de invitación, Nivel Estudiante

Problema 1. ¿Qué figura puede construirse con 4 piezas iguales a la que se muestra?

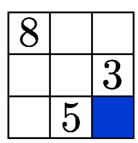




Problema 2. Amira va manejando de la ciudad A a la ciudad B y se va encontrando cada vez con las dos señales que se muestran, solo que una de ellas es incorrecta. ¿Cuál es?

(a) (b) (c) (d) (e)

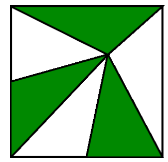
Problema 3. En cada casilla de la cuadrícula que se muestra se debe poner un número entero positivo de manera que en cada renglón y en cada columna, el número de en-medio sea el promedio de los otros dos. Ya se han escrito tres de los números. ¿Qué número debe ir en la casilla sombreada?



Problema 4. El reloj de Marisol va retrasado por 10 minutos, pero ella cree que está adelantado por 5 minutos. El reloj de Mónica está adelantado por 5 minutos, pero ella cree que está retrasado por 10 minutos. Marisol cree que son las $12:00$. ¿Qué hora cree Mónica que es?

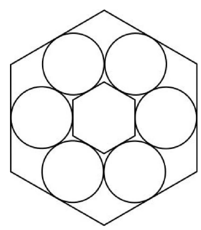
Problema 5. En un torneo de futbol compiten cuatro equipos: A, B, C y D. Cada uno juega una vez contra cada uno de los demás (es decir, tres veces en total). En cada partido, el ganador obtiene 3 puntos, el perdedor obtiene 0 y, en caso de empate, ambos equipos obtienen 1 punto. Al final del torneo A tuvo un total de 7 puntos y, cada uno de B y C, obtuvo 4 puntos. ¿Cuántos puntos obtuvo D?

Problema 6. Un cuadrado de 81 cm^2 está dividido en 6 triángulos de igual área como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide la distancia del vértice común a los triángulos, al lado inferior del cuadrado?



Problema 7. Había 101 habitantes en una isla. Algunos de ellos eran caballeros y siempre decían la verdad; otros eran mentirosos y siempre mentían. Cada día uno de los habitantes se iba y decía: "Cuando yo me vaya, quedará el mismo número de caballeros que de mentirosos." Después de 100 días solo quedó un caballero en la isla. ¿Cuántos caballeros había inicialmente?

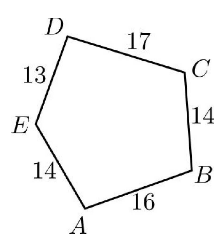
Problema 8. En la figura, los círculos son iguales y cada uno es tangente a sus dos círculos vecinos. Además, cada círculo es tangente a un lado de cada uno de los dos hexágonos, como se muestra. Si el área del hexágono pequeño es 1, ¿cuánto es el área del hexágono grande?



Problema 9. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$\sqrt{(2022+2022)+(2022-2022)+(2022\cdot 2022)+(2022\div 2022)}$$

Problema 10. En el pentágono de la figura se dibujaron cinco círculos, con centros en A, B, C, D y E. Para cada uno de los lados del pentágono, se cumple que los dos círculos que tienen centro en sus extremos se tocan exactamente en un punto. Si las longitudes de los lados del pentágono son las que se muestran en la figura, ¿cuál vértice es el centro del círculo más grande que se dibujó?



Soluciones a los problemas de práctica

Examen de invitación, Nivel Escolar

Solución del problema 1. La respuesta es 3. Hay flor en la primera tarjeta y en las dos en las que se ve un perro.

Solución del problema 2. La respuesta es (e). En la figura original, la cabeza ve en la dirección $\circlearrowright$. En todas las opciones, salvo en la (e), la cabeza ve en la dirección $\circlearrowleft$.

Solución del problema 3. La respuesta es 2. Para que el perímetro de una figura sea igual que el del papel, basta revisar que cada figura tenga en la orilla exactamente 6 líneas horizontales y 6 verticales. Vemos que las que tienen distinto perímetro son las que muestran H y U.

Solución del problema 4. La respuesta es 420 cm. El lado del cuadrado mediano es el doble que el del cuadrado pequeño, esto es, mide 40 cm. El lado del cuadrado grande mide la suma de los lados de los otros dos cuadrados, esto es, 60 cm. Entonces, la línea gruesa mide $5 \cdot 20 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 420$ cm.

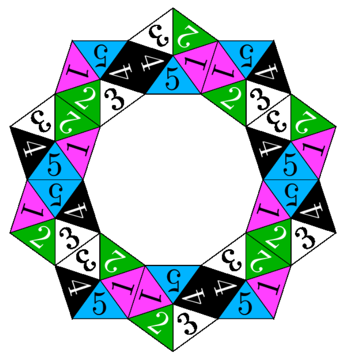
Solución del problema 5. La respuesta es 2 pesos. El excedente de 10 pesos debe repartirse entre las 5 hermanas, así que a cada una debe darle $10/5 = 2$ pesos.

Solución del problema 6. La respuesta es 26. Como $19 - 12 = 7$, tenemos que sumar 7 a 19 y el vagón del segundo tren es el que lleva el número $7 + 19 = 26$.

Solución del problema 7. La respuesta es 4. Como la suma de dos triángulos es 4, cada triángulo vale 2. Pero un triángulo más un círculo da 3, así que el círculo vale 1.

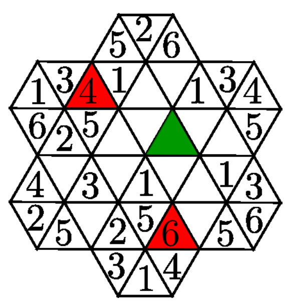
También un triángulo más un cuadrado es 5, así que el cuadrado vale 3. Por lo tanto, la flor vale $1 + 3 = 4$.

Solución del problema 8. La respuesta es 4. En el sentido contrario a las manecillas del reloj, los números que van quedando adyacentes en cada par de pentágonos son $3, 1, 4, 2, 5$ y esto se repite cíclicamente, de manera que en la casilla marcada con X va el 4. Se completa la figura como se muestra.

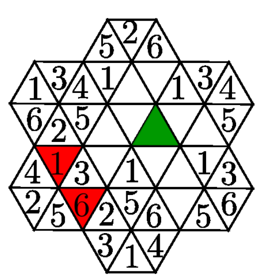


Solución del problema 9. La respuesta es 16. El número del centro es $\frac{40}{5} = 8$. Entonces, los extremos son $8 + 2 = 10$ y $8 - 2 = 6$, cuya suma es igual a $10 + 6 = 16$.

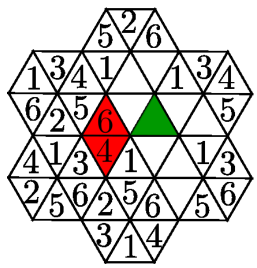
Solución del problema 10. La respuesta es 5. Empecemos por completar los dos hexágonos de la orilla a los que solo les falta un número.



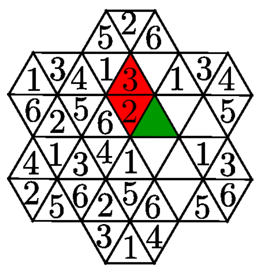
Ahora, al hexágono de abajo a la izquierda, le faltan un 1 y un 6. Como el hexágono a su derecha ya tiene un 1, entre el 5 y el 2 debe ir el 6.



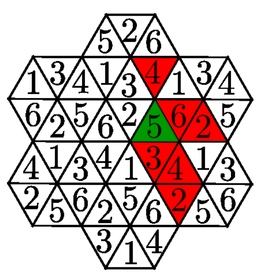
Entonces, entre el 3 y el 1 en el tercer nivel de triángulos de abajo hacia arriba, debe ir un 4 y arriba de este debe ir un 6.



En el hexágono a la izquierda arriba del triángulo marcado, faltan los números 2 y 3, pero el 2 no puede ir arriba porque en el hexágono de más arriba ya hay un 2.



Por lo tanto, el número que va en el triángulo sombreado es el 5 porque en el hexágono central faltan los números 3 y 5, pero el 3 no puede ser. La figura completa queda como sigue.



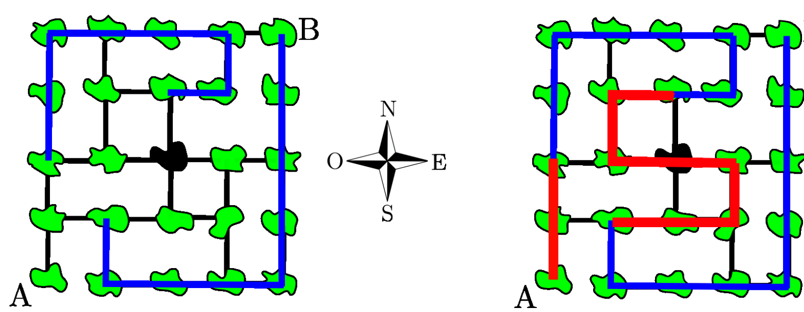
Examen de invitación, Nivel Benjamín

Solución del problema 1. La respuesta es (a). Es más fácil revisar cuál tiene la mayor área no sombreada, tomando en cuenta que cada cuadrito equivale a dos triángulos. La figura (a) tiene 6 triángulos no sombreados mientras que todas las demás figuras tienen 7.

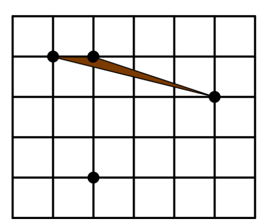
Solución del problema 2. La respuesta es 6. Si se sacan 5 pelotas, es posible que se haya tomado una de cada color. Pero, si se toman 6, forzosamente un color debe estar repetido.

Solución del problema 3. La respuesta es 12. Debemos determinar el primer número que multiplicado por 5 sea múltiplo de $60 = 5 \cdot 12$. Claramente, el número buscado es 5.

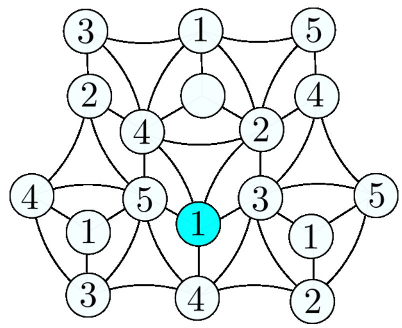
Solución del problema 4. La respuesta es (c). No se trata de dibujar todo el camino desde el principio, sino de analizar porciones del camino que deben ser forzadas. Por ejemplo, hay islas que solo están conectadas con otras 2, así que el camino a través de ellas está totalmente determinado (aunque no se sepa el sentido ahí). Si marcamos en un dibujo estas porciones, ya es fácil completar todo el camino, como mostramos en la siguiente figura.



Solución del problema 5. La respuesta es $\frac{1}{2}$. Notamos que tanto la base como la altura de cualquiera de los triángulos debe medir al menos 1 cm, así que por lo menos el área debe ser $\frac{1}{2}$. En la siguiente figura se muestra un triángulo que tiene esa área.



Solución del problema 6. La respuesta es 1. Observamos que justo arriba del circulito sombreado deben ir 5 y 3, como se muestra en la figura. Luego observamos que más arriba deben ir 4 y 2. Finalmente, en el circulito sombreado solo puede ir el 1. Debajo de él debe ir 4 y, en el circulito que está vacío en la figura, puede ir cualquiera de 3 o 5.



Solución del problema 7. La respuesta es 251. Aparte de Juana hay 1000 competidores. Como $1000/4 = 250$, a Juana le ganaron 250 personas y ella le ganó a $3 \cdot 250 = 750$. Por lo tanto, Juana quedó en el lugar número 251.

Solución del problema 8. La respuesta es 75. El área blanca mide $(8 \cdot 10) - 47 = 33$. Así que el área sombreada más clara mide $(12 \cdot 9) - 33 = 75$.

Solución del problema 9. La respuesta es $\frac{1}{3}$. Primera forma: Al trazar la diagonal en la parte sombreada para partirla en dos triángulos iguales, vemos que cada uno de esos triángulos tiene base 2 cm y altura 6 cm, así que su área es la tercera parte del área del triángulo con base 6 cm y altura 6 cm (que es el triángulo que forman dos lados del cuadrado con la diagonal).
Segunda forma: Cada triángulo no sombreado tiene área $\frac{4\times 6}{2} = 12$ cm^2. Entonces, el área sombreada mide $36 - 2(12) = 12$ cm^2, la cual representa $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ del área del cuadrado.

Solución del problema 10. La respuesta es 0. Notamos que cada 8 posiciones debe repetirse el 10 porque el primero junto con los 6 que siguen suman lo mismo que esos 6 con el octavo. Pero 8 y 15 no tienen factores en común, así que al ir recorriendo de 8 en 8, digamos, en el sentido de las manecillas del reloj, abarcamos todas las posiciones. Concluimos que todos los números son iguales a 10. La única suma posible es 150, que no aparece en la lista.

Examen de invitación, Nivel Cadete

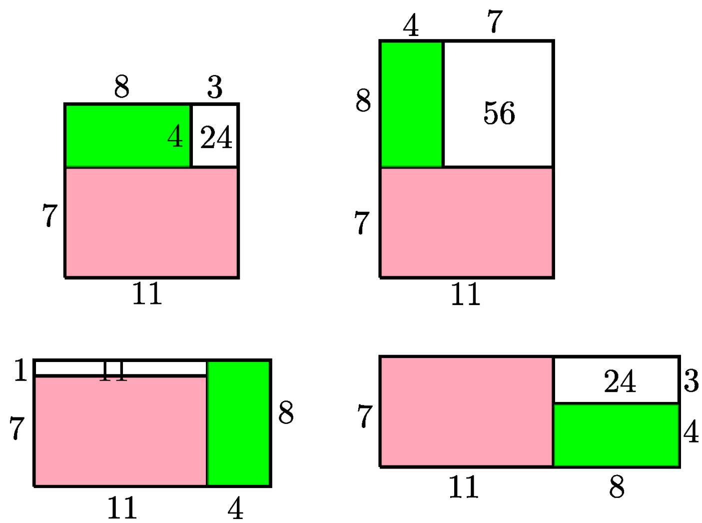
Solución del problema 1. La respuesta es 12. El hermanito de Raymundo tomó $2 \times 2 \times 3 = 12$ cubitos.

Solución del problema 2. La respuesta es (a). Es claro que el equipo recibió el gol en el partido que perdió, así que en ese partido no anotó ninguno. En el partido que empató no recibió ningún gol, así que tampoco anotó ninguno en ese. De esta forma, el marcador del partido que ganó es $3 : 0$.

Solución del problema 3. La respuesta es 2. El área del semicírculo es $\frac{\pi}{2}$. La parte sombreada de abajo, es la mitad de la diferencia entre el área del cuadrado y la de dos semicírculos, o sea, $\frac{4-\pi}{2}$. En total, el área sombreada es igual a $\frac{\pi}{2} + \frac{4-\pi}{2} = 2$.

Solución del problema 4. La respuesta es 10011. El mayor número se obtiene con $a = 9$ y $b = 0$: $9999 - 900 = 9099$. El menor se obtiene con $a = 1$ y $b = 9$: $1111 - 199 = 912$. La suma de estos dos números es $9099 + 912 = 10011$.

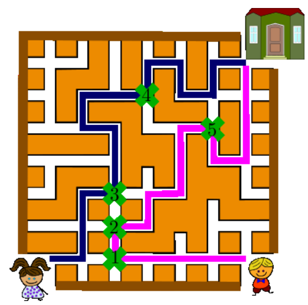
Solución del problema 5. La respuesta es 56. Fijemos el rectángulo de 11×7 y analicemos las 4 distintas posibilidades de acuerdo a si el lado de longitud 4 o el lado de longitud 8 está junto al lado de longitud 11 o al de longitud 7.



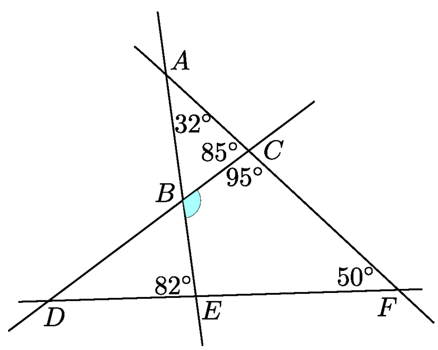
Solución del problema 6. La respuesta es 7. El primer renglón y la segunda columna comparten un cuadro vacío, de manera que las sumas en las dos hileras que comparten este cuadro deben ser iguales, es decir, en el cuarto renglón y segunda columna debe ir un 1 ya que $1 + 6 + 3 = 2 + 7 + 1$. El mismo razonamiento lo aplicamos al cuarto renglón y cuarta columna para ver que lo que va en el cuadro sombreado debe sumar lo mismo con 1 y 7 que $3 + 8 + 4 = 15$, o sea que en ese cuadro va un 7. Podemos llenar toda la cuadrícula escogiendo cualquier número para el cuadro inferior derecho. Por ejemplo, si escogemos poner ahí un 0 obtenemos la cuadrícula completa que se muestra en la figura.

1	5	6	3
3	2	2	8
4	7	0	4
7	1	7	0

Solución del problema 7. La respuesta es (a). En la figura se han puesto cruces numeradas sucesivamente en los puntos por donde deben pasar los caminos de Susi y Leo, para que se cumpla la condición de que no se cruzan. Además se ha completado un posible camino de Leo (de hecho, es la única posibilidad si Leo no pasa dos veces por un mismo punto).



Solución del problema 8. La respuesta es $117°$. Primera forma. Sean A, B, C, D, E y F los puntos de intersección como se ve en la figura. Recordemos que el ángulo exterior a un triángulo es la suma de los ángulos internos opuestos a él. Entonces el ángulo en A sumado con el ángulo en F debe ser igual a $82°$, así que el ángulo en A mide $32°$. El ángulo en C interior en el triángulo ABC mide $180° - 95° = 85°$. Así, el ángulo buscado es igual a $32° + 85° = 117°$.



Segunda forma. Con las letras como en la figura anterior, el ángulo en E interior en el cuadrilátero $BCFE$ mide $180° - 82° = 98°$. Entonces, el ángulo buscado mide $360° - (95° + 50° + 98°) = 117°$.

Solución del problema 9. La respuesta es (e). Los triángulos son semejantes en razón $1 : 2 : 3$, de manera que sus áreas están en razón $1 : 4 : 9$.

Solución del problema 10. La respuesta es 20. Hay 12 pentágonos en total y cada uno toca cinco hexágonos, o sea que hay $12 \times 5 = 60$ costuras entre hexágonos y pentágonos. Cada hexágono está unido con otros 3 pentágonos (tiene 3 costuras de este tipo), así que el total de hexágonos es $\frac{60}{3} = 20$.

Examen de invitación, Nivel Estudiante

Solución del problema 1. La respuesta es (a). En ningún caso puede haber una línea de 4 del mismo color, así que ninguna de (b), (c), (d) o (e) es posible. Para construir (a), hay que poner 3 piezas en la misma dirección que la muestra y solo hay que girar la de arriba al frente.

Solución del problema 2. La respuesta es (e). La distancia entre las ciudades A y B debe ser la suma de lo que muestran las dos señales. En cada una la suma es 11 km, salvo en la (e) que es 13 km.

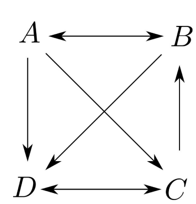
Solución del problema 3. La respuesta es 4. Primero notamos que el número en la casilla superior derecha debe ser un número par, pues sumado con 8 debe ser par la suma (para que el promedio sea un número entero). Como en la columna de la derecha el promedio es 3, las únicas posibilidades para esa casilla son 2 o 4. Intentamos con ambos y vemos que con 4 es imposible, pues el promedio de 5 y 6 no es un entero. Sin embargo, con 2 obtenemos que en la casilla sombreada va el 4.

8	6	4
	?	3
	5	2

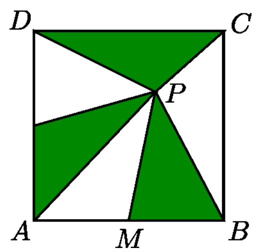
8	5	2
7	5	3
6	5	4

Solución del problema 4. La respuesta es $12:30$. Si Marisol cree que son las $12:00$, es porque su reloj marca las $12:05$ (dado que cree que está adelantado 5 minutos). Como el reloj de Marisol en realidad está atrasado 10 minutos, entonces la hora real es $12:15$. Puesto que el reloj de Mónica está adelantado 5 minutos, marca las $12:20$. Pero Mónica cree que su reloj está atrasado 10 minutos, por lo que cree que son las $12:30$.

Solución del problema 5. La respuesta es 1. La única forma de sumar 7 con tres de los números 0, 1 y 3 es $7=3+3+1$. De la misma manera, la única forma de lograr 4 es $4=3+1+0$. Como cada empate da 1 punto a cada uno de los equipos que empatan, el número de 1's debe ser par y, entonces, D empató uno o tres juegos. Por otro lado, la cantidad de 0's debe ser igual a la de 3's. Podemos deducir entonces que los puntos de D son $1, 0, 0$. Una forma en que esto es posible se muestra en el siguiente esquema, en el que cada flecha va del ganador al perdedor.



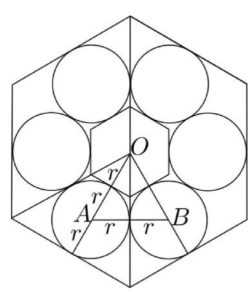
Solución del problema 6. La respuesta es 6. Sean A, B, C y D los vértices del cuadrado, P el vértice común de los triángulos y M el otro vértice que comparten los triángulos que tienen una base sobre el lado inferior del cuadrado (ver la figura).



Como las áreas de los triángulos APM y MPB son iguales, M es el punto medio de AB. Por otro lado, también son iguales las áreas de los triángulos CDP y MPB, lo cual implica que las respectivas alturas desde A están en razón $1 : 2$, esto es, la distancia desde P al lado superior del cuadrado es la mitad de la distancia desde P al lado inferior. Como el lado del cuadrado mide 9 cm, la distancia buscada es 6 cm.

Solución del problema 7. La respuesta es 51. El penúltimo en irse deja solo un habitante en la isla, así que no es posible lo que dice y es mentiroso. Entonces, el antepenúltimo dice la verdad y es caballero. Así sucesivamente vemos que son caballeros los que se van en posición impar y son mentirosos los otros.

Solución del problema 8. La respuesta es 9. Sean O el centro de la figura, A y B los centros de dos círculos consecutivos (ver la figura).



Por simetría, el triángulo OAB es equilátero. Sea r el radio de los círculos. Entonces, como $AB = 2r$, tenemos que $AO = 2r$, por lo que las alturas de los triángulos que forman el hexágono pequeño miden r. Pero entonces la altura de los triángulos que forman el hexágono grande miden $3r$ y de aquí que los hexágonos tienen sus longitudes en razón $1 : 3$. Por lo tanto, el área buscada mide $3^2 = 9$.

Solución del problema 9. La respuesta es 2023. Resolvemos una por una las operaciones:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(2022+2022)+(2022-2022)+(2022\cdot 2022)+(2022\div 2022)}\\
&=\sqrt{(2\cdot 2022)+0+(2022\cdot 2022)+1}\\
&=\sqrt{2022^2+2\cdot 2022+1}=\sqrt{(2022+1)^2}\\
&=2023.
\end{aligned}$$

Solución del problema 10. La respuesta es A. Sean a, b, c, d y e los radios de los círculos con centros en A, B, C, D y E, respectivamente. Tenemos que

$$\begin{aligned}
a+b&=16, &(1)\\
b+c&=14, &(2)\\
c+d&=17, &(3)\\
d+e&=13, &(4)\\
e+a&=14. &(5)
\end{aligned}$$

De (1) y (2) tenemos que $c<a$; de (2) y (3), $b<d$; de (3) y (4) $e<c$; de (4) y (5), $d<a$ y, finalmente, de (1) y (5), $e<b$. Combinando obtenemos que $e<c<a$ y $b<d<a$, así que a es el mayor.

Problemas de Entrenamiento

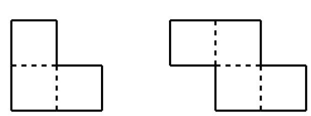
Problemas de Entrenamiento.
Año 2023 No. 1.

Presentamos ahora los 10 problemas de entrenamiento elegidos para este primer número del año 2023 de tu revista. Te recordamos que las soluciones de los problemas en esta sección no las publicamos en este momento, por lo que te invitamos a que los resuelvas y nos envíes tus soluciones. Las soluciones de los problemas de esta sección se escogerán de entre las participaciones recibidas por parte de la comunidad olímpica de todo el país.

Con el fin de dar tiempo a nuestros lectores para la redacción y envío de sus trabajos, las soluciones de los problemas presentados en cada número de la revista, se publican 3 números después. Para ello, ponemos a tu disposición nuestra dirección: revistaomm@gmail.com y ten la seguridad de que tan pronto recibamos tu contribución, inmediatamente nos pondremos en contacto contigo para comentar y en su caso, publicar tu trabajo. ¡Te invitamos a intentarlo!

Problema 1. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de enteros positivos tal que la suma de cualesquiera tres elementos distintos, es un número primo. Determina el máximo valor posible de n.

Problema 2. Una cuadrícula de $(2m-1)\times(2n-1)$, con $m \geq 4$ y $n \geq 4$, se cubre con piezas de las siguientes formas:



donde cada cuadrito es de 1×1. Las piezas pueden ser rotadas y reflejadas, siempre y cuando sus aristas sean paralelas a las de la cuadrícula. Si las piezas deben cubrir toda el área de la cuadrícula sin traslaparse, ¿cuál es el mínimo número de piezas necesarias para lograr esto?

Problema 3. Determina todos los enteros positivos a, b, c, d y n tales que

$$a^a + b^b + c^c + d^d = n^n.$$

Problema 4. Sean $a \neq 0$ y $b \neq -1$ números reales. Si el polinomio $x^3 - ax^2 + bx - a$ tiene tres raíces reales positivas, determina el valor mínimo del cociente

$$\frac{2a^3 - 3ab + 3a}{b+1}.$$

Problema 5. Sea $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de polinomios en la variable x con coeficientes enteros. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ tales que, para cada polinomio $p(x)$,

1) $f(p(x) + 1) = f(p(x)) + 1$ y,

2) si $f(p(x)) \neq 0$, entonces $f(p(x))$ divide a $f(p(x)q(x))$ para todo polinomio $q(x)$.

Problema 6. Sean ABC un triángulo y M un punto en su interior tal que $\angle MAB = 10°$, $\angle MBA = 20°$, $\angle MAC = 40°$ y $\angle MCA = 30°$. Demuestra que el triángulo ABC es isósceles.

Problema 7. Determina todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que para cualesquiera números reales x, y,

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2.$$

Problema 8. Sean λ un número real no negativo y n un entero positivo, tales que

$$\lfloor \lambda^{n+1} \rfloor, \lfloor \lambda^{n+2} \rfloor, \ldots, \lfloor \lambda^{4n} \rfloor,$$

son cuadrados perfectos. Demuestra que $\lfloor \lambda \rfloor$ es un cuadrado perfecto.
(Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x).

Problema 9. Pinocho y Gepetto toman turnos quitando piedras de un montón de n, empezando por Pinocho. El juego tiene las siguientes reglas:

a) Si queda una sola piedra, el jugador en turno puede quitarla.

b) Si queda más de una piedra, el jugador en turno solo puede quitar a lo más la mitad de las piedras del montón.

c) A partir del segundo turno, si el jugador anterior quitó k piedras, el jugador en turno debe quitar un número de piedras primo relativo con k.

Gana quien quite la última piedra. Determina el mayor valor de $n \leq 50$ tal que Gepetto tiene estrategia ganadora.

Problema 10. Determina todas las parejas de enteros positivos (a, b) tales que

$$a^3 + b^3 = a^2 + 42ab + b^2.$$

Soluciones a los Problemas de Entrenamiento. Año 2022 No. 2.

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 2, año 2022. Recuerda que en el siguiente número de la revista aparecerán las soluciones de los problemas de entrenamiento propuestos en Tzaloa No. 3, año 2022, por lo que aún tienes tiempo de enviarnos tus soluciones.

Problema 1. Un grillo está parado en el origen del plano cartesiano. El grillo puede hacer saltos de longitud 5 siempre y cuando el salto inicie y termine en un punto de coordenadas enteras. ¿Cuál es el mínimo número de saltos con los que el grillo puede llegar al punto $(2021, 2021)$?

Solución. Llamemos a un salto (a, b) si avanza a unidades horizontales y b unidades verticales. Entonces, el grillo puede hacer los saltos $(0, 5)$, $(0, -5)$, $(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(3, 4)$, $(3, -4)$, $(-3, 4)$, $(-3, -4)$, $(4, 3)$, $(4, -3)$, $(-4, 3)$ y $(-4, -3)$. No puede hacer otros porque estas parejas son las únicas soluciones enteras de la ecuación $a^2+b^2 = 25$. Ahora, el grillo puede hacer 288 saltos $(3, 4)$, 288 saltos $(4, 3)$ y así llegar al punto $(2016, 2016)$. Luego, haciendo un salto $(5, 0)$ seguido de un $(0, 5)$ llega al punto $(2021, 2021)$ en $288 + 288 + 2 = 578$ saltos.
Demostremos que no se puede con menos saltos. Notemos que cada salto (x, y) cumple que $|x| + |y| \in \{5, 7\}$. Entonces, cada salto consigue avanzar (en la suma de coordenadas) a lo más 7 unidades. Queremos avanzar 4042 en total y $4042/7 > 577$. Esto implica que necesitamos al menos 578 saltos.

Problema 2. Sea $\{p_n\}_{n\geq 1}$ la sucesión de los números primos, esto es, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ y así sucesivamente. Para cada entero positivo n, sea $S_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Demuestra que para cada entero positivo n, existe un cuadrado perfecto entre S_n y S_{n+1}.

Solución. Es fácil verificar el resultado para $n = 1, 2, 3, 4$. Así, consideremos $n \geq 5$. Sea k el mayor entero positivo tal que $k^2 \leq S_n$, por lo que $(k+1)^2 > S_n$. Supongamos que $2k - 1 \geq p_n$. Se sabe que todos los números primos son impares excepto $p_1 = 2$. Además, como $n \geq 5$, entonces $p_n \geq 11$. Luego,

$$S_n < 1 + 9 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n \leq 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $2k - 1 < p_n$. Como $p_n \leq p_{n+1} - 2$, se sigue que $2k - 1 < p_n \leq p_{n+1} - 2$, por lo que $p_{n+1} > 2k + 1$. De aquí,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \leq S_n + 2k + 1 < S_n + p_{n+1} = S_{n+1},$$

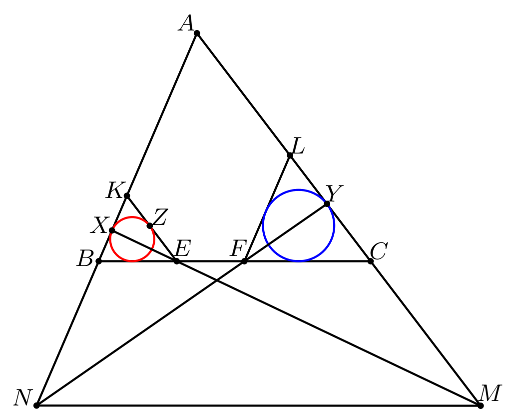
de donde se sigue la conclusión.

Problema 3. Sea ABC un triángulo con puntos E y F sobre el segmento BC. Sean K y L puntos sobre los segmentos AB y AC, respectivamente, tales que EK es paralela a AC y FL es paralela a AB. Los incírculos de los triángulos BEK y CFL son tangentes a los segmentos AB y AC en X y Y, respectivamente. Las rectas AC y EX se cortan en M, mientras que las rectas AB y FY se cortan en N. Si $AX = AY$, demuestra que MN es paralela a BC.

Solución. Es claro que los triángulos XKE y XAM son semejantes, así como los triángulos YLF y YAN. Luego,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AM}{KE} \cdot \frac{LF}{AN} \cdot \frac{KE}{LF} = \frac{XA}{XK} \cdot \frac{YL}{AY} \cdot \frac{KE}{LF} = \frac{KE}{KX} \cdot \frac{LY}{LF},$$

pues $AX = AY$. Sea Z el punto de tangencia del incírculo del triángulo BKE y KE.



Tenemos que los triángulos BKE y FLC son semejantes y, más aún, los puntos Z y Y son puntos correspondientes en esta semejanza (pues KE es paralela a AC y LF es paralela a AB). Además, ambos triángulos son semejantes al triángulo ABC. Por otro lado, $KX = KZ$ pues son los segmentos tangentes desde K hacia el incírculo del triángulo BKE. Por lo tanto,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{KE}{KZ} \cdot \frac{LY}{LF} = \frac{LC}{LY} \cdot \frac{LY}{LF} = \frac{LC}{LF} = \frac{AC}{AB},$$

de donde se sigue que los triángulos ABC y ANM son semejantes por el criterio LAL. En particular, tenemos que BC es paralela a MN, como se quería.

Problema 4. Sea p un número primo impar y sea $Q(x)$ un polinomio de grado $n < p-1$. Demuestra que p divide a $Q(0) + Q(1) + \cdots + Q(p-1)$.

Solución. Sean $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y, para cada $0 \leq i \leq n$,

$$S_i = \sum_{x=0}^{p-1} x^i.$$

Demostraremos primero que $S_i \equiv 0 \pmod{p}$. Notemos que x^i es el número de i-tuplas de la forma $(c_1, c_2, \ldots, c_i)$ con $0 \leq c_j \leq x-1$. Entonces,

$$1^i + 2^i + \cdots + (p-1)^i,$$

lo podemos pensar como contar las $(i+1)$-tuplas $(c_1, c_2, \ldots, c_i, x)$ donde $0 \leq c_j < x \leq p-1$ para cada $1 \leq j \leq i$.
Si los c_j's son diferentes, hay $\binom{p}{i+1}$ maneras de escoger los valores (ya que c_1, c_2, ..., c_i, x son diferentes y todos están entre 0 y $p-1$) y hay $i!$ maneras de ordenar los c_j's.
Si hay algunos c_j's iguales, digamos que en total hay k valores distintos entre los c_j's, entonces hay $\binom{p}{k+1}$ maneras de escoger los valores y luego tenemos que ordenar qué c_j's toman cada valor. El número de tales formas es un entero d_k. Entonces, tenemos que

$$S_i = \sum_{x=0}^{p-1} x^i = \sum_{k=1}^{i} d_k \binom{p}{k+1}.$$

Pero $\binom{p}{j}$ es múltiplo de p para todo $1 \leq j \leq p-1$ y $2 \leq k+1 \leq i+1 \leq n+1 \leq p-1$. Entonces, $p \mid S_i$ como queríamos.
Tomando $0^0 = 1$, tenemos también que

$$S_0 = \sum_{x=0}^{p-1} 1 = p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{x=0}^{p-1} Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i S_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

Solución alternativa. Demostraremos de otra manera que $S_i \equiv 0 \pmod{p}$. Sea g una raíz primitiva módulo p. Entonces, para $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$S_i = \sum_{x=0}^{p-1} x^i = \sum_{x=1}^{p-1} x^i = \sum_{j=0}^{p-2} g^{ji},$$

ya que $x = g^k$ para algún entero k y entonces al mover x por todos los valores de 1 a $p-1$ tendremos todos los exponentes k de 0 a $p-2$ (notemos que $g^{p-1} = 1 = g^0$). Pero la última suma es una suma geométrica, así que

$$\sum_{x=0}^{p-1} x^i = \frac{g^{(p-1)i} - 1}{g^i - 1}.$$

Notemos que la suma es válida porque $g^i \not\equiv 1 \pmod{p}$ ya que g es una raíz primitiva módulo p y $n < p-1$. Pero el numerador es múltiplo de p porque $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Por lo tanto, $S_i \equiv 0 \pmod{p}$.

Problema 5. Sean m un entero positivo y $r_1, r_2, \ldots, r_m$ números racionales positivos tales que $r_1 + r_2 + \cdots + r_m = 1$. Se define la función f por

$$f(n) = n - (\lfloor r_1 n \rfloor + \lfloor r_2 n \rfloor + \cdots + \lfloor r_m n \rfloor)$$

para cada entero positivo n. Determina el menor y el mayor valor posible de $f(n)$.
Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Solución. Para $m = 1$, tenemos que $r_1 = 1$, por lo que la función f es constante igual a 0. Así, supongamos que $m \geq 2$. Sea $r_i = \frac{p_i}{q_i}$ para cada i, donde p_i y q_i son enteros. Observemos que $\lfloor r_i n \rfloor \leq r_i n$, por lo que

$$f(n) \geq n - (r_1 n + r_2 n + \cdots + r_m n) = 0.$$

Ahora veamos que este mínimo es alcanzable. Tomando $n = q_1 q_2 \cdots q_m$, tenemos que $r_i n$ es un entero para cada i, por lo que $\lfloor r_i n \rfloor = r_i n$, lo cual permite alcanzar la cota mínima.
Para el máximo, sabemos que $\lfloor r_i n \rfloor > r_i n - 1$. Luego,

$$f(n) < n - ((r_1 n - 1) + (r_2 n - 1) + \cdots + (r_m n - 1)) = m$$

y, como $f(n)$ debe ser un entero, tenemos que $f(n) \leq m - 1$. Para ver que es alcanzable, tomamos $n = q_1 q_2 \cdots q_m - 1$. Es claro que $q_i > 1$ para cada i pues, de no ser así, algún r_i sería un entero positivo, por lo que los demás r_j forzosamente serían 0 y, por lo tanto, $m = 1$, lo cual contradice la suposición $m \geq 2$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lfloor r_i n \rfloor = \left\lfloor \frac{p_i(q_1 q_2 \cdots q_m - 1)}{q_i} \right\rfloor &= \frac{p_i(q_1 q_2 \cdots q_m)}{q_i} + \left\lfloor -\frac{p_i}{q_i} \right\rfloor \\
&= r_i q_1 q_2 \cdots q_m + \lfloor -r_i \rfloor \\
&= r_i q_1 q_2 \cdots q_m - 1,
\end{aligned}$$

donde el término $\frac{p_i(q_1 q_2 \cdots q_m)}{q_i}$ es un entero ya que $q_i \mid q_1 q_2 \cdots q_m$. Por lo tanto,

$$f(n) = (q_1 q_2 \cdots q_m - 1) - (r_1 + r_2 + \cdots + r_m) q_1 q_2 \cdots q_m + m = m - 1.$$

Problema 6. Determina un polinomio $P(x, y)$ distinto de cero tal que

$$P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$$

para todo número real a.
Nota: $\lfloor x \rfloor$ denota el mayor entero que es menor o igual que x.

Solución. Supongamos que $\lfloor a \rfloor = n$, esto es, $n \leq a < n + 1$. Si $n \leq a < n + \frac{1}{2}$, entonces $\lfloor 2a \rfloor = 2n = 2\lfloor a \rfloor$. Si $n + \frac{1}{2} \leq a < n+1$, entonces $\lfloor 2a \rfloor = 2n+1 = 2\lfloor a \rfloor + 1$. Luego, el polinomio $P(x, y) = (y - 2x)(y - 2x - 1)$ cumple, ya que si $x = \lfloor a \rfloor$ y $y = \lfloor 2a \rfloor$, entonces $y = 2x$ o $y = 2x + 1$.

Problema 7. Once estudiantes presentaron un examen. Para cualesquiera dos preguntas en el examen, hay al menos 6 estudiantes que resolvieron exactamente una de esas dos preguntas. Prueba que no hay más de 12 preguntas en el examen.

Solución. Sean n el número de preguntas en el examen, A_i el conjunto de estudiantes que resolvió la pregunta i (para $1 \leq i \leq n$) y d_k el número de problemas que resolvió el estudiante k (para $1 \leq k \leq 11$).
De la condición dada, tenemos que $|A_i \cup A_j| - |A_i \cap A_j| \geq 6$ para cualesquiera $i \neq j$. Sin embargo,

$$|A_i \cup A_j| - |A_i \cap A_j| = |A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j|.$$

De aquí se sigue que $|A_i| + |A_j| - 2|A_i \cap A_j| \geq 6$ para cualesquiera $i \neq j$. Sumando esta última desigualdad para cualesquiera $1 \leq i < j \leq n$ y denotando esta suma por S (notemos que cada $|A_i|$ es contado $n - 1$ veces), obtenemos que

$$S = (n-1)\sum_{i=1}^{n} |A_i| - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \geq 6\binom{n}{2}. \qquad (6)$$

Por otro lado, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{k=1}^{11} d_k$ pues ambas sumas representan la cantidad total de preguntas que fueron resueltas entre todos los estudiantes contando repeticiones. Además,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{k=1}^{11} \binom{d_k}{2},$$

pues ambas sumas representan la cantidad de parejas de preguntas que fueron resueltas por un mismo estudiante contando repeticiones (cada pareja de preguntas se cuenta tantas veces como la cantidad de estudiantes que hayan resuelto ambas preguntas). Así,

$$S = (n-1)\sum_{k=1}^{11} d_k - 2\sum_{k=1}^{11} \binom{d_k}{2} = \sum_{k=1}^{11} (nd_k - d_k^2).$$

Ahora, sabemos que $0 \leq d_k \leq n$. Por la desigualdad MA-MG, tenemos que $nd_k - d_k^2 = d_k(n-d_k) \leq \frac{n^2}{4}$ con la igualdad si y solo si $d_k = n - d_k$, esto significa que la expresión $nd_k - d_k^2$ se maximiza cuando $d_k = \frac{n}{2}$. Entonces,

$$S \leq \sum_{k=1}^{11} \left(n \cdot \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \right) = 11\left(\frac{n^2}{4}\right). \tag{7}$$

Juntando (6) y (7) obtenemos que $11\left(\frac{n^2}{4}\right) \geq 6\binom{n}{2} = 3n(n-1)$, lo cual implica que $n \leq 12$, como se quería.

Problema 8. Sea S un conjunto de 2022 rectas en el plano, tales que no hay dos paralelas ni tres concurrentes. S divide al plano en regiones finitas y regiones infinitas. ¿Es posible que todas las regiones finitas tengan un número entero de área?

Solución. Sí es posible. Daremos una construcción explícita. Sean $m_1, \ldots, m_{2022}$ números racionales distintos arbitrarios. Definimos inductivamente una sucesión b_i de números racionales, tal que para todo $n \leq 2022$, la recta $\ell_n = m_n x + b_n$ no es concurrente con dos de las rectas ℓ_i y ℓ_j para $i < j < n$. Esto es posible pues hay una cantidad finita de parejas de rectas previamente construidas, pero una cantidad infinita de números racionales.
Sea T el conjunto de las 2022 rectas ℓ_n. Por construcción, no hay dos rectas paralelas ni tres rectas concurrentes en T. Cada subconjunto de rectas en T define a lo más una región finita, por lo que T tiene una cantidad finita de regiones finitas. Cada región finita es un polígono convexo, el cual puede ser triangulado con triángulos de coordenadas racionales, siendo las intersecciones de rectas con pendiente e intercepto racional. En particular, las áreas de las regiones finitas son todas racionales.
Sea M el producto de los denominadores de las áreas de todas las regiones finitas. Tras aplicar una homotecia arbitraria con razón $\sqrt{M}$ al conjunto de rectas T, obtenemos el conjunto deseado.

Problema 9. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Determina todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que para todos los enteros positivos m y n, el entero $f(m)+f(n)-mn$ es distinto de cero y divide a $mf(m) + nf(n)$.

Solución. Probaremos que la única tal función es $f(n) = n^2$, la cual claramente cumple con las condiciones del problema.

- Sustituyendo $m = n = 1$ obtenemos que $2f(1) - 1$ divide a $2f(1)$ y, por lo tanto, $2f(1) - 1$ divide a 1. Luego, $f(1) = 1$.
- Sustituyendo $m = 1$ obtenemos que $f(n) - n + 1$ divide a $nf(n) + 1$ y, por lo tanto,
$$f(n) - n + 1 \mid n^2 - n + 1. \tag{8}$$
- Sustituyendo $m = n$ obtenemos que $2f(n) - n^2$ divide a $2nf(n)$ y, por lo tanto,
$$2f(n) - n^2 \mid n^3. \tag{9}$$

Afirmamos que para $p \geq 7$ primo, $f(p) = p^2$. Por la relación (9), tenemos que $f(p)$ es alguno de $(\pm p^k + p^2)/2$ con k entre 0 y 3. Podemos inmediatamente descartar los casos $(-p^3 + p^2)/2$ y $(-p^2 + p^2)/2$ por ser no positivos. Demostraremos que $f(p) = (p^2 + p^2)/2$ descartando los otros cinco casos uno a uno, usando la relación (8):

- Si $\frac{-p+p^2}{2} - p + 1$ divide a $p^2 - p + 1$, entonces $p^2 - 3p + 2$ divide a $4p - 2$, lo cual implica que $p^2 - 7p + 4 \leq 0$ y $p \leq 6$.
- Si $\frac{-1+p^2}{2} - p + 1$ divide a $p^2 - p + 1$, entonces $p^2 - 2p + 1$ divide a $2p$, lo cual implica que $p^2 - 4p + 1 \leq 0$ y $p \leq 3$.
- Si $\frac{1+p^2}{2} - p + 1$ divide a $p^2 - p + 1$, entonces $p^2 - 2p + 3$ divide a $2p - 4$, lo cual implica que $p^2 - 4p + 7 \leq 0$, que es imposible.
- Si $\frac{p+p^2}{2} - p + 1$ divide a $p^2 - p + 1$, entonces $p^2 - p + 2$ divide a 2, lo cual implica que $p^2 - p \leq 0$, que es imposible.
- Si $\frac{p^3+p^2}{2} - p + 1$ divide a $p^2 - p + 1$, entonces $p^3 + p^2 - 2p + 2$ divide a $2p^2 - 2p + 2$, lo cual implica que $p^3 - p^2 \leq 0$, que es imposible.

Ahora, para cualquier entero positivo n, consideremos un primo p tal que

$$p > \text{máx}(7, f(n), n + |n^2 - f(n)|).$$

Por hipótesis, $p^2 + f(n) - pn$ divide a $p^3 + nf(n)$ y, por lo tanto, $p^2 + f(n) - pn$ divide a $p^3 - p^2 n + pn^2$. Como p no puede dividir al lado izquierdo, podemos quitar el factor de p y deducir que $p^2 + f(n) - pn$ divide a $p^2 - pn + n^2$ o $p^2 + f(n) - pn$ divide a $n^2 - f(n)$. El lado izquierdo es mayor que el derecho en valor absoluto, lo cual implica que $f(n) = n^2$, como se quería.

Problema 10. Sean a, b, c y d enteros no negativos y p un número primo. Demuestra que

$$\binom{ap+b}{cp+d} \equiv \binom{a}{c}\binom{b}{d} \pmod{p}.$$

Solución. Emplearemos un argumento de conteo. Supongamos que tenemos a equipos de p personas, con las personas de cada equipo numeradas del 1 al p, más b personas que no pertenecen a ningún equipo. Queremos encontrar el número de formas de elegir a $cp + d$ personas, módulo p.
Definimos la “rotación” de la persona k de un equipo dado como la persona $k + 1$ en el mismo equipo, tomando el índice módulo p. La rotación de una persona sin equipo es ella misma. Podemos rotar un conjunto de personas aplicando una rotación a cada una. Las rotaciones de un conjunto de personas son todos los conjuntos que se pueden obtener rotándolo sucesivamente.
Hay $\binom{a}{c}\binom{b}{d}$ conjuntos de $cp + d$ personas tales que, si se elige a una persona de un equipo, se eligen a todas. A cualquier otro conjunto lo podemos emparejar con sus otras $p - 1$ rotaciones distintas, así particionándolos en grupos de p. De aquí se sigue la congruencia.

6^{a} Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica, Concurso Nacional (Virtual)

Del 9 al 12 de junio de 2022 se llevó a cabo de manera virtual, el Concurso Nacional de la 6^a Olimpiada Mexicana de Matemáticas para Educación Básica (OMMEB). Participaron 115 estudiantes de primaria y 145 estudiantes de secundaria, representando a 29 entidades federativas.

La OMMEB está compuesta por tres niveles:

a) Nivel I: Estudiantes de cuarto y quinto año de primaria.

b) Nivel II: Estudiantes de sexto año de primaria y de primer año de secundaria.

c) Nivel III: Estudiantes de segundo año de secundaria.

Cada delegación participa con un equipo de 3 estudiantes para cada uno de los tres niveles. Cada estudiante presenta dos exámenes: uno individual y uno por equipos. Para el Nivel I, la prueba individual consta de 15 problemas para resolver en 90 minutos. Para los niveles II y III, la prueba individual consta de 15 problemas, separados en Parte A y Parte B, para resolver en 120 minutos. La parte A consiste de 12 problemas de respuesta cerrada que se califican como correcto o incorrecto. La parte B consiste de 3 problemas de redacción libre.

En los tres niveles, la prueba por equipos consiste de 8 problemas, a resolver en 70 minutos. Se entregan los primeros 6 problemas a cada equipo y tienen 10 minutos para discutirlos sin poder escribir. Cada integrante debe resolver al menos un problema y tienen 35 minutos de trabajo individual. Al terminar ese tiempo, el equipo se vuelve a reunir para intentar resolver 2 problemas adicionales en 25 minutos más.

En esta ocasión, los ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos en cada nivel junto con los ganadores de medalla de plata en la prueba individual del Nivel I, integran la preselección nacional, a partir de la cual se formarán los equipos

que representarán a México en la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC), a celebrarse en el verano de 2023.
Los alumnos ganadores de medalla de oro en las pruebas individual y por equipos del Nivel III del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB son los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Oro Individual
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	Oro Individual
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Oro Individual
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Oro Individual
Luis Veudi Vivas Pérez	Quintana Roo	Oro Individual
Woojoong Kwon	Ciudad de México	Oro Individual
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Oro por Equipos

En la prueba por equipos en el Nivel III, el Estado de Morelos obtuvo el primer lugar (con 283 puntos), la Ciudad de México obtuvo el segundo lugar (con 173 puntos) y el Estado de Baja California Sur obtuvo el tercer lugar (con 160 puntos).

Los resultados del Campeón de Campeones en el Nivel III fueron:
Primer lugar: Morelos (con 563 puntos).
Segundo lugar: Ciudad de México (con 376 puntos).
Tercer lugar: Zacatecas (con 364 puntos).

A continuación presentamos los problemas y soluciones de los exámenes individual y por equipos del Nivel III del Concurso Nacional de la 6^a OMMEB.

Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) Denisse sumó 5 números consecutivos. Zeus también sumó 5 números consecutivos distintos a los que sumó Denisse. Si la suma que obtuvo Denisse menos la suma que obtuvo Zeus es igual a 100, ¿cuál es la diferencia entre el número más grande de los cinco que sumó Denisse menos el número más grande de los cinco que sumó Zeus?

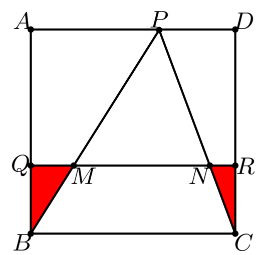
2) Una rana está parada en el número 0 de la recta numérica. En cada salto que da la rana se puede mover 3 unidades a la derecha o a la izquierda (por ejemplo, después del primer salto puede llegar al número 3 o al número -3). Después de n saltos la rana llega por primera vez al número 2022. Calcula la suma de todos los valores posibles de n si $n < 1000$.

3) Una caja fuerte tiene una contraseña de cuatro dígitos. Una persona que no sabe la clave vio las huellas de una persona que insertó la clave, notando que presionó los dígitos 2, 8 y 0. ¿Cuántos intentos necesita para garantizar abrir la caja?

4) Sea ABC un triángulo equilátero. El punto D es tal que A es punto medio del segmento CD. El círculo con centro en B y radio BD corta a la recta BA en el punto E que cumple que A está dentro del segmento BE. Halla la medida, en grados, de $\angle DEA$.

5) ¿Cuántos números de 4 dígitos cumplen que la suma de sus dígitos es igual a su producto?

6) El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene lado 12 cm. Se toma un punto P sobre AD, el punto Q sobre AB tal que $AQ = 2QB$ y el punto R sobre CD tal que $DR = 2RC$. Los segmentos BP y CP cortan a QR en los puntos M y N, respectivamente. ¿Cuánto vale la suma de las áreas de los triángulos QBM y RCN en cm^2?



7) ¿Cuántas parejas de enteros (n, m), con n y m mayores o iguales que 0, cumplen que $2n + 3m = 2022$?

8) Encuentra el menor entero positivo de 5 dígitos tal que todos sus dígitos son impares y que su raíz cúbica es un número entero.

9) Sea $ABCD$ un rectángulo. Un punto E se coloca en la recta CD de tal manera que D quede entre E y C. Sea M el punto medio del segmento AC. Se cumple que $\angle DBC = 40°$ y $\angle EAD = 10°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle EMB$.

10) Un número de cuatro dígitos $\overline{abcd}$ se dice *pariente* si la diferencia entre los números $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es par. ¿Cuántos números parientes hay tales que $\overline{ab}$ es menor que $\overline{cd}$?

11) ¿Cuántos números enteros entre 1 y 2022 tienen la propiedad de que la suma de sus dígitos es 11 y son múltiplos de 11?

12) En un tablero de 2×4 hay 8 chocolates diferentes, uno en cada casilla. Puedes comer un chocolate si este tiene a lo más 2 chocolates vecinos. ¿De cuántas formas puedes comerte todos los chocolates si solo puedes comer de uno en uno? (Nota: Dos chocolates son vecinos si comparten un lado de una casilla).

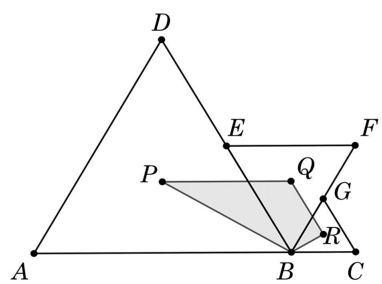
Parte B

13) Carlos y Diego quieren practicar su puntería con el arco juntos. Para esto van a lanzar flechas por turnos de forma alternada, primero Carlos y luego Diego. De

cada 3 turnos consecutivos, Carlos acierta al blanco exactamente 2 veces. De cada 6 turnos consecutivos, Diego acierta al blanco exactamente 4 veces. Tanto Carlos como Diego tienen 25 flechas. Si sabemos que Carlos acertó sus primeros dos turnos y Diego acertó en sus primeros cuatro turnos, ¿para cuántos de los 25 turnos sucede que, al final del turno, Carlos y Diego han acertado en total la misma cantidad de flechas?

14) Determina el mayor entero positivo n con la siguiente propiedad: para cualquier número primo impar p menor que n, la diferencia $n-p$ es un número primo.

15) En la figura se observan tres triángulos equiláteros ABD, BEF y BCG, cuyos lados miden 4 cm, 2 cm y 1 cm, respectivamente. Los puntos P, Q y R son los centros de dichos triángulos equiláteros, en ese orden.

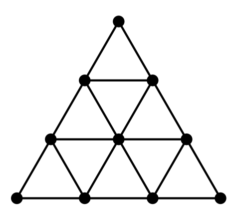


a) Determina la medida, en grados, de todos los ángulos internos del cuadrilátero $PQRB$.

b) Calcula el área, en cm^2, del cuadrilátero $PQRB$.

Prueba por Equipos, Nivel III

1) Considera la siguiente figura, donde todos los triángulos pequeños son triángulos equiláteros. ¿Cuántos triángulos obtusángulos hay de tal forma que sus tres vértices son vértices de la figura?
NOTA: Los lados de los triángulos obtusángulos no necesariamente tienen que ser líneas marcadas en la figura.



2) Encuentra todos los enteros positivos n tales que $\dfrac{3^n+1}{2^n}$ es un número entero.

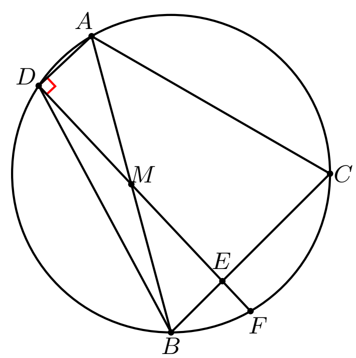
3) Para cada uno de los nueve enteros positivos

$$n, 2n, 3n, \ldots, 9n,$$

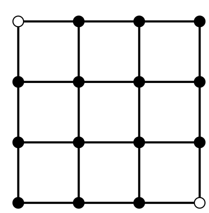
se escribió el primer dígito de la izquierda. Encuentra el menor entero positivo n tal que no haya más de 4 dígitos distintos entre los nueve dígitos escritos.

4) Sean a y b números reales positivos tales que $a - b = \frac{a}{b}$. ¿Qué número es mayor: $a + b$ o ab?

5) El triángulo ABC cumple que $\angle ABC = 60°$. Sean M el punto medio de AB y ω el circuncírculo del triángulo ABC. Supongamos que el punto D sobre ω cumple que AD es perpendicular a DM y $AC = DB$. La recta DM corta a BC y a ω en E y F, respectivamente. Si $AB = 4\sqrt{3}$ cm, determina, en cm, la longitud de EF.



6) En una cuadrícula de 3×3 se ubican los 16 vértices de la cuadrícula. Cada vértice está coloreado de blanco o de negro. Un *movimiento* consiste en escoger un cuadrado dentro de la cuadrícula (el cuadrado puede ser de 1×1, 2×2 o de 3×3) y cambiar sus 4 vértices de color, es decir, si un vértice era de color blanco cambiará a negro y viceversa. Supongamos que la cuadrícula está coloreada inicialmente de la siguiente manera:



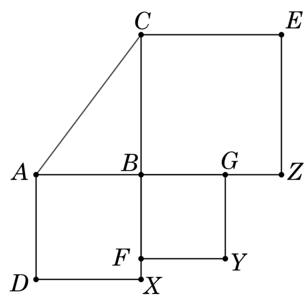
¿Será posible que, después de una cantidad finita de movimientos, todos los vértices sean del mismo color?

7) Un cuadrado mágico es un tablero de 3×3 donde se escriben enteros positivos de tal manera que la suma de los números escritos en cada renglón, en cada columna y en cada diagonal es la misma. Determina todos los posibles valores para la casilla inferior izquierda del siguiente cuadrado mágico incompleto.

	11	
		5
?		

8) En la figura se observan tres cuadrados $BGYF$, $ABXD$ y $BCEZ$ cuyos lados miden a, b y c, respectivamente, tal que $a < b$ y $a < c$. Demuestra que los puntos X, Y, Z son colineales si y solo si

$$\text{Área}(ABC) = \frac{a(b+c)}{2}.$$



Soluciones de la Prueba Individual, Nivel III

Parte A

1) La respuesta es 20. Si a es el primer número que sumó Denisse y b es el primer número que sumó Zeus, entonces $(a+i) - (b+i) = a - b$ para cada entero $1 \leq i \leq 4$. Por lo tanto, la suma de los números de Denisse menos la suma de los números de Zeus es igual a $5(a-b)$. El problema nos dice que esto es igual a 100, entonces $a - b = 20$. Luego, la diferencia buscada es $(a+4) - (b+4) = 20$.

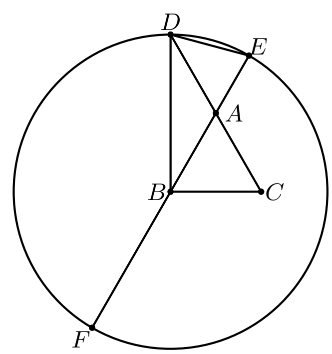
2) La respuesta es 136268. La rana avanza 3 unidades en cada salto. La menor cantidad de saltos que ocupa para llegar al 2022 es $2022/3 = 674$. Podemos ver que si la rana puede llegar en n saltos al 2022, entonces también puede llegar en $n+2$ saltos. Para esto vemos que al inicio puede saltar al -3 y luego volver al 0, y luego del 0 hacer n saltos para llegar al 2022, lo que le tomaría un total de $n+2$ saltos. Por lo que n puede ser $674, 676, 678, \ldots, 996, 998$. También vemos que inicialmente la

rana está en el 0, que es un número par. Al moverse una cantidad impar de unidades llega a un número impar, luego otra vez a un número par y así sucesivamente, por lo que, por paridad, la rana debe llegar al 2022 en una cantidad par de saltos (es decir, n es par). Por lo tanto, los valores posibles de n son los números pares entre 674 y 998 (inclusive), por lo que la suma de los posibles valores de n es igual a

$$\begin{aligned} 674 + 676 + 678 + \cdots + 998 &= 2(337 + 338 + 339 + \cdots + 499) \\ &= 2\left(\frac{163(337+499)}{2}\right) = 163(836) = 136268. \end{aligned}$$

3) La respuesta es 36. Observemos que se usó al menos una vez cada uno de los dígitos 2, 8 y 0, por lo que exactamente uno de ellos se usó dos veces. Hay $4 \cdot 3 \cdot 2 = 4!$ formas de elegir las posiciones de cada uno de los dígitos 2, 8 y 0 (una vez) y luego 3 formas de elegir el último dígito, pero con esto cada una de las combinaciones se está repitiendo dos veces. Por lo tanto, el número total de combinaciones es $\frac{4!\cdot 3}{2} = 36$.

4) La respuesta es $75°$. Sea F la intersección del rayo AB con la circunferencia de centro B y radio BD.



Como $DA = AC = AB$ y $\angle BAC = 60°$, tenemos que

$$2\angle ABD = \angle ABD + \angle BDA = \angle BAC = 60°,$$

por lo que $\angle ABD = 30°$ y, por lo tanto, $\angle DBF = 150°$. Luego, se sigue que $\angle DEA = \angle DEF = \frac{1}{2}\angle DBF = 75°$.

5) La respuesta es 12. Ninguna cifra es cero. La mayor suma es $9 + 9 + 9 + 9 = 36$ y no puede ser divisible por números primos mayores o iguales a 11. Entonces, los únicos primos que pueden aparecer en los factores de la suma son: 2, 3, 5 y 7. Por otro lado, si el mayor dígito es D, entonces la suma de las cifras a lo más es $4D$, por lo que solo puede ser igual a $2D$, $3D$ o $4D$ (no puede ser igual a D porque las otras cifras deberían ser ceros para que se de la suma). Sin embargo, si la suma es a lo más $4D$, entonces el producto de las cifras es a lo más $4D$, de modo que las tres cifras restantes cuando mucho tienen un producto igual a 4. Esto nos dice que las posibilidades para las otras tres cifras son:

a) 1, 1 y 1, por lo que la suma es igual a $D+3$ y el producto es D, lo cual es imposible.

b) 1, 1 y 2, por lo que la suma es igual a $D+4$ y el producto es $2D$. Por lo tanto, $D=4$.

c) 1, 2 y 2, por lo que la suma es igual a $D+5$ y el producto es $4D$. Esto es imposible, pues se tendría que $3D=5$.

d) 1, 1 y 3, por lo que la suma es igual a $D+5$ y el producto es $3D$. Esto es imposible, pues se tendría que $2D=5$.

e) 1, 1 y 4, por lo que la suma es igual a $D+6$ y el producto es $4D$. Se sigue que $D=2$, lo cual no es posible pues D no sería el dígito más grande.

Por lo tanto, los dígitos del número necesariamente son 1, 1, 2 y 4 en algún orden. Hay 12 maneras de acomodar estos dígitos, por lo que hay 12 posibles números con la propiedad pedida.

6) La respuesta es 8 cm^2. Por el teorema de Tales, tenemos que $\frac{PN}{PC}=\frac{PM}{PB}=\frac{AQ}{AB}=\frac{2}{3}$ y $\frac{MN}{BC}=\frac{PM}{PB}=\frac{2}{3}$. De lo anterior, se sigue que $QM+NR=\frac{QR}{3}=4$ cm. Además, $QB=RC=4$ cm, por lo que la suma buscada es igual a $\frac{(QM+NR)4}{2}=\frac{4\times 4}{2}=8$ cm^2.

7) La respuesta es 338. Notamos que m debe ser par y que $2022=3\times 674$. Además, para m par tal que $0\leq 3m\leq 3\times 674$, siempre existe un único entero n tal que la pareja (n,m) cumple que $2n+3m=2022$. Por lo tanto, basta encontrar cuántos enteros pares m satisfacen que $0\leq 3m\leq 3\times 674$, esto es, $0\leq m\leq 674$. Hay $\frac{674}{2}=337$ enteros pares positivos menores o iguales a 674, por lo que hay 338 elecciones para m y, como cada una de ellas determina n, entonces tenemos 338 parejas (n,m) tales que $2n+3m=2022$.

8) La respuesta es 35937. Sea m el entero buscado y sea $n=\sqrt[3]{m}$. Como $20^3=8000<10000$ y $100000<125000=50^3$, tenemos que $20<n<50$, por lo que n tiene exactamente dos dígitos. Si $n=10a+b$ (con a y b dígitos), entonces b es impar pues $n^3=m$ es impar. Ahora,

$$m=n^3=(10a+b)^3=1000a^3+300a^2b+30ab^2+b^3.$$

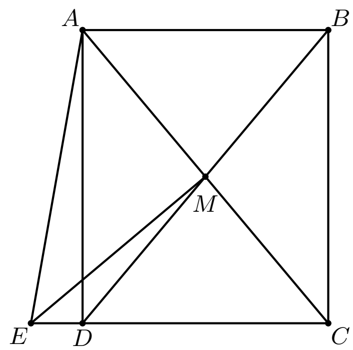
Si a es par, entonces 20 divide a $1000a^3+300a^2b+30ab^2$. Además, para cualquier valor impar de b, se puede ver que el dígito de las decenas de b^3 es par. En efecto, $1^3=1$, $3^3=27$, $5^3=125$, $7^3=343$ y $9^3=729$. Se sigue que, si a es par, entonces el dígito de las decenas de m también es par, lo cual no es posible.
Por consiguiente, a es impar, esto es, ambos dígitos de n son impares. De esto y de que $20\leq n\leq 50$, se sigue que n tiene que ser alguno de los números 31, 33, 35, 37 y 39. Al elevar cada uno de estos números al cubo, obtenemos que los números que cumplen son $33^3=35937$ y $39^3=59319$, por lo que la respuesta es 35937.

9) La respuesta es 170°. Es claro que M es el punto de intersección de AC y BD. Por un lado, tenemos que $\angle MCB=40^\circ$, por lo que $\angle AMB=\angle MBC+\angle MCB=$

$80°$. Por otro lado, $\angle MCD = \angle MDC = 90° - \angle MBC = 50°$. Además, por la simetría del rectángulo $ABCD$, tenemos que $\angle DAC = \angle DBC$. Así,

$$\angle EAC = \angle EAD + \angle DAC = \angle EAD + \angle DBC = 10° + 40° = 50° = \angle ECA.$$

Luego, el triángulo EAC es isósceles con $EA = EC$. Como M es el punto medio de AC, se sigue que EM es perpendicular a AC, esto es, $\angle EMA = 90°$. Por lo tanto, $\angle EMB = \angle EMA + \angle AMB = 90° + 80° = 170°$.



Solución alternativa. Por la simetría del rectángulo $ABCD$, tenemos que $\angle DAM = \angle MBC = 40°$, por lo que $\angle EAM = 10° + 40° = 50°$. Además, tenemos que $\angle CDM = 90° - \angle DBC = 50° = \angle EAM$, de donde se concluye que el cuadrilátero $AMDE$ es cíclico. Por lo tanto, $\angle EMB = 180° - \angle EMD = 180° - \angle EAD = 180° - 10° = 170°$.

10) La respuesta es 1980. Para que $\overline{abcd}$ sea pariente, basta que $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ tengan la misma paridad. Entonces, elegir $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$ es equivalente a elegir dos pares de dos dígitos o dos impares de dos dígitos, ya que una vez elegidos basta con asignar el menor de los dos a $\overline{ab}$. Además, no debemos preocuparnos por los números de un dígito, pues $\overline{ab}$ debe cumplir $a \neq 0$ para que $\overline{abcd}$ sea de 4 dígitos y, por lo tanto, $\overline{cd}$ también, por ser mayor. Como hay 45 enteros pares entre el 10 y el 98, así como 45 enteros impares entre el 11 y el 99, la respuesta es $2\binom{45}{2} = 45 \times 44 = 1980$.

11) La respuesta es 8. Escribimos los números en la forma $N = \overline{abcd}$. Procedemos a analizar los diferentes casos dependiendo del valor de a.

    1) $a = 2$. Los múltiplos de 11 entre 2000 y 2022 son 2002 y 2013. Ninguno de estos cumple que su suma de dígitos es igual a 11, por lo que este caso queda descartado.

    2) $a = 1$. Por el criterio de divisibilidad del 11, obtenemos que $d + b - c - 1$ es un múltiplo de 11. Además, $b + c + d = 10$. Esto significa que $(d + b) - c - 1 = (10 - c) - c - 1 = 9 - 2c$ es múltiplo de 11, donde $0 \leq c \leq 9$, por lo que $-9 \leq 9 - 2c \leq 9$. El único múltiplo de 11 en este intervalo es 0, por lo que $9 - 2c = 0$, lo cual es claramente imposible. Así, en este caso no hay números que cumplan.

3) $a = 0$. Por el criterio de divisibilidad del 11, obtenemos que $d + b - c$ es un múltiplo de 11. Además, $b+c+d = 11$. Así, $d+b-c = (11-c)-c = 11-2c$ es un múltiplo de 11, donde $0 \leq c \leq 9$, por lo que $-7 \leq 11 - 2c \leq 11$. Esto significa que $11 - 2c = 0$ o $11 - 2c = 11$. El primer caso es claramente imposible, así que $11 - 2c = 11$ y, por tanto, $c = 0$. Así, ambas condiciones que cumple el número N se transforman en que $b+d = 11$ y $c = 0$. Hay 8 parejas de dígitos (b, d) que cumplen esto: $(2, 9)$, $(3, 8)$, $(4, 7)$, $(5, 6)$, $(6, 5)$, $(7, 4)$, $(8, 3)$, $(9, 2)$.

De los casos anteriores, concluimos que hay 8 números enteros entre 1 y 2022 que cumplen las condiciones del problema.

12) La respuesta es 6720. Denominamos a un chocolate que está en una celda que no es una esquina, como un "chocolate central". Como observación, nótese que para casi cualquier forma de tomar los primeros cuatro chocolates, los cuatro chocolates restantes se podrán comer en cualquier orden, por lo que habría que contar la cantidad de tableros que cumplen esto y multiplicar por $4!$ En efecto, para que esto no sea así, significa que no nos hemos comido ni un chocolate vecino a un chocolate central, por lo que los únicos tableros donde esto no se cumple son rotaciones y reflexiones del tablero que se muestra a continuación (donde una celda vacía significa que ya nos comimos el chocolate de esa celda y una celda con una "C" significa que no nos hemos comido el chocolate en esa celda):

	C		
C	C	C	

Cuadro 1: *No podemos comernos los chocolates restantes en cualquier orden.*

Observemos que para los tableros como el que se muestra arriba, la cantidad de formas en las que nos podemos comer los cuatro chocolates restantes es igual a $3 \cdot 3!$, pues nos podemos comer cualquiera de los tres chocolates que sí nos podemos comer y, después de eso, nos podremos comer los otros tres chocolates en cualquier orden. Luego, solo debemos contar la cantidad de formas en las que obtenemos un tablero como el del Cuadro 1 y multiplicar por $3 \cdot 3!$, después contar la cantidad de formas en las que no obtenemos un tablero como el del Cuadro 1 y multiplicar por $4!$, y finalmente sumar ambos resultados.
El primer chocolate que nos podemos comer tiene que estar en una de las celdas de las esquinas y no puede estar en una de las celdas "centrales" (que no son esquinas). Así, por la simetría del tablero, sin pérdida de generalidad podemos suponer que el primer chocolate se tomó de la esquina superior izquierda.
Ahora, ya que nos comimos ese chocolate, hay cuatro opciones para comernos el siguiente chocolate. En la siguiente figura marcamos los diferentes casos del segundo chocolate que nos comimos y, en cada caso, ponemos una "C" para los chocolates que nos podemos comer.

	C	C	C
	C	C	C

(a) *Caso 1.*

		C	C
C	C	C	C

(b) *Caso 2.*

	C	C	
C	C	C	C

(c) *Caso 3.*

	C	C	C
C	C	C	

(d) *Caso 4.*

Cuadro 2: *Diferentes posibilidades después del segundo chocolate.*

Para el caso i, diremos que hay B_i casos en los que obtenemos un tablero como el del Cuadro 1 y A_i casos en los que no obtenemos un tablero como este. Así, la respuesta final será igual a

$$4\left((A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \cdot 4! + (B_1 + B_2 + B_3 + B_4) \cdot 3 \cdot 3!\right).$$

Ahora, para cada caso, procedemos a encontrar las cantidades A_i y B_i.

1) Notemos que al comernos cualquier chocolate de la segunda columna obtendremos la misma cantidad de formas de comernos el cuarto chocolate, y lo mismo pasa para la cuarta columna. Así, podemos suponer que el tercer chocolate que nos comeremos es de la primera fila. En el caso que comemos el chocolate de la segunda columna, hay exactamente un chocolate que, al comerlo, se obtiene un caso para B_1, mientras que los otros tres chocolates cuentan para A_1. Lo mismo pasa si comemos primero el chocolate de la cuarta columna. Luego, en este caso, $A_1 = 2(3 + 3) = 12$ y $B_1 = 2(1 + 1) = 4$.
2) Cuando el tercer chocolate que nos comemos es vecino del chocolate con la "C" (en color negro), sucede que el cuarto chocolate puede ser cualquiera de los otros cinco y, al comer cualquiera de ellos, no obtendremos un tablero como el del Cuadro 1. Por otro lado, si comemos un chocolate que no es adyacente al chocolate con la "C" (en color negro), habrá exactamente un chocolate que, al comerlo, se obtiene un caso para B_2, mientras que los otros tres chocolates cuentan para A_2. Así, obtenemos que $A_2 = 3(5) + 2(3) = 21$ y $B_2 = 3(0) + 2(1) = 2$.
3) Notemos que al comernos cualquier chocolate de la primera fila obtendremos la misma cantidad de formas de comernos el cuarto chocolate, y lo mismo pasa para la segunda fila. Así, podemos suponer que el tercer chocolate que nos comeremos es de la primera o de la segunda columna. En el caso que comemos el chocolate de la primera columna, hay exactamente un chocolate que, al comerlo, se obtiene un caso para B_3, mientras que los otros tres chocolates cuentan para A_3. Lo mismo pasa si comemos primero el chocolate de la cuarta columna. Luego, en este caso, $A_3 = 2(3 + 3) = 12$ y $B_3 = 2(1 + 1) = 4$.
4) Notemos que al comernos cualquier chocolate de la primera o cuarta columna, obtendremos la misma cantidad de formas de comernos el cuarto chocolate, y lo mismo pasa para los chocolates de la segunda y tercera columna. Así, podemos suponer que el tercer chocolate que nos comeremos es de la primera fila.

En el caso que comemos el chocolate de la segunda columna, podemos comer cualquiera de los chocolates restantes y, al comer cualquiera de ellos, no obtendremos un tablero como el del Cuadro 1, por lo que aquí hay 5 casos para A_4. Por otro lado, al comer el chocolate de la cuarta columna, hay exactamente un chocolate que, al comerlo, se obtiene un caso para B_4, mientras que los otros tres chocolates cuentan para A_4. Luego, en este caso, $A_4 = 2(5 + 3) = 16$ y $B_2 = 2(0 + 1) = 2$.

Por lo tanto, la respuesta final es

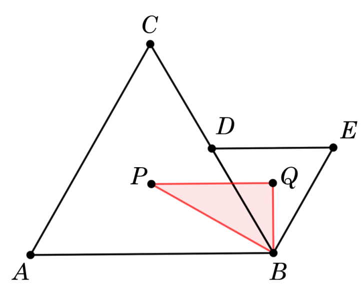
$$4\left((12 + 21 + 12 + 16) \cdot 4! + (4 + 2 + 4 + 2) \cdot 3 \cdot 3!\right) = 4(61\cdot 4!+12\cdot 3\cdot 3!) = 6720.$$

Parte B

13) Es fácil ver, por las condiciones del problema, que Carlos acierta todas las flechas excepto las que son múltiplo de 3, mientras que Diego acierta todas las flechas excepto las flechas 5, 6, 11, 12, 17, 18, 23 y 24. Por lo anterior, si agrupamos los turnos de 6 en 6, Carlos y Diego han acertado el mismo número de flechas para todos los turnos, excepto el tercer y el cuarto turno del bloque. Por lo tanto, la respuesta es 17.

14) Demostraremos que el mayor entero que cumple la condición del problema es el número 10. Observemos que $10 = 3 + 7 = 5 + 5$. Supongamos que n es un entero mayor que 10 que satisface la condición del problema. Como los números $3, 5$ y 7 dejan distintos residuos al dividirse por 3, entonces los números $n - 3, n - 5$ y $n - 7$ también dejan distintos residuos al dividirse por 3. Por lo tanto, uno de ellos debe ser múltiplo de 3. Como todos ellos son enteros mayores que 3, concluimos que uno de ellos no es primo, lo que es una contradicción.

15) Consideremos los triángulos equiláteros ABC y BDE de la figura, y supongamos que sus lados miden $2x$ y x, respectivamente.



Es fácil ver que $\angle PBQ = 60°$ y que $PB = 2BQ$ (pues los triángulos BPA y BQD son semejantes en razón $2 : 1$). Esto significa que el triángulo PQB es rectángulo, con $\angle PBQ = 60°$, $\angle QPB = 30°$ y $\angle PQB = 90°$. Luego, si P es el gravicentro del triángulo ABC, tenemos que

$$PB = \frac{2}{3}\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

De manera análoga, obtenemos que $QB = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ y, por consiguiente, $PQ = x$. Luego,

$$\text{Área}(PBQ) = \frac{x \times \frac{x\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{6}.$$

Regresando al problema original, aplicaremos esta observación para $2x = 4$ cm y luego para $2x = 2$ cm, en las parejas de triángulos (ABD, BEF) y (BEF, BCG), respectivamente. Así,

$$\text{Área}(PQRB) = \text{Área}(PQB) + \text{Área}(QRB) = \frac{2^2\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{6}\ \text{cm}^2.$$

De la misma observación, obtenemos que $\angle BPQ = 30°$, $\angle QRB = 90°$, $\angle PBR = 2 \times 60° = 120°$ y $\angle PQR = 90° + 30° = 120°$.

Soluciones de la Prueba por Equipos, Nivel III

1) La respuesta es 51. Contaremos los triángulos de acuerdo al vértice en el que se encuentra el ángulo obtuso. Es fácil darse cuenta de que el ángulo obtuso no puede estar en ninguno de los vértices del triángulo equilátero más grande, así que tiene que estar en cualquiera de los otros. Si el ángulo obtuso está en alguno de los vértices de los lados del triángulo equilátero más grande, entonces uno de los lados de tal triángulo equilátero tiene que estar sobre estos lados del triángulo equilátero más grande (pues el ángulo más grande que se puede generar sin que esto suceda es de $90°$). Luego, al tomar en cuenta esto, se puede ver que hay exactamente 6 triángulos obtusángulos que cumplen. Finalmente, si el ángulo obtuso está sobre el vértice central de la figura, digamos que es O, se puede hacer el conteo tomando un vértice de la figura diferente a este, digamos A y contar los vértices B que cumplan que el ángulo $\angle AOB$ (en dirección de las manecillas del reloj) es obtuso. Haciendo este conteo se obtiene que hay 15 triángulos obtusángulos que cumplen. Por lo tanto, la cantidad de triángulos obtusángulos con vértices en la figura es igual a $3(0) + 6(6) + 15 = 51$.

2) Es fácil ver que $n = 1$ cumple. Demostraremos que es la única solución. Supongamos que 2^n divide a $3^n + 1$ para algún entero $n \geq 2$. Entonces, 2^2 divide a $3^n + 1$. Por otro lado, es fácil ver que si n es par, $n = 2k$, entonces

$$3^n + 1 = 3^{2k} + 1 = 9^k + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4.$$

Como 3^n+1 es múltiplo de 4, concluimos que n debe ser impar, esto es, $n = 2k+1$. Luego, $n \geq 3$ y, en particular, 2^3 divide a $3^n + 1$. Sin embargo, tenemos que

$$3^n + 1 = 3^{2k+1} + 1 = 9^k \cdot 3 + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \pmod 8,$$

lo que es una contradicción.

3) La respuesta es 25. Si $n = 25$, los nueve enteros son

$$25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225.$$

El dígito de la izquierda de cada uno de estos números es alguno de los números $1, 2, 5$ y 7. Procedemos a demostrar que es el más pequeño. Se puede verificar rápidamente que ninguno de los números $1, 2, 3, \ldots, 9$ cumple. Ahora, si $10 \leq n \leq 19$, se cumple que $5n < 100$, por lo que los primeros dígitos de la izquierda de los números n, $2n$, $3n$, $4n$ y $5n$ serán todos distintos. Por último, si $20 \leq n \leq 24$, se tiene que $4n < 100$ y $5n \geq 100$, lo que indica que $5n$ tendrá como primer dígito de la izquierda al 1 y los primeros dígitos de la izquierda de los números n, $2n$, $3n$ y $4n$ serán diferentes entre sí y diferentes de 1. De aquí la conclusión se sigue.

4) La igualdad $a - b = \frac{a}{b}$ es equivalente a la igualdad $ab - b^2 = a$, esto es, tenemos que $ab = a + b^2$. Luego, basta comparar $a + b$ con $a + b^2$, que es equivalente a comparar b con b^2, lo cual equivale a comparar 1 con b.
Si $b \leq 1$, entonces $\frac{a}{b} \geq a > a - b$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $b > 1$ y, por consiguiente, $ab = a + b^2 > a + b$.

5) La respuesta es 1 cm. Primero observemos que $DB = AC$ implica que AD y BC son paralelas y, por lo tanto, $\angle ABC = 60° = \angle BAD$. Como los ángulos $\angle BAD$ y $\angle BFD$ subtienden el mismo arco, son iguales. De forma ánaloga, tenemos que $\angle ADF = 90° = \angle ABF$. De lo anterior, se sigue que el triángulo BMF es medio triángulo equilátero y, como $BM = \frac{AB}{2} = 2\sqrt{3}$ cm, resulta que $MF = 4$ cm. Además, como BC y AD son paralelas, tenemos que DE es perpendicular a BC, de donde se sigue que el triángulo BME tambiés es la mitad de un triángulo equilátero. Como $BM = 2\sqrt{3}$ cm, tenemos que $ME = 3$ cm y, por lo tanto, $EF = MF - ME = 4 - 3 = 1$ cm.

6) No es posible. Etiquetamos las columnas de vértices de izquierda a derecha como 1, 2, 3 y 4. Nos referiremos por "columnas impares" a las columnas cuya etiqueta es un número impar, y de forma análoga con "columnas pares". Ahora, contemos la cantidad de vértices blancos en las columnas impares. Probaremos que, sin importar cuántos movimientos se hagan, la paridad de esta cantidad nunca cambia. En efecto, supongamos que en cierto punto la cantidad de vértices blancos en las columnas impares es igual a k y hagamos un movimiento. Si ese movimiento no afecta a columnas impares, no hay nada más qué hacer. Si el movimiento afecta a una columna par y una impar, supongamos que de los vértices del cuadrado que se usará para el movimiento hay b vértices blancos en columnas impares y $2 - b$ vértices negros en columnas impares. Después del movimiento, habrá $2 - b$ vértices blancos y b vértices negros. Como $2 - b$ y b tienen la misma paridad (pues $(2 - b) + b = 2$ que es par), se concluye que la paridad de k no cambiará. Ahora, si el movimiento afecta a dos columnas impares, supongamos que el cuadrado que se usará para el movimiento tiene b vértices blancos y $4 - b$ vértices negros. Después del movimiento habrá $4 - b$ vértices blancos y b vértices negros. Como b y $4 - b$ tienen la misma paridad, entonces la paridad de k no cambiará, como se quería probar.
En la figura del problema, nótese que $k = 1$, el cual es impar. Si fuese posible lograr que todos los vértices sean del mismo color, en ese momento se tendría que $k = 0$ o que $k = 8$, en ambos casos una cantidad par, lo cual contradice lo probado anteriormente. De aquí la conclusión se sigue.

7) La respuesta es 8. Llamemos x a la suma común y sea a el número de la esquina superior izquierda como se muestra a continuación.

a	11	
		5

Entonces, el número a la derecha del 11 debe ser $x - a - 11$ y, por lo tanto, el número debajo del 5 debe ser $x - (x - a - 11 + 5) = a + 6$. Esto implica que el número de la casilla de en medio es igual a $x - 2a - 6$. De aquí, obtenemos que el número debajo de a es igual a $x - (x - 2a - 6 + 5) = 2a + 1$ y el número de la esquina inferior izquierda del tablero es $x - 3a - 1$. Como la suma de los números de la diagonal que va de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda, es igual a x, tenemos que $(x-a-11)+(x-2a-6)+(x-3a-1) = x$, de donde obtenemos que $x = 3a+9$. De aquí, se sigue que $x-3a-1 = (3a+9)-3a-1 = 8$ es el único valor posible para la esquina inferior izquierda del cuadrado mágico.

8) Tenemos que Área$(ABC) = \frac{bc}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\text{Área}(ABC) = \tfrac{a(b+c)}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad bc = a(b+c)\\
&\Longleftrightarrow \quad bc - ab - ac + a^2 = a^2\\
&\Longleftrightarrow \quad (b-a)(c-a) = a^2\\
&\Longleftrightarrow \quad \tfrac{b-a}{a} = \tfrac{a}{c-a}\\
&\Longleftrightarrow \quad \triangle XFY \sim \triangle YGZ\\
&\Longleftrightarrow \quad \angle XYF + \angle GYZ = 90^\circ\\
&\Longleftrightarrow \quad X, Y, Z \text{ son colineales.}
\end{aligned}$$

Competencia Internacional de Matemáticas 2022 (Nivel Secundaria)

La Competencia Internacional de Matemáticas del año 2022 (IIMC 2022), se llevó a cabo de forma virtual del 30 de junio al 6 de julio de 2022 y fue organizada por Indonesia. En esta ocasión, México participó con dos equipos de Primaria y dos equipos de Secundaria, obteniendo una medalla de plata, 6 medallas de bronce y 5 menciones honoríficas, en las pruebas individuales. En las pruebas por equipos, se obtuvieron una medalla de plata y 3 medallas de bronce. En el Torneo Puzzle un participante de Primaria obtuvo una mención honorífica.

La prueba individual en el nivel elemental (Primaria), consiste de 15 preguntas en el que se requiere que las respuestas sean solo números (nada de andar tratando de explicar o poner anotaciones). Son 90 minutos, cada problema vale 10 puntos y no hay puntos parciales. La mayoría de los problemas son retadores pero no exageradamente complicados; este tipo de problemas normalmente requieren algún pequeño truco, teoremita o simplemente mucha rapidez para hacer cuentas.

La prueba individual en el nivel Secundaria, consiste de 15 preguntas también, divididas en dos secciones A y B, para resolver en un tiempo de 120 minutos. En la sección A son 12 preguntas con las mismas reglas que en el nivel elemental; en la sección B son 3 preguntas, cada una vale 20 puntos (es decir, lo equivalente a 4 preguntas de la sección anterior), hay puntos parciales y se tiene una página completa -y nada más- para redactar las soluciones. Esta segunda parte es similar a un examen común y corriente de Olimpiada con la restricción de espacio y tiempo.

Las reglas de la prueba por equipos son las mismas tanto para el nivel elemental (Primaria) como para el nivel Secundaria. En ambos casos, los equipos están formados por 4 integrantes (del mismo país) y empiezan la prueba juntos. Reciben 8 problemas, cada uno impreso en una hoja individual. Empieza a correr el tiempo y tienen 10 minutos para hablar y decidir quién resolverá cuál problema, sin hacer anotaciones de ningún tipo; cada integrante debe tener al menos un problema, los problemas impares requieren

solo respuesta mientras que los problemas pares requieren solución y sí pueden recibir puntos parciales. Terminados esos 10 minutos, cada integrante del equipo debe trabajar de manera individual durante 35 minutos para resolver los problemas que eligió. Al concluir esos 35 minutos, deben entregar sus hojas y vuelven a juntarse. Reciben 2 problemas más y tienen 25 minutos para resolverlos trabajando en equipo. La prueba completa dura 70 minutos.
En la Competencia Internacional de Matemáticas (IMC) se premia Oro, Plata, Bronce y Mención Honorífica en proporción 1:2:3:4. A diferencia de otros países participantes como India, Irán o Estados Unidos, México realiza un largo proceso selectivo, en busca de mejores resultados. Desde que un participante presenta su primer examen en su estado hasta que presenta el examen de la IMC, pueden pasar hasta dos años. Los estudiantes mexicanos que participaron en esta IMC, se seleccionaron de las preselecciones del Concurso Nacional de la 5^a OMMEB realizada en el mes de junio de 2021 de forma virtual.

Los resultados individuales de los equipos de Secundaria en la IIMC 2022 fueron los siguientes.

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Equipo**
Héctor Juan Villarreal Corona	Ciudad de México	Bronce	A
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Bronce	A
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	M.H.	A
Leonardo Melgar Rubí	Morelos	M.H.	A
Emiliano Hernández Barranco	Morelos	Plata	B
Javier Caram Quirós	Ciudad de México	Bronce	B
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Bronce	B
Alan Alejandro López Grajales	Chiapas		B

En la prueba por equipos, los dos equipos de Secundaria obtuvieron medallas. El equipo A obtuvo medalla de bronce y el equipo B obtuvo medalla de plata. Las medallas por equipos se otorgan a los mejores puntajes obtenidos en la prueba por equipos.
Los profesores que participaron como líderes y colíderes de cada equipo de secundaria fueron: Antonio López Guzmán (líder del Equipo A), Alonso Granados Baca (colíder del Equipo A), Eric Iván Hernández Palacios (líder del Equipo B) y Crisanto Salazar Verástica (colíder del Equipo B).
A continuación presentamos los problemas y soluciones de la prueba individual y de la prueba por equipos en el nivel Secundaria de la IMC del año 2022.

Examen Individual, Nivel Secundaria

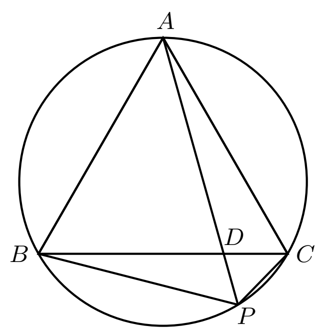
Sección A

1) Se sabe que la ecuación $x^2 + px + q = 0$ tiene dos raíces enteras positivas. Si $p + q = 19$, ¿cuál es el valor de q?

2) ¿Cuántos enteros positivos n hay tales que $n^2 + n$ tiene exactamente 6 divisores positivos?

3) Sean a, b y c números reales positivos tales que la expresión
$$\frac{3a^2 + b^2 + 3c^2}{ab + bc + ac}$$
alcanza su valor mínimo. Si $abc = 432$, encuentra el valor de $3a + b + 3c$.

4) En la figura mostrada, sea P un punto en el circuncírculo del triángulo equilátero ABC tal que $PB = 24$ cm y $PC = 8$ cm. Si AP y BC se intersecan en D, encuentra la longitud, en cm, de PD.

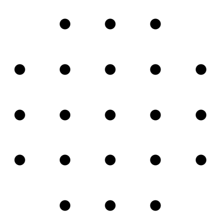


5) Sean a, b, c y d enteros positivos tales que $0 < a < b < c < d < 2022$, $a+d = b+c$ y $bc - ad = 2021$. ¿Cuántas cuádruplas ordenadas (a, b, c, d) hay tales que se cumplen estas condiciones?

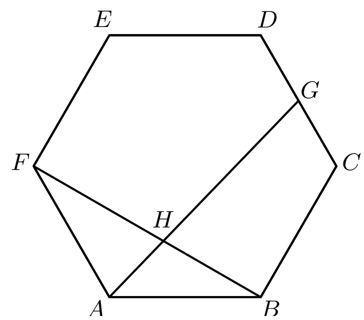
6) Sea $f(n)$ el número de veces que aparece el dígito 2 en la sucesión de enteros positivos: $1, 2, 3, 4, \ldots, n$. Por ejemplo, $f(23) = 7$, pues el dígito 2 aparece una vez en los números $2, 12, 20, 21, 23$ y dos veces en el número 22, por lo que $f(23) = 5 + 2 = 7$. Encuentra un entero positivo n tal que $f(n) = n$.

7) Sean a y b las dos raíces diferentes de $x^2 + 2018x + 1 = 0$ y sean c y d las dos raíces diferentes de $x^2 - 2022x + 1 = 0$. Encuentra el valor de $(a+c)(a-d)(b+c)(b-d)$.

8) En la cuadrícula mostrada en la siguiente figura, ¿de cuántas formas podemos elegir tres puntos diferentes de tal forma que los tres puntos formen un triángulo no degenerado?



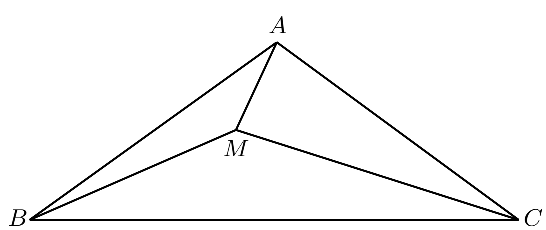
9) Sea $ABCDEF$ un hexágono regular. Sean G el punto medio de CD y H el punto de intersección de AG y BF, como se muestra en la figura. Si la longitud de BF es 140 cm, encuentra la longitud, en cm, de BH.



10) Mil números diferentes de cero $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{1000}$ son escritos en orden cíclico alrededor de un círculo. Resulta que cada número escrito en una posición impar es igual a la suma de sus dos vecinos y, que cada número escrito en una posición par, es igual al producto de sus dos vecinos. ¿Cuáles son los posibles valores para la suma de estos mil números?

11) ¿Cuántos enteros positivos de 10 dígitos hay tales que el producto de sus dígitos es 120 y la suma de sus dígitos es 20?

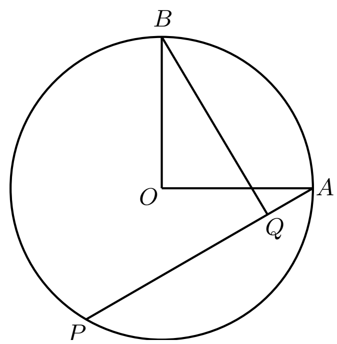
12) En la siguiente figura, el triángulo ABC es isósceles con $AB = AC$ y $\angle A = 108°$. Sea M un punto en el interior de ABC tal que $\angle MAB = 30°$ y $\angle MBA = 12°$. Encuentra la medida, en grados, del ángulo $\angle MCB$.



Sección B

1) Anna y Boris juegan un juego usando un tablero de 6×8 que contiene una ficha en cada cuadrado unitario. Anna va primero, y se alternarán los turnos después de esto. En su turno, Anna toma dos fichas en cuadrados adyacentes en la misma fila o columna. En su turno, Boris toma únicamente una ficha. Sin embargo, si Anna no puede tomar dos fichas adyacentes cuando sea su turno, Boris obtiene las fichas restantes en el tablero. ¿Cuál es el máximo número de fichas que Boris puede garantizar que obtendrá sin importar cómo juegue Anna?

2) Sean OA y OB dos radios de un círculo con centro O, tales que $OA \perp OB$, como se muestra en la siguiente figura. Sean P un punto sobre la circunferencia y Q un punto sobre AP tales que $AP = 4AQ$. Si $OA = 8$ cm, ¿cuál es la longitud mínima posible, en cm, de BQ?



3) Sea $\overline{abcd}$ un número de cuatro dígitos, con $a \neq 0$ y $c \neq 0$ tal que

$$\frac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}} + \sqrt{\overline{cd}}}$$

es un número racional. Encuentra todos los posibles valores de $\overline{abcd}$.

Examen por Equipos, Nivel Secundaria

1) Un número palíndromo es un número que es el mismo cuando se lee de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. ¿Cuántos números palíndromos de 11 dígitos hay que son divisibles por 101?

2) La función $f(x)$ está definida para todo número x y satisface la siguiente condición:

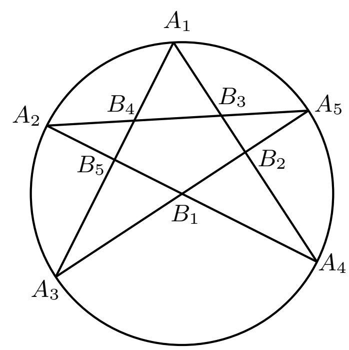
$$f(x) + 2f(y) = 3f\left(\frac{x+2y}{3}\right)$$

para cualesquiera dos números reales x y y.
Si $f(2) = 1$ y $f(5) = 7$, encuentra el valor de $f(2022)$.

3) Una compañía de Indonesia de tecnología avanzada inventó una bolsa de aire que puede ser lanzada desde edificios altos sin explotar. Un ingeniero hará una prueba en la Torre Autógrafa Thamrin Nine, que es actualmente el edificio más alto en Indonesia y tiene 75 pisos. Su meta es encontrar el piso más alto del edificio tal que, si la bolsa de aire se lanza desde este piso, entonces la bolsa de aire no explotará. El ingeniero hizo únicamente dos prototipos idénticos de esta bolsa de aire para las pruebas, los cuales pueden ser lanzados desde varios pisos del edificio. Si una bolsa de aire no explota cuando se lanza, puede ser reusada sin que haya pérdida en su

calidad. Sin embargo, si ambas bolsas de aire explotan antes de que el ingeniero haya determinado tal piso más alto, entonces la prueba se considerará como un fracaso. ¿Cuál es el mínimo número de veces que el ingeniero debe lanzar las bolsas de aire para determinar tal piso más alto?

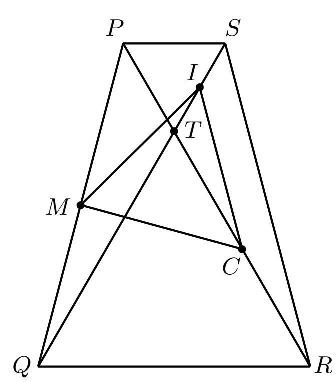
4) En la siguiente figura, los puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, están sobre la circunferencia de un círculo unitario y cumplen que $\angle A_5A_2A_4 = \angle A_1A_3A_5 = \angle A_2A_4A_1 = \angle A_3A_5A_2 = 30°$. Los pares de rectas A_2A_4 y A_3A_5, A_3A_5 y A_4A_1, A_4A_1 y A_5A_2, A_5A_2 y A_1A_3, A_1A_3 y A_2A_4, se intersecan en los puntos B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, respectivamente. Encuentra el área, en unidades cuadradas, del pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$.



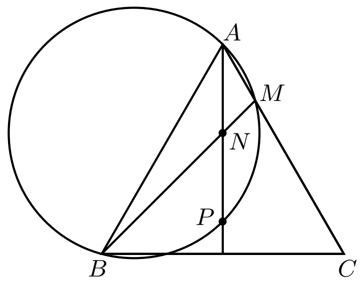
5) Si $ax + by = 7$, $ax^2 + by^2 = 49$, $ax^3 + by^3 = 133$ y $ax^4 + by^4 = 406$, encuentra el valor numérico de $2022(x + y) + 7(a + b) + 2xy$.

6) ¿Cuántos acomodos diferentes de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 en una fila hay tales que la suma de cualesquiera 2 números consecutivos es un número primo?

7) Sea $PQRS$ un trapezoide tal que $PS \parallel QR$ y T es el punto de intersección de PR y QS, como se muestra en la siguiente figura. Sean I, M y C los puntos medios de ST, PQ Y RT, respectivamente. Si $\angle STR = 120°$, $\angle SQR = \angle SPR$ y el área del triángulo IMC es igual a $1024\sqrt{3}$ cm^2, encuentra la longitud, en cm, de PQ.



8) En la siguiente figura, ABC es un triángulo equilátero, donde M y N son puntos sobre AC y BM, respectivamente, tales que $\angle ABM = 15°$ y $\angle BAN = 30°$. Sea P el punto de intersección de la línea AN con el circuncírculo del triángulo ABM. Prueba que $AN = NP$.



9) Determina la cantidad de parejas ordenadas de números enteros (a, b) que satisfacen las siguientes condiciones:

- $1 \leq a, b \leq 100$ y $a \neq b$.
- a es par.
- $(a-1) \mid (b-1)$, $a \mid b$ y $(a+1) \mid (b+1)$.

10) Andy construyó el subconjunto más pequeño S de enteros positivos que satisface las siguientes propiedades:

- Si el número t está en S, entonces los números $6t$ y $6t+1$ también están en S.
- El número 1 está en S, pero los números 2, 3, 4 y 5 no están en S.

Luego, Andy calculó la suma de dos números diferentes en S, donde ambos números son menores que 2022. ¿Cuántos resultados diferentes puede obtener Andy al hacer dicha suma?

Soluciones del Examen Individual, Nivel Secundaria

Sección A

1) La respuesta es 36. Sean a y b las dos raíces. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que $a+b=-p$ y $ab=q$. Restando la primera igualdad de la segunda, obtenemos que $ab-a-b=p+q=16$, esto es, $(a-1)(b-1)=17$. Por lo que $(a,b)=(2,18)$ o $(18,2)$, concluyendo así que $ab=q=36$.

2) La respuesta es 2. Tenemos que $n^2+n=n(n+1)$ y, es fácil ver, que $n=1$ no satisface las condiciones. Para que un número satisfaga las condiciones, debe ser de la forma p^5 o p^2q con p y q primos distintos. El caso p^5 no es posible, pues n y $n+1$ serían potencias del mismo primo, con $n < n+1$, lo cual implicaría que que

$n \mid n+1$, esto es, $n = 1$, lo que es una contradicción.
Analicemos los casos en los que $n(n+1) = p^2q$.

n	$n+1$	Argumento
1	p^2q	$n = 1$ es imposible
p	pq	$n \mid n+1$ lo cual implica que $n = 1$
p^2	q	Se analizará a continuación
q	p^2	Se analizará a continuación
pq	p	$n > n+1$, contradicción
p^2q	1	$n > n+1$, contradicción

Si $n = p^2$ y $n+1 = q$, entonces $q = p^2 + 1$. Si $q = 2$, entonces $p = 1$, que no es primo. Si q es impar, entonces p es par, obteniendo así $p = 2$, $q = 5$, así que $n = 4$ es una solución.
Si $n = q$ y $n+1 = p^2$, entonces $p^2 = q+1$. Si $q = 2$, entonces $p = 3$, que es imposible. Como q es impar, entonces $p = 2$ y $q = 3$, así que $n = 3$ es una solución.
Por lo tanto, existen dos enteros positivos n que satisfacen las condiciones del problema.

3) La respuesta es 48. Notemos que

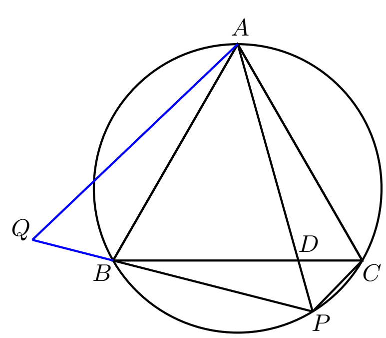
$$3a^2 + b^2 + 3c^2 = \left(a^2 + c^2\right) + \left(2a^2 + \frac{b^2}{2}\right) + \left(2c^2 + \frac{b^2}{2}\right).$$

Aplicando la desigualdad MA-MG en cada paréntesis de la expresión anterior, obtenemos que $\left(a^2+c^2\right) + \left(2a^2 + \frac{b^2}{2}\right) + \left(2c^2 + \frac{b^2}{2}\right) \geq 2ac + 2ab + 2bc$, por lo que

$$\frac{3a^2 + b^2 + 3c^2}{ab + bc + ac} \geq 2.$$

Esta cota se alcanza con $b = 2a = 2c$. A partir de $2a^3 = abc = 432$, obtenemos que $a = 6$, por lo que $3a + b + 3c = 3(6) + 2(6) + 3(6) = 18 + 12 + 18 = 48$.

4) La respuesta es 6 cm. Prolonguemos PB hasta el punto Q, de manera que $BQ = CP$.



Como $AC = AB$, tenemos que $\angle ACP = 180° - \angle ABP = \angle ABQ$ y $CP = BQ$, lo cual implica que los triángulos ACP y ABQ son congruentes, de donde se sigue que $\angle AQP = \angle APC = \angle ABC = 60°$. Más aún, como $\angle APQ = \angle ACB = 60°$, el triángulo APQ es equilátero y, por consiguiente, $PA = QP = QB + BP = PC + PB$. Por otro lado, tenemos que $\angle CAP = \angle DBP$ y $\angle CPA = \angle CBA = \angle ACB = \angle DPB$, lo que significa que los triángulos ACP y BDP son semejantes, esto es, $\frac{PC}{PB} = \frac{PC}{PD}$. Por lo tanto,

$$PD = \frac{PB \cdot PC}{PA} = \frac{PB \cdot PC}{PB + PC} = \frac{24 \cdot 8}{24 + 8} = \frac{24 \cdot 8}{32} = 6 \text{ cm}.$$

Solución alternativa. Aplicando el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero cíclico $ABPC$, tenemos que $AB \cdot PC + AC \cdot PB = BC \cdot PA$. Como $AB = BC = AC$, resulta que $AB \cdot PC + AB \cdot PB = AB \cdot PA$, esto es, $PC + PB = PA$.
Como $\angle APB = \angle ACB = \angle CBA = \angle CPD = 60°$ y $\angle BAP = \angle DCP$, se sigue que los triángulos APB y CPD son semejantes, por lo que $\frac{PA}{PC} = \frac{PB}{PD}$ y concluimos como en la primera solución.

5) La respuesta es 1931. Sean $b = a + x$, $c = a + y$ y $d = b + c - a = a + x + y$, con $x < y$. Entonces, $2021 = bc - ad = (a + c)(a + y) - a(a + x + y) = xy$. Como $2021 = 1 \cdot 2021 = 43 \cdot 47$, tenemos las siguientes posibilidades:

a) $x = 1$, $y = 2021$. En este caso, $x + y = 2022$, lo cual implica que $d = a + x + y = a + 2022 > 2022$, lo que es una contradicción. Luego, no hay soluciones en este caso.

b) $x = 43$, $y = 47$. En este caso, $x + y = 90$, lo cual implica que $(a, b, c, d,) = (a, a + 43, a + 47, a + 90)$, con $1 \leq a \leq 2021 - 90 = 1931$.

Como $d \leq 2021$, concluimos que hay 1931 posibilidades.

6) Una posibilidad es $n = 10^{10}$. Notemos que

$$\begin{aligned}
f(10) &= 1 \cdot 10^{1-1} = 1, \\
f(10^2) &= 10 \text{ (de las unidades)} + 10 \text{ (de las decenas)} \\
&= 2 \cdot 10^{2-1} = 20, \\
f(10^3) &= 20 \cdot 10 \text{ (20 en cada rango de 100)} + \\
&\quad\ 100 \text{ (apariciones de 2 en las centenas)} \\
&= 3 \cdot 10^{3-1} = 300, \\
f(10^4) &= 300 \cdot 10 \text{ (300 en cada rango de 1000)} + \\
&\quad\ 1000 \text{ (apariciones de 2 en las unidades de millar)} \\
&= 4 \cdot 10^{4-1} = 4000.
\end{aligned}$$

Probaremos por inducción que, para todo entero positivo m, $f(10^m) = m \cdot 10^{m-1}$. Los casos $m = 1$ y $m = 2$ ya han sido probados. Supongamos que existe un entero

$k \geq 2$ tal que $f(10^k) = k \cdot 10^{k-1}$. Entonces, por los argumentos anteriores tenemos que

$$f(10^{k+1}) = (k \cdot 10^{k-1})10 + 10^k = (k+1)10^k = (k+1)10^{(k+1)-1},$$

lo que prueba el resultado.
Notemos que $f(10^{10}) = 10 \cdot 10^{10-1} = 10^{10}$, por lo que tomamos $n = 10^{10}$.
Nota: Otras soluciones son: 28263827, 35000000, 242463827, 500000000, 528263827, 535000000, 10028263827, 10035000000, 10242463827, 10500000000, 10528263827 y 10535000000.

7) La respuesta es 16160. Por las fórmulas de Vieta, tenemos que $a+b = -2018$, $ab = 1$, $c+d = 2022$ y $cd = 1$. Como c y d son las dos soluciones de $x^2 - 2022x + 1 = 0$, tenemos que $c^2 - 2022c + 1 = 0$ y $d^2 - 2022d + 1 = 0$. Entonces,

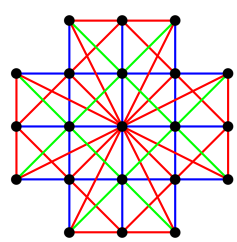
$$\begin{aligned}(a+c)(b+c) &= c^2 + (a+b)c + ab = c^2 - 2018c + 1 = c^2 - 2022c + 1 + 4c \\ &= 4c.\end{aligned}$$

Análogamente, obtenemos que

$$\begin{aligned}(a-d)(b-d) &= d^2 - (a+b)d + ab = d^2 + 2018d + 1 \\ &= d^2 - 2022d + 1 + 4040d = 4040d.\end{aligned}$$

Concluimos que $(a+c)(b+c)(a-d)(b-d) = 4c \cdot 4040d = 16160cd = 16160$.

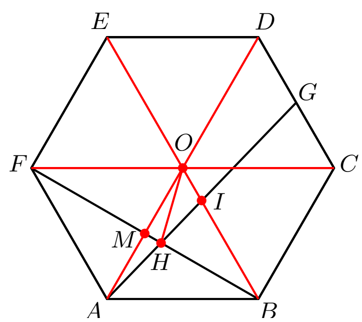
8) La respuesta es 1240. Hay $\binom{21}{3} = 1330$ maneras de escoger 3 puntos de 21, los cuales forman triángulos degenerados y no degenerados. Notemos que hay $\binom{5}{3} \cdot 6 = 60$ maneras de escoger 3 puntos en una de las seis líneas azules con exactamente 5 puntos en la cuadrícula; hay $\binom{4}{3} \cdot 4 = 16$ maneras de escoger 3 puntos de una de las líneas verdes con exactamente 4 puntos en la cuadrícula y, hay $\binom{3}{3} \cdot 14 = 14$ maneras de escoger 3 puntos en una de las 14 líneas rojas, con exactamente 3 puntos en la cuadrícula. Esto significa que hay $60 + 16 + 14 = 90$ triángulos degenerados. Por lo tanto, se pueden formar $1330 - 90 = 1240$ triángulos no degenerados.



9) La respuesta es 60 cm. Tracemos AD, BE, CF y sean O su punto de intersección, I el punto de intersección de BE con AG y, M, el punto de intersección de AD y BF. Tenemos que

$$AO = BO = CO = DO = EO = FO = AB = BC = CD = DE = EF = FA.$$

Además, $BE \parallel CD$, así que $IO \parallel DG$ y, como O es punto medio de AD, se sigue que $IO = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{4}CD = \frac{1}{4}OB$. Entonces, $BI : IO = 3 : 1$ y, como M es punto medio de OA, se sigue que $OA : MA = 2 : 1$.
En el triángulo BMO, tracemos OH. Sea a el área del triángulo OIH y sea b el área del triángulo OMH. Entonces, el área del triángulo BIH es $3a$, el área del triángulo ABH es $4a$ y el área del triángulo AMH es b. Luego, tenemos que Área(OAH) : Área$(ABH) = 2b : 4a = 1 : 3$, esto es, $b = \frac{2}{3}a$.
Como $MH : HB =$ Área(OMH) : Área$(OBH) = b : 4a = \frac{2a}{3} : 4a = 1 : 6$, resulta que $BH = \frac{6}{7}BM = \frac{3}{7}BF$ (alternativamente, por el teorema de Menelao en el triángulo BMO, $\frac{MH}{HB} \cdot \frac{BI}{IO} \cdot \frac{OA}{MA} = 1$ y $\frac{MH}{HB} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1} = 1$ o, usando que $AF \parallel BI$ y $\angle AHF = \angle BHI$, para concluir que los triángulos AHF y IHB son semejantes). Por lo tanto, $HB = \frac{3}{7}BF = \frac{3}{7} \cdot 140 = 60$ cm.



10) La respuesta es 375. Como cada número en una posición impar, es la suma de sus vecinos, tenemos que $x_3 = x_2 + x_4 = x_1x_3 + x_3x_5$, esto es, $x_1 + x_5 = 1$. De forma análoga obtenemos que

$$x_3 + x_7 = 1, x_5 + x_9 = 1, \ldots, x_{995} + x_{999} = 1, x_{997} + x_1 = 1, x_{999} + x_3 = 1.$$

Sumando las 500 ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$\begin{aligned} 500 &= 2(x_1 + x_3 + \cdots + x_{999}) \\ &= 2((x_{1000} + x_2) + (x_2 + x_4) + \cdots + (x_{9998} + x_{1000})) \\ &= 4(x_2 + x_4 + \cdots + x_{1000}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única suma posible de estos 1000 números es $500\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 375$.

Solución alternativa. Supongamos que $x_1 = a$ y $x_2 = b$. Entonces,

$$x_3 = \frac{b}{a},\ x_4 = \frac{b}{a} - b = \frac{b(1-a)}{a},\ x_5 = 1 - a,\ x_6 = (1-a)\left(1 - \frac{b}{a}\right),$$

$$x_7 = 1 - \frac{b}{a},\ x_8 = \left(1 - \frac{b}{a}\right)a = a - b,\ x_9 = a,\ x_{10} = b$$

y la secuencia se repite. Como la secuencia tiene periodo 8, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&x_1 + x_2 + \cdots + x_{1000}\\
&= 125(x_1 + x_2 + \cdots + x_8)\\
&= 125\left(a + b + \frac{b}{a} + \frac{b - ab}{a} + (1 - a) + \frac{a - b - a^2 + ab}{a} + \frac{a - b}{a} + (a - b)\right)\\
&= 125 \cdot 3 = 375.
\end{aligned}$$

11) La respuesta es 5040. Observemos que ninguno de los dígitos puede ser 0. Si el producto de los dígitos es 120, entonces uno de los dígitos es múltiplo de 5 y, como ninguno de los dígitos es 0, concluimos que alguno de los dígitos es igual a 5. Luego, la suma de los otros nueve dígitos es 15 y su producto es 24. Si entre esos nueve dígitos hubieran cinco mayores que 1, entonces su producto sería al menos 32, lo cual no es posible, llegando así a que a lo más cuatro de esos dígitos son mayores que 1, lo cual implica que al menos cinco de esos dígitos son iguales a 1.
Tenemos hasta aquí los dígitos $1, 1, 1, 1, 1, 5$. Si los demás dígitos son a, b, c, d, entonces $abcd = 24$ y $a + b + c + d = 10$. Si a, b, c, d fueran todos mayores que 1, entonces, dado que $24 = 2^3 \cdot 3$, tres de ellos serían 2 y uno de ellos sería 3, pero $2 + 2 + 2 + 3 \neq 10$, llegando así a que uno de los dígitos a, b, c, d es 1.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a = 1$ y $b \leq c \leq d$. Entonces, $bcd = 24$ y $b + c + d = 9$. Es fácil ver que, si $b \geq 3$, tenemos una contradicción, por lo que $b = 1$ o $b = 2$.
Si $b = 1$, obtenemos el sistema $cd = 24$, $c + d = 8$, para el que no existe solución.
Si $b = 2$, obtenemos el sistema $cd = 12$, $c + d = 7$, cuya única solución es $c = 3$ y $d = 4$.
Por lo tanto, los dígitos son $1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 3, 4$. Resta contar los posibles acomodos para estos dígitos. El 5 se puede acomodar en diez posiciones, el 4 en nueve posiciones, el 3 en ocho, el 2 en siete y, finalmente, se colocan los 1's en las posiciones restantes, obteniendo un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ números.

Solución alternativa. Como en la primera solución, observamos que ninguno de los dígitos puede ser 0, uno de los dígitos es 5, la suma de los nueve dígitos restantes es 15 y su producto es 24. Sea b el más grande de estos nueve dígitos. Su valor máximo es $15 - 8 = 7$, pues cada uno de los ocho dígitos restantes es al menos 1 y, su valor mínimo es 3, porque de otra forma el producto de los dígitos no sería múltiplo de 3. De las opciones $b = 3, 4, 5, 6, 7$, descartamos $b = 5$ y $b = 7$, que no dividen a 24.

- Si $b = 6$, entonces la suma de los ocho dígitos restantes es $15 - 6 = 9$. La única posibilidad es con un 2 y siete 1's, pero $6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 12 \neq 24$.
- Si $b = 4$, entonces el producto de los ocho dígitos restantes es $\frac{24}{4} = 6$. Como 6 no puede ser utilizado, la única posibilidad es con un 3, un 2 y seis 1's. Notemos que $4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 15$.
- Si $b = 3$, entonces el producto de los ocho dígitos restantes es $\frac{24}{3} = 8$. Como no se pueden usar dígitos más grandes que 3, la única posibilidad es con tres 2's y cinco 1's, pero $3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14 \neq 15$.

Por lo tanto, concluimos que los dígitos son $1, 1, 1, 1, 1, 5, 2, 3, 4$ y efectuamos el conteo como en la primera solución.

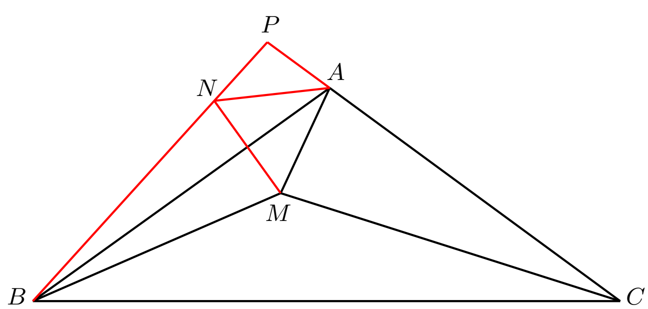
12) La respuesta es $18°$. Sea N el punto simétrico a M respecto a AB y, sea P, el punto de intersección de BN con CA. Tenemos que $\angle NAB = \angle MAB = 30°$, $\angle NBDA = \angle MBDA = 12°$ y $AN = AM$, por lo que $\angle NAM = 2 \cdot 30° = 60°$, esto es, el triángulo ANM es equilátero y $MA = MN$. Además, tenemos que

$$\angle PNA = \angle NBA + \angle NAB = 12° + 30° = 42°,$$
$$\angle PAN = 180° - (\angle NAB + \angle BAC) = 180° - (30° + 108°) = 42°.$$

Luego, el triángulo PAN es isósceles con $PA = PN$, de donde se sigue que los triángulos MAP y MNP son congruentes, por el criterio LLL. Esto implica que $\angle MPA = \angle MPN$, esto es, PM es la bisectriz del ángulo $\angle BPC$.
Por otra parte, $\angle ABC = \frac{180° - \angle BAC}{2} = 36°$, por lo que

$$\angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 36° - 12° = 24° = \angle NBM.$$

Lo anterior implica que BM es bisectriz del ángulo $\angle PBC$. De aquí se sigue que CM es bisectriz del ángulo $\angle ACB$, esto es, $\angle MCB = \frac{\angle ABC}{2} = 18°$.



Solución alternativa. Como M es un punto en el interior del triángulo ABC, por el teorema de Ceva trigonométrico tenemos que

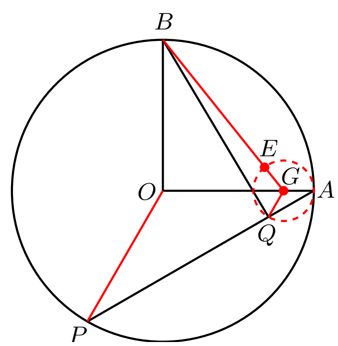
$$\frac{\operatorname{sen} \angle BCM}{\operatorname{sen} \angle MCA} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle CAM}{\operatorname{sen} \angle MAB} \cdot \frac{\operatorname{sen} \angle ABM}{\operatorname{sen} \angle MBC} = 1,$$
$$\frac{\operatorname{sen} \angle BCM}{\operatorname{sen} \angle MCA} \cdot \frac{\operatorname{sen} 78°}{\operatorname{sen} 30°} \cdot \frac{\operatorname{sen} 12°}{\operatorname{sen} 24°} = 1,$$
$$\frac{\operatorname{sen} \angle BCM}{\operatorname{sen} \angle MCA} \cdot \frac{\cos 12°}{1/2} \cdot \frac{\operatorname{sen} 12°}{2 \operatorname{sen} 12° \cos 12°} = 1,$$
$$\frac{\operatorname{sen} \angle BCM}{\operatorname{sen} \angle MCA} = 1.$$

Por lo tanto, $\angle BCM = \angle MCA = 18°$.

Sección B

1) Pintemos el tablero de blanco y negro como un tablero de ajedrez. En cada turno, una de las dos fichas que toma Anna debe estar en una casilla blanca. Para garantizar que Boris tome el máximo número de fichas en cada uno de sus 12 turnos, Boris debe tomar una ficha de una casilla blanca. De esta manera, todas las fichas en casillas blancas se habrán acabado después de 12 turnos y Anna ya no podrá tomar fichas, por lo que Boris toma las 12 fichas restantes en casillas negras, teniendo un total de 24. Este es el máximo número de fichas que Boris puede garantizar obtener, pues Anna tiene una estrategia en la que puede tomar al menos 24 fichas: dividiendo el tablero en 12 subtableros de 2×2, de donde toma un par en cada turno, lo cual Boris no puede evitar.

2) Tracemos OP y sea G un punto en OA tal que $GQ \parallel OP$. Entonces, los triángulos AOP y AGQ son semejantes. Como $AP = 4AQ$, tenemos que $OA = 4GA$ y $OP = 4GQ$. Además, $OP = OA$, así que $GQ = GA$.



Como P es un punto en la circunferencia, el lugar geométrico de Q es una circunferencia centrada en G con radio GA. Sea E la intersección de BG con esta circunferencia. Entonces, BE es la mínima longitud posible para BQ. Como $GA = \frac{1}{4}OA = 2$ cm y $OG = 8 - 2 = 6$ cm, tenemos que $BG = \sqrt{OG^2 + OB^2} = 10$ cm. Por lo tanto, $BE = BG - EG = 10 - 2 = 8$ cm.

3) Si $\frac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}}$ es racional, entonces también lo es

$$\left(\frac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}}\right)^2 = \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+\overline{cd}+2\sqrt{\overline{ab}\cdot\overline{cd}}},$$

así que $\sqrt{\overline{ab}\cdot\overline{cd}}$ es racional.
Sea x el máximo común divisor de $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$. Entonces, $\overline{ab} = x \cdot \alpha^2$ y $\overline{xd} = x \cdot \beta^2$, con $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ coprimos. A partir de aquí podemos concluir que

$$A = \frac{\sqrt{100x\alpha^2 + x\beta^2}}{\sqrt{x\alpha^2} + \sqrt{x\beta^2}} = \frac{100\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta}$$

es racional, por lo que $100\alpha^2 + \beta^2$ es un cuadrado perfecto.
Como $100\alpha^2 + \beta^2 \leq 100\alpha^2 + 81 \leq (10\alpha + 4)^2$, obtenemos que

$$(10\alpha)^2 < 100\alpha^2 + \beta^2 < (10\alpha + 4)^2,$$

lo cual implica que

$$100\alpha^2 + \beta^2 \in \{(10\alpha + 1)^2, (10\alpha + 2)^2, (10\alpha + 3)^2\}.$$

Analicemos cada caso.

- Si $100\alpha^2 + \beta^2 = (10\alpha + 1)^2$, entonces $\beta^2 = 20\alpha + 1$, así que $\alpha = 4$ y $\beta = 9$. Luego, tenemos que $\overline{ab} = 16x4$ y $\overline{cd} = 81x$, de donde $x = 1$.
- Si $100\alpha^2 + \beta^2 = (10\alpha + 2)^2$, entonces $\beta^2 = 40\alpha + 4$ y no hay soluciones.
- Si $100\alpha^2 + \beta^2 = (10\alpha + 3)^2$, entonces $\beta^2 = 60\alpha + 9$ y no hay soluciones.

Por lo tanto, la única solución posible es 1681.

Solución alternativa. Supongamos que $\frac{\sqrt{\overline{abcd}}}{\sqrt{\overline{ab}}+\sqrt{\overline{cd}}}$ es racional y sea k el máximo común divisor de $\overline{ab}$ y $\overline{cd}$. Entonces,

$$\frac{\sqrt{k}\sqrt{\overline{a'b'c'd'}}}{\sqrt{k}\left(\sqrt{\overline{a'b'}} + \sqrt{\overline{c'd'}}\right)}$$

es racional, así que $\overline{a'b'c'd'}$, $\overline{a'b'}$ y $\overline{c'd'}$ son cuadrados perfectos, donde a' o c' pueden ser 0.
Los cuadrados perfectos de a lo más dos dígitos son 01, 04, 09, 25, 26, 49, 64, 81.
Analicemos cada caso:

- Si $\overline{a'b'} = 01$, entonces solo $121, 144, 169, 196$ son cuadrados perfectos, pero $21, 44, 69, 96$ no los son, por lo que es imposible.
- Si $\overline{a'b'} = 04$, entonces solo $441, 484$ son cuadrados perfectos, pero 41 y 84 no los son, por lo que es imposible.
- Si $\overline{a'b'} = 09$, entonces solo 961 es cuadrado perfecto, pero 61 no lo es, por lo que es imposible.
- Si $\overline{a'b'} = 16$, entonces solo 1681 es cuadrado perfecto y, como 81 también lo es, obtenemos que $\overline{a'b'c'd'} = 1681$.
- Si $\overline{a'b'} = 25$, no existen cuadrados perfectos entre 2501 y 2599.
- Si $\overline{a'b'} = 36$, no existen cuadrados perfectos entre 3601 y 3699.
- Si $\overline{a'b'} = 49$, no existen cuadrados perfectos entre 4901 y 4999.
- Si $\overline{a'b'} = 64$, no existen cuadrados perfectos entre 6401 y 6499.
- Si $\overline{a'b'} = 81$, no existen cuadrados perfectos entre 8101 y 8199.

De esta manera, concluimos que $\overline{a'b'c'd'}$ es la única solución posible. Tenemos entonces que $\overline{abcd} = k\overline{a'b'c'd'} = 1681k$. Analicemos los casos en los que $k \geq 2$.

- Si $k = 2$, entonces $\overline{abcd} = 3362$, pero 33 no es igual a 2 veces un cuadrado perfecto, por lo que es imposible.
- Si $k = 3$, entonces $\overline{abcd} = 5043$, pero 43 no es igual a 3 veces un cuadrado perfecto, por lo que es imposible.
- Si $k = 4$, entonces $\overline{abcd} = 6724$, pero 67 no es igual a 4 veces un cuadrado perfecto, por lo que es imposible.
- Si $k = 5$, entonces $\overline{abcd} = 8405$, pero 84 no es igual a 5 veces un cuadrado perfecto, por lo que es imposible.
- Si $k \geq 6$, entonces $\overline{abcd} \geq 10086$ no es un número de cuatro dígitos, por lo que es imposible.

Por lo tanto, la única solución posible es 1681.

Soluciones del Examen por Equipos, Nivel Secundaria

1) Sea $N = \overline{a_0a_1a_2a_3a_4a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ un número palíndromo de 11 dígitos múltiplo de 101, esto es,

$$N = 10^{10}a_0+10^9a_1+10^8a_2+10^7a_3+10^6a_4+10^5a_5+10^4a_4+10^3a_3+10^2a_2+10a_1+a_0.$$

Como $10^2 \equiv -1 \pmod{101}$, tenemos que $10^{4k} = (10^2)^{2k} \equiv 1 \pmod{101}$ para todo entero positivo k. Luego, $10^{4k+1} \equiv 10 \pmod{101}$, $10^{4k+2} \equiv 10^2 \equiv -1 \pmod{101}$ y $10^{4k+3} \equiv 10^3 \equiv -10 \pmod{101}$ para todo entero positivo k. Esto implica que

$$\begin{aligned} N &\equiv -a_0 + 10a_1 + a_2 - 10a_3 - a_4 + 10a_5 + a_4 - 10a_3 - a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &\equiv 20a_1 - 20a_3 + 10a_5 \pmod{101}. \end{aligned}$$

Como N es múltiplo de 101, se sigue que $2a_1 - 2a_3 + a_5 \equiv 0 \pmod{101}$. Dado que el valor máximo de $2a_1 - 2a_3 + a_5$ es $2\times 9 - 2\times 0 + 9 = 27$ y el valor mínimo es $2 \times 0 - 2 \times 9 + 0 = -18$, la única opción posible es $2a_1 - 2a_3 + a_5 = 0$, de donde $a_5 = 2(a_3 - a_1)$ es par, por lo que los valores posibles para a_5 son 0, 2, 4, 6 y 8.

a) Si $a_5 = 0$, entonces $a_3 = a_1$, lo cual nos da 10 opciones.

b) Si $a_5 = 2$, entonces $a_3 = a_1 + 1$, lo cual nos da 9 opciones.

c) Si $a_5 = 4$, entonces $a_3 = a_1 + 2$, lo cual nos da 8 opciones.

d) Si $a_5 = 6$, entonces $a_3 = a_1 + 3$, lo cual nos da 7 opciones.

e) Si $a_5 = 8$, entonces $a_3 = a_1 + 4$, lo cual nos da 6 opciones.

Luego, en total tenemos $10+9+8+7+6 = 40$ opciones. Para cada combinación de a_1, a_3 y a_5, calculamos todas las posibles combinaciones de a_0, a_2 y a_4.
Dado que $a_0 \neq 0$, hay 9 opciones para el dígito a_0 y, para cada uno de los dígitos a_2 y a_4, tenemos 10 opciones, por lo que el total de posibles valores para N es $9 \times 10 \times 10 \times 40 = 36000$.

2) Sustituyendo $x = 2$ y $y = 5$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(2) + 2f(5) = 3f\left(\frac{2 + 2 \times 5}{3}\right) = 3f(4),$$

de donde, $f(4) = \frac{f(2)+2f(5)}{3} = \frac{1+2\times 7}{3} = 5$.
Si ahora sustituimos $x = 5$ y $y = 2$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(5) + 2f(2) = 3f\left(\frac{5 + 2 \times 2}{3}\right) = 3f(3),$$

de donde $f(3) = \frac{f(5)+2f(2)}{3} = \frac{7+2\times 1}{3} = 3$.
Tenemos que los primeros valores de $f(n)$ son: $f(2) = 1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 5$ y $f(5) = 7$. Es fácil probar por inducción que $f(n) = 2n-3$ para todo entero $n > 1$.
Haciendo $x = n$ y $y = n + 3$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(n) + 2f(n + 3) = 3f(n + 2),$$

esto es, $2n - 3 + 2f(n + 3) = 3(2(n + 2) - 3) = 6n + 3$, de donde

$$f(n + 3) = \frac{1}{2}(6n + 3 - 2n + 3) = 2n + 3.$$

Por lo tanto, $f(2022) = f(2019 + 3) = 2 \times 2019 + 3 = 4041$.

3) Sabemos que $1 + 2 + \cdots + 11 = 66 < 75 < 1 + 2 + \cdots + 11 + 12 = 78$, por lo que, intentemos tirar una bolsa de aire desde el doceavo piso. Si explota, podemos determinar el piso más alto mediante el lanzamiento de una segunda bolsa de aire no más de 11 veces (se lanza desde el primer piso y, si no explota, se lanza desde el segundo piso y, si aún no explota, se lanza desde el tercer piso y así sucesivamente).
Así, tenemos un máximo de $1 + 11 = 12$ lanzamientos.
Si la primera bolsa sobrevive el lanzamiento desde el doceavo piso, entonces la lanzamos ahora desde el piso 23 ($12+11 = 23$). Si esta explota, podemos completar el experimento en no más de 10 lanzamientos con una segunda bolsa de aire, lanzándola entre los pisos 13 y 22. De esta manera, tenemos un máximo de $1 + 1 + 10 = 12$ lanzamientos.
Si desde el piso 23 la primera bolsa de aire no explota, el siguiente piso para lanzarla es el piso 33 (pues $12 + 11 + 10 = 33$). Si explota, se lanza la segunda bolsa desde los pisos 24 al 32 (9 lanzamientos como máximo). Tenemos así un máximo de $1 + 1 + 1 + 9 = 12$ lanzamientos. Siempre que la bolsa no explote, es posible repetir el experimento del mismo modo. Después del piso 33, debe ser el piso 42, luego el piso 50 (pues $12 + 11 + 10 + 9 + 8 = 50$), y así sucesivamente.

Si la primera bolsa de aire sobrevive 9 lanzamientos, el último lanzamiento debe ser desde el piso 72 (pues $12+11+10+9+8+7+6+5+4=72$), luego se vuelve a lanzar desde el piso 75 (pues $12+11+10+9+8+7+6+5+4+3=75$). Si no explota, entonces el experimento se completa en exactamente 10 lanzamientos. Si explota en el piso 75, se puede completar el experimento con la segunda bolsa de aire, en un máximo de dos lanzamientos, lanzándola desde los pisos 73 y 74. Nuevamente, se tiene un máximo de $10+1+1=12$ lanzamientos.

Probaremos que no se puede garantizar encontrar el piso más alto desde el cual la bolsa de aire se puede lanzar sin explotar, en menos de 12 lanzamientos.

Supongamos que la primera bolsa de aire es lanzada inicialmente desde el piso número $k \geq 13$. Si explota, entonces para encontrar el piso más alto desde el cual la segunda bolsa de aire va a explotar, debemos lanzarla por todos los pisos menores a k, en orden ascendente. Como tenemos al menos 12 pisos debajo de k, no podemos saltarnos ningún piso, pues si se salta un piso, si la segunda bolsa de aire explota, no es posible decir si el límite es el piso que se omitió, o el piso debajo de él, así que el número total de lanzamientos será al menos $1+12=13$. Por lo tanto, al lanzar la primera bolsa de aire desde el piso 13 o más arriba, no se garantiza encontrar el piso más alto en menos de 13 lanzamientos.

Supongamos que la primera bolsa de aire es lanzada inicialmente desde el piso número $k \leq 11$. Si no explota, entonces la lanzamos desde pisos más arriba. De aquí, el problema se reduce a un experimento que involucra una torre de al menos 64 pisos y dos bolsas de aire.

No podemos lanzar la bolsa de aire de nuevo (una segunda vez) desde un piso igual a $12+10=22$ o superior; de otro modo, si la bolsa de aire explota en el segundo lanzamiento (en el piso al menos 22), se necesitan al menos 10 lanzamientos para la segunda bolsa de aire para garantizar el piso más alto. Esto nos da un total de al menos $1+1+10=12$ lanzamientos.

Supongamos entonces que se lanza la primera bolsa de aire, por segunda vez, en el piso número 21 o menos, y no explota. El problema ahora se reduce a un experimento que involucra una torre de al menos 54 pisos y dos bolsas de aire.

No se puede lanzar la bolsa de aire de nuevo (una tercera vez) desde un piso igual a $22+9=31$ o superior. De otro modo, si la bolsa de aire explota en el tercer lanzamiento (desde el piso 31 o superior), se necesitarán al menos 9 lanzamientos para la segunda bolsa de aire para garantizar el piso más alto. Esto nos da un total de $1+1+1+9=12$ lanzamientos.

Supongamos entonces que se lanza la primera bolsa de aire, por tercera ocasión, desde el piso número 30 o menos, y no explota. El problema se reduce ahora a un experimento que involucra una torre de al menos 45 pisos y dos bolsas de aire.

Siguiendo este razonamiento, se prueba que la primera bolsa de aire no puede ser lanzada una cuarta ocasión desde un piso superior a $31+8=39$, ni por quinta vez desde un piso superior a $39+7=46$, ni por sexta vez desde un piso superior a $46+6=52$, ni por séptima vez desde un piso superior a $52+5=57$, ni por octava vez desde un piso superior a $57+4=61$, ni por novena vez desde un piso superior a $61+3=64$, ni por décima vez desde un piso superior a $64+3=67$, ni por onceava vez desde un piso superior a $67+2=69$, ni por doceava vez desde un piso superior a $69+1=70$.

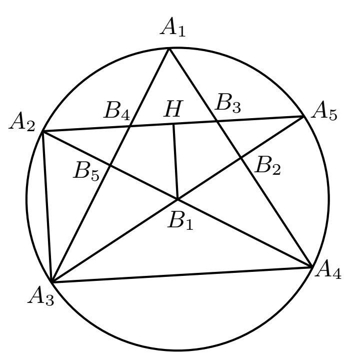
Por cada lanzamiento de la primera bolsa de aire, necesitamos al menos 12 lanzamientos (para ambas bolsas de aire) para encontrar el piso más alto.
Notemos que, para alcanzar el piso 75 de la torre, necesitamos más de 12 lanzamientos para la primera bolsa de aire, por lo que no es posible bajar de 12 lanzamientos.
Para obtener la solución óptima, se debe lanzar la primera bolsa de aire desde el piso número 12 y se sigue el razonamiento de la primera parte de la demostración.

Solución alternativa. Supongamos que tenemos una sola bolsa de aire y queremos encontrar el máximo piso desde cual la bolsa de aire no explota en a lo más k lanzamientos. Necesariamente debemos checar los pisos del 1 en adelante sin saltar ninguno, pues si la bolsa de aire explota, no seremos capaces de determinar el piso más alto del cual habría explotado. Por lo tanto, el edificio más alto del cual podemos hacer esto tiene k pisos.
Sea $f(k)$ la mayor cantidad de pisos que podemos checar con dos bolsas de aire, dados k lanzamientos. Tras lanzar la primera bolsa de aire desde el piso n, hay dos posibilidades. Si la bolsa de aire explota, entonces debemos checar los pisos del 1 al $n-1$ en orden, con $k-1$ lanzamientos. Por el argumento anterior, el mayor valor de n con el cual podemos hacer esto es $n = k$. Si la bolsa no explota, quedan $f(k) - k$ pisos por checar con $k - 1$ lanzamientos. Esto significa que $f(k) = f(k-1) + k$, por lo que $f(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Como $f(11) = 66$ y $f(12) = 78$, la mínima cantidad de lanzamientos para el edificio de 75 pisos es 12.

4) Observemos que

$$\begin{aligned}\angle A_2A_3A_4 &= \angle A_2A_3A_1 + \angle A_1A_3A_5 + \angle A_5A_3A_4 \\ &= \angle A_2A_4A_1 + \angle A_1A_3A_5 + \angle A_5A_3A_4 = 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ = 90^\circ.\end{aligned}$$

Esto significa que A_2A_4 es un diámetro del círculo. Análogamente, obtenemos que A_3A_5 es un diámetro, por lo que B_1 es el centro del círculo. Tracemos una altura del triángulo $A_2B_1A_5$ a través de B_1 y sea H el pie de esta altura.



Tenemos que $\angle HA_2B_1 = 30^\circ$ y $\angle B_1HA_2 = 90^\circ$, así que $\angle A_2B_1H = 60^\circ$. Como A_2B_1 es radio, resulta que $A_2B_1 = 1$, $B_1H = \frac{1}{2}$ y $HA_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de donde se sigue

que el área del triángulo A_2B_1H es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}$.
En el triángulo A_3B_1H, tenemos que

$$\angle A_3B_1B_5 = \angle B_1A_5A_2 + \angle B_1A_2A_5 = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

y $\angle B_5A_3B_1 = 30^\circ$, lo cual implica que $\angle B_1B_5A_3 = 90^\circ$ y, como $A_3B_1 = 1$, tenemos que $B_1B_5 = \frac{1}{2}$. En el triángulo $A_2B_4B_5$, tenemos que $\angle B_5A_2B_4 = 30^\circ$ y $\angle B_4B_5A_2 = \angle B_1B_5A_3 = 90^\circ$, lo cual implica que $\angle A_2B_4B_5 = 60^\circ$. Como $B_5A_2 = \frac{1}{2}$, tenemos que $B_4B_5 = \frac{\sqrt{3}}{6}$, por lo que el área del triángulo $A_2B_4B_5$ es $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{24}$.
De lo anterior, se sigue que el área del cuadrilátero $B_1HB_4B_5$ es $\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. Similarmente, el área del cuadrilátero $B_1HB_3B_2$ es $\frac{\sqrt{3}}{12}$, por lo que el área del pentágono $B_1B_2B_3B_4B_5$ es $2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

5) Multiplicando las primeras tres ecuaciones por $x + y$ obtenemos que

$$\begin{aligned}(ax + by)(x + y) &= ax^2 + by^2 + (a + b)xy,\\ (ax^2 + by^2)(x + y) &= ax^3 + by^3 + (ax + by)xy,\\ (ax^3 + by^3)(x + y) &= ax^4 + by^4 + (ax^2 + by^2)xy,\end{aligned}$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en las variables $x + y$, xy y $a + b$.

$$7(x + y) = 49 + (a + b)xy, \tag{10}$$
$$49(x + y) = 133 + 7xy, \tag{11}$$
$$133(x + y) = 406 + 49xy, \tag{12}$$

Multiplicando por 7 la ecuación (11) y restando después la ecuación (12), obtenemos que $343(x + y) - 133(x + y) = (931 + 49xy) - (406 + 49xy)$. Después de simplificar, resulta que $x + y = \frac{5}{2}$. Luego,

$$xy = \frac{49 \cdot \frac{5}{2} - 133}{7} = -\frac{3}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación (10), obtenemos que $a + b = \frac{7 \cdot \frac{5}{2} - 49}{-\frac{3}{2}} = 21$. Por lo tanto,

$$2022(x + y) + 7(a + b) + 2xy = 2022 \cdot \frac{5}{2} + 7 \cdot 21 + 2\left(-\frac{3}{2}\right) = 5199.$$

Solución alternativa. Observemos que

$$\begin{aligned}&(ax + by)(ax^3 + by^3) - (ax^2 + by^2)^2\\ &= a^2x^4 + abxy^3 + abyx^3 + by^4 - a^2x^4 - 2abx^2y^2 - b^2y^4\\ &= abxy(y^2 + x^2 - 2xy)\\ &= abxy(x - y)^2 = 7 \cdot 133 - 49^2 = -1470.\end{aligned}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}
&(ax+by)(ax^4+by^4)-(ax^2+by^2)(ax^3+by^3)\\
&=a^2x^5+abxy^4+abyx^4+by^5-a^2x^5-2abx^2y^3-abx^3y^2-b^2y^5\\
&=abxy(x^3+y^3-xy^2-x^2y)\\
&=abxy(x+y)(x-y)^2=7\cdot 406-49\cdot 133=-3675
\end{aligned}$$

y también tenemos que

$$\begin{aligned}
&(ax^2+by^2)(ax^4+by^4)-(ax^3+by^3)^2\\
&=a^2x^6+abx^2y^4+abx^4y^2+b^2y^6-a^2x^6-2abx^3y^3-b^2y^6\\
&=abx^2y^2(x^2+y^2-2xy)\\
&=abx^2y^2(x-y)^2=49\cdot 406-133^2=2205.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$x+y=\frac{abxy(x+y)(x-y)^2}{abxy(x-y)^2}=\frac{-3675}{-1470}=\frac{5}{2},$$

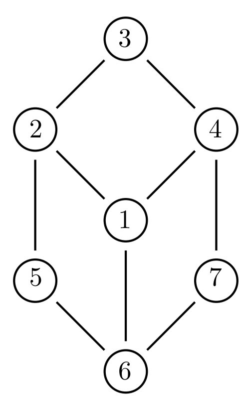
$$xy=\frac{abx^2y^2(x-y)^2}{abxy(x-y)^2}=\frac{2205}{-1470}=-\frac{3}{2}.$$

Como $(ax+by)(x+y)=ax^2+by^2+(a+b)xy$, resulta que

$$a+b=\frac{7\cdot\frac{5}{2}-49}{-\frac{3}{2}}=21$$

y concluimos como en la primera solución.

6) Representemos a cada número del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ mediante un vértice y, si la suma de dos números es un número primo, los conectamos a través de una arista, obteniendo así el siguiente grafo.



La pregunta es equivalente a contar todos los caminos Hamiltonianos en el grafo. Analicemos estos caminos iniciando en cada vértice. Por simetría, solo es necesario considerar los vértices 1, 2 (similar a 4 y 6) y 3 (similar a 5 y 7).

a) Vértice 1. Existen dos caminos Hamiltonianos que inician en 1 y continúan en 2, que son $1-2-3-4-7-6-5$ y $1-2-5-6-7-4-3$. Se tiene una solución análoga yendo de 1 a 4 y de 1 a 6, por lo que en este caso hay $2 \cdot 3 = 6$ caminos Hamiltonianos.

b) Vértice 2. No existen caminos Hamiltonianos.

c) Vértice 3. Existen tres caminos Hamiltonianos que inician en 3 y continúan en 2, que son $3-2-1-4-7-6-5, 3-2-5-6-1-4-7$ y $3-2-5-6-7-4-1$. Se tiene una solución análoga yendo de 3 a 4, por lo que en este caso hay $3 \cdot 2 = 6$ caminos Hamiltonianos.

d) Vértice 4. Por simetría con el vértice 2, no hay caminos Hamiltonianos.

e) Vértice 5. Por simetría con el vértice 3, hay 6 caminos Hamiltonianos.

f) Vértice 6. Por simetría con el vértice 2, no hay caminos Hamiltonianos.

g) Vértice 7. Por simetría con el vértice 3, hay 6 caminos Hamiltonianos.

Por lo tanto, hay $6 \cdot 4 = 24$ maneras de acomodar los números.

Solución alternativa. Sean $A = \{1, 3, 5, 7\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$. Pensemos en cada acomodo de estos números como un número de 7 dígitos. Como la suma de dos dígitos consecutivos debe ser un número primo, no podemos tener dos dígitos consecutivos en el mismo conjunto A o B, por lo que los números de A solo pueden estar en posiciones impares y los números de B solo pueden estar en posiciones pares. Luego, existen $4! = 24$ permutaciones de elementos de A. Sin embargo, para cada permutación, existe una única manera de construir el número de 7 dígitos, como se explica a continuación.
Como el número 1 solo puede estar en la primera, tercera, quinta y séptima posición, analicemos cada una de estas posibilidades.

a) Primera posición. Existen $3! = 6$ maneras de acomodar el resto de los elementos de A en las demás posiciones impares, cada una con una única solución: $1432567, 1234765, 1256743, 1652347, 1476523, 1674325$.

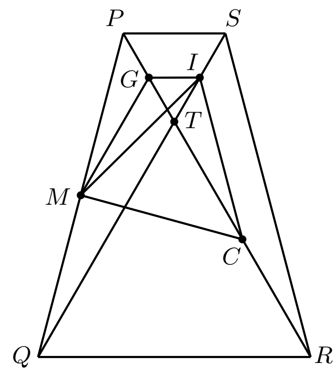
b) Tercera posición. Existen $3! = 6$ maneras de acomodar el resto de los elementos de A en las demás posiciones impares, cada una con una única solución: $3412567, 3214765, 5612347, 5216743, 7614325, 7416523$.

c) Quinta posición. Por simetría con la tercera posición, existen también 6 soluciones en las que el 1 está en la quinta posición.

d) Séptima posición. Por simetría con la primera posición, existen también 6 soluciones en las que el 1 está en la séptima posición.

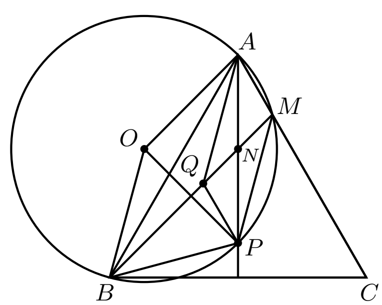
Por lo tanto, hay un total de $6 + 6 + 6 + 6 = 24$ acomodos.

7) Observemos que $\angle STP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Como PS y QR son paralelas y $\angle SQR = \angle SPR$, los triángulos PTS y QTR son equiláteros, así que $PQ = SR$, $IC = \frac{SR}{2} = \frac{PQ}{2}$ y $\angle TPM = \angle TSR$. Además, como $IC = \frac{PQ}{2}$ y M es punto medio de PQ, tenemos que $PM = IC$. Sea G el punto medio de PT.



Tenemos que los triángulos ITC y PGM son congruentes, pues $GP = \frac{1}{2}PT = \frac{1}{2}ST = TI$, $PM = IC$ y $\angle GPM = \angle TSR = \angle TIC$. Entonces, $\angle PGM = \angle ITC = 120^\circ$ y $\angle IGM = 360^\circ - \angle PGM - \angle PGI = 120^\circ$. Además, $IG = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}PT = PG$, así que también son congruentes los triángulos PGM y IGM. Entonces, $IC = PM = MQ = IM$ y $\angle GIM = \angle TPQ$. Luego, $\angle MIG + \angle MIQ = \angle GIT = 60^\circ$ y $\angle MIC = \angle TIC + \angle MIQ = \angle PGM + \angle MIQ = \angle MIG + \angle MIQ = 60^\circ$, lo que significa que el triángulo IMC es equilátero. Como el área del triángulo IMC es $1024\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}IC^2$, tenemos que $IC = 2 \cdot 32 = 64$ cm, por lo que $PQ = 2IC = 128$ cm.

8) Sea O el centro del circuncírculo del triángulo ABM, de radio r y, sea Q un punto en MB, tal que $\angle QAB = 15^\circ$.



Como $\angle QAB = \angle QBA = 15^\circ$, tenemos que $QA = QB$. Luego, de $\angle MAP = \angle PAB = 30^\circ$, obtenemos que $\widehat{PM} = \widehat{PB} = 60^\circ$, así que $PM = PB = r$.
A partir de $\angle AQM = \angle QAB + \angle QBA = 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$ y $\angle PMB =$

$\frac{1}{2}\widehat{PB} = 30^\circ$, se sigue que $\angle AQM = \angle PMQ = 30^\circ$, así que AQ y MP son paralelas. Como $PB = OP = OB = r$, el triángulo POB es equilátero, por lo que $\angle PBQ = 60^\circ$ y, como $\angle PMB = \frac{1}{2}\widehat{PB} = 30^\circ$, tenemos que

$$\angle ABO = \angle PBO - \angle PBM - \angle MBA = 60^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ.$$

Dado que $OA = OB$, tenemos que $\angle OAB = \angle OBA = 15^\circ$. Además, los triángulos QBA y OBA son congruentes, pues $\angle QBA = \angle OBA = \angle QAB = \angle OAB = 15^\circ$ y comparten el lado AB, por lo que $QA = OA = r$.
Finalmente, obtenemos que $AQ = MP = r$ y, junto con el paralelismo de AQ y MP, se sigue que $AMPQ$ es un paralelogramo, por lo que $AN = NP$.

Solución alternativa. Sean O y r como en la solución anterior. Tenemos que

$$\angle AOP = \widehat{AM} + \widehat{MP} = 2(\angle ABM + \angle MAP) = 2(15^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$

y $\angle MOP = 2\angle MAP = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, lo cual implica que $AP = \sqrt{2}r$ y $MP = r$. Como $\angle BMP = \angle BAP = 30^\circ = \angle MAP$ y $\angle NPM = \angle MPA$, los triángulos NMP y MAP son semejantes, así que $\frac{NP}{MP} = \frac{MP}{AP}$ y, por lo tanto,

$$NP = \frac{MP^2}{AP} = \frac{r^2}{\sqrt{2}r} = \frac{\sqrt{2}}{2}r = \frac{1}{2}AP,$$

lo que significa que N es el punto medio de AP, esto es, $AN = NP$.

9) Como a y b son enteros positivos distintos y $a \mid b$, tenemos que $a < b$. Como $a - 1$ divide a $b - 1$ y $b - a = (b - 1) - (a - 1)$, tenemos que $a - 1$ divide a $b - a$. Análogamente, como $a \mid b$, tenemos que a divide también a $b - a$. Por último, como $a + 1$ divide a $b + 1$ y $b - a = b + 1 - (a + 1)$, se sigue que $a + 1$ divide también a $b - a$. Como $a - 1$, a y $a + 1$ son primos relativos, concluimos que $(a - 1)a(a + 1)$ divide a $b - a$ y, como $b - a > 0$, resulta que $b = k(a^3 - a) + a$ para algún entero positivo k.
Usando que $b \leq 100$, tenemos que

$$100 \geq k(a^3 - a) + a \geq (a^3 - a) + a = a^3$$

y, como $6^3 > 100$, las opciones posibles para a son: $a = 2$ o $a = 4$, que son ambos pares.
Si $a = 2$, entonces $100 \geq k(2^3 - 2) + 2 = 6k + 2$ y el mayor valor posible para b, que es menor o igual que 100, es $98 = 6 \cdot 16 + 2$, por lo que en este caso las parejas (a, b) son de la forma $(2, 6k + 2)$ con $k = 1, 2, 3, \ldots, 16$, dando un total de 16 parejas.
Si $a = 4$, entonces $100 \geq k(4^3 - 4) + 4 = 60k + 4$. Como $k \geq 1$, el único valor posible para b, que es menor o igual que 100, es 64, por lo que la única posibilidad es $(4, 64)$.
Por lo tanto, son $16 + 1 = 17$ parejas que satisfacen las condiciones del problema.

10) Los números en el conjunto de Andy son precisamente aquellos enteros positivos cuya representación en base 6 contienen solo 0's y 1's.

Tenemos que $1 = 1_6$, $6 = 6 \cdot 1 = 1_6$, $7 = 6 \cdot 1 + 1 = 11_6$, $36 = 6^2 = 100_6$, $37 = 6^2 + 1 = 101_6$, $42 = 6(6+1) = 6^2 + 6 = 110_6$, $43 = 6(6+1) + 1 = 6^2 + 6 + 1 = 111_6, \ldots$
Notemos que $100000_6 = 6^5 > 2022 > 6^4 = 10000_6$, por lo que el número más grande que puede escoger Andy es $11111_6 = 6^4 + 6^3 + 6^2 + 6 + 1 = 1555$.
Como $0+0 = 0$, $1+0 = 0+1 = 1$ y $1+1 = 2$, las sumas calculadas por Andy en base 6 contienen solo los dígitos 0, 1 y 2. Más aún, estas sumas no pueden consistir solamente de dígitos 0 y 2 (la única manera de descomponerla como $s_1 + s_2$ para algunos $s_1, s_2 \in S$ es con $s_1 = s_2$, por ejemplo, $202_6 = 101_6 + 101_6$), o su único dígito distinto de 0 es el 1 (la única manera de descomponerla como $s_1 + s_2$ para algunos $s_1, s_2 \in S$ es con $s_1 = 0$ o $s_2 = 0$, por ejemplo, $10_6 = 10_6 + 0_6$). Así, los números calculados por Andy satisfacen las siguientes condiciones en base 6:

a) Al menos uno de sus dígitos es 1.

b) Es imposible que solo un dígito sea 1 sin que haya un dígito 2.

c) El número más grande es 22221_6.

Supongamos que el número calculado por Andy es de la forma $\overline{abcde}_6$, formado solo por los dígitos 0, 1 y 2, de los cuales hay $3^5 = 243$ posibilidades. Luego, como hay $2^5 = 32$ números sin el dígito 1 y 5 números contienen un único dígito 1 sin un dígito 2, hay $243 - 32 - 5 = 206$ valores posibles.

Problemas de Olimpiadas Internacionales

XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Del 25 de septiembre al 1 de octubre de 2022 se llevó a cabo en Bogotá, Colombia, la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), en la que participaron 20 países y un total de 75 estudiantes. México ocupó el tercer lugar por países quedando por detrás de Perú y Brasil, quienes ocuparon el primero y el segundo lugar, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Rogelio Guerrero Reyes (Aguascalientes).
- Leonardo Míkel Cervantes Mateos (Ciudad de México).
- Eric Ransom Treviño (Nuevo León).
- Diego Alfonso Villarreal Grimaldo (Nuevo León).

Rogelio obtuvo medalla de oro, Diego y Eric obtuvieron medallas de plata y Mikel obtuvo medalla de bronce. Los profesores que acompañaron a la delegación fueron Ignacio Barradas Bribiesca (líder) y José Alejandro Reyes González (tutor).

Durante los últimos años, México se ha posicionado como uno de los líderes indiscutible en la OIM. Los resultados de México por países desde el año 2018, han sido los siguientes: cuarto lugar en 2018, tercer lugar en 2019, segundo lugar en 2020, tercer lugar en 2021 y tercer lugar en 2022.

A continuación, presentamos los problemas de la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Los alumnos tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Sea ABC un triángulo equilátero con circuncentro O y circuncírculo Γ. Sea D un punto en el arco menor $\widehat{BC}$, con $DB > DC$. La mediatriz de OD corta a Γ en E y F, con E en el arco menor $\widehat{BC}$. Sea P el punto de corte de BE y CF. Demostrar que PD es perpendicular a BC.

Problema 2. Sea $S = \{13, 133, 1333, \ldots\}$ el conjunto de los enteros positivos de la forma $1\underbrace{33\ldots3}_{n \text{ dígitos}}$, con $n \geq 1$. Consideremos una fila horizontal de 2022 casillas, inicialmente vacías. Ana y Borja juegan de la siguiente manera: cada uno, en su turno, escribe un dígito de 0 a 9 en la casilla vacía situada más a la izquierda. Empieza a jugar Ana; luego ambos jugadores se alternan hasta que todas las casillas estén llenas. Cuando el juego termina, en la fila se lee, de izquierda a derecha, un número N de 2022 dígitos. Borja gana si N es divisible por alguno de los números que están en S; en caso contrario gana Ana. Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y describirla.

Problema 3. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

i) $f(yf(x)) + f(x-1) = f(x)f(y)$ para todo x, y en $\mathbb{R}$.
ii) $|f(x)| < 2022$ para todo x con $0 < x < 1$.

Problema 4. Sea $n > 2$ un entero positivo. Se tiene una fila horizontal de n casillas donde cada casilla está pintada de azul o rojo. Decimos que un *bloque* es una secuencia de casillas consecutivas del mismo color. Arepito, el cangrejo, está inicialmente parado en la primera casilla, en el extremo izquierdo de la fila. En cada turno, él cuenta la cantidad m de casillas pertenecientes al bloque más grande que contiene la casilla en la que está y hace una de las siguientes acciones:

- Si la casilla en la que está es azul y hay al menos m casillas a la derecha de él, Arepito se mueve m casillas hacia la derecha.
- Si la casilla en la que está es roja y hay al menos m casillas a la izquierda de él, Arepito se mueve m casillas hacia la izquierda.
- En cualquier otro caso, se queda en la misma casilla y no se mueve más.

Para cada n, determinar el menor entero k para el que existe una coloración inicial de la fila con k casillas azules para la que Arepito puede llegar a la última casilla, en el extremo derecho de la fila.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo con circuncírculo Γ. Sean P y Q puntos en el semiplano definido por BC que contiene a A, tales que BP y CQ son tangentes a Γ con $PB = BC = CQ$. Sean K y L puntos distintos de A en la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$, tales que $BK = BA$ y $CL = CA$. Sea M el punto de corte de las rectas PK y QL. Demostrar que $MK = ML$.

Problema 6. Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ tales que $f(a)f(a+b) - ab$ es un cuadrado perfecto para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

9ª Olimpiada Iraní de Geometría

El 14 de octubre de 2022 se aplicó en México el examen de la 9^a Olimpiada Iraní de Geometría. Este examen fue aplicado en 17 Estados del país, con la participación en todos los niveles de la competencia. En cada nivel, son 5 problemas para resolver en un tiempo máximo de 4.5 horas y cada problema vale 8 puntos. México envió a Irán los resultados de los exámenes con mayor puntuación en cada uno de los niveles: elemental, intermedio, avanzado y libre. El examen del nivel libre es el mismo examen del nivel avanzado, la diferencia es que en el nivel libre pueden participar estudiantes de licenciatura. En esta ocasión, se obtuvieron 2 medallas de plata y 5 medallas de bronce.

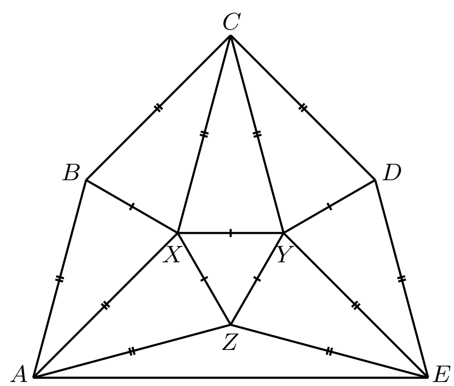
Los resultados fueron los siguientes:

Nombre	**Estado**	**Medalla**	**Nivel**
Nayeli Valentina Ortiz Cordero	Ciudad de México		Elemental
Elisa María Villarreal Corona	Ciudad de México		Elemental
Juan Eduardo Castro Aguirres	Tamaulipas		Elemental
Héctor Juan Villarreal Corona	Ciudad de México	Plata	Intermedio
Andrea Sarahí Cascante Duarte	Morelos	Bronce	Intermedio
Sebastián Montemayor Trujillo	Nuevo León	Bronce	Intermedio
Mateo Iván Latapí Acosta	Ciudad de México	Bronce	Intermedio
Eric Ransom Treviño	Nuevo León	Plata	Avanzado
Omar Farid Astudillo Marbán	Guerrero	Bronce	Avanzado
Luis Eduardo Martínez Aguirre	Nuevo León		Avanzado
Carlos Fernando Amador Martínez	Ciudad de México		Avanzado
Diego Caballero Ricaurte	Ciudad de México		Avanzado
Natalia Malpica Blackaller	Ciudad de México		Avanzado
Diego Ocaranza Núñez	Jalisco		Avanzado
Dariam Aguilar	Baja California		Avanzado
Diego Alfonso Villarreal Grimaldo	Nuevo León	Bronce	Libre

A continuación presentamos los problemas de la 9^a Olimpiada Iraní de Geometría.

Nivel Elemental

Problema 1. Determine las medidas de los ángulos del pentágono $ABCDE$ de la siguiente figura.



Problema 2. Un trapecio isósceles $ABCD$ ($AB \parallel CD$) está dado. Los puntos E y F están en los lados BC y AD, y los puntos M y N están en el segmento EF de tal manera que $DF = BE$ y $FM = NE$. Sean K y L los pies de las perpendiculares de M y N a AB y CD, respectivamente. Demuestre que $EKFL$ es un paralelogramo.

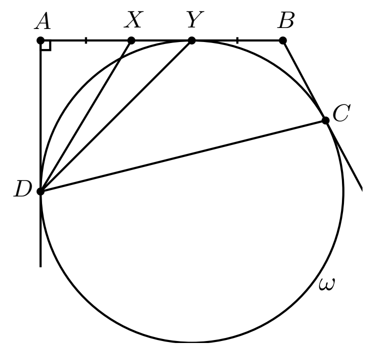
Problema 3. Sea $ABCDE$ un pentágono convexo que satisface que $AB = BC = CD$ y $\angle BDE = \angle EAC = 30°$. Determine todos los posibles valores de $\angle BEC$.

Problema 4. En un triángulo ABC, sea D el punto sobre BC tal que AD es bisectriz interna del ángulo $\angle BAC$. Los incírculos de los triángulos ABC y ACD se tocan el uno al otro externamente. Demuestre que $\angle ABC > 120°$.
Nota: Recuerde que el incírculo de un triángulo es la circunferencia dentro del triángulo que es tangente a sus tres lados.

Problema 5. a) ¿Existen cuatro triángulos equiláteros en el plano tales que cada dos de ellos tengan exactamente un vértice común y que todo punto del plano esté en la frontera de a lo más dos de ellos?
b) ¿Existen cuatro cuadrados en el plano tales que cada dos de ellos tengan exactamente un vértice común y que todo punto del plano esté en la frontera de a lo más dos de ellos? (Note que en ambas partes, no hay suposiciones sobre la intersección de los interiores de los polígonos).

Nivel Intermedio

Problema 1. En la siguiente figura, se tiene que $AX = BY$. Demuestre que $\angle XDA = \angle CDY$.



Problema 2. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 del mismo radio, se intersecan en dos puntos E y X. Seana C y D puntos arbitrarios sobre ω_1 y ω_2, respectivamente. Las rectas que pasan por E y que son paralelas a XC y XD, intersecan nuevamente a ω_2 y a ω_1 en A y B, respectivamente. Suponga que CD interseca nuevamente a ω_1 en P y a ω_2 en Q. Demuestre que el cuadrilátero $ABPQ$ es cíclico.

Problema 3. Sea O el circuncentro del triángulo ABC. Considere puntos arbitrarios M y N sobre los lados AC y BC, respectivamente. Sean P un punto del mismo lado de la recta AN que C, y Q un punto del mismo lado de la recta BM que C, tales que los triángulos CMN, PAN y QMB son semejantes (en ese orden). Demuestre que $OP = OQ$.

Problema 4. Diremos que dos polígonos simples P y Q son *compatibles*, si existe un entero positivo k tal que P puede particionarse en k polígonos congruentes entre sí y semejantes a Q y Q puede particionarse en k polígonos congruentes entre sí y semejantes a P. Si $m \geq 4$ y $n \geq 4$ son números pares, demuestre que existen dos polígonos compatibles de m y n lados cada uno.
Nota: Un polígono es *simple* si no se interseca a sí mismo.

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω de centro O y sea P la intersección de las diagonales AC y BD. Sea Q un punto sobre el segmento OP y sean E y F los pies de las perpendiculares desde Q sobre las rectas AD y BC, respectivamente. Considere los puntos M y N sobre el circuncírculo del triángulo QEF tales que $QM \parallel AC$ y $QN \parallel BD$. Demuestre que las rectas ME y NF se intersecan sobre la mediatriz del segmento CD.

Nivel Avanzado

Problema 1. Cuatro puntos A, B, C y D yacen sobre una circunferencia ω de tal forma que $AB = BC = CD$. La recta tangente a ω en el punto C interseca a la recta tangente a ω en el punto A y a la recta AD en los puntos K y L, respectivamente. La circunferencia ω y el circuncírculo del triángulo KLA se intersecan de nuevo en M. Demuestre que $MA = ML$.

Problema 2. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB \neq AC$. Sea D un punto en BC tal que DA es tangente al circuncírculo del triángulo ABC. Sean E y F los circuncentros de los triángulos ABD y ACD, respectivamente, y sea M el punto medio de EF. Demuestre que la recta tangente en D al circuncírculo del triángulo AMD es también tangente al circuncírculo del triángulo ABC.

Problema 3. En el triángulo ABC ($\angle A \neq 90°$), sean O y H el circuncentro y el pie de la altura desde A, respectivamente. Suponga que M y N son los puntos medios de BC y AH, respectivamente. Sea D la intersección de AO y BC y sea H' la reflexión de H respecto a M. Suponga que el circuncírculo del triángulo $OH'D$ interseca al circuncírculo del triángulo BOC por segunda vez en E. Demuestre que NO y AE concurren sobre el circuncírculo del triángulo BOC.

Problema 4. Sea $ABCD$ un trapecio con $AB \parallel CD$. Sus diagonales se intersecan en un punto P. La recta que pasa por P y es paralela a AB interseca a AD y BC en Q y R, respectivamente. Las bisectrices exteriores de los ángulos $\angle DBA$ y $\angle DCA$ se intersecan en X. Sea S el pie de la perpendicular de X hacia BC. Demuestre que si los cuadriláteros $ABPQ$ y $CDQP$ son circunscritos, entonces $PR = PS$.

Problema 5. Sea ABC un triángulo acutángulo inscrito en una circunferencia ω con centro O. Los puntos E y F yacen sobre los lados AC y AB, respectivamente, tales que O yace sobre EF y $BCEF$ es cíclico. Sean R y S las intersecciones de EF con los arcos menores $\widehat{AB}$ y $\widehat{AC}$ de ω, respectivamente. Suponga que K y L son las reflexiones de R respecto a C y de S respecto a B, respectivamente. Suponga que los puntos P y Q yacen sobre las rectas BS y RC, respectivamente, de tal modo que PK y QL son perpendiculares a BC. Demuestre que la circunferencia con centro P y radio PK, es tangente al circuncírculo del triángulo RCE si y solo si la circunferencia con centro Q y radio QL es tangente al circuncírculo del triángulo BFS.

2ª Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (Virtual)

Del 24 al 31 de octubre de 2022, se llevó a cabo de forma virtual, la segunda Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas (PAGMO, por sus siglas en inglés), con la participación de 60 chicas provenientes de 16 países. México ocupó el cuarto lugar por países quedando por debajo de Perú, Brasil y Canadá, quienes ocuparon el primero, segundo y tercer lugar, respectivamente.

La delegación mexicana estuvo integrada por:

- Rosa Victoria Cantú Rodríguez (Ciudad de México).
- Andrea Sarahí Cascante Duarte (Morelos).
- Ana Camila Cuevas González (Tamaulipas).

- María Fernanda López Tuyub (Yucatán).

Las cuatro participantes del equipo mexicano obtuvieron medallas de plata. Las profesoras que acompañaron a la delegación fueron Olga Medrano Martín del Campo (líder) y Ana Paula Jiménez Díaz (tutora) quienes fueron las encargadas de aplicar y revisar los exámenes del equipo mexicano.

A continuación presentamos los problemas de la 2^a Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas. Las alumnas tuvieron dos sesiones de 4.5 horas cada una para resolverlos.

Problema 1. Leticia tiene un tablero de 9×9 casillas. Se dice que dos casillas son *amigas* si comparten un lado o si están en una misma columna, pero en extremos opuestos, o si están en una misma fila, pero en extremos opuestos. De esta forma, cada casilla tiene exactamente 4 casillas amigas.
Leticia va a pintar cada casilla de uno de tres colores: verde, azul o rojo. Una vez que todas las casillas estén pintadas, en cada casilla se va a escribir un número, siguiendo las siguientes reglas:

- Si la casilla es verde, se escribe la cantidad de casillas rojas amigas más dos veces la cantidad de casillas azules amigas.
- Si la casilla es roja, se escribe la cantidad de casillas azules amigas más dos veces la cantidad de casillas verdes amigas.
- Si la casilla es azul, se escribe la cantidad de casillas verdes amigas más dos veces la cantidad de casillas rojas amigas.

Encuentra el máximo valor posible de la suma de los números asignados a las casillas que Leticia puede obtener, sabiendo que ella puede escoger la coloración de las casillas del tablero.

Problema 2. Encuentra todas las tripletas (p, q, r) de enteros positivos que cumplan que p y q son números primos (no necesariamente distintos), que r es par y que

$$p^3 + q^2 = 4r^2 + 45r + 103.$$

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB < AC$. Sobre el segmento BC se eligen puntos P y Q tales que $\angle BAP = \angle CAQ < \frac{\angle BAC}{2}$. B_1 es un punto en el segmento AC, BB_1 interseca a AP y a AQ en P_1 y Q_1, respectivamente. Las bisectrices de $\angle BAC$ y $\angle CBB_1$ se cortan en M. Si $PQ_1 \perp AC$ y $QP_1 \perp AB$, demuestra que AQ_1MPB es cíclico.

Problema 4. Sea ABC un triángulo con $AB \neq AC$. Sean O_1 y O_2 los centros de las circunferencias ω_1 y ω_2 con diámetros AB y BC, respectivamente. Sea P un punto en el segmento BC tal que AP interseca a ω_1 en el punto Q, con $Q \neq A$. Demuestra que los puntos O_1, O_2 y Q son colineales si y solo si AP es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$.

Problema 5. Halla todos los enteros positivos k para los cuales existen enteros positivos a, b y c tales que

$$\left|(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\right| = 3\cdot 2^k.$$

Problema 6. Ana y Bety juegan un juego por turnos de manera alternada. Inicialmente Ana elige un entero positivo impar y compuesto n tal que $2^j < n < 2^{j+1}$ con $2 < j$. En su primer turno, Bety elige un entero positivo impar y compuesto n_1 tal que

$$n_1 \leq \frac{1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n}{2(n-1)^{n-1}}.$$

Luego, en su turno, Ana elige un número primo p_1 que divida a n_1. Si el primo que eligió Ana es 3, 5 o 7, entonces Ana gana, de lo contrario Bety elige un entero positivo impar y compuesto n_2 tal que

$$n_2 \leq \frac{1^{p_1} + 2^{p_1} + \cdots + (p_1-1)^{p_1}}{2(p_1-1)^{p_1-1}}.$$

Después de eso, en su turno, Ana elige un primo p_2 que divida a n_2. Si p_2 es 3, 5 o 7, Ana gana, de lo contrario el proceso se repite. Además, Ana gana en cualquier momento si Bety no puede elegir un entero positivo impar y compuesto en el rango correspondiente. Bety gana si logra jugar al menos $j-1$ turnos. Encuentra cuál de las dos jugadoras tiene estrategia ganadora.
(Nota: Ana no tiene control sobre j. El problema es encontrar cuál jugadora tiene estrategia ganadora para cada valor de j).

Soluciones de Olimpiadas Internacionales

XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la XXXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas.

Solución del problema 1. (Solución de Leonardo Míkel Cervantes Mateos). Como EF es mediatriz de OD, tenemos que $OF = FD$ y, como O es el centro de Γ, $OF = OD$ por lo que el triángulo OFD es equilátero. Análogamente, obtenemos que el triángulo OED también es equilátero. Entonces,

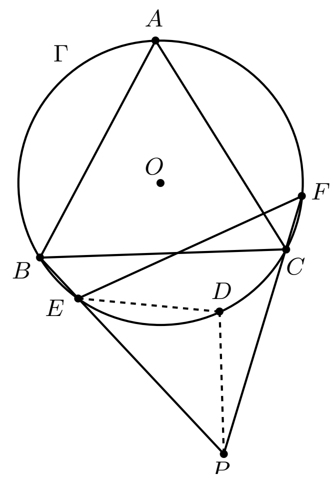
$$\angle EOF = \angle EOD + \angle DOF = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ,$$

lo cual implica que el arco $\widehat{EF}$ subtiende un ángulo inscrito de 60°. Análogamente, obtenemos que $\angle EDF = 120^\circ$.
Sea α el ángulo inscrito que subtiende el arco $\widehat{BE}$. Como el arco $\widehat{BC}$ subtiende un ángulo inscrito de 60°, tenemos que el arco $\widehat{EC}$ subtiende uno de $60^\circ - \alpha$. Como el arco $\widehat{EF}$ subtiende un ángulo inscrito de 60°, tenemos que el arco $\widehat{CF}$ también subtiende uno igual a α.
Como $\angle BAF = \angle BAC + \angle CAF = 60^\circ + \alpha$, tenemos que

$$\angle PEF = 180^\circ - \angle BEF = \angle BAF = 60^\circ + \alpha,$$

ya que los ángulos opuestos en un cuadrilátero cíclico suman 180°. Además, $\angle PFE = \angle CFE = 60^\circ - \alpha$, ya que el arco $\widehat{EC}$ subtiende un ángulo inscrito de $60^\circ - \alpha$.
Por suma de ángulos en el triángulo EPF, tenemos que $\angle EPF = 60^\circ$.
Sea D' el circuncentro del triángulo FPE. Por ángulos inscritos y central tenemos que $\angle ED'F = 2\angle FPE = 120^\circ$ y $ED' = FD'$ y, como los triángulos EDF y $ED'F$ son isósceles con el mismo ángulo, también son semejantes. Como además comparten

el lado EF, son congruentes. Pero entonces D' es el mismo punto que D, así que D es el circuncentro del triángulo EPF.



Tenemos entonces que $\angle PDE = 2\angle PFE = 120° - 2\alpha$ y, como el triángulo PDE es isósceles en D, resulta que $\angle DEP = \angle DPE = 30° + \alpha$. Por ángulos inscritos, $\angle EBC = \angle EFC = 60° - \alpha$.
Sea H la intersección de PD con BC. Como $\angle HPB = \angle DPE = 30° + \alpha$ y $\angle PBH = \angle EBC = 60° - \alpha$, obtenemos que $\angle PHB = 90°$ y PD es perpendicular a BC, que es lo que queríamos.

Solución del problema 2. (Solución de Diego Villarreal Grimaldo). Vamos a probar que Ana gana. Sean

$$a_n = 1\underbrace{33\dots3}_{n} \quad \text{y} \quad N = \overline{d_{2022}d_{2021}\dots d_2d_1},$$

de manera que Ana y Borja empiezan escribiendo d_{2022}, d_{2021} hasta terminar con d_2, d_1.
Notemos que si $n > 2022$, entonces a_n tiene más de 2022 dígitos y, por consiguiente, solo a_n, con $n \leq 2022$, puede dividir a N. Notemos también que Ana elige dígitos d_n con n par.
Demostraremos que Ana, al elegir el dígito d_{2k} en la posición 10^{2k-1} en la descomposición decimal de N, puede evitar que a_{2k} y a_{2k-1} dividan a N, sin importar los dígitos que se escriban en turnos siguientes.
Como a_{2k} es mayor que 10^{2k}, hay a lo más una terminación menor que 10^{2k} de $2k$ dígitos que hace posible que a_{2k} divida a N. Análogamente, como $8 \cdot a_{2k-1} > 10^{2k}$, hay a lo más 8 terminaciones menores que 10^{2k} de $2k$ dígitos que hacen posible que a_{2k-1} divida a N. Por lo tanto, hay a lo más $1 + 8$ dígitos d_{2k} que corresponden a estas terminaciones que si Ana los escoge, N podría ser múltiplo de a_{2k} o a_{2k-1}. Esto

significa que hay al menos $10-8-1=1$ dígito d_{2k} que en la posición $2k$ hace imposible que a_{2k} ni a_{2k-1} dividan a N y, si Ana escoge siempre ese dígito, entonces será imposible que $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ dividan a N y ganará.

Solución del problema 3. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). Sea $f(0) = d$. Sustituyendo $y = 0$, obtenemos

$$d + f(x-1) = f(x)d. \tag{13}$$

Si $d = 0$, entonces $f(x-1) = 0$ para todo x y es fácil ver que $f(x) = 0$ cumple la ecuación funcional. Luego, si $d \neq 0$ y sustituimos $x = 1$ obtenemos que $2d = f(1)d$, lo cual implica que $f(1) = 2$. Ahora, sustituyendo $x = 1$ obtenemos que

$$f(2y) + d = 2f(y) \tag{14}$$

y con $y = 1$ obtenemos $f(2) + d = 2f(1) = 4$, lo cual implica que $f(2) = 4 - d$. Pero, sustituyendo $y = 0$ y $x = 2$ obtenemos $d + f(1) = f(2)d$, de donde se sigue que $d + 2 = (4-d)d$, esto es, $d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2) = 0$ y, por consiguiente, $d = 1$ o $d = 2$.

Caso 1: $d = 1$. En este caso, la ecuación (13) se convierte en $f(x-1) = f(x) - 1$. Supongamos que existe w tal que $f(w) \neq w+1$, esto es, $f(w) = w+1+a$ con $a \neq 0$. Demostraremos que podemos construir un número B tal que $f(B) = B + 1 + a'$ con $|a'| > 10^6$.
Aplicando la ecuación (13) repetidamente, tenemos que $f(x+k) = f(x) + k$ para cada entero k. Así que podemos obtener un número real z tal que $|az + a^2 + a| > 10^6$ y $w + k = z$ para algún entero k, de forma que

$$f(z) = f(w+k) = f(w) + k = (w+1+a) + k = z + 1 + a.$$

Sustituyendo $x = z$ y $y = z$ en la ecuación funcional, obtenemos que

$$f(zf(z)) + f(z-1) = f(z)f(z).$$

Como $f(x-1) = f(x)-1$, tenemos que $f(zf(z)) + f(z) - 1 = f(z)^2$, lo cual implica que $f(zf(z)) = f(z)^2 - f(z) + 1 = f(z)(f(z)-1) + 1$. Sustituyendo $f(z) = z+1+a$ obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z^2 + z + az) &= (z+1+a)(z+a) + 1 = z^2 + 2az + a^2 + z + a + 1 \\ &= (z^2 + z + az + 1) + (az + a^2 + a). \end{aligned}$$

Entonces, $|az + a^2 + a| > 10^6$ y $B = z^2 + z + az$ cumple con lo que queremos.
Definimos $B' = B - \lfloor B \rfloor$ que satisface $0 \leq B' < 1$ y

$$f(B') = f(B) - \lfloor B \rfloor = B + 1 + a' - \lfloor B \rfloor = B' + 1 + a'.$$

Como $|B' + 1 + a'| \geq ||a'| - |B' + 1|| > 10^6 - 2 > 2022$, tenemos que $B' \neq 0$, lo que contradice la segunda condición. Por lo tanto, el número real w no puede existir y $f(x) = x + 1$ para todo número real x.

Caso 2: $d = 2$. En este caso, las ecuaciones (13) y (14) son $f(x-1) = 2f(x) - 2$ y $f(2x) = 2f(x) - 2$, respectivamente.
Supongamos que existe $z > 0$ tal que $f(z) \neq 2$, esto es, $f(z) = 2 + a$ con $a \neq 0$. Aplicando repetidamente las ecuaciones (13) y (14), obtenemos que

$$f(z-k) = f(2^k z) = 2 + 2^k a$$

para cada entero positivo k. Así que podemos tomar un entero positivo k tal que $2^k|a| > 10^6$ y luego tomar $u = 2^k z - \lfloor 2^k z \rfloor$ para obtener

$$f(u) = 2^{\lfloor 2^k z \rfloor} f(2^k z) = 2^{\lfloor 2^k z \rfloor}(2 + 2^k a).$$

Entonces, $0 \leq u < 1$ y

$$|f(u)| = |2^{\lfloor 2^k z \rfloor}||2 + 2^k a| \geq |2 + 2^k a| \geq 2^k|a| - 2 > 10^6 - 2 > 2022,$$

lo cual implica que $u \neq 0$, lo que contradice la segunda condición. Por lo tanto, el número real z no puede existir y $f(x) = 2$ para todo número real $x > 0$.
Para extender el resultado a los números reales negativos, aplicamos inducción. Supongamos que para todo número real $x \geq -k$, se cumple que $f(x) = 2$. Entonces, $f(x-1) = 2f(x) - 2 = 2 \cdot 2 - 2 = 2$ y el resultado es cierto para $x \geq -k-1$. Como es cierto para $k = 0$, debe ser cierto para todo número real negativo y $f(x) = 2$ para todo número real x.
Para concluir, checamos que las tres funciones, $f(x) = 0$, $f(x) = x + 1$ y $f(x) = 0$ cumplen con la ecuación funcional original, por lo que son todas las soluciones al problema.

Solución del problema 4. (Solución de Rogelio Guerrero Reyes). La respuesta es $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$. Veamos primero que funciona.
Si $n = 2k - 1$ es impar, entonces con esta coloración:

$$\underbrace{\boxed{A}\,\boxed{A}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{A}}_{k \text{ azules}}\underbrace{\boxed{R}\,\boxed{R}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{R}}_{k-1 \text{ rojas}}$$

funciona $\left\lceil \frac{(2k-1)+1}{2} \right\rceil = k$ pues Arepito repetidamente avanza k lugares, llega al bloque rojo y retrocede $k-1$ lugares: es como si solo se moviera una casilla a la derecha. Esto se repite hasta que llega a la casilla $k-1$, punto en el cual avanza hasta el extremo derecho y logra su objetivo.
Si $n = 2k$ es par, con esta coloración:

$$\underbrace{\boxed{A}\,\boxed{A}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{A}}_{k \text{ azules}}\underbrace{\boxed{R}\,\boxed{R}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{R}}_{k-1 \text{ rojas}}\boxed{A}$$

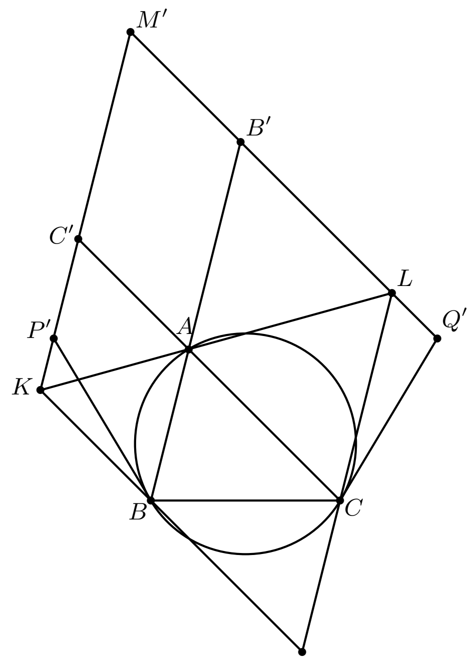
funciona $\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil = k+1$ pues avanza de la misma manera que en el caso anterior hasta llegar a la casilla k, donde salta una última vez y llega al extremo derecho.
Ahora veamos que no se puede conseguir un menor número.
Para llegar al extremo derecho, eventualmente tenemos que saltar o estar por encima de cualquier casilla roja que haya: esto solo se puede con bloques azules.
A cada casilla roja le asociamos un bloque azul que la salte durante el recorrido de Arepito (si varios bloques la saltan, solo elegimos uno arbitrariamente).
Si d casillas rojas se asocian a un bloque azul, entonces el bloque azul es de tamaño al menos d, pues si tomamos la casilla azul más a la derecha del bloque, entonces desde ahí debe de poder saltar a las d casillas rojas. Luego, $B \geq R$ donde B es la cantidad de casillas azules y R es la cantidad de casillas rojas, con la igualdad cuando los bloques tienen el tamaño de las casillas que se asocian a ellas.
Cuando $n = 2k-1$ es impar, tenemos que $2B \geq B + R = 2k-1$, lo cual implica que $B > k-1$, esto es, $B \geq k$. Entonces, solo hay que ver que no se puede $B = k$ y $R = k$ para concluir que $B \geq k+1$ y acabar el problema.
En efecto, supongamos que $B = k$ y $R = k$. Fijémonos en el primer bloque (que debe ser azul, si no Arepito no se mueve), de tamaño M. Si estuviera asociado a M casillas rojas, entonces estas deberán conformar un bloque rojo justo después de este primer bloque azul. Pero entonces el movimiento de Arepito se repetiría entre la casilla 1 y la $M+1$, sin nunca llegar a la última casilla (si fuera la última casilla, $M+1 = n = 2k \Rightarrow k = M = 2k-1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow n = 2$ pero $n > 2$, lo cual es una contradicción). Así que está asociado a lo más a $M-1$ casillas y, por lo tanto, $B \geq R+1 \Rightarrow k \geq k+1$, lo cual es una contradicción. Concluimos que la respuesta es $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.

Solución del problema 5. (Solución de Leonardo Míkel Cervantes Mateos). Sea $\alpha = \frac{\angle CAB}{2}$. Como L y K están sobre la bisectriz externa del ángulo $\angle CAB$, tenemos que $\angle BAK = \angle CAL = 90° - \alpha$. Como $BK = BA$ y $\angle BAK = 90° - \alpha$, obtenemos que $\angle BKA = 90° - \alpha$ y $\angle ABK = 2\alpha$. Análogamente, obtenemos que $\angle CLA = 90° - \alpha$ y $\angle ACL = 2\alpha$.
Sea R la intersección de BK con CL. Como $\angle BKA = \angle CLA = 90° - \alpha$, resulta que $\angle KRL = 2\alpha$. Si M' es la reflexión de R por KL, entonces $\angle M'KL = 90° - \alpha$, $\angle M'LK = 90° - \alpha$ y $\angle KM'L = 2\alpha$. Por lo tanto, el triángulo $KM'L$ es isósceles con $KM' = LM'$.
Sean B' y C' las intersecciones de BA con $M'L$ y CA con $M'K$, respectivamente. Tenemos que $\angle B'AL = \angle BAK = 90° - \alpha$ y, por lo tanto, los triángulos $AB'L$ y ACL son congruentes por el criterio ALA.
Como el triángulo ACL es isósceles en C y el triángulo $AB'L$ es isósceles en B', tenemos que B' y C están sobre la mediatriz de AL y, además, $B'C$ no solo es la mediatriz de AL sino que también es bisectriz del ángulo $\angle AB'L$. Luego, $\angle CB'L = \angle CB'A = \alpha$.
Finalmente, sea Q' la intersección de la tangente a Γ por C y $M'L$. Como $Q'C$ es tangente al circuncírculo del triángulo ABC, resulta que $\angle Q'CA = \angle ABC$. Como

$$\angle Q'CB = \angle Q'CA + \angle ACB = \angle ABC + \angle ACB = 180° - \angle CAB = 180° - 2\alpha$$

y $\angle Q'B'B = 2\alpha$, se sigue que $Q'CBB'$ es cíclico.

Entonces, $\angle BQ'C = \angle BB'C = \alpha$ y $\angle CBQ' = CB'Q' = \alpha$, lo cual implica que el triángulo BCB' es isósceles en C y, por consiguiente, $BC = CQ'$.



Por lo tanto, $Q' = Q$ y, análogamente, P es la intersección de la tangente a Γ por B y $M'K$. Concluimos que $M' = M$, pues es la intersección de $P'K = PK$ y $Q'L = QL$. Como el triángulo $KM'L$ es isósceles en $M' = M$, se sigue que $MK = ML$, que es lo que queríamos probar.

Solución del problema 6. (Solución de Eric Ransom Treviño). Supongamos que existe un número primo $p > 2$ y que existe un entero a tales que $p \nmid a$ y $p \mid f(a)$. Entonces, existe un entero positivo x tal que $ax \equiv 1 \pmod{p}$ y, para cada residuo r módulo p, tenemos que $f(a)f(a + xr) - a(xr) = y^2$ para algún entero y, lo cual implica que $-r \equiv f(a)f(a + xr) - a(xr) = y^2 \pmod{p}$. Repitiendo esto para todos los residuos módulo p, obtenemos que todos los residuos módulo p son residuos cuadráticos, pero es bien sabido que solo hay $\frac{p+1}{2}$ residuos cuadráticos, que son $\{0^2, 1^2, 2^2, \ldots, \left(\frac{p-1}{2}\right)^2\}$ ya que $\{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2, \ldots, (p-2)^2, (p-1)^2\}$ son congruentes a los anteriores. Entonces, esto no puede suceder.

Si hubiera un entero impar a tal que $4 \mid f(a)$, entonces $f(a)f(a + 2) - 2a = y^2$ para algún entero y. Como $f(a)f(a + 2) - 2a$ es par, y también lo es y, por consiguiente, $4 \mid y^2$, lo cual implica que $4 \mid f(a)f(a + 2) - 2a$, de donde $4 \mid 2a$, esto es, $2 \mid a$, lo que es una contradicción.

En particular, $f(1)$ no es divisible por ningún primo más que posiblemente 2 y, como además no es divisible entre 4, entonces $f(1) = 1$ o 2.

Si para algún primo p tenemos que $p^2 \mid f(p)$, entonces $f(p)f(p + 1) - p = y^2$ para

algún entero y. Como $f(p)f(p+1)-p$ es divisible entre p, y también lo es y así $p^2 \mid y^2$, lo cual implica que $p^2 \mid f(p)f(p+1)-p$, de donde se sigue que $p^2 \mid p$, lo que es una contradicción.
Así que para un primo impar p, $f(p) \in \{1, 2, p, 2p\}$ que son los únicos números con divisores primos exclusivamente de 2 y p, y que además no son divisibles entre 4 ni entre p^2.
Si $f(1) = 2$, entonces

$$f(1)f(7) - 6 = 2f(7) - 6 \in \{2-6, 4-6, 14-6, 28-6\} = \{-4, -2, 8, 22\}$$

no es un cuadrado perfecto en ningún caso, lo que es una contradicción, así que $f(1) = 1$.
Para $p \geq 5$, tenemos que $f(1)f(p)-(p-1) = f(p)-p+1$ es un cuadrado perfecto. Si $f(p) \leq 2$, entonces $f(p)-p+1 \leq 3-p \leq -2$ y no podría ser un cuadrado perfecto, así que $f(p) = p$ o $2p$. Si $f(p) = 2p$, entonces $f(p)-p+1 = p+1 = x^2$ para algún entero no negativo x y $p = x^2-1 = (x-1)(x+1)$. Como $x+1 > 0$, entonces $x-1 > 0$ y, como p es primo, la única manera de que esto suceda es que $x-1 = 1$ y $x+1 = p$, lo cual implica que $p = x+1 = 2+1 = 3$, lo que es una contradicción ya que $p \geq 5$. Por lo tanto, $f(p) = p$.
Luego, tomando un entero arbitrario a y un primo $p > f(a)+a$, tenemos que $p-a > f(a) > 0$, así que $f(a)f(p)-a(p-a) = p(f(a)-a)+a^2$ es un cuadrado perfecto, digamos x^2. Si $f(a)-a \leq -1$, entonces

$$p(f(a)-a)+a^2 \leq -p+a < -(f(a)+a)+a < -f(a) < 0$$

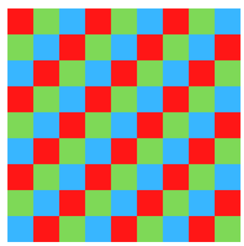
no podría ser un cuadrado perfecto, así que $f(a)-a \geq 0$ y $x \geq a$.
Si $x-a > 0$, entonces $p(f(a)-a) = x^2-a^2 = (x-a)(x+a)$ y, como p es primo, $p \mid x-a$ o $p \mid x+a$.
Si $p \mid x-a$, entonces $\frac{f(a)-a}{x+a} = \frac{x-a}{p} \geq 1$, ya que es un entero positivo y, por consiguiente, $f(a)-a \geq x+a = (x-a)+2a \geq p+2a > f(a)+3a$, lo cual es una contradicción.
Si $p \mid x+a$, entonces $\frac{f(a)-a}{x-a} = \frac{x+a}{p} \geq 1$, ya que es un entero positivo y, por consiguiente, $f(a)-a \geq x-a = x+a-2a \geq p-2a > f(a)-a$, lo cual es una contradicción.
Concluimos que $x = a$ y, por ende, $f(a) = a$ para todo entero positivo a y es fácil comprobar que cumple la ecuación funcional, por lo que esta función es la única solución.

2ª Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas

A continuación presentamos las soluciones de los problemas de la 2^a Olimpiada Panamericana Femenil de Matemáticas.

Solución del problema 1. Vamos a considerar cuánto *contribuye* cada casilla a sus casillas amigas. Por ejemplo, una casilla roja contribuye 0 a sus amigas rojas, contribuye

1 a cada amiga verde y contribuye 2 a cada amiga azul.
Si sumamos lo que cada casilla contribuye a sus amigas, entonces tenemos un segundo número asignado a cada casilla (recordemos que cada casilla ya tenía un número escrito en ella). Ahora sumamos los dos números asignados a cada casilla.
Notemos que esta suma es dos veces la suma de lo que queremos maximizar. Por lo que, si maximizamos esta suma, entonces maximizaremos la suma original.
Para hacer esto, consideremos dos casillas amigas. Si son del mismo color, entonces su amistad no suma nada a la suma total. Sin embargo, si son de distintos colores, entonces su amistad suma, a cada una de las dos casillas, $1 + 2$ (si suma 1 al número originalmente escrito, entonces suma 2 al nuevo número que escribimos y viceversa).
Por lo tanto, la suma máxima que cada casilla puede tener es $3 \times 4 = 12$. Esto implica que la nueva suma que estamos calculando está acotada por $12 \times 9 \times 9$. Por lo tanto, la suma que queremos maximizar es a lo más $6 \times 9 \times 9 = 486$.
Por otro lado, notemos que podemos alcanzar esa suma con la siguiente coloración:



Solución del problema 2. Notemos que el lado derecho de la ecuación es impar, por lo que p y q deben tener distinta paridad. Por lo tanto, $p = 2$ o $q = 2$.

a) Si $q = 2$, entonces tenemos que $p^3 = 4r^2 + 45r + 99 = (r + 3)(4r + 33)$ tiene 4 divisores los cuales son $1, p, p^2$ y p^3. Como $r + 3 < 4r + 33$ también son divisores, y $5 \leq r + 3$, entonces debemos tener que $p = r + 3$ y $p^2 = 4r + 33$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos que $p = 7$ y $r = 4$.

b) Si $p = 2$, tenemos que $4r^2 + 45r + 95 - q^2 = 0$. Podemos resolver esta ecuación cuadrática en r en términos de q. Por lo tanto, tenemos que

$$r = \frac{-45 \pm \sqrt{45^2 - 4(4)(95 - q^2)}}{8}.$$

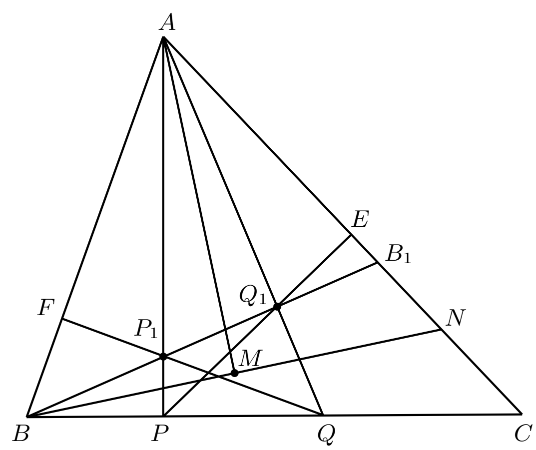
Como r debe ser un entero, el discriminante $45^2 - 16(95 - q^2)$ debe ser un cuadrado perfecto, digamos n^2, con n entero. Notamos que $45^2 - 16(95 - q^2) = n^2$ si y solo si $(n + 4q)(n - 4q) = 505$. Como $n + 4q > n - 4q$ y ambos deben ser positivos, entonces $n + 4q = 505$ y $n - 4q = 1$, o $n + 4q = 101$ y $n - 4q = 5$, lo que nos da las soluciones $(n, q) = (253, 63)$ y $(n, q) = (53, 12)$, respectivamente. Sin embargo, en ambos casos q no es un número primo, por lo que no hay soluciones en este caso.

Por lo tanto, la única solución es $(p, q, r) = (7, 2, 4)$.

Solución del problema 3. Supongamos que $\angle BAP = \angle CAQ = \theta$. Sea E la intersección de PQ_1 con AC y sea F la intersección de QP_1 con AB. Tenemos que los triángulos AFQ y AEP son semejantes porque ambos son rectángulos y, por las condiciones del problema, $\angle FAQ = \angle EAP$. Esto implica que

$$\angle Q_1QP_1 = \angle AQF = \angle APE = \angle P_1PQ_1,$$

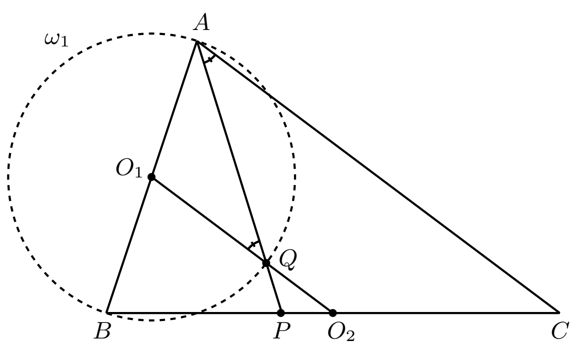
lo que a su vez implica que el cuadrilátero P_1Q_1QP es cíclico.
Como PQQ_1P_1 es cíclico, entonces $\angle AP_1Q_1 = \angle AQP$. Por otro lado, $\angle AQP = \theta + \angle ACQ$ y $\angle AP_1Q_1 = \theta + \angle ABP_1$. De lo anterior se sigue que $\gamma = \angle ACB = \angle ACQ = \angle ABP_1 = \angle ABB_1$.
Sea N la intersección de BM con AC. Si llamamos $\angle CBB_1 = 2\alpha$, entonces $\angle ABN = \angle ABB_1 + \angle B_1BN = \gamma + \alpha$ y $\angle ANB = \angle NCB + \angle CBN = \gamma + \alpha$. Es decir, $\angle ABN = \angle ANB$. Como AM es la bisectriz del ángulo $\angle BAN$, tenemos que AM y BN son perpendiculares. Luego, si AQ_1MPB es cíclico, entonces $\angle APB = \angle AQ_1B = \angle AMB = 90°$.



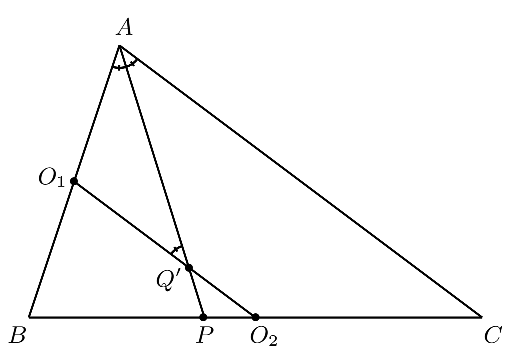
Hemos visto que la recta BB_1 está bien determinada si se cumplen las condiciones del problema. Demostraremos que fija la recta BB_1, a lo más puede exisitir un par de isogonales (respecto al $\angle BAC$) AP y AQ tales que $PQ_1 \perp AC$ y $QP_1 \perp AB$. Supongamos que existen isogonales (que cumplen la condición de no exceder a la mitad del ángulo) AP' y AQ' que intersecan a BB_1 en P_1' y Q_1', respectivamente, y cumplen que $P'Q_1' \perp AC$ y $Q'P_1' \perp AB$. En particular, tendria que cumplirse $PQ_1 \parallel P'Q_1'$, ya que ambas serían perpendiculares a una misma recta. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\angle BAP > \angle BAP'$. Entonces, P y Q son puntos en el segmento $P'Q'$ y, P_1 y Q_1 son puntos en el segmento $Q_1'P_1'$. Luego, P y Q_1 están en lados distintos respecto a la diagonal $P'Q_1'$, por lo que el segmento PQ_1 debe cortar a dicha diagonal, lo que contradice que los segmentos sean paralelos.

Finalmente, vemos que si $\angle ABB_1 = \angle ACB$, entonces para cualquier par de isogonales AP y AQ, se tiene que PQQ_1P_1 es cíclico. Entonces, $\angle APB = 90°$ si y solo si $\angle AQ_1B = 90°$ y, si las dos igualdades anteriores suceden, entonces P_1 es el ortocentro del triángulo AQB, por lo que $QP_1 \perp AB$ y, por el cíclico PQQ_1P_1, tenemos que $PQ_1 \perp AC$. Como la configuración es única y cumple que AQ_1MPB es cíclico, esto concluye la demostración.

Solución del problema 4. Como O_1 y O_2 son puntos medios de AB y BC, respectivamente, tenemos que O_1O_2 y AC son paralelas. Notemos que también A, B y Q están en ω_1 y que su centro es O_1, por lo que $AO_1 = BO_1 = QO_1$, lo cual implica que el triángulo AO_1Q es isósceles.
Empecemos asumiendo que O_1, O_2 y Q son colineales. Entonces, QO_1 y AC son paralelas, lo cual implica que $\angle O_1QA = \angle QAC$. Pero como el triángulo AO_1Q es isósceles, tenemos que $\angle O_1QA = \angle O_1AQ$, de donde se sigue que QA es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y, por lo tanto, también lo es PA.



Ahora supongamos que PA es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y sea Q' la intersección de O_1O_2 con AP.



Como O_1Q' y AC son paralelas, tenemos que $\angle CAQ' = \angle AQ'O_1$ y, como AP es la bisectriz del ángulo $\angle BAC$, resulta que $\angle BAP = \angle PAC$, esto es, $\angle O_1AQ' = \angle Q'AC$. Por lo tanto, tenemos que $\angle O_1AQ' = \angle O_1Q'A$, lo cual implica que $O_1A =$

O_1Q'. Pero como O_1 es el centro de ω_1 y su radio es O_1A, entonces Q' está en ω_1. En otras palabras, $Q = Q'$, lo que implica que O_1, Q y O_2 son colineales.

Solución del problema 5. Primero, demostraremos el siguiente resultado.
Lema: Si $2^r + 2^s = 2^t$ con r, s y t enteros no negativos, entonces $r = s = t - 1$.
Demostración. Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $s \leq r$ y, por consiguiente, $s \leq r < t$. Si $s = 0$, entonces $2^r + 2^s = 2^r + 1 = 2^t$, lo cual debe ser par debido a que $t > 0$, entonces $r = 0$ y $t = 1$, por lo que $r = s = t - 1$.
Ahora, si $s > 0$, entonces tenemos que $2^{r-s} + 1 = 2^{t-s}$, lo cual por el primer caso implica que $r - s = 0$, $t - s = 1$ y, por ende, $r = s = t - 1$. $\square$

Continuando con la solución del problema, observemos que si $x+y+z = 0$, entonces $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz = 3xyz$. Sustituyendo $x = a - b$, $y = b - c$ y $z = c - a$, obtenemos que

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Entonces, la ecuación dada es equivalente a la ecuación

$$|(a-b)(b-c)(c-a)| = 2^k.$$

Como 2 es un número primo, los únicos factores de 2^k son de la forma 2^i. Entonces existen números no negativos r, s y t tales que

$$|a-b| = 2^r, \quad |b-c| = 2^s, \quad |c-a| = 2^t.$$

Dentro de los valores absolutos hay 3 factores, pero como su suma es cero, es imposible para todos ellos ser positivos o negativos. Esto significa que el valor absoluto de uno de los factores es igual a la suma de los valores absolutos de los otros dos factores.
Sin pérdida de la generalidad, supongamos que $c - a$ es el factor para el cual su valor absoluto es la suma, entonces $2^r + 2^s = 2^t$.
El lema anterior implica que $r = s = t - 1$ y, por lo tanto, $k = r + s + t = 3s + 1$. Entonces, los números que satisfacen las condiciones del problema son de la forma $k = 3n + 1$, donde n es un entero no negativo, para el cual podemos considerar las soluciones $a = 2^{n+1} + 1$, $b = 2^n + 1$ y $c = 1$.

Solución del problema 6. Vamos a demostrar que siempre gana Ana.
Como $j > 2$, tenemos que $n > 7$. Primero demostraremos el siguiente resultado.

Lema. $a^n + (n-1-a)^n < (n-1)^n$ para todo entero $1 \leq a \leq n-2$ y todo $n \geq 3$.
Demostración. Tenemos que $a^n+(n-1-a)^n \leq 2(n-2)^n$ pues tanto a como $n-1-a$ son menores o iguales que $n-2$. Por otro lado, por el teorema del binomio de Newton,

$$(n-2+1)^n = (n-2)^n + \binom{n}{1}(n-2)^{n-2} + \binom{n}{2}(n-1)^{n-2} + \cdots + 1$$

y, como $n(n-2)^{n-1} > (n-2)^n$, tenemos que $2(n-2)^n < (n-1)^n$. $\square$

Por el lema tenemos que, si agrupamos a^n con $(n-1-a)^n$ para toda $1 \leq a < \frac{n-1}{2}$, obtenemos $\frac{n-3}{2}$ parejas tales que la suma de cada una de ellas es menor que $(n-1)^n$ y, por lo tanto,

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n < \frac{(n-3)}{2}(n-1)^n + \left(\frac{n-1}{2}\right)^n + (n-1)^n,$$

esto es,

$$1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n < \frac{(n-1)^{n+1}}{2} + \left(\frac{n-1}{2}\right)^n$$

y, por lo tanto,

$$n_1 \leq \frac{1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n}{2(n-1)^{n-1}} < \frac{(n-1)^2}{2^2} + \frac{n-1}{2^{n+1}}.$$

Como $\frac{n-1}{2^{n+1}} < 1$ y n_1 es entero, entonces $n_1 \leq \frac{(n-1)^2}{2^2}$ y, como n_1 es compuesto, entonces debe tener un factor primo menor o igual a su raíz cuadrada, digamos p_1, esto es, $p_1 \leq \frac{n-1}{2}$. Iterando el proceso, tenemos que

$$p_2 \leq \frac{p_1 - 1}{2} \leq \frac{\frac{n-1}{2} - 1}{2} = \frac{n - (1+2)}{2^2}$$

y, así sucesivamente, podemos garantizar que

$$p_{j-2} \leq \frac{n - (1 + 2 + \cdots + 2^{j-3})}{2^{j-2}}$$

y, como $n \leq 2^{j+1} - 1$, entonces la última expresión es menor o igual a 7, por lo que Bety ya no podría jugar su siguiente turno y habría jugado a lo más $j-2$ turnos.

Apéndice

Definición 1 (Divisibilidad)**.** *Si a y b son enteros, se dice que a divide a b o que b es múltiplo de a si $b = aq$ para algún entero q, y se denota por $a \mid b$.*

Definición 2 (Congruencias)**.** *Dados dos enteros a, b y un entero positivo m, decimos que a es congruente con b módulo m si $a - b$ es múltiplo de m. En este caso escribimos $a \equiv b$ $(mod\ m)$.*

Teorema 1 (Propiedades de las congruencias)**.** *Sean a, b, c, d, m enteros con $m \geq 1$.*

1. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $c \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv d$ $(mod\ m)$.*
2. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$ y $b \equiv d$ $(mod\ m)$, entonces $ab \equiv cd$ $(mod\ m)$.*
3. *Si $a \equiv c$ $(mod\ m)$, entonces $a^n \equiv c^n$ $(mod\ m)$ para todo entero positivo n.*
4. *Si $ab \equiv bc$ $(mod\ m)$, entonces $a \equiv c$ $(mod\ \frac{m}{(b,m)})$ donde (b, m) denota el máximo común divisor de b y m.*

Teorema 2 (Pequeño de Fermat)**.** *Si p es un número primo y a es un entero primo relativo con p, entonces $a^{p-1} \equiv 1$ $(mod\ p)$.*

Teorema 3 (Inducción)**.** *El método de inducción se usa para demostrar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$, donde k_0 es un entero fijo. El método funciona de la siguiente manera:*

1. *Caso base: Se demuestra que $P(k_0)$ es verdadera.*
2. *Hipótesis de inducción: Se supone verdadera la proposición $P(k)$ para algún entero $k \geq k_0$.*
3. *Se demuestra que $P(k + 1)$ es verdadera.*

Concluimos entonces que $P(n)$ es verdadera para todo entero $n \geq k_0$.

Teorema 4 (Principio de las Casillas)**.** *Si $kn + 1$ objetos son colocados en n casillas, entonces al menos una casilla contiene $k + 1$ objetos.*

Teorema 5 (Combinaciones). *Dado un conjunto A de n elementos, una combinación de m elementos de A, es un subconjunto de A formado de m elementos. El número de combinaciones de m elementos de A, denotado por $\binom{n}{m}$, es igual a*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!},$$

donde $n!$ denota el producto $1 \cdot 2 \cdots n$.

Teorema 6 (Binomio). *Para a y b números cualesquiera y n un entero no negativo se cumple que*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Teorema 7 (Desigualdad MA-MG: media aritmética - media geométrica). *Si x_1, x_2, $\ldots$, x_n son números reales positivos, entonces*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

y la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorema 8 (Suma de los ángulos internos de un triángulo). *La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$.*

Teorema 9 (Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

Definición 3 (Congruencia de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si los ángulos y los lados del triángulo ABC son iguales a los ángulos y los lados del triángulo $A'B'C'$.*

Criterio 1 (Criterio de congruencia LLL). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con sus tres lados correspondientes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le llama lado-lado-lado y lo denotamos como LLL.*

Criterio 2 (Criterio de congruencia ALA). *Un criterio de congruencia de triángulos nos dice que si tenemos dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son congruentes. A este criterio se le conoce como ángulo-lado-ángulo y lo denotamos como ALA.*

Definición 4 (Semejanza de triángulos). *Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes, si sus ángulos respectivos son iguales, es decir, $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$ y $\angle BAC = \angle B'A'C'$; y sus lados homólogos son proporcionales, esto es $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.*

Criterio 3 (Criterio de semejanza AA). *Si dos pares de ángulos correspondientes de los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales, entonces los triángulos son semejantes. A esta relación le llamamos ángulo-ángulo y la denotamos como AA.*

Teorema 10 (Tales)**.** *Si ABC es un triángulo y D, E son puntos sobre los lados AB y CA, respectivamente, entonces los segmentos DE y BC son paralelos si y solo si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$.*

Teorema 11 (Bisectriz)**.** *Dado un triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC, se tiene que $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.*

Teorema 12 (Ceva)**.** *Si L, M y N son puntos sobre los lados (o extensiones) BC, CA y AB, respectivamente, del triángulo ABC, entonces AL, BM y CN son concurrentes si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$.*

Teorema 13 (Menelao)**.** *En un triángulo ABC, si L, M y N son puntos sobre los lados BC, CA y AB, respectivamente (o sobre sus extensiones), entonces L, M y N son colineales si y solo si $\frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1$, donde los segmentos se están considerando como segmentos dirigidos.*

Definición 5 (Ángulos en la circunferencia)**.**

1. *Ángulo inscrito. Es el ángulo formado por dos cuerdas que comparten un punto común.*
2. *Ángulo seminscrito. Es el ángulo formado por una cuerda y la tangente a la circunferencia en un punto común.*
3. *Ángulo central. Es el ángulo formado por dos radios.*

Teorema 14 (Medida del ángulo inscrito)**.** *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 15 (Medida del ángulo seminscrito)**.** *La medida de un ángulo seminscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Teorema 16 (Potencia de un punto)**.**

1. *Si dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se intersectan en un punto P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*
2. *Si A, B y T son puntos sobre una circunferencia y la tangente en T intersecta en un punto P a la prolongación de la cuerda AB, entonces $PT^2 = PA \cdot PB$.*

Definición 6 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero es cíclico si sus cuatro vértices están sobre una misma circunferencia.*

Teorema 17 (Cuadrilátero cíclico)**.** *Un cuadrilátero convexo $ABCD$ es cíclico si y solo si la suma de los ángulos opuestos es igual a $180°$, esto es, $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA = 180°$.*

Teorema 18 (Circuncírculo e Incentro)**.** *Si Ω es el circuncírculo de un triángulo ABC, I es el incentro y M es la intersección de AI con Ω, entonces $MI = MB = MC$.*

Bibliografía

[1] A. Alberro Semerena, R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Problemas avanzados de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[2] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Desigualdades*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[3] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado. *Álgebra*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2016.

[4] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[5] R. Bulajich Manfrino, J. A. Gómez Ortega. *Geometría. Ejercicios y Problemas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2010.

[6] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, elemental*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2011.

[7] R. Bulajich Manfrino, C. J. Rubio Barrios. *Olimpiadas en SLP, avanzado*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas, UNAM, 2012.

[8] J. A. Gómez Ortega, R. Valdez Delgado, R. Vázquez Padilla. *Principio de las casillas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[9] A. Illanes Mejía. *Principios de olimpiada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[10] Loren C. Larson. *Problem-Solving Through Problems.* Springer-Verlag, 1983.

[11] I. Niven, H. Zuckerman, H. Montgomery. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Wiley, 1991.

[12] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[13] M. L. Pérez Seguí. *Combinatoria avanzada*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[14] M. L. Pérez Seguí. Con la colaboración de L. M. García Velázquez y M. Raggi Pérez. *Matemáticas preolímpicas*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[15] M. L. Pérez Seguí. *Teoría de números*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2011.

[16] P. Soberón Bravo. *Combinatoria para olimpiadas internacionales*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas. Instituto de Matemáticas de la UNAM, 2010.

[17] L. Shively. *Introducción a la Geometría Moderna.* Compañía editorial continental. México, 1972.

Comité Organizador de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas

Rogelio Valdez Delgado
(Presidente)

Ignacio Barradas Bribiesca

José Eduardo Cázares Tapia

David Cossío Ruiz

Kenya Verónica Espinosa Hurtado

Marco Antonio Figueroa Ibarra

Leonardo Ariel García Morán

José Antonio Gómez Ortega

María Eugenia Guzmán Flores

Myriam Hernández Ketchul

Ana Paula Jiménez Díaz

Leonardo Ignacio Martínez Sandoval

Mónica Mateos Vega

María Luisa Pérez Seguí

Olga Rivera Bobadilla

Rosa Victoria Rodríguez Olivé

Carlos Jacob Rubio Barrios

María Guadalupe Russell Noriega

Maximiliano Sánchez Garza

David Guadalupe Torres Flores

Enrique Treviño López

Hugo Villanueva Méndez